Bernoulliho rovnica - jej rôzne podoby

Marián Fecko*

KTF&DF, FMFI UK, Bratislava

Bernoulliho rovnica (z hydrodynamiky) tvrdí, že istý výraz (Bernoulliho funkcia) je v istej situácii konštantný. Kde je konštantný? Všeobecne na jednej fixnej prúdnici a tiež na jednej fixnej vírovej čiare. (Na inej prúdnici a inej vírovej čiare bude tiež konštantný, ale hodnota konštanty môže byť iná.) Niekedy je ale ten výraz konštantný v celom objeme, t.j. na každej prúdnici či vírovej čiare je hodnota konštanty rovnaká. Kedy platí čo? Presne na to sa tu pozrieme!

Obsah

*e-mail: fecko@fmph.uniba.sk

1 Úvod

Cieľom je dokázať zhruba toto:

Pri stacionárnom tečení ideálnej tekutiny platí

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho g z = \text{ const.} \tag{1}$$

Pri dokazovaní sa okrem iného uvidí, čo to presne znamená a tiež to, že sa to môže byť aj trochu ináč :-)

Prekladom slovného spojenia *stacionárne tečenie ideálnej tekutiny* do reči matematiky je rovnica

$$(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} p + \mathbf{g} \tag{2}$$

Je to *Eulerova rovnica*, v ktorej sa uplatnila podmienka stacionárnosti, $\partial_t \mathbf{v} = 0$. Hlavné tvrdenie teda je, že z (2) vyplýva (1). Ideme na tom popracovať.

Ako vidno, ako objemovú silu uvažujeme *gravitačnú* silu. Tá je potenciálová,

$$\mathbf{g} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi \tag{3}$$

pričom

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\mathbf{g}\cdot\mathbf{r} \equiv gz \tag{4}$$

Rovnica (2) sa teda dá napísať aj ako

$$(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} p - \boldsymbol{\nabla}\Phi \tag{5}$$

(čím je prípadne v pohotovosti aj pre prípad *inej* objemovej sily, ako je gravitačná). No a keďže platí vektorová identita

$$(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{2}v^2\right) - \mathbf{v}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v}) \tag{6}$$

tak Eulerova rovnica (2) sa dá do tretice napísať ešte aj ako

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{2}v^2 + gz\right) + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} p = \mathbf{v}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v}) \tag{7}$$

Hlavné tvrdenie tak nadobudlo tvar, že zo (7) vyplýva (1).

▼ Pozrime sa pre istotu na identitu (6). Máme

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v}))_i &= \epsilon_{ijk}v_j\epsilon_{klm}\partial_l v_m \\ &= \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk}v_j\partial_l v_m \\ &= v_j\partial_i v_j - v_j\partial_j v_i \\ &= \partial_i(v_jv_j/2) - (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})v_i \\ &= \partial_i(v^2/2) - (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})v_i\end{aligned}$$

No a to je presne i-ta zložka identity (6). ▲

2 Konštantnosť pozdĺž prúdnice

Budem rozlišovať dva prípady, a to nestlačiteľnú tekutinu, keď je hustota konštantná ($\rho = \rho_0 = \text{const.}$) a stlačiteľnú tekutinu, keď hustota nie je konštantná ($\rho = \rho(\mathbf{r})$).

2.1 Nestlačiteľná tekutina

V prípade $\rho = \rho_0 = \text{const.}$, môžeme rovnicu (7) prepísať takto:

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{2}\rho_0 v^2 + p + \rho_0 g z\right) = \rho_0 \mathbf{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v}) \tag{8}$$

Teraz sa urobí kľúčový krok - táto rovnica sa skalárne vynásobí vektorom $\mathbf{v}$. Vpravo dostaneme nulu, takže zostane

$$(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\left(\frac{1}{2}\rho_0 v^2 + p + \rho_0 g z\right) = 0 \tag{9}$$

Diferenciálny operátor $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}$ je známy ako *smerová derivácia*. Konkrétne tu sa derivuje v smere rýchlostného poľa $\mathbf{v}$, čiže *v smere prúdnice*. Funkcia v zátvorke, známa ako *Bernoulliho funkcia*, je teda konštantná na prúdnici

$$\boxed{\frac{1}{2}\rho_0 v^2 + p + \rho_0 g z = \text{ konšt. } \textit{ na prúdnici}} \tag{10}$$

2.2 Stlačiteľná tekutina

Pre stlačiteľnú tekutinu ($\rho \neq \text{const.}$, napríklad vzduch) je problém v tom, že

$$\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} p \neq \boldsymbol{\nabla}(\dots) \tag{11}$$

t.j. že výraz $\boldsymbol{\nabla} p/\rho$ *nie je* všeobecne gradientom niečoho, takže tento člen sa v rovnici (7) *nedá* prihodiť ako tretí do partie do zátvorky k tým dvom vľavo.

▼ Ako vieme, že nie je gradientom? *Keby bol* gradientom, jeho rotácia by bola nulová (lebo rot grad *čohokoľvek* je nula). Pritom

$$\begin{aligned}\left(\boldsymbol{\nabla} \times \left(\tfrac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} p\right)\right)_i &= \epsilon_{ijk}\partial_j(\rho^{-1}\partial_k p) \\ &= -\rho^{-2}\epsilon_{ijk}(\partial_j \rho)(\partial_k p)\end{aligned}$$

takže

$$\boldsymbol{\nabla} \times \left(\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} p\right) = -\frac{\boldsymbol{\nabla}\rho \times \boldsymbol{\nabla} p}{\rho^2} \tag{12}$$

No a toto všeobecne nie je nula. ▲

Treba zľaviť. Obmedziť sa na nejaký prípad, keď to gradientom *je* a napriek tomu je to fyzikálne dostatočne časté, aby to nebol *úplne* akademický prípad.

Taká situácia sa volá *barotrópne* tečenie. Je formálne definované tak, že tlak sa dá (v každom bode) vyjadriť cez hustotu (alebo naopak :-)

$$p = p(\rho) \tag{13}$$

Vtedy

$$\boldsymbol{\nabla} p = p'(\rho)\ \boldsymbol{\nabla} \rho \tag{14}$$

a pravá strana (12) je nulová. *Vtedy* teda ľavá strana (11) *je* gradientom niečoho. To niečo nazveme P:

$$\frac{1}{\rho} \boldsymbol{\nabla} p = \boldsymbol{\nabla} P \tag{15}$$

Teraz sa už teda tento člen v rovnici (7) *dá* prihodiť ako tretí do partie do zátvorky k tým dvom vľavo. Dostaneme (využijúc aj (4))

$$\boldsymbol{\nabla} \left(\frac{1}{2} v^2 + P + \Phi \right) = \mathbf{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v}) \tag{16}$$

No a toto už má štruktúru podobnú ako (8): stačí to opäť skalárne vynásobiť vektorovým poľom $\mathbf{v}$ a dostaneme rovnicu

$$(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \left(\frac{1}{2} v^2 + P + \Phi \right) = 0 \tag{17}$$

čiže (porovnaj s (10))

$$\boxed{\frac{1}{2} v^2 + P + \Phi = \text{ konšt. } \textit{na prúdnici}} \tag{18}$$

3 Konštantnosť v objeme

Pre *nevírové* prúdenie platí silnejšia forma Bernoulliho rovnice. Pripomenieme si najprv, čo to je vírové a nevírové prúdenie a potom sa pozrieme na to silnejšie tvrdenie.

3.1 Vírové a nevírové prúdenie

Z rýchlostného poľa $\mathbf{v}$ sa dá vytvoriť iné vektorové pole,

$$\boldsymbol{\omega} := \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v} \qquad \textit{vírové pole} \tag{19}$$

O čom nás toto pole informuje?

Treba si spomenúť na *Stokesovu* vetu, podľa ktorej *tu* môžeme prehlásiť, že

$$\oint_c \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} \qquad c = \partial S \tag{20}$$

V mieste, kde je nenulové vírové pole $\boldsymbol{\omega}$, si predstavím malú plôšku tvaru kruhu kolmú na ten vektor (t.j. to $d\mathbf{S}$ kruhového tvaru). Integrál vpravo je potom ωdS a je kladný. Potom aj ten vľavo musí byť kladný. Ten je po kružnici, ktorá je hranicou toho malého kruhu. Na jeho kladnosť zjavne potrebujem také rýchlostné pole, ktorého *uhlová* zložka je prevažne v smere obehu tej kružnice. T.j. tečenie musí mať charakter *istého krúženia* okolo stredu *toho kruhu*.

▼ Okrem toho krúženia tam môže byť aj čisto posuvný pohyb (a nielen to, pozri koniec tejto vsuvky). Prečo? Lebo *konštantné* $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_0$ dá integrál vľavo nulový, takže ak *pridám* také pole k nejakému inému, na integrál to nemá vplyv.

Dobre to ilustruje príklad *roztočeného vedra* (pozri napr. [4]). Tam voda vo vedre doslova krúži stálou uhlovou rýchlosťou $\boldsymbol{\Omega}$ okolo osi vedra (ako *tuhé teleso*, ako keby bola zamrznutá). Prislúcha jej pritom

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad \text{takže} \quad \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) = \cdots = 2\boldsymbol{\Omega} \tag{21}$$

Čo je dobré si na tom o.i. všimnúť je to, že vektor víru $\boldsymbol{\omega}$ je v celom objeme vody rovnaký! T.j. tá voda sa krúti nielen okolo osi vedra, čo je na prvý pohľad zjavné, ale tečie okolo stredu každého mysleného krúžka z textu vyššie (lebo aj *mimo osi* je $\boldsymbol{\omega}$ nenulová). Tie malé krúžky tu sú vodorovné (keď $\boldsymbol{\Omega}$ smeruje hore) a ich stredy krúžia okolo osi vedra (t.j. na krátkych časových úsekoch vykonávajú *posuvný* pohyb). Ak si predstavíme, že sedíme v strede takého krúžka a nerotujeme (sme teda vo vzťažnej sústave, ktorej stred sa pohybuje po kružnici, ale jej osi nerotujú) a pozorujeme, čo robí voda, vidíme, že *krúži* okolo stredu našej sústavy uhlovou rýchlosťou $\boldsymbol{\Omega}$ (teda *polovicou* $\boldsymbol{\omega}$).

Pozn.: Vo všeobecnosti sa (v reči trochu vyššej matematiky :-) rýchlostné pole tečenia rozkladá na súčet svojich *ireducibilných komponent* a výraz $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v}$ kóduje *jednu z* týchto ireducibilných komponent. ▲

Takto (a aj ináč) sa dá nahliadnuť, že vektor $\boldsymbol{\omega}$ v danom bode tečenia nás informuje o *lokálnej rotácii* „kvapky" so stredom v danom bode. (Rotácii voči „absolútnemu priestoru". A nevšímajúc si, že stred kvapky sa okrem toho ešte aj posúva.) Pritom vektor uhlovej rýchlosti rotácie tej kvapky je *len polovica* vektora $\boldsymbol{\omega}$.

Toto si je dobré uvedomiť najmä v situáciách, keď nám vychádza výpočtom nenulový vektor víru v prípadoch, v ktorých sa nám intuitívne veľmi nezdá, že by sa tekutina pohybovala „vírivo", t.j. „krútila sa". Stačí, keď sa krúti *lokálne*.

No a čo je vírové a nevírové prúdenie? To je už asi jasné: Vírové prúdenie je také, keď je vírové pole nenulové (t.j. kvapky lokálne rotujú) a *nevírové prúdenie* má všade $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) = 0$, čiže pri ňom kvapky lokálne nerotujú.

3.2 Čo platí pre nevírové prúdenie

Dám Eulerovej rovnici v tvare (16) najavo, že idem študovať *nevírové* prúdenie. Tak, že kdekoľvek tam zbadám vektor víru $\boldsymbol{\omega} \equiv \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v}$, položím ho rovný nule. Vidím ho (len) na jednom mieste (celkom vpravo). Keď vykonám, čo som si zaumienil, zostane toto:

$$\nabla\left(\frac{1}{2}v^2 + P + \Phi\right) = 0 \tag{22}$$

Teda nie až $\mathbf{v}\cdot\nabla$ aplikované na zátvorku je nula, ale už samotné ∇ aplikované na zátvorku je nula.

A to je veru silnejšia káva. Hovorí to, že tá funkcia v zátvorke je konštantná nielen na akejsi čiare, ale rovno v celom objeme:

$$\boxed{\frac{1}{2}v^2 + P + \Phi = \text{ konšt. } \;\textit{v objeme tekutiny}} \tag{23}$$

3.3 Dokonca nevírové môže byť aj nestacionárne!

Ak je prúdenie nevírové, rot $\mathbf{v} = 0$ a podľa ľudových múdrostí z vektorovej analýzy je vtedy $\mathbf{v}$ *gradientom* nejakej funkcie ψ

$$\mathbf{v} = \nabla\psi \qquad \psi = \psi(\mathbf{r}, t) \tag{24}$$

(to ψ môže závisieť od času). Zvyčajne z (24) vyplýva vôľa voči aditívnej konštante, tu je to zjavne voči aditívnej *funkcii času*

$$\mathbf{v} = \nabla\psi = \nabla(\psi + \chi(t)) \tag{25}$$

Potom sa člen $\partial_t\mathbf{v}$ z *nestacionárnej Eulerovej* rovnice

$$\partial_t\mathbf{v} + \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g} \tag{26}$$

stane (tiež) gradientom

$$\partial_t\mathbf{v} = \partial_t\nabla\psi = \nabla(\partial_t\psi) \tag{27}$$

Ak by sme namiesto stacionárnej rovnice (2) upravovali nestacionárnu rovnicu (26), ďostali by sme namiesto (16) toto:

$$\nabla\left(\frac{1}{2}v^2 + P + \Phi + \partial_t\psi\right) = \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v}) \tag{28}$$

No a keďže pravá strana je pre nevírové prúdenie nulová, funkcia pod gradientom je konštantná v celom objeme

$$\boxed{\frac{1}{2}v^2 + P + \Phi + \partial_t\psi = \text{ konšt. } \;\textit{v objeme tekutiny}} \tag{29}$$

Tá funkcia zo *štyroch* členov je konštantná v objeme, ale môže závisieť *od času*. To sa však ľahko napraví vôľou (25): ak s nejakým ψ výraz z () závisí od času, výberom vhodného $\chi(t)$ triviálne dosiahnem, že nový výraz už od času závisieť nebude

$$\boxed{\frac{1}{2}v^2 + P + \Phi + \partial_t\psi + \chi'(t) = \text{ konšt. } \;\textit{v objeme tekutiny aj v čase}} \tag{30}$$

Mimochodom keby sme rovnicu (28) násobili skalárne vektorom $\mathbf{v}$, dostali by sme

$$\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{2}v^2+P+\Phi+\partial_t\psi\right)=0 \tag{31}$$

Toto však *nemá* interpretáciu „konštantnosť na prúdnici", lebo pre časovo závislé $\mathbf{v}$ má problematický zmysel samotný pojem prúdnica :-(

4 Konštantnosť pozdĺž vírovej čiary

Vzhľadom na definíciu vírového poľa $\boldsymbol{\omega}$ môžeme (16) zapísať ako

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{2}v^2+P+\Phi\right)=\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega} \tag{32}$$

No a všimnem si, že to môžem skalárne vynásobiť nielen *rýchlostným* poľom $\mathbf{v}$ a dostať rovnicu (17), čo sa už stalo, ale aj *vírovým* poľom $\boldsymbol{\omega}$ a dostať rovnicu

$$(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nabla})\left(\frac{1}{2}v^2+P+\Phi\right)=0 \tag{33}$$

(čo sa stalo až teraz). Čiže (porovnaj s (10), (18), (23))

$$\boxed{\frac{1}{2}v^2+P+\Phi=\ \text{konšt.}\quad \textit{na vírovej čiare}} \tag{34}$$

Keď sme už už pri tom, *vírová čiara* je myslená čiara v tekutine, na ktorej je vírové pole v každom jej bode dotyčnicou k nej. Čiže „siločiara" pre vektorové pole $\boldsymbol{\omega}$.

Literatúra

[1] D.Ilkovič: Fyzika I, Bratislava, SNTL, 1975 ($ 7.4)
http://www.ujfi.fei.stuba.sk/fyzika-ilkovic-fyzika-1.php

[2] R.Feynman, R.Leighton, M.Sands: Feynmanove prednášky z fyziky 4, Bratislava, Alfa, 1989
http://www.feynmanlectures.caltech.edu , Vol. II, 40-3

[3] M.Fecko: Sylabus + príklady (40 strán)
http://sophia.dtp.fmph.uniba.sk/~fecko/teormech/primech11.pdf
http://davinci.fmph.uniba.sk/~fecko1/teormech/primech11.pdf

[4] M.Fecko: Newtonovo vedro - štyri spôsoby výpočtu (12 strán)
http://sophia.dtp.fmph.uniba.sk/~fecko/teormech/Newtonovo_vedro.pdf
http://davinci.fmph.uniba.sk/~fecko1/teormech/Newtonovo_vedro.pdf