Keplerova úloha - pár poznámok

Marián Fecko[*]
KTF, FMFI UK, Bratislava

Na prednáške sme za zaoberali problémom dvoch telies a úlohu sme doviedli ku *kvadratúram*. Tu sa kvadratúra (integrál), ktorá dáva trajektóriu, explicitne ráta pre *Keplerovu úlohu*, t.j. pre prípad potenciálnej energie klesajúcej s *prvou* mocninou vzdialenosti (a teda silou, klesajúcou so *štvorcom* vzdialenosti). Diskutuje sa tiež riešenie, ktorým sú *kužeľosečky*.

Obsah

[*]e-mail: `fecko@fmph.uniba.sk`

1 Úvod - problém dvoch telies

Pripomeňme si veľmi stručne, k čomu sme sa dopracovali v *probléme dvoch telies.*

1.1 Redukcia na problém jedného telesa

Začne sa s lagranžiánom

$$L(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}_1}, \dot{\mathbf{r}_2}) = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}_2}^2 - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \tag{1}$$

so všeobecnou potenciálnou energiou. Požiadavky homogenity a izotrópie prázdneho priestoru (t.j. aby sa fyzika nemenila, keď tú sústavu len posuniem a otočím) dajú (silné) obmedzenie na možný tvar potenciálnej energie, a to

$$L(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}_1}, \dot{\mathbf{r}_2}) = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}_2}^2 - \mathcal{U}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \tag{2}$$

(keď $\mathcal{U}$ je funkcia už *len jednej* premennej). Stupne voľnosti $\mathbf{r}_1$ a $\mathbf{r}_2$ sú *zreťazené*, lebo argument $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ funkcie $\mathcal{U}$ obsahuje *súčin* $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2$.

Prechod k premenným

$$\mathbf{R} := \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \qquad \mathbf{r} := \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \tag{3}$$

(t.j. *ťažisko* a *relatívny* vektor) vedie na

$$L(\mathbf{R}, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{R}}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 - \mathcal{U}(r) \equiv L_1(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}) + L_2(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \tag{4}$$

Čo vidno rovno z (4):

1. Stupne voľnosti $\mathbf{R}$ a $\mathbf{r}$ už *neinteragujú*.
2. Časť $\mathbf{R}$ je *triviálna* ($\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}_0 t$ - rovnomerný priamočiary pohyb).
3. Z problému *dvoch* telies sa tak *naozaj* stal problém *len jedného* telesa.
4. To jedno teleso (časť $\mathbf{r}$) treba riešiť, ale je dosť *špeciálne*.

Špeciálnosť časti $\mathbf{r}$ spočíva v tom, že potenciálna energia v lagranžiáne

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 - \mathcal{U}(r) \qquad r \equiv |\mathbf{r}| \tag{5}$$

nezávisí od všeobecného $\mathbf{r}$, ale *len od* $r \equiv |\mathbf{r}|$ (v argumente $\mathcal{U}$ *nie je tučné* r, ale len chudé). Silové pole

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla} \mathcal{U}(r) = f(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \qquad f(r) \equiv -\mathcal{U}'(r) \tag{6}$$

ktoré zodpovedá takejto potenciálnej energii je známe ako *centrálne* pole. Smeruje v každom bode do centra (ak je v tom bode $f(r) < 0$) alebo od centra (ak je tam

$f(r) > 0$; centrum je bod $\mathbf{r} = \mathbf{0}$). Navyše *veľkosť* sily je rovnaká vo všetkých bodoch, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od centra. (To silové pole sa dá charakterizovať aj ako *rotačne invariantné* vektorové pole.)

Takéto pole má v každom bode *nulový moment sily* (voči počiatku = centru):

$$\mathbf{N} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F} \sim \mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{0} \tag{7}$$

Z rovnice pre *moment hybnosti*

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N} \qquad \mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} \tag{8}$$

potom dostávame

$$\mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{L}_0 = \text{ const.} \qquad \text{t.j.} \qquad \mathbf{L}_0 \cdot \mathbf{r} = 0 \tag{9}$$

To je však rovnica *roviny* prechádzajúcej *cez počiatok*. (Vektor $\mathbf{L}_0$ je *kolmý* na tú rovinu.)

Pohyb v centrálnom poli je teda vždy pohyb *v rovine* prechádzajúcej cez centrum silového poľa. (Tá rovina môže byť apriori ľubovoľná, rozhodne sa o nej v čase $t = 0$ *počiatočnými podmienkami* pohybu bodu: Ak $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$ a $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$, tak

$$\mathbf{L}(0) \equiv \mathbf{L}_0 = \mu \mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0 \tag{10}$$

a tá rovina je *jediná* rovina kolmá na *toto* $\mathbf{L}_0$ prechádzajúca cez centrum.)

Ak si zvolíme kartézske súradnice (x, y, z) *tak, aby* tá rovina bola rovinou x, y (takže pre body v nej bude $z = 0$ a vektor $\mathbf{L}_0$ bude mať zložky $(0, 0, L_0)$), náš pohyb bude opisovať lagranžián (pozri (5))

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}\mu(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \mathcal{U}(\sqrt{x^2 + y^2}) \tag{11}$$

Potenciálna energia našepkáva, že bude lepšie prejsť do polárnych súradníc:

$$\boxed{L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \mathcal{U}(r)} \tag{12}$$

Naozaj namiesto *pôvodnej* úlohy (1) treba teda riešiť už len *túto* úlohu.

1.2 Riešenie v kvadratúrach

Teraz by sme si mali pre lagranžián (12) napísať Lagrangeove rovnice a riešiť ich. Máme ale v hre dva *zákony zachovania* (za cyklickosť φ a t), takže vôbec nebudeme potrebovať pohybové rovnice (2. rádu), stačí namiesto nich riešiť len rovnice 1.rádu (tie zákony zachovania)! Vyzerajú [1] takto:

$$\frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \mathcal{U}(r) \quad = \quad E \tag{13}$$

$$\mu r^2 \dot{\varphi} \quad = \quad \mathcal{M} \tag{14}$$

[1] Prvá hovorí, že sa zachováva *energia* (a má hodnotu E). Druhá je zachovanie *kanonickej hybnosti* p_φ, ktorá „naozaj" zodpovedá *z-ovej zložke* (zachovávajúceho sa) *momentu hybnosti* (a jej hodnota sa označila ako $\mathcal{M}$).

Tieto rovnice sú *zreťazené*. Ale všimneme si, že z druhej sa dá vyjadriť $\dot{\varphi}$ a dosadiť do prvej, čím dostaneme rovnicu

$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \mathcal{U}_{\rm ef}(r) = E \tag{15}$$

kde

$$\mathcal{U}_{\rm ef}(r) := \mathcal{U}(r) + \frac{\mathcal{M}^2}{2\mu^2 r^2} \tag{16}$$

je tzv. *efektívna* potenciálna energia. Rovnica (15) je už len pre premennú r a dá sa *separovať*:

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - \mathcal{U}_{\rm ef}(r))}} = dt \tag{17}$$

čiže

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - \mathcal{U}_{\rm ef}(r))}} \tag{18}$$

Keby sme vedeli ten integrál vyrátať, dostali by sme závislosť

$$t(r) \qquad \text{a invertovaním hľadané} \qquad r(t) \tag{19}$$

Toto $r(t)$ by sme potom dosadili do *separovanej* rovnice (14)

$$d\varphi = \frac{\mathcal{M}}{\mu r^2} dt \tag{20}$$

a dostali

$$\varphi(t) = \int \frac{\mathcal{M}}{\mu r^2(t)} dt \tag{21}$$

Schopnosť
- vyrátať integrál (18)
- invertovať $t(r)$ na $r(t)$ a napokon
- vyrátať integrál (21)

by teda viedla k znalosti $r(t)$ a $\varphi(t)$, čo je *úplné vyriešenie* úlohy s lagranžiánom (12) a celkovo aj pôvodnej úlohy (problém dvoch telies) s lagranžiánom (1).

Trochu skromnejšiou (ale dostatočne zaujímavou!) ambíciou je nájsť („iba") *trajektóriu*, t.j. čiaru, po ktorej sa pohybuje (fiktívny) bod s hmotnosťou μ opísaný lagranžiánom (12).

To sa dá dosiahnuť *vylúčením času*: Ak dáme do rovnosti dt vyrátané z rovníc (17) a (20), dostaneme

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - \mathcal{U}_{\rm ef}(r))}} = \frac{d\varphi}{\frac{\mathcal{M}}{\mu r^2}} \tag{22}$$

t.j. rovnicu trajektórie v tvare integrálu

$$\boxed{\varphi = \int \frac{\frac{\mathcal{M}}{r^2} dr}{\sqrt{2\mu(E - \mathcal{U}_{\text{ef}}(r))}}} \qquad (23)$$

Schopnosť
- vyrátať integrál (23)
- invertovať $\varphi(r)$ (ku ktorému ten integrál priamo vedie) [2]

by teda viedla k znalosti $r(\varphi)$, čo je *nájdenie trajektórie* úlohy s lagranžiánom (12) (a celkovo aj pôvodnej úlohy (problém dvoch telies) s lagranžiánom (1)).

Riešenia v tvare (18), (21) a (23) sú známe ako riešenia *v kvadratúrach*. Sú zapísané cez *integrály*, v ktorých figuruje (zatiaľ nešpecifikovaná!) potenciálna energia $\mathcal{U}(r)$. Až keď túto funkciu fixujeme, integrály môžeme začať naozaj počítať a získať (ak máme šťastie v krokoch spomínaných vyššie) „naozajstné" riešenia úlohy.

2 Keplerova úloha

2.1 O čo ide

Ide o špeciálny (a najdôležitejší) prípad úlohy z kapitoly 1, a to prípad s potenciálnou energiou

$$\boxed{\mathcal{U}(r) = -\frac{\alpha}{r}} \qquad \alpha = \text{ const.} \qquad (24)$$

Príslušné silové pole je (pozri (6))

$$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}} \qquad (25)$$

Vidíme, že

- ide pole, ktorého veľkosť klesá so *štvorcom* vzdialenosti
- je *príťažlivé* pre $\alpha > 0$
- a *odpudivé* pre $\alpha < 0$
- zodpovedá *gravitačnému* poľu pre $\alpha = \kappa m_1 m_2$
- a *elektrostatickému* poľu pre $\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2$

Ďalej sa budeme venovať len príťažlivému prípadu (zmeny pre odpudivý si treba pozrieť v literatúre). Pozrieme sa (len) na tvar *trajektórie*, t.j. vyrátame explicitne integrál (23) pre tento prípad.

[2] Skúste si rozmyslieť (napríklad pre obyčajnú kružnicu), že závislosť $\varphi(r)$ nie je práve najpraktickejšia, zatiaľ čo $r(\varphi)$ je fajn.

2.2 Rovnica trajektórie - výpočet kvadratúry

Dosadenie (24) do (23) vedie na (už úplne konkrétny) integrál

$$\varphi = \int \frac{\frac{\mathcal{M}}{r^2} dr}{\sqrt{2\mu E + \frac{2\mu\alpha}{r} - \frac{\mathcal{M}^2}{r^2}}} \tag{26}$$

Tento integrál je podľa [1] *elementárny* (takže tam neurážujú čitateľa tým, že by čo len naznačili, ako ho počítať). Myslí sa to o.i. aj tak, že sa jeho výsledok vyjadruje cez *elementárne funkcie*, t.j. *nie* napríklad cez *eliptický integrál* 1.druhu, ako to dopadlo pre rovinné kyvadlo.

Substitúcia $u = \mathcal{M}/r$ vedie na

$$\varphi = -\int \frac{du}{\sqrt{2\mu E + \frac{2\mu\alpha}{\mathcal{M}} u - u^2}} = -\int \frac{du}{\sqrt{-(u - \frac{\mu\alpha}{\mathcal{M}})^2 + \left(\frac{\mu\alpha}{\mathcal{M}}\right)^2 + 2\mu E}} \tag{27}$$

takže sa priam núka ďalšia substitúcia (plus označenie)

$$v = u - \frac{\mu\alpha}{\mathcal{M}} \qquad \left(\frac{\mu\alpha}{\mathcal{M}}\right)^2 + 2\mu E \equiv k^2 \tag{28}$$

[Využili sme skrytý predpoklad, že energia E, ktorá môže byť *aj záporná* (!), nikdy neprebije ten kvadrát a nevyrobí *záporný celok*. Keby sa to stalo, museli by sme to označiť $-k^2$ a pod odmocninou by bolo záporné číslo. Keďže počítame uhol φ a keďže vedci doteraz v prírode (ani pod mikroskopom) nenarazili na rýdzo-imaginárne uhly, predpokladáme, že to tu Príroda vždy uhrá tak, že označenie k^2 bude v poriadku.]

Dostaneme

$$\varphi = -\int \frac{dv}{\sqrt{k^2 - v^2}} \tag{29}$$

No a tu už nezaváhame a napíšeme výsledok („tabuľkový integrál")

$$\varphi = -\arcsin\frac{v}{k} + \text{const.} \tag{30}$$

alebo, vzhľadom na identitu

$$\arcsin\psi = -\ \arccos\psi + \frac{\pi}{2} \tag{31}$$

takto:

$$\varphi = \arccos\frac{v}{k} + \text{const.}' \tag{32}$$

Rýchlo si tiež rozmyslíme, že aditívna konštanta vpravo je vôľa v otočení celej trajektórie (ak je riešením nejaká, je určite riešením aj ľubovoľne otočená, keďže úloha má rotačnú symetriu). Tak urobíme najjednoduchší výber const. = 0. Potom dostaneme

$$v = k \cos\varphi \tag{33}$$

Dosadíme explicitné vyjadrenia z (28) a dostaneme odstrašujúco vyzerajúci výraz

$$\frac{\mathcal{M}}{r} = \frac{\mu\alpha}{\mathcal{M}} + \sqrt{\left(\frac{\mu\alpha}{\mathcal{M}}\right)^2 + 2\mu E}\ \cos\varphi \tag{34}$$

resp.

$$\frac{\frac{\mathcal{M}^2}{\mu\alpha}}{r} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2E\mathcal{M}^2}{\mu\alpha^2}}\ \cos\varphi \tag{35}$$

Stačí však zaviesť označenia

$$p \equiv \frac{\mathcal{M}^2}{\mu\alpha} \qquad e \equiv \sqrt{1 + \frac{2E\mathcal{M}^2}{\mu\alpha^2}} \tag{36}$$

a výsledná (už konečná :-) rovnica pre trajektóriu v Keplerovej úlohe nadobudne (po tých peripetiách až prekvapujúco) jednoduchý tvar

$$\boxed{\frac{p}{r} = 1 + e\cos\varphi} \tag{37}$$

3 Keplerova úloha a kužeľosečky

Pre *naozajstných znalcov* analytickej geometrie v rovine je vec jasná: Ako trajektóriu sme dostali *kužeľosečku.* Čiže čiaru, ktorá vznikne, keď kužeľ presekne rovina.

Je zrejmé, že tá čiara dopadne rôzne podľa toho, aká konkrétna rovina ten kužeľ presekne. [3] Je menej zrejmé (ale *znalci* vedia), že nastávajú *práve tri* možnosti, a to *elipsa* (špeciálne kružnica), *parabola* a *hyperbola.* Pričom o tom, ktorá možnosť nastáva, rozhoduje len hodnota konštanty e (zvanej *excentricita*, čiže výstrednosť) a nemá na to vplyv hodnota druhej konštanty p (zvanej *parameter*). Konkrétne *znalci* hovoria, že to je

- elipsa pre $0 \leq e < 1$
- parabola pre $e = 1$
- hyperbola pre $e > 1$.

My amatéri si to najprv skúsime trochu ohmatať priamo v *polárnych* súradniciach, cez ktoré sme to zrátali a potom do toho nahliadnuť viac prepisom do *kartézskych* súradníc.

[3] Napríklad ak je os kužeľa zvislá a rovina vodorovná, vyjde kružnica; ak je aj rovina zvislá, vznikne akási nekonečná čiara, čosi ako parabola.

3.1 Pohľad cez polárne súradnice

Ak vyjadríme z (37) $r(\varphi)$, dostaneme

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + e\cos\varphi} \tag{38}$$

Z toho sa dá ľahko vyrátať spústa zaujímavých vecí.

Napríklad:

Najbližší bod k centru (*perihélium*) je (podľa definície) ten, keď je naj*menšie* r. To je tam, kde je menovateľ naj*väčší*. Keďže e nikdy nie je záporné, je to tam, kde je najväčší $\cos\varphi$. Čo je pre $\varphi = 0$ (a je to 1). Vtedy mám, že perihélium je $\frac{p}{1+e}$ od centra, a to pre *všetky tri* kužeľosečky.

Pre $0 \le e < 1$ je menovateľ vždy nenulový (a kladný), takže pre každé $0 \le \varphi \le 2\pi$ existuje rozumné (dokonca konečné) r a keďže funkcia (38) je 2π-periodická, vzniká tam *uzavretá* krivka (ak ju obídem dookola, prídem tam, odkiaľ som vyrazil). Pre túto uzavretú krivku ľahko nájdeme aj najvzdialenejší bod od centra (*afélium*) - je (podľa definície) ten, keď je naj*väčšie* r. Je to tam, kde je najmenší $\cos\varphi$. Čo je pre $\varphi = \pi$ (a je -1). Vtedy mám, že afélium je $\frac{p}{1-e}$ od centra. Keďže afélium s perihélium sú presne proti sebe, „rozmer" tej krivky je $\frac{p}{1-e} + \frac{p}{1+e} = 2\frac{p}{1-e^2}$. (Je to dvakrát veľká poloos tej elipsy, pozri (53).)

Pre $e > 1$ a záporné hodnoty $\cos\varphi$ by mohlo byť r záporné. A keďže ani také zatiaľ vedci (ani pod mikroskopom) neobjavili, také uhly sa na žiadnom bode opisovanej krivky nemajú vyskytnúť, takže tam vzniká oblasť „zakázaných uhlov" (skúste si ju nakresliť). Teda krivka nemôže byť uzavretá.

[Zoberúc do úvahy, že podľa (14) je φ *monotónnou* funkciou času (rozmyslite si). Teda φ nemôže pri pohybe po tej čiare niekde rásť a niekde klesať. Preto sa do pôvodného bodu (o ktorom vedci zistili, že má pôvodnú hodnotu uhla φ) môžeme dostať *len* tak, že obídeme *celé* 2π, takže vlastne naozaj máme hodnotu uhla φ *o* 2π *väčšiu* ako predtým, čo voláme „pôvodná hodnota". Preto ak tam sú „zakázané uhly", krivka nemôže byť uzavretá.]

Pre $e = 1$ a záporné hodnoty $\cos\varphi$ by mohol byť *menovateľ nulový* (ale nie záporný, takže). A to (len) pre uhol $\varphi = \pi$. To je jediný „zakázaný uhol". Ak sa pustíme po rovnej čiare pod *hocijakom iným* uhlom, raz (možno dosť ďaleko) určite narazíme bod na tej krivke. Teda krivka nemôže byť uzavretá (zoberúc do úvahy, že podľa (14) je φ *monotónnou* funkciou času (rozmyslite si), teda φ nemôže pri pohybe po tej čiare niekde rásť a niekde klesať).

Atď.

Atď.

3.2 Pohľad cez kartézske súradnice

My amatéri si najprv napíšeme (37) v tvare

$$r = p - er\cos\varphi \equiv p - ex \tag{39}$$

takže ak obe strany umocníme, dostaneme

$$x^2 + y^2 = p^2 + e^2x^2 - 2pex \tag{40}$$

resp.

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 + 2pex = p^2 \tag{41}$$

No a tu sa *nám amatérom* vybaví, že po prvé

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{je rovnica} \qquad \textit{elipsy} \tag{42}$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{je rovnica} \qquad \textit{hyperboly}\ \text{č.1} \tag{43}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{je rovnica} \qquad \textit{hyperboly}\ \text{č.2} \tag{44}$$

$$-y^2 = x \qquad \text{je rovnica} \qquad \textit{paraboly} \tag{45}$$

(hyperbola č.1 uteká hore a dolu, hyperbola č.2 uteká doprava a doľava) a po druhé že *lineárny* člen $2pex$ v rovnici (40) je len za *posúvanie* objektu v x-*ovom* smere. No a keďže samozrejme

$$1 - e^2 > 0 \qquad \text{pre} \qquad 0 \le e < 1 \tag{46}$$

$$1 - e^2 < 0 \qquad \text{pre} \qquad e > 1 \tag{47}$$

$$1 - e^2 = 0 \qquad \text{pre} \qquad e = 1 \tag{48}$$

tak je zjavné, že o *type* krivky *naozaj* rozhoduje *len hodnota* e a to takto:

$$0 \le e < 1 \qquad \text{je to } \textit{elipsa} \tag{49}$$

$$e = 1 \qquad \text{je to } \textit{parabola} \tag{50}$$

$$e > 1 \qquad \text{je to } \textit{hyperbola} \tag{51}$$

Takže znalci mali pravdu (pozri text na začiatku 3. kapitoly).

3.2.1 Elipsa

Ak je v rovnici (41) faktor pri x^2 *kladný* (t.j. ak ide podľa (49) o *elipsu*), doplnením na úplný štvorec (a tým zbavením sa lineárneho člena v premennej x) dostaneme túto rovnicu do tvaru

$$\boxed{\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \tag{52}$$

kde

$$a := \frac{p}{1 - e^2} \qquad b := \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} \qquad \tilde{x} := x + ae \tag{53}$$

Vidíme z toho (nakreslite si), že

- elipsa je vycentrovaná v súradniciach $(\tilde{x}, y)$
- veľká a malá poloos elipsy sú dané výrazmi (53)
- pre poloosi platí $a\sqrt{1-e^2} = b$, preto vždy $a \geq b$ $(\geq p)$
- špeciálne pre $e = 0$ ide o *kružnicu* polomeru p $(= a = b)$
- stred elipsy je v bode $(\tilde{x}, y) = (0, 0)$, t.j. v bode $(x, y) = (-ae, 0)$
- t.j. *naľavo* o ae oproti stredu pôvodných [4] súradníc $(x, y) = (0, 0)$
- *celá elipsa* je teda posunutá *naľavo* o ae oproti tomu, ako sme zvyknutí
- *perihélium* je teda vo vzdialenosti $a - ae = \frac{p}{e+1}$ od centra („Slnka")

3.2.2 Hyperbola

Ak je v rovnici (41) faktor pri x^2 *záporný* (t.j. ak ide podľa (51) o *hyperbolu*), doplnením výrazu (41) na úplný štvorec (a tým zbavením sa lineárneho člena v premennej x) dostaneme rovnicu (41) do tvaru

$$\boxed{\frac{\tilde{x}^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \tag{54}$$

kde

$$a := \frac{p}{e^2 - 1} \qquad b := \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}} \qquad \tilde{x} := x - ae \tag{55}$$

Vidíme z toho, že

- hyperbola je vycentrovaná v súradniciach $(\tilde{x}, y)$
- v súradniciach $(\tilde{x}, y)$ sa najprv nakreslí vycentrovaný obdĺžnik $2a \times 2b$
- potom jeho (nekonečne dlhé) *uhlopriečky* (slúžia ako *asymptoty* hyperboly)
- jej dve vetvy utekajú *doprava a doľava* (nie hore a dolu)
- doprava z vrcholu $(\tilde{x}, y) = (a, 0)$, doľava z vrcholu $(\tilde{x}, y) = (-a, 0)$
- naozaj sa realizuje *len vetva idúca doľava* [5]
- jej vrchol je v $(\tilde{x}, y) = (-a, 0)$, t.j. v $(x, y) = (a(e-1), 0) = (\frac{p}{e+1}, 0)$, teda
- 1. jej vrchol je *napravo* od centra a hyperbola sa rozširuje smerom *doľava*
- 2. *perihélium* je vo vzdialenosti $\frac{p}{e+1}$ od centra („Slnka")

---

[4] V strede pôvodných súradníc $(x, y) = (0, 0)$ je *ohnisko* tej elipsy. Elipsa má všeobecne *dve* ohniská, sú (podľa definície) vzdialené o ae od stredu v smere veľkej poloosi. (Špeciálne pre kružnicu splývajú obe ohniská so stredom elipsy.) U nás je v *jednom z nich* stred pôvodných súradníc, t.j. bod $(x, y) = (0, 0)$, t.j. *centrum* („nehybné Slnko") našej centrálnej sily.

[5] Keď sme prechádzali do kartézskych súradníc, v jednom kroku sme umocnili strany rovnice na druhú. Takáto operácia môže pridať riešenia (napr. pre rovnicu $x - 2 = 1$ takto pribudne riešenie $x = 1$, ktoré pôvodná rovnica nemala). To, že vetva doprava nezodpovedá našej situácii, vidno napríklad z vyjadrenia v polárnych súradniciach.

3.2.3 Parabola

Ak je v rovnici (41) faktor pri x^2 *nulový* (t.j. ak je $e = 1$ a ide podľa (50) o *parabolu*), zostane z nej

$$y^2 + 2px = p^2 \qquad \text{t.j.} \qquad x = -\frac{1}{2p}y^2 + \frac{p}{2} \tag{56}$$

Čiže pomocou *posunutej* súradnice $\tilde{x}$

$$\boxed{\tilde{x} = -\frac{1}{2p}y^2} \qquad \text{kde} \qquad \tilde{x} = x - \frac{p}{2} \tag{57}$$

Vidíme z toho, že
- parabola má vrchol v bode $(\tilde{x}, y) = (0, 0)$, t.j. v bode $(x, y) = (\frac{p}{2}, 0)$
- rozbieha sa smerom *doľava*, teda
- 1. jej vrchol je *napravo* od centra a parabola sa rozširuje smerom *doľava*
- 2. *perihélium* je vo vzdialenosti $\frac{p}{e+1}$ od centra („Slnka")

4 Zhrnutie

Hlavným cieľom tohto textu bolo ukázať, že

- Keplerova úloha sa dá explicitne riešiť
- napríklad trajektória (pre príťažlivú silu) z integrálu (26)
- výsledkom sú kužeľosečky (elipsa, parabola, hyperbola)
- ktorá z nich to bude, závisí (len) od hodnoty e v riešení (37)
- o hodnote e rozhoduje - pozri (36) - hodnota *energie*
- veľa vidno cez polárne súradnice (v ktorých sa riešenie získalo)
- oplatí sa prepísať to aj do kartézskych súradníc.

Literatúra

[1] L.D.Landau, E.M.Lifshitz: Mechanics, 3-rd edition, Butterworth-Heinemann Ltd., 1995 ($ 13 - 15)

[2] M.Fecko: Teoretická mechanika - Sylabus + príklady (41 strán) http://davinci.fmph.uniba.sk/~fecko1/teormech/primech11.pdf