Newtonovo vedro - štyri spôsoby výpočtu

Marián Fecko*
KTF&DF, FMFI UK, Bratislava

Cieľom je zistiť tvar hladiny vody vo vedre, ktoré visí v zemskom gravitačnom poli a už dlho sa rovnomerne otáča okolo zvislej osi uhlovou rýchlosťou Ω. (Je to úloha 11.6 v texte [1].) Pomenovanie problému súvisí s jeho historickou úlohou. Newton ho použil ako argument v prospech existencie absolútneho priestoru vo svojom odbornom spore s Leibnizom.

Obsah

*e-mail: `fecko@fmph.uniba.sk`

1 Pohľad z inerciálnej sústavy

1.1 Inerciálna sústava - riešenie pohybových rovníc

Logika riešenia je takáto:

Pohyb vody v otáčajúcom sa vedre sa musí riadiť *všeobecnými hydrodynamickými rovnicami*. Mala by sa teda riešiť *Navierova-Stokesova* rovnica (s konštantnou hustotou $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0 =$ konšt., keďže voda je nestlačiteľná) plus *rovnica kontinuity* (tiež zjednodušená podmienkou $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0$). Keďže ale (po dlhom čase, už v ustálenom režime) sa „vrstvy vody o seba už netrú"(voda sa hýbe ako tuhé teleso, prakticky ako „kus ľadu"), viskozita sa nijako neprejaví a teda Navierovu-Stokesovu rovnicu môžeme nahradiť jednoduchšou *Eulerovou* rovnicou (pre pohyb *ideálnej* tekutiny).

Predstavme si, že sa potrápim a nájdem ich riešenia. Načo mi vlastne budú? Hľadám predsa tvar hladiny a nie tlak a rýchlostné pole v ľubovoľnom mieste.

Hladina ale úzko súvisí s tlakom. Je to totiž jedna z *plôch konštantného tlaku*, konkrétnejšie množina bodov, v ktorej má tlak hodnotu *atmosférického* tlaku

$$p(\mathbf{r}) = p_{\text{atm}} \tag{1}$$

▼ Prečo? Predstavme si plôšku $d\mathbf{S}$ umiestnenú v bode hladiny tak, že *vektor* $d\mathbf{S}$ je *kolmý* na hladinu v tomto bode (čiže samotná plôška sa dotýka hladiny). Potom plošná sila cez túto plôšku opisuje (podľa definície plošnej sily) silu, ktorou pôsobí *vzduch* tesne nad hladinou na vodu tesne pod hladinou (cez tú hladinu). No ale ten vzduch pôsobí práve atmosférickým tlakom. ▲

Takže potrápiť sa a nájsť ten tlak sa oplatí.

▼ A načo vlastne hľadám aj rýchlostné pole, keď na hladinu stačí len tlak?

Plytší dôvod: Rovnice, do ktorých vstupuje ako neznáma tlak sú zreťazené s ďalšou neznámou, rýchlostným poľom. To síce na samotnú hladinu nepotrebujem, ale ako to už chodí so zreťazenými rovnicami, počíta sa všetko a na konci sa teší z toho, čo sa naozaj potrebuje.

Hlbší dôvod: Rovnice nevedia, že pre *aké konkrétne* tečenie ma zaujíma tlak. (Tečením, ktoré vyhovuje uvažovanej sústave, je napríklad aj státie vody. Vtedy dá podmienka (1) ako hladinu rovnú plochu.) Práve cez konkrétne rýchlostné pole, ktoré zodpovedá točiacemu sa vedru, do rovníc vpašujeme napríklad informáciu, že vôbec existuje nejaká uhlová rýchlosť Ω, ktorá sa nakoniec objaví aj vo výraze pre tlak (a teda aj vo vzorci pre tvar plochy hladiny). ▲

Ideme na to.

Máme riešiť sústavu rovníc

$$\begin{aligned} \rho_0(\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} &= -\nabla p + \rho_0 \mathbf{g} && (2) \\ \partial_t \rho + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) &= 0 && (3) \end{aligned}$$

Zoberúc do úvahy fakty
i) $\rho(\mathbf{r},t) = \rho_0 =$ konšt. (voda je nestlačiteľná)
ii) $\partial_t \mathbf{v} = 0$ (tečenie je už ustálené, takže *stacionárne*)
sa to zjednoduší na

$$\begin{aligned} \rho_0(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} &= -\nabla p + \rho_0 \mathbf{g} && (4) \\ \nabla\cdot\mathbf{v} &= 0 && (5) \end{aligned}$$

Neznáme sú zatiaľ

$$\mathbf{v}(\mathbf{r},t) \qquad \text{a} \qquad p(\mathbf{r},t) \tag{6}$$

Presnejšie, vďaka *stacionárnosti* úlohy (a teda aj jej *riešení*),

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) \qquad \text{a} \qquad p(\mathbf{r}) \tag{7}$$

V skutočnosti sa ale rýchlostné pole $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ ľahko *uhádne*. Naozaj: má zodpovedať očividnému faktu, že každý kúsok vody má *rovnomerne krúžiť* uhlovou rýchlosťou Ω po kružnici okolo z-ovej osi. Vyskúša sa, že tomu zodpovedá jednoduchý vzorček

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{\Omega}\times\mathbf{r} \tag{8}$$

▼ Je užitočné si všimnúť, že tento vzorček platí pre umiestnenie *počiatku* súradníc (x,y,z) *kdekoľvek* na z-ovej osi. Špeciálne napríklad v strede dna vedra alebo v strede (budúcej) hladiny. Vidno to z toho, že rozdiel medzi polohovými vektormi $\mathbf{r}$ a $\mathbf{r}'$ odčítanými od počiatkov P a P' (oba na z-ovej osi) je vektor v smere $\mathbf{\Omega}$ (teda $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \lambda\mathbf{\Omega}$), a preto $\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r} = \mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}'$. ▲

Jedinou naozaj neznámou v zozname (7) tak zostal *tlak*

$$p(\mathbf{r}) \tag{9}$$

Najprv overím, že uhádnuté riešenie (8) vyhovuje (okýptenej) rovnici kontinuity (5).

▼ Napríklad jedným z týchto troch spôsobov:
1. (bez výpočtu): voda rotuje okolo osi z ako tuhé teleso, takže izometricky, takže ľubovoľný objem sa zachováva, takže ľubovoľná hmotnosť sa zachováva, takže je splnená rovnica kontinuity
2. (indexový výpočet):

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\mathbf{v} &= \nabla\cdot(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}) \\ &= \partial_i(\epsilon_{ijk}\Omega_j x_k) \\ &= \epsilon_{ijk}\Omega_j\delta_{ik} \\ &= \epsilon_{iji}\Omega_j \\ &= 0 \end{aligned}$$

3. (výpočet v špeciálne zvolených osiach): ak $\mathbf{\Omega} = (0, 0, \Omega)$, tak

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} = (-\Omega y, \Omega x, 0) \tag{10}$$

a

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \partial_x(-\Omega y) + \partial_y(\Omega x) + \partial_z(0) = 0$$

▲

Teraz sa pustím do rovnice (4). Najprv sa pozriem na člen opisujúci zrýchlenie, t.j. výraz $(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}$.

▼ Opäť napríklad jedným z týchto troch spôsobov: Bez výpočtu, indexovo aj v špeciálne zvolených osiach.
1. (bez výpočtu): každá kvapka vody rovnomerne krúži po kružnici okolo osi z. Má teda bežné dostredivé zrýchlenie známe z úlohy o kameni na konci šnúry (alebo o Zemi krúžiacej okolo Slnka). Čo je smerom do stredu a veľkosti $\Omega^2 l$, kde l je vzdialenosť od stredu (od osi z).
2. (indexový výpočet):

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v} \cdot \nabla)v_i &= ((\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla)(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})_i \\
&= (\epsilon_{rsl}\Omega_s x_l \partial_r)\epsilon_{ijk}\Omega_j x_k \\
&= \epsilon_{slk}\epsilon_{ijk}\Omega_s\Omega_j x_l \\
&= \Omega_i\Omega_j x_j - \Omega_j\Omega_j x_i \\
&= \Omega^2((\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})n_i - x_i)
\end{aligned}$$

t.j.

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\Omega^2 \mathbf{r}_\perp \tag{11}$$

kde $\mathbf{\Omega} = \Omega\mathbf{n}$ a $\mathbf{r}_\perp$ je zložka $\mathbf{r}$ kolmá na smer $\mathbf{\Omega}$, teda na $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{r}_\perp = \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \tag{12}$$

(Jej veľkosť je vzialenosť od osi danej vektorom $\mathbf{n}$.)
3. (výpočet v špeciálne zvolených osiach): ak $\mathbf{\Omega} = (0, 0, \Omega)$, tak (10) dáva

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \Omega(x\partial_y - y\partial_x)(-\Omega y, \Omega x, 0) = \Omega^2(-x, -y, 0) \tag{13}$$

čo je to isté ako (11). ▲

Teraz už môžem napísať celú rovnicu (4).
Využitím výsledku (11) ju môžem napísať v tvare

$$-\rho_0\Omega^2\mathbf{r}_\perp = -\nabla p + \rho_0\mathbf{g} \tag{14}$$

V špeciálne zvolených osiach (t.j. využitím výsledku (35)) zase vyzerá

$$\rho_0\Omega^2(-x, -y, 0) = (-\partial_x p, -\partial_x p, -\partial_x p) + (0, 0, -\rho_0 g) \tag{15}$$

Po rozpísaní na drobné

$$\partial_x p = \rho_0 \Omega^2 x \tag{16}$$
$$\partial_y p = \rho_0 \Omega^2 y \tag{17}$$
$$\partial_z p = -\rho_0 g \tag{18}$$

Jej riešenie sa nájde veľmi jednoducho a vyzerá

$$p(x,y,z) = \frac{1}{2}\rho_0 \Omega^2 (x^2 + y^2) - \rho_0 g z + p(0,0,0) \tag{19}$$

Hladina je potom daná rovnicou (1), t.j. explicitne

$$\boxed{z(x,y) = \frac{\Omega^2}{2g}(x^2 + y^2) + \text{const.}} \tag{20}$$

kde

$$\text{const.} \equiv p(0,0,0) - p_{\text{atm}} \tag{21}$$

Hladina teda má tvar *rotačného paraboloidu.*

▼ Keby som to veľmi chcel riešiť „vektorovo", t.j. v tvare (14), alebo podrobne v tvare

$$\rho_0 \Omega^2 ((\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{r}) = -\nabla p - \rho_0 g \mathbf{n} \tag{22}$$

mohol by som postupovať napríklad takto: všimnem si, že platí

$$\nabla(\mathbf{r}^2) = 2\mathbf{r} \tag{23}$$
$$\nabla(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}) = \mathbf{n} \tag{24}$$
$$\nabla((\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})^2) = 2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} \tag{25}$$

Potom sa dá (22) napísať cez samé gradienty:

$$\nabla\left(\frac{\rho_0\Omega^2}{2}((\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})^2 - \mathbf{r}^2)\right) = -\nabla(p + \rho_0 g \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}) \tag{26}$$

Bez symbolov gradientu to znamená rovnosť až na aditívnu konštantu

$$p(\mathbf{r}) = \frac{\rho_0\Omega^2}{2}(\mathbf{r}^2 - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})^2) - \rho_0 g \mathbf{n}\cdot\mathbf{r} + p(\mathbf{0}) \tag{27}$$

a teda rovnica *hladiny* ako plochy konštantného (= atmosférického) tlaku je

$$\boxed{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} = \frac{\Omega^2}{2g}(\mathbf{r}^2 - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})^2) + \text{const.}} \tag{28}$$

kde const. $= p(\mathbf{0}) - p_{\text{atm}}$. Pri výbere $\mathbf{n} = (0,0,1)$ sme späť pri (20). ▲

2 Pohľad z rotujúcej sústavy

2.1 Rotujúca sústava - riešenie pohybových rovníc

Stacionárna Eulerova rovnica (4) vznikla zo *všeobecnej pohybovej rovnice kontinua*

$$f_i + \partial_j \sigma_{ij} = \rho a_i \tag{29}$$

skonkrétnením niektorých členov. V nej $\mathbf{f}$ je *hustota objemovej sily* a do Eulerovej rovnice sa dostala v podobe člena $\rho\mathbf{g}$.

Ako prepísať rovnicu (29) do sústavy, ktorá sa spolu s vedrom (a vodou v ňom) *rovnomerne otáča* uhlovou rýchlosťou $\boldsymbol{\Omega}$?

Treba jednoducho pridať k objemovej sile všetky „fiktívne"sily, ktoré sa v danej situácii prejavia. *Neprejaví* sa

- zotrvačná sila (lebo počiatky inerciálnej a točiacej sa sústavy splývajú)

- Eulerova sila (lebo točenie sa vedra je *rovnomerné*)

Takže treba dodať len *odstredivú* a *Coriolisovu* silu (ich *hustoty*), t.j. urobiť zámenu

$$\mathbf{f} \equiv \rho\mathbf{g} \mapsto \rho\mathbf{g} - \rho\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - \rho\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} \tag{30}$$

Z rovnice (4) sa tak stane rovnica

$$\rho_0(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \rho_0\mathbf{g} - \rho_0\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - \rho_0\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} \tag{31}$$

Vyzerá síce o dosť zložitejšia ako (4), ale uvedomím si, že $\boldsymbol{\Omega}$ sa vybralo tak, aby v tejto sústave voda *stála*, takže namiesto ansatzu (8) z inerciálnej sústavy tu mám dať (oveľa jednoduchší :-) ansatz

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \tag{32}$$

(Tento ansatz mení našu úlohu na úlohu z hydro*statiky.*) Vďaka tomu sa (31), už ako rovnica len pre jednu neznámu - *tlak* $p(\mathbf{r})$, veľmi zjednoduší - vypadne Coriolisova sila aj zrýchlenie. Ostane z nej len toto:

$$0 = -\nabla p + \rho_0\mathbf{g} - \rho_0\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \tag{33}$$

Asi to na prvý pohľad nevidno, ale reálne je to *presne taká istá* (!) rovnica pre tlak, akou bola rovnica (14). Takže bude rovnaké aj jej riešenie, tým aj plochy konštantných tlakov a napokon *aj hladina* ako plocha atmosférického tlaku.

▼ Naozaj:
1. (bez výpočtu): Ono to tak chodí, keď niečo behá po kružnici, že k dostredivej sile z inerciálnej sústavy pribudne v točiacej sa sústave rovnako veľká a opačne orientovaná odstredivá sila (preto, aby ich *súčet dal nulu* a vec mohla v tejto sústave stáť)

2. (indexový výpočet): Ak $\mathbf{\Omega} = \Omega \mathbf{n}$, tak

$$\begin{aligned} -\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) &= -\Omega^2 \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \\ &= \Omega^2 (\mathbf{r} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{n} \\ &= \Omega^2 \mathbf{r}_\perp \end{aligned}$$

kde $\mathbf{\Omega} = \Omega \mathbf{n}$ a $\mathbf{r}_\perp$ je zložka $\mathbf{r}$ kolmá na smer $\mathbf{\Omega}$, teda na $\mathbf{n}$. (Jej veľkosť je vzialenosť od osi danej vektorom $\mathbf{n}$.) Z (33) sa tak stane

$$-\rho_0 \Omega^2 \mathbf{r}_\perp = -\nabla p + \rho_0 \mathbf{g} \tag{34}$$

čo naozaj ťažko rozoznať od rovnice (14)!
3. (výpočet v špeciálne zvolených osiach): ak $\mathbf{\Omega} = (0, 0, \Omega)$, tak (10) dáva

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \Omega (x \partial_y - y \partial_x)(-\Omega y, \Omega x, 0) = \Omega^2 (-x, -y, 0) \tag{35}$$

čo je to isté ako (11). ▲

2.2 Rotujúca sústava - hladina má byť všade kolmá na objemovú silu

Logika riešenia:
Som v sústave rotujúcej práve takou uhlovou rýchlosťou, že v nej voda vo vedre stojí. Je to teda hydro*statika*, kde z objemových síl musím uvažovať silu *gravitačnú* a *odstredivú.* (Netreba Coriolisovu ani Eulerovu.)

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\text{grav}} + \mathbf{f}_{\text{odstr}} \tag{36}$$

Z bežného života viem, že ak vedro stojí v inerciálnej sústave, jeho hladina je vodorovná, čiže *kolmá na objemovú silu* (tam len gravitačnú). Poviem si, že toto povýšim na všeobecné pravidlo: [1]

Hladina je v každom bode kolmá na objemovú silu. (37)

A použijem ho aj pre prípad, keď je objemová sila zložitejšia, menovite teraz (36). Mám teda nájsť plochu, ktorá je *v každom bode kolmá na dané vektorové pole* $\mathbf{f}$.

▼ Z matematického hľadiska je to známa úloha, špeciálny prípad úlohy *integrovať distribúciu.* Ukazuje sa, že takáto plocha pre všeobecné vektorové pole nemusí vôbec existovať. Existuje práve vtedy (pozri úlohu 19.3.13 v [2]), keď to pole spĺňa podmienku

$$\mathbf{f} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{f} = 0 \tag{38}$$

Z úvah okolo existencie potenciálnej energie vieme, že platí

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{f} = \nabla \Phi \tag{39}$$

[1] Jeho vysvetlenie - pozri ďalej.

Podmienka (38) je *slabšia* ako podmienka vľavo v (39), môže jej teda vyhovovať *širšia* trieda polí ako gradienty nejakej funkcie. Ukazuje sa, že príslušná modifikácia (39) znie

$$\mathbf{f} \cdot \mathrm{rot}\, \mathbf{f} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{f} = \Psi \nabla \Phi \tag{40}$$

A plochy, ktoré sú v každom bode kolmé na pole $\mathbf{f}$, sú potom dané rovnicami

$$\Phi(\mathbf{r}) = k \tag{41}$$

(Pre každú *konštantu* k jedna plocha.) Všimnime si, že to Ψ, ktoré figuruje ako možnosť v kritériu, už nefiguruje v zápise výslednej plochy, aj keby ho uvažované pole $\mathbf{f}$ na svoj zápis potrebovalo.) ▲

Takže idem skúsiť nájsť také dve funkcie Ψ a Φ, aby naša celková objemová sila (36) bola tvaru $\Psi\nabla\Phi$. Na to najprv skontrolujem, či vyhovuje kritériu (40). Z rovníc (33) a (34) vidím, že objemová sila je

$$\begin{aligned} \mathbf{f} \equiv \mathbf{f}_{\mathrm{grav}} + \mathbf{f}_{\mathrm{odstr}} &= \rho_0 \mathbf{g} - \rho_0 \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) && (42)\\ &= \rho_0 \mathbf{g} + \rho_0 \Omega^2 \mathbf{r}_\perp && (43)\\ &= -\rho_0 g \mathbf{n} + \rho_0 \Omega^2 (\mathbf{r} - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}) && (44) \end{aligned}$$

Z (23) - (25) zase viem, že každý člen tejto sily je *gradientom* niečoho, takže pole $\mathbf{f}$ nielen že je tvaru $\Psi\nabla\Phi$, ale dokonca rovno $\nabla\Phi$. A s akým Φ? No spomínané výrazy (23) - (25) ukazujú, že

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\rho_0 g \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} + \frac{\rho_0 \Omega^2}{2} (\mathbf{r}^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})^2) \tag{45}$$

Plochy kolmé na $\mathbf{f}$ sú plochy konštantnej hodnoty tohoto Φ. A to sú presne *rotačné paraboloidy* dané vyjadreniami (28) či (20).

Mimochodom od začiatku je jasné, že výsledná hladina bude invariantná voči rotáciám okolo osi z, takže úlohu stačí riešiť *dvojrozmerne*; stačí vedieť, ako vyzerá *rez* hladiny napríklad rovinou xz.

Ak uvažujem štandardne os z v smere proti gravitačnému poľu, v rovine xz bude odstredivá sila v smere osi x. Konkrétne sa z (44) stane toto:

$$\mathbf{f} = (0, -\rho_0 g) + (\rho_0 \Omega^2 x, 0) \equiv \rho_0(\Omega^2 x, -g) \tag{46}$$

Hľadám $\Phi(x, z)$, ktorého by bolo pole (46) gradientom. Hneď vidím, že to je

$$\Phi(x, z) = \frac{\rho_0 \Omega^2}{2} x^2 - gz + \mathrm{const.} \tag{47}$$

Krivka konštantnej hodnoty funkcie Φ je parabola

$$z(x) = \frac{\rho_0 \Omega^2}{2g} x^2 + \mathrm{const.} \tag{48}$$

Rotačne invariantná plocha daná touto krivkou je potom *rotačný paraboloid*

$$z(x,y) = \frac{\rho_0 \Omega^2}{2g}(x^2 + y^2) + \text{const.} \tag{49}$$

A sme opäť pri (20) :-)

▼ Tak sa ešte pozrime na pravidlo (37).

Aby platila hydrostatická *rovnováha* (voda stojí!), objemová sila musí byť vyrovnaná plošnou silou. Len *tlakovou* silou $(-\nabla p)$, lebo viskozita sa v statike neprejaví. Musí teda v každom bode vody (vrátane hladiny) platiť

$$\nabla p = \mathbf{f} \tag{50}$$

Hladina je jedna z plôch *konštantného* tlaku, *normála* na hladinu má teda smer *gradientu* tlaku. A teda podľa (50) aj smer poľa $\mathbf{f}$. Hotovo.

A prečo je hladina kolmá na gradient tlaku? To je jednoduchý, ale užitočný geometrický fakt, ktorý sme už raz využili pri odvodení rovnice pre virtuálne posunutia :-)
Argument: Uvažujme plochu danú rovnicou

$$F(\mathbf{r}) = 0$$

(v ľubovoľne-rozmernom priestore). Uvažujem dva blízke body $\mathbf{r}$ a $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$, *oba na tej ploche.* Potom súčasne platia dve tvrdenia:

$$F(\mathbf{r}) = 0 \qquad F(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) = 0$$

Taylor do 1.rádu dáva

$$\delta\mathbf{r} \cdot \nabla F = 0 \qquad \text{čiže} \qquad \delta\mathbf{r} \perp \nabla F$$

Pritom vektor $\delta\mathbf{r}$, ktorý vlastne spája *ľubovoľné* dva *blízke* body na ploche, sa dá chápať (rozmyslieť!) ako *ľubovoľný* (malý) vektor *dotýkajúci sa plochy.* Takže ∇F je vektor *kolmý na plochu* $F(\mathbf{r}) = 0$.

Pre vyššie spomenuté tvrdenie o hladine treba položiť

$$F(\mathbf{r}) = p(\mathbf{r}) - p_{\text{atm}}$$

lebo hladina je plocha daná rovnicou

$$p(\mathbf{r}) = p_{\text{atm}}$$

▲

2.3 Rotujúca sústava - minimalizácia potenciálnej energie

Sme v sústave rotujúcej spolu s vodou vo vedre, takže máme hydro*statiku*. Hustota objemovej sily (36) je potenciálová, konkrétne platí (pozri (45))

$$\mathbf{f} \equiv \mathbf{f}_{\text{grav}} + \mathbf{f}_{\text{odstr}} = -\nabla u \tag{51}$$

pre

$$u(\mathbf{r}) = \rho_0 g \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - \frac{\rho_0 \Omega^2}{2}(\mathbf{r}^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})^2) \tag{52}$$

alebo v ľudskej reči (x, y, z) (pre $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$)

$$u(x, y, z) = \rho_0 g z - \frac{\rho_0 \Omega^2}{2}(x^2 + y^2) \tag{53}$$

Potenciálna energia infinitezimálneho objemu dV kvapaliny v mieste $\mathbf{r}$ je $u(\mathbf{r})dV$ a potenciálna energia všetkej vody vo vedre je

$$U = \int_V u dV \tag{54}$$

Ideme ju vyrátať.

Predpokladám, že vedro má tvar valca (bočné steny sú zvislé) a voda je v ňom rozložená tak, že je od podstavy až po (zatiaľ neznámu) hladinu, vyjadrenú v cylindrických súradniciach ako

$$z(r, \varphi) = z(r) \tag{55}$$

(už sa predpokladá jej rotačná invariantnosť).

Rozdelím si objem vody na infinitezimálne tenké súosé „valcové plochy". Zaberajú objem od r po $r + dr$ a majú výšku od nuly (spodok vedra) po $z(r)$. Objem tohto telesa je

$$2\pi r dr z(r) \tag{56}$$

a jeho ťažisko je zjavne vo výške $z(r)/2$. Preto jeho gravitačná potenciálna energia je

$$\rho_0 g(2\pi r dr z(r))(z(r)/2) \tag{57}$$

Keďže všetky body tohto telesa sú (do príslušného rádu) rovnako ďaleko od osi (a to r), ľahko sa určí aj jeho odstredivá potenciálna energia. Je to

$$-\frac{\rho_0 \Omega^2}{2}(2\pi r dr z(r)) r^2 \tag{58}$$

Celková potenciálna energia vody vo vedre je integrál od nuly po R (polomer vedra) zo súčtu príspevkov (57) a (58), t.j.

$$U[z] = \pi \rho_0 g \int_0^R \left(r z^2 - \frac{\Omega^2}{g} r^3 z \right) dr \tag{59}$$

Z (56) sa ľahko vidí, že *celková hmotnosť* vody vo vedre je

$$M[z] = 2\pi\rho_0 \int_0^R (rz)\, dr \tag{60}$$

Výrazy (integrály) (59) a (60) sú *funkcionály* jednej premennej $z(r)$. Druhý slúži ako väzba. Našou úlohou je minimalizovať potenciálnu energiu (čiže prvý funkcionál), ale minimum máme hľadať len medzi takými $z(r)$, ktoré zodpovedajú danému fixnému množstvu vody. Ide teda o úlohu na *viazaný extrém* z *variačného počtu*.

Ako sa také úlohy riešia? To vieme napríklad z úlohy (4.5) v texte [1]! Kľúčové slovo je *Lagrangeov multiplikátor*.

Konkrétne tu: Z dvoch uvažovaných funkcionálov (59) a (60) identifikujem dva zodpovedajúce *lagranžiány*:

$$U[z] =: \int_0^R L_1(z, z', r) dr \qquad\qquad M[z] =: \int_0^R L_2(z, z', r) dr \tag{61}$$

kde

$$L_1(z, z', r) = \pi\rho_0 \left(grz^2 - \Omega^2 r^3 z\right) \qquad\qquad L_2(z, z', r) = 2\pi\rho_0 rz \tag{62}$$

Teraz zostavím *tretí* lagranžián,

$$L(z, z', r) := L_1(z, z', r) + \lambda L_2(z, z', r) \tag{63}$$

(číslo λ je vyššie spomínaný Lagrangeov multiplikátor) a *pre tento* lagranžián napíšem obyčajnú *Eulerovu-Lagrangeovu rovnicu*:

$$\frac{d}{dr}\frac{\partial L}{\partial z'} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \tag{64}$$

Keď sa pozriem na štruktúru lagranžiánov L_1 a L_2, čaká ma príjemné prekvapenie. Vôbec totiž nezávisia od z' (takže to isté platí aj pre L):

$$L(z, z', r) = L(z, r) \tag{65}$$

To znamená, že Eulerova-Lagrangeova rovnica tu degeneruje na smiešny tvar

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 0 \tag{66}$$

Napíšme si ju explicitne. Máme

$$L(z, r) = \pi\rho_0 \left(grz^2 - \Omega^2 r^3 z + \lambda 2rz\right) \tag{67}$$

Potom (66) dáva

$$2grz - \Omega^2 r^3 + \lambda 2r = 2gr \left(z - \frac{\Omega^2}{2g} r^2 + \frac{\lambda}{g}\right) = 0 \tag{68}$$

čiže
$$z = \frac{\Omega^2}{2g} r^2 - \frac{\lambda}{g} \tag{69}$$
Čo je opäť náš známy rotačný paraboloid z (20).

Konštanta λ sa určí z podmienky, aby bola *splnená väzba*, t.j. aby (69) dosadený do funkcionálu hmotnosti (60) dal hmotnosť M. Ak si M parametrizujem výškou hladiny h_0 v situácii, keď vedro nerotuje,
$$M =: \pi R^2 h_0 \rho_0 \tag{70}$$
tak vyjde
$$\boxed{z(r) = h_0 + \frac{\Omega^2}{2g}\left(r^2 - \frac{R^2}{2}\right)} \tag{71}$$

▼ Odtiaľ dostávam výšku hladiny v strede a na okraji vedra
$$z(0) = h_0 - \Delta \tag{72}$$
$$z(R) = h_0 + \Delta \tag{73}$$
kde
$$\Delta := \frac{\Omega^2 R^2}{4g} \tag{74}$$
Pokles hladiny v strede je teda rovnaký, ako jej nárast na okraji. Vo vzdialenosti
$$\hat{r} := \frac{R}{\sqrt{2}} \tag{75}$$
od stredu má hladina rovnakú výšku, akú mala pred točením. ▲

Literatúra

[1] M.Fecko: Sylabus + príklady (40 strán vo formáte A4)
http://sophia.dtp.fmph.uniba.sk/~fecko/teormech/primech11.pdf

[2] M.Fecko: Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov,
Bratislava, Iris 2004 (2.vydanie 2009)

[3] MacTutor History of Mathematics: Newton's bucket,
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Newton_bucket.html

[4] Wikipedia: Bucket argument,
https://en.wikipedia.org/wiki/Bucket_argument