Objemová („druhá") viskozita

Marián Fecko*
KTF&DF, FMFI UK, Bratislava

Na prednáške sme sa dozvedeli, že Navierova-Stokesova rovnica (na opis tečenia viskóznej tekutiny) obsahuje koeficient viskozity η. Ten charakterizuje, nakoľko je príslušná tekutina viskózna. Podrobnejší rozbor ukazuje, že také koeficienty sú až dva, η a ζ. Tomu druhému sa hovorí objemová (alebo druhá) viskozita. Tu si povieme, kde sa ten druhý koeficient naberie.

Obsah

*e-mail: `fecko@fmph.uniba.sk`

1 Úvod

V textoch [1], [2], [3] (a tiež v cca 10^6 ďalších) sa spomína základná pohybová rovnica hydrodynamiky viskóznej tekutiny, *Navierova-Stokesova rovnica*

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}.\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} p + \mathbf{g} + \frac{\eta}{\rho}(\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}.\mathbf{v}) + \triangle \mathbf{v}) \tag{1}$$

Zodpovedá *tenzoru napätia*

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \tag{2}$$

Tento tenzor (a následne aj tá pohybová rovnica) obsahuje *jedno* písmenko, charakterizujúce viskozitu tekutiny, a to (dynamický) *koeficient viskozity* η.

Keď však (z nedostatku inej rozumnej činnosti) nazriem aj do inej literatúry, napr. [4], [5], [6] (prípadne cca 10^5 ďalších), hneď to aj oľutujem. Navierova-Stokesova rovnica je tam totiž zložitejšia:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}.\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} p + \mathbf{g} + \frac{\frac{1}{3}\eta + \zeta}{\rho}\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}.\mathbf{v}) + \frac{\eta}{\rho}\triangle \mathbf{v} \tag{3}$$

Aj ona samozrejme má za sebou nejaký tenzor napätia. Zistím, že takýto

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) + \zeta \left(\delta_{ij}\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \tag{4}$$

Tento tenzor (a následne aj tá pohybová rovnica) obsahuje *až dve* písmenká, charakterizujúce viskozitu tekutiny, a to *dva* (dynamické) *koeficienty viskozity*, η a ζ. Novinkou je teda ten koeficient ζ. Zvykne sa volať *objemová* (alebo *druhá*) *viskozita*. (Volume, bulk, second viscosity.)

Všimnem si, že pre *nestlačiteľnú* tekutinu (napríklad vodu) k žiadnej zmene nedošlo. Nestlačiteľnosť ($\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0 =$ konšt.) totiž, ako vieme, urobí z rovnice kontinuity rovnicu

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{5}$$

a vtedy sa (1) a (2) ničím nelíšia od (3) a (4). To hovorí, že tá zmena sa môže *fyzikálne* prejaviť len pre stlačiteľné tekutiny, keď hrá úlohu *lokálna* zmena *objemov* tekutiny (z čoho zrejme aj pochádza názov *objemová* viskozita).

Cieľom tohto textíku je naznačiť, ako sa na taký výraz príde (využiť múdrosti, ktoré už vieme z *pružného* kontinua :-).

2 Ako sa na tú objemovú viskozitu príde

2.1 Ako sa prišlo na to pôvodné

Pripomeňme si, ako sme prišli na výraz (2) a kde v tej úvahe je nejaká rezerva, ktorej využitie dá viac.

Najprv sme si predstavili ustálené tečenie medzi (nekonečnou) zemou a (nekonečnou) vodorovnou doskou. Zem stojí a viskóznej kvapaline neostáva nič iné, ako v mieste dotyku so zemou tiež stáť (to hovoria okrajové podmienky pre rýchlostné pole viskóznej tekutiny). Ak sa nekonečná doska, položená na kvapaline, pohybuje rýchlosťou V v smere osi x, viskóznej kvapaline neostáva nič iné, ako v mieste dotyku s doskou mať tiež rýchlosťou V v smere osi x (opäť tie okrajové podmienky pre rýchlostné pole viskóznej tekutiny). V smere od zeme po dosku (čo stotožníme so smerom osi z) teda musí narásť rýchlosť od nuly po V. Pritom tá rýchlosť má všade smer osi x. Máme teda ansatz

$$\mathbf{v}(\mathbf{r},t) = (v(z),0,0) \equiv (v_1(x_3),0,0) \qquad v(0)=0 \quad v(h)=V \tag{6}$$

Toto tečenie si predstavíme ako pohyb jednotlivých vodorovných vrstiev vody šúchajúcich sa po sebe, pričom každá vrstva má danú rýchlosť (prúdenie je *laminárne*, lamina je po latinsky blanka, doštička, plátok).

Keďže rýchlosť vrstiev smerom hore stúpa a kvapalina je viskózna, susedné vrstvy sa navzájom silovo ovplyvňujú. Horná (s trochu väčšou hodnotou z) sa snaží dolnú ťahať smerom doprava (v smere osi x) a dolná sa zase snaží tú hornú brzdiť. Lenže keď horná vrstva ťahá spodnú doprava, odhaľuje tým nenulovosť (nediagonálnej!) zložky σ_{13} tenzora napätia:

$$\sigma_{13} \neq 0 \tag{7}$$

▼ Naozaj. Spomenieme si, že σ_{ij} je všeobecne i-ta zložka napätia (sila na plochu) na plôške s normálou v smere j-tej osi. Tu vidím na plôške s normálou v smere $z \equiv x_3$ (čiže $j=3$) *plošnú* silu (spôsobuje ju kontinuum tesne nad plôškou, bez neho by nebola) v smere osi x (a teda aj zložku napätia v smere osi x_1; teda $i=1$). S nulovým σ_{13} by toto nebolo možné. ▲

To σ_{13} je *koeficient úmernosti* medzi veľkosťou plôšky a príslušnou plošnou silou. Očakáva sa, že bude väčší, ak bude relatívna rýchlosť susedných vrstiev väčšia. To dáva ansatz

$$\sigma_{13} = k\partial_3 v_1 \ (= v'(z)) \tag{8}$$

kde k môže byť rôzne pre rôzne kvapaliny.

Tento výraz ale nie je symetrický (čo je povinnosť každého tenzora napätia). Jeho oprava na

$$\sigma_{13} = k(\partial_3 v_1 + \partial_1 v_3) \tag{9}$$

- formálne zachráni symetriu
- reálne nič nezmení (čo je dobre!), lebo ($v_3 = 0$)

Posledným krokom je smelé zovšeobecnenie (metódou IQ-testu) na

$$\sigma_{ij} = k(\partial_i v_j + \partial_j v_i) \tag{10}$$

a premenovanie konštanty k na η (predsa len, η vyzerá vedeckejšie):

$$\sigma_{ij} = \eta(\partial_i v_j + \partial_j v_i) \tag{11}$$

Toto je tenzor napätia výlučne *za viskozitu*. Keď sa k nemu pridá ešte časť, ktorá tam bola už aj bez viskozity (tenzor napätia *ideálnej* kvapaliny, $-p\delta_{ij}$), dostaneme vyjadrenie (2).

2.2 Ako sa príde na to všeobecnejšie

Ak sa chceme pohnúť ďalej, ako sme sa dostali v (11), urobíme dobre, keď si spomenieme na *Hookov zákon* (pozri napr. [7], \$3.1)

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \tag{12}$$

Ja viem, Hookov zákon je z pružného kontinua a my sme teraz v tekutinách. Všimol som si to. Ale niečo sa odtiaľ čmajznúť predsa len dá.

Tam sme hľadali *lineárnu* závislosť tenzora σ_{ij} na tenzore ϵ_{ij} a poučili sme sa, že taká závislosť je daná *tenzorom 4. rangu* C_{ijkl}. No a tu vlastne máme dosť podobný problém. *Viskózna časť* hľadaného tenzora napätia σ_{ij} je podľa (10) konštantným násobkom iného tenzora, a to tenzora $(\partial_i v_j + \partial_j v_i)$. Násobok konštantou je samozrejme tiež lineárnou závislosťou, ale iste nie najvšeobecnejšou. Mali by sme opäť pripustiť aj všeobecnejší výraz

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\partial_k v_l + \partial_l v_k) \tag{13}$$

Viskózne vlastnosti *tekutiny* sú potom zakódované do tenzora C_{ijkl} (podobne, ako boli v [7], 3.kapitola, do takého tenzora zakódované *pružné* vlastnosti kontinua).

Teraz si uvedomíme, že
- našu tekutinu považujeme za *homogénnu* a *izotropnú*
- preto *aj jej viskozita* by mala byť taká
- preto *aj tenzor* C_{ijkl} by mal byť taký
- našťastie to sme už skúmali v [7], \$3.2,
- zistili sme, že vôľa je len v dvoch konštantách
- takže odmastíme výsledok a „je vymaľované" :-)
- už vieme, prečo je viskozita daná *všeobecne dvoma* konštantami!

3 Dve časti viskózneho tenzora napätia

3.1 Ako to presne dopadne

Ako sa spomenulo vyššie, v texte [7], \$3.2, je odpoveď na to, ako vyzerá homogénny a izotropný tenzor C_{ijkl}. Tá odpoveď znie

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{14}$$

kde λ a μ sú dve *ľubovoľné konštanty.*

[Toto si zaslúži drobný komentár (tam neodznel, tak nech odzie aspoň tu, kde je asi dôležitejší). Tam sme dostali tento tvar nasadením istých povinných *symetrií* toho tenzora. (Obmedzili pôvodne tri ľubovoľné konštanty, dané len izotropiou a homogenitou, na len dve.) Keď sa však naozaj nasadia, zistí sa, že už jedna z nich vyrobí aj tie zvyšné dve automaticky. (Takže výsledok spĺňa všetky tri symetrie, ale keby sme dve z nich zabudli požadovať, vyšli by aj tak.) Tu určite potrebujeme symetriu $C_{ijkl} = C_{jikl}$ (lebo tenzor napätia musí byť symetrický) a *už len z nej* dostaneme výsledok (14). Takže nemáme mať obavy, že sme zobrali príliš špeciálny výsledok.]

Ak teraz použijeme tvar (14) v (13), dostaneme

$$\sigma_{ij} = 2\lambda\delta_{ij}(\partial_k v_k) + 2\mu(\partial_i v_j + \partial_j v_i) \tag{15}$$

Keď to porovnám s (4), zistím, že stačí preznačiť konštanty tak, aby platilo

$$2\mu = \eta \qquad 2\lambda = \zeta - \frac{2}{3}\eta \tag{16}$$

a výsledok (15) je totožný s (4).

3.2 Iný pohľad - je to súčet ireducibilných častí

Pozrime sa na *viskóznu časť* tenzora napätia (4)

$$\sigma_{ij}^{\text{visc}} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) + \zeta \left(\delta_{ij}\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \tag{17}$$

Označme

$$S_{ij} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \tag{18}$$

[Je symetrický (preto som použil písmeno S) a niekedy sa volá tenzor *rýchlosti deformácie* (*rate* of deformation). Samotný tenzor deformácie je rovnaký výraz, v ktorom je namiesto rýchlostného poľa $\mathbf{v}$ pole posunutí $\mathbf{u}$ (pozri napr. [7], \$2.1 a \$2.2). Keď si rozmyslím na intuitívnej úrovni vzťah medzi posunutím $\mathbf{u}$ a rýchlosťou $\mathbf{v}$, zistím, že ten názov nie je najhorší.]

Potom

$$\sigma_{ij}^{\text{visc}} = 2\eta \left(S_{ij} - \frac{1}{3}(\operatorname{Tr} S)\delta_{ij} \right) + \zeta(\operatorname{Tr} S)\delta_{ij} \tag{19}$$

kde

$$\operatorname{Tr} S \equiv S_{jj} = \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \equiv \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} \tag{20}$$

je *stopa* tenzora S.

Všimnem si, že samotný tenzor S_{ij} môžem rozložiť na súčet dvoch členov

$$S_{ij} = \left(S_{ij} - \frac{1}{3}(\operatorname{Tr} S)\delta_{ij} \right) + \frac{1}{3}(\operatorname{Tr} S)\delta_{ij} \tag{21}$$

Tej prvej veľkej zátvorke sa hovorí *bezstopová časť* tenzora S a zvyšku sa hovorí „*čistá stopa*" (úvodzovky preto, lebo stopa je prísne vzaté len ten skalár $\operatorname{Tr} S$ a tu je ešte vynásobený Kroneckerom a nejakou konštantou). Ako vidno, v tej bezstopovej časti sa od pôvodného S odčítal práve taký výraz, *aby* to malo dokopy *nulovú* stopu. Tá druhá časť zase nesie informáciu *len* o stope (Kronecker „je zadarmo").

Potom môžeme čítať výraz (19) takto:

1. zober tenzor S daný v (18)
2. rozlož ho na „bezstopovú časť plus čistú stopu"
3. urob *všeobecnú* lineárnu kombináciu týchto dvoch častí, pričom
4. koeficient pri prvej nazvi 2η a pri druhej 3ζ
5. to čo takto dostaneš je viskózna časť tenzora napätia

Celý tenzor si viem predstaviť rozložený kadejako (môže byť súčtom rôzneho počtu rôznych svojich častí). Čo je zaujímavé práve na rozklade na bezstopovú časť a stopu? To, že tento rozklad je *invariantný* voči vhodným zámenám bázy (a nimi indukovanými transformáciami komponent tenzora), čiže je v tomto zmysle *objektívny*.

▼ Naozaj. Ak chápem tenzor S ako *lineárny operátor* (tenzor typu (1,1), čiže s jedným horným a jedným dolným indexom S^i_j), tak transformačný predpis pre komponenty, zapísaný maticovo, je

$$S \mapsto S' = B^{-1}SB \tag{22}$$

Samotná stopa (ako číslo) nezávisí od výberu bázy

$$\operatorname{Tr} S' = \operatorname{Tr}(B^{-1}SB) = \operatorname{Tr}(BB^{-1}S) = \operatorname{Tr} S \tag{23}$$

Rozklad (21) je

$$S = M(S) + N(S) \equiv \left(S - \frac{1}{3}(\operatorname{Tr} S)\mathbb{I} \right) + \frac{1}{3}(\operatorname{Tr} S)\mathbb{I} \tag{24}$$

Ak uplatním pravidlo (22) na jednotlivé časti $M(S)$ a $N(S)$ tenzora S, dostanem

$$M(S) \;\mapsto\; B^{-1}\left(S - \frac{1}{3}(\operatorname{Tr} S)\mathbb{I} \right) B = S' - \frac{1}{3}(\operatorname{Tr} S')\mathbb{I} \tag{25}$$

$$N(S) \;\mapsto\; B^{-1}\left(\frac{1}{3}(\operatorname{Tr} S)\mathbb{I} \right) B = \frac{1}{3}(\operatorname{Tr} S')\mathbb{I} \tag{26}$$

čo sa dá zapísať aj takto:

$$M(S) \mapsto (M(S))' = M(S') \tag{27}$$
$$N(S) \mapsto (N(S))' = N(S') \tag{28}$$

Na tom je dôležité to, že „M-časť" z nového S potrebuje len dáta z M-časti starého S a podobne N-časť z nového S potrebuje len dáta z N-časti starého S. Tieto dve časti tenzora S sú teda definované invariantne. (A teda invariantne sú definované aj dve charakteristiky viskozity tekutiny.) Objektívny lineárny priestor takýchto tenzorov sa objektívne rozkladá na dva podpriestory (ľahko sa overí, že ide naozaj o podpriestory).

Povedané ináč: Celé S potrebuje 9 čísel v každej báze (matica 3 x 3). Tých 9 sa v danej báze delí na 8 (bezstopová časť) plus 1 (stopa). V inej báze je tiež delenie na 8 plus 1, ale - a *to* je netriviálne - pravidlo pre výrobu nových deviatich zo starých deviatich je také, že tých nových 8 potrebuje len tých starých 8 (pri nejakom blbom delení na 8 plus 1 by mohlo potrebovať všetkých 9) a to nové 1 potrebuje len to staré 1 (pri nejakom blbom delení na 8 plus 1 by aj to mohlo potrebovať všetkých 9).

Keby sme to celé robili pre *bilineárne formy* (tenzory typu (0,2), čiže s dvoma dolnými indexmi S_{ij}, aby mal dobrý zmysel pojem symetrický tenzor), išlo by to podobne (transformačný vzorec by obsahoval transponované B namiesto inverzného), len by sa bolo treba obmedziť na *ortogonálne* matice prechodu B. ▲

A kde je tam tá *ireducibilita* (spomínaná v názve)?

Ukazuje sa, že tie dva podpriestory sa už nedajú zmenšiť (ako invariantné).

Že to je tak pre ten *jednorozmerný* („čistú stopu") asi nie je prekvapením :-) Ale ono je to tak aj pre tú bezstopovú časť. Neexistuje ďalší rozklad už len tej bezstopovej časti, pri ktorom by sa tie časti transformovali len cez seba, čiže sa *nedá* napísať

$$M(S) = M_1(S) + M_2(S) \tag{29}$$

tak, aby platilo

$$M_1(S) \mapsto M_1(S') \tag{30}$$
$$M_2(S) \mapsto M_2(S') \tag{31}$$

4 C_{ijkl} a dva projektory v ňom

Všimnem si, že tie dve časti tenzora S_{ij} v rozklade (21) sa z neho dajú *vyprojektovať* vhodnými *projekčnými operátormi* (ktoré pôsobia v priestore 2-indexových tenzorov). Ich explicitný tvar vidno rovno z toho rozkladu

$$P^{(1)}_{ijkl} := \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \tag{32}$$
$$P^{(2)}_{ijkl} := \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \tag{33}$$

Platí teda

$$(P^{(1)}S)_{ij} \equiv P^{(1)}_{ijkl}S_{kl} \;=\; S_{ij} - \frac{1}{3}(\mathrm{Tr}\, S)\delta_{ij} \tag{34}$$

$$(P^{(2)}S)_{ij} \equiv P^{(2)}_{ijkl}S_{kl} \;=\; \frac{1}{3}(\mathrm{Tr}\, S)\delta_{ij} \tag{35}$$

Z toho, ako sa robí ten rozklad je asi zrejmé, že tie dva operátory sú naozaj projekčné

$$P^{(1)}P^{(1)} = P^{(1)} \tag{36}$$

$$P^{(2)}P^{(2)} = P^{(2)} \tag{37}$$

(Ak robím bezstopovú časť z niečoho, čo má nulovú stopu, nemusím robiť nič a už som hotový. Podobne ak chcem urobiť „čistú stopu" z niečoho, čo už je čistou stopou.) Navyše projektujú na podpriestory s nulovým prienikom a v súčte dávajú identitu

$$P^{(1)}P^{(2)} = 0 \tag{38}$$

$$P^{(1)} + P^{(2)} = \hat{1} \tag{39}$$

(To druhé platí len pri obmedzení sa na *symetrické* tenzory.)

4.1 Parametrizácia C_{ijkl} v hydrodynamike

Keď sa teraz pozriem na štruktúru (19) viskóznej časti tenzora napätia a zoberiem do úvahy výrazy (13), (18), (34) a (35), dostávam vyjadrenie

$$\sigma^{\mathrm{visc}} = C(S) \qquad C = 2\eta P^{(1)} + 3\zeta P^{(2)} \tag{40}$$

Je teda urobený takto:
- zoberie sa *tenzor rýchlosti deformácie* S (definovaný v (18))
- pustia sa naň *dva projektory* $P^{(1)}$ a $P^{(2)}$
- tie vyrobia jeho *bezstopovú časť* a *„čistú stopu"*
- urobí sa *všeobecná lineárna kombinácia* výsledkov ich pôsobenia
- η a ζ sú (modulo nejaké dvojky ...) presne koeficienty tej lineárnej kombinácie

Váha týchto dvoch koeficientov vo výslednom tenzore napätia je teda váhou akýchsi dvoch (z hľadiska viskozity) dôležitých charakteristík konkrétnej tekutiny, „dvoch viskozít", ktoré sa budú prejavovať v rôznych situáciách. (Pozri koniec paragrafu (4.2).)

4.2 Parametrizácia C_{ijkl} v lineárnej pružnosti

Snaha zapísať tenzor C z (14) v tvare $aP^{(1)} + bP^{(2)}$ vedie na $a = 2\mu$ a $b = 3\lambda + 2\mu$

$$C = 2\mu P^{(1)} + (3\lambda + 2\mu)P^{(2)} \tag{41}$$

Za zmienku stojí z tohto pohľadu fakt, ako sa vyjadruje cez λ a μ *nestlačiteľnosť* K (*bulk modulus*) z pružného kontinua (pozri napr. [7], \$4.3; veľkú nestlačiteľnosť K má materiál, ktorý reaguje (zmenou objemu) málo na *všestranný izotropný* tlak). Takto:

$$3K = 3\lambda + 2\mu \tag{42}$$

Čiže *túto* pružnú charakteristiku zaujíma *len* to, čo vytiahne z tenzora deformácie projektor $P^{(2)}$ (časť vytiahnutá projektorom $P^{(1)}$ tu nemá žiaden vplyv). No a ten vytiahne jeho *stopu*, ktorá dáva presne *objemovú dilatáciu*, čo je ... presne ono.

Druhý extrém je v *module pružnosti v šmyku* (*shear modulus*) G (pozri napr. [7], \$4.2; veľké G má materiál, ktorý reaguje málo na *čistý strih*, t.j. steny kocky sa málo zošikmia, keď na jej hornú stenu budem pôsobiť tangenciálnym napätím). Tu je to rovno

$$G = \mu \tag{43}$$

Tenzor C môžem teda parametrizovať aj ako

$$C = 2GP^{(1)} + 3KP^{(2)} \tag{44}$$

Z toho sa zrejme dá dedukovať (porovnaním s tvarom (40)) aj význam *viskóznych* koeficientov η a ζ:

- η je koeficient, ktorý cíti *strihovú deformáciu* pri tečení, zatiaľ čo
- ζ cíti *objemovú dilatáciu.*

[Pozriem sa na tekutinu v časoch t a $t + dt$ a interpretujem to, čo sa jej zatiaľ prihodilo, ako „deformáciu" ako keby pružného kontinua (transláciu a rotáciu ignorujem). Deformáciu rozdelím na strih a objemovú dilatáciu. Pružné by sa im bránilo pružnými silami, pričom intenzita jej obrany voči týmto dvom rôznym útokom je daná jej dvoma rôznymi koeficientami G a K). Tekutina sa im bráni *viskóznymi* silami a keďže útoky sú *tiež dvojaké*, má dve viskozity, jednu na zmiernenie strihu (kvantitatívne v koeficiente η) a druhú na zmiernenie objemovej dilatácie (kvantitatívne v koeficiente ζ).]

Poďakovanie

Ďakujem.

Literatúra

[1] D.Ilkovič: Fyzika I, Bratislava, SNTL, 1975 (\$ 7.7)
http://www.ujfi.fei.stuba.sk/fyzika-ilkovic-fyzika-1.php

[2] M.Fecko: Teoretická mechanika - Sylabus + príklady (40 strán)
http://davinci.fmph.uniba.sk/~fecko1/teormech/primech11.pdf
http://sophia.dtp.fmph.uniba.sk/~fecko/teormech/primech11.pdf

[3] M.Fecko: Teoretická mechanika - Osnova bakalárskej prednášky (7 strán)
http://davinci.fmph.uniba.sk/~fecko1/teormech/mechosnova.pdf
http://sophia.dtp.fmph.uniba.sk/~fecko/teormech/mechosnova.pdf

[4] L.D.Landau, E.M.Lifshitz: Fluid mechanics, Pergamon Press, 1959 ($ 15)

[5] Navier–Stokes equations, Wikipedia

[6] Volume viscosity, Wikipedia

[7] M.Fecko: Tenzor deformácie, Hookov zákon a tak ... (17 strán)
http://davinci.fmph.uniba.sk/~fecko1/teormech/tenzor_deformacie.pdf
http://sophia.dtp.fmph.uniba.sk/~fecko/teormech/tenzor_deformacie.pdf