Vzťah tenzorov T_{ij} a σ_{ij} v mechanike tekutín

Marián Fecko*

KTF&DF, FMFI UK, Bratislava

Cieľom je pozrieť sa vzťah tenzorov T_{ij} a σ_{ij}. Oba súvisia s bilanciou hybnosti tekutiny. Táto bilancia sa dá robiť buď pre objem, ktorý fixne stojí v priestore, alebo pre objem, ktorý cestuje spolu s vybranou hmotou. V prvom prípade vstúpi do hry tenzor hustoty toku hybnosti T_{ij}, v druhom tenzor napätia σ_{ij}, pričom súvisia vzťahom $T_{ij} = -\sigma_{ij} + \rho v_i v_j$.

Obsah

*e-mail: fecko@fmph.uniba.sk

1 Úvod

Cieľom je pozrieť sa vzťah tenzorov T_{ij} (tenzor hustoty toku hybnosti) a σ_{ij} (tenzor napätia), kde

$$T_{ij} = -\sigma_{ij} + \rho v_i v_j \tag{1}$$

pri opise tekutiny.
Vraj vyskočia pri *dvoch rôznych pohľadoch* na *bilanciu hybnosti*:

1. bilanciu pre objem fixovaný v priestore
2. bilanciu pre objem cestujúci spolu s kvapalinou

To vyzerá zaujímavo a láka to overiť. V rámci rozcvičky sa týmito dvoma pohľadmi pozriem na *hmotnosť*, po rozcvičke na hybnosť.

2 Hmotnosť

Pozrieme sa na dve rôzne vyjadrenia bilancie (tu zákona zachovania) *hmotnosti*.

Prvé vyplýva z pohľadu cez objem *zafixovaný v priestore* (cez ktorý tekutina preteká). Tu spomínaná bilancia (zákon zachovania) hovorí, že hmotnosť tekutiny v tomto objeme sa mení len o to, čo doňho vtečie alebo z neho vytečie.

Druhé zase z pohľadu cez objem *daný cestujúcou hmotou* tekutiny. Tu trváme na tom, že hmotnosť takého objemu je stále rovnaká.

Dostaneme tak *dve rôzne* vyjadrenia *rovnice kontinuity*.

2.1 Objem fixný v priestore

Toto je štandardná úvaha, ako sa to zvykne analyzovať.

Mám objem V *stojaci* v priestore. Hmotnosť v ňom je

$$m(t) := \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV \tag{2}$$

Keďže objem stojí v priestore a tekutina *cezeň preteká*, *nie* je dôvod, aby táto hmotnosť bola konštantná. Všeobecne závisí od času. A keď niečo závisí od času, cítime neodolateľné nutkanie zrátať *časovú deriváciu* toho niečoho. Čiže u nás veličinu $\dot{m}$.

Pri jej výpočte si spomeniem, že *jediné* miesto výskytu t v tom integráli je hustota hmotnosti ρ. Preto derivácia spred integrálu vstúpi do integrálu tak, že sa stane *parciálnou* (aplikovanou na ρ):

$$\dot{m}(t) \equiv \frac{d}{dt} m(t) \equiv \frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV = \int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV \tag{3}$$

A prečo sa vlastne mení hmotnosť v tom fixnom objeme? Lebo tekutina cezeň *prúdi*, teda vteká a vyteká. Takže ak *celkovo* viac (hmotnosti) vtečie ako vytečie, hmotnosť sa zvýši a ak to je naopak, hmotnosť sa zníži.

Ľahko sa zráta, koľko hmotnosti *celkovo vytečie* [1] za čas ϵ. Je to zjavne

$$dm \equiv \epsilon \int_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \tag{4}$$

▼ Výraz

$$\epsilon \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \tag{5}$$

dáva *objem* tekutiny, ktorá za čas ϵ vytečie cez kúsok hranice $d\mathbf{S}$. Po násobení hustotou ρ dostaneme *hmotnosť* tej istej tekutiny a po preintegrovaní cez celú hranicu dostaneme *celkovú* vytečenú *hmotnosť*. ▲

Ak toľko vytieklo, hmotnosť sa musela zmeniť takto:

$$m(t) \mapsto m(t) - dm = m(t) - \epsilon \int_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \tag{6}$$

Zároveň to je (z definície derivácie a výsledku (3)) takto:

$$m(t) \mapsto m(t+\epsilon) = m(t) + \epsilon\, \dot{m}(t) = m(t) + \epsilon \int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r},t)}{\partial t} dV \tag{7}$$

Porovnanie (6) a (7) dáva

$$\int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r},t)}{\partial t} dV + \int_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0 \tag{8}$$

Gaussova veta (aplikovaná na druhý člen) vedie na

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) dV = 0 \tag{9}$$

a keďže objem V je ľubovoľný, tak napokon zostane

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \qquad \textit{rovnica kontinuity}} \tag{10}$$

2.2 Objem cestujúci s tekutinou (material volume)

Nahraďme teraz objem V *stojaci* v priestore objemom $V(t)$, ktorý sa *hýbe spolu s tekutinou*. Cez jeho hranicu teda *nič nepreteká*. (*Aj hranica* sa hýbe spolu s tekutinou, teda *relatívna* rýchlosť tekutiny a hranice je v každom bode hranice nulová; nič teda cez ňu nepreteká). Hmotnosť v tomto objeme je

$$m(t) := \int_{V(t)} \rho(\mathbf{r}, t) dV \tag{11}$$

[1] *Znamienko* rozhoduje, či to vlastne vtieklo alebo vytieklo. Ak je ten integrál *kladný*, tak celkovo *vytieklo* (lebo $\mathbf{n}$ v $d\mathbf{S} = dS\mathbf{n}$ je *vonkajšia* normála), ak záporný, tak vtieklo.

Keďže sa objem hýbe spolu s tekutinou, tekutina z neho nevyteká ani doňho nevteká a tak *nie je dôvod*, *aby* táto hmotnosť *závisela* od času. (Samozrejme ak vylúčime, že fixné množstvo tekutiny je schopné zmeniť svoju hmotnosť, t.j. ak *predpokladáme zákon zachovania hmotnosti*.)

Tu teda „vieme" (zo zákona zachovania hmotnosti), že *časová derivácia* $\dot{m}$ je *nulová*.

$$\dot{m}(t) \equiv \frac{d}{dt}m(t) = 0 \tag{12}$$

Predsa ju ale skúsime formálne vyrátať!

Načo, keď vieme že je nulová? No aby sme *z podmienky jej nulovosti* dostali nejakú užitočnú rovnicu (tá rovnica bude zrejme hovoriť, že hmotnosť sa zachováva).

Výpočet časovej derivácie integrálu, v ktorom *aj integračná oblasť* závisí od času, nie je až taký známy, ako keď je tá oblasť statická (a kde sa to zvrhne na parciálnu deriváciu podintegrálnej funkcie) Ale nie je ani neznámy. Túto vec si za nás vyjasnil už v roku 1903 Reynolds [5] a výsledok je známy ako *Reynoldsova transportná veta*:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho(\mathbf{r}, t)dV = \int_{V(t)} \frac{\partial\rho(\mathbf{r},t)}{\partial t}dV + \oint_{\partial V(t)} \rho\mathbf{v}\cdot d\mathbf{S} \tag{13}$$

[Toto je jej zápis pre *objemové* integrály. Existujú aj verzie, pre plošné či krivkové. Všeobecný tvar aj jeho špeciálne prejavy možno nájsť (aj s dôkazom v jazyku diferenciálnych foriem) napr. v texte [6], a to v časti 2.3.1.

Nový oproti výsledku (3) je teda ten druhý člen, daný plošným integrálom po momentálnej hranici (hranici v čase t). Pole $\mathbf{v}$ je *všeobecne* v transportnej vete rýchlosť *hranice*, ale keďže my uvažujeme objem cestujúci s tekutinou, rýchlosť hranice je totožná s rýchlosťou tekutiny na hranici a teda v našom prípade je to $\mathbf{v}$ obyčajné rýchlostné pole *tekutiny*.]

Ak druhý člen - plošný integrál - prerobím Gaussovou vetou na objemový, dostanem

$$\dot{m} \equiv \frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho(\mathbf{r}, t)dV = \int_{V(t)} \left(\frac{\partial\rho(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v})\right) dV \tag{14}$$

Keďže celý integrál má byť podľa (12) nulový a objem je ľubovoľný, *opäť* dostávame

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0 \qquad \textit{rovnica kontinuity}} \tag{15}$$

Rovnica vyšla rovnaká, aj keď úvaha bola o dosť iná. Čo je dobre.

2.2.1 To isté pseudo-ľudovo

Uvažujem objem dV s hmotnosťou dm, ako tak cestuje po svojej „trajektórii" v tekutine (čiže opäť objem cestujúci s tekutinou, material volume). Jeho hmotnosť sa po ceste nemení (ak hmota po ceste nevzniká z vákua či sa nemení na vákuum), ale jeho objem (a teda aj hustota) sa meniť môže (ak je tekutina stlačiteľná).

Nemennosť jeho hmotnosti po ceste môžem zapísať ako *nulovosť časovej derivácie*, ak pod ňou chápem „konvektívnu" (materiálovú, úplnú, ...) časovú deriváciu. Teda takú, ktorá porovnáva stav teraz tu a o chvíľu *o kúsok ďalej* (a nie o chvíľu *tu*).

Vtedy môžem písať

$$0 = (dm)^{\cdot} = (\rho dV)^{\cdot} = \dot{\rho}\, dV + \rho (dV)^{\cdot} \tag{16}$$

a teda

$$\boxed{\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\frac{(dV)^{\cdot}}{dV}} \tag{17}$$

To, čo sme takto dostali, musí byť *tiež* rovnica kontinuity (ekvivalentná rovnici (10) a (18)), keďže sme to tiež dostali z podmienky zachovania hmotnosti. [2]

Na to, aby sme nahliadli, že veru je, si potrebujeme uvedomiť dve veci.

1. Tá bodka vľavo je *konvektívna* derivácia funkcie ρ, čiže $(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla)\rho$
2. Zlomok vpravo je presne *divergencia* $\nabla \cdot \mathbf{v}$

[Fakt z bodu 1. je zo zmyslu veci. Fakt z bodu 2. sa dá nájsť napríklad v knihe [7] (ako úloha 8.2.2). Je to *interpretácia divergencie* vektorového poľa ako *rýchlosti relatívnej zmeny objemu* pri toku generovanom tým poľom. Práve pre toto odskočenie do literatúry to volám *pseudo*-ľudové, okrem tohto miesta to je ľudové.]

Ak tieto dva fakty zamontujeme do rovnice (17), dostaneme

$$\boxed{\frac{\dot{\rho}}{\rho} \equiv \frac{\partial_t \rho + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho}{\rho} = -\nabla \cdot \mathbf{v} \qquad \textit{rovnica kontinuity}} \tag{18}$$

v čom *naozaj* rýchlo spoznávame (10) a (18).

3 Hybnosť

Pozrieme sa na dve rôzne vyjadrenia bilancie *hybnosti*.

Tentokrát prvé bude pre objem *daný cestujúcou hmotou*, druhé z pohľadu objemu tekutiny *zafixovaného v priestore* (cez ktorý tekutina preteká). Dostaneme tak *dve rôzne* vyjadrenia *pohybovej rovnice* tekutiny (špeciálne pre *ideálnu* tekutinu *Eulerovej* rovnice).

[2] Všimneme si rozumnú črtu znamienka mínus: keď sa objem zmenšuje, hustota stúpa, keď sa objem zväčšuje, hustota klesá.

3.1 Objem cestujúci s tekutinou (material volume)

Postupujem podobne ako v odseku 2.2.1, teda pseudo-ľudovo.

Uvažujem *infinitezimálny* objem dV s hmotnosťou dm, ako tak cestuje po svojej „trajektórii" v tekutine (čiže opäť objem cestujúci s tekutinou, material volume, ale navyše infinitezimálny). Bilancia jeho hybnosti: Jeho hybnosť sa po ceste *mení*, akk naňho pôsobí *sila*. A to podľa *Newtonovej rovnice*

$$\dot{p}_i = F_i \tag{19}$$

Zrátajme najprv jej ľavú stranu:

$$\dot{p}_i = (dm\ v_i)^{\cdot} = (dm)^{\cdot} v_i + dm\ \dot{v}_i = dm\ \dot{v}_i \equiv dm\ a_i \tag{20}$$

(po ceste som využil *rovnicu kontinuity* v tvare $(dm)^{\cdot} = 0$, pozri (16)). Pritom to $\dot{v}_i \equiv a_i$ je opäť *konvektívna* časová derivácia, čiže

$$\dot{p}_i = dm(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) v_i \tag{21}$$

Na výpočet pravej strany (19) sa najprv na chvíľu vrátim k „veľkému" objemu V (namiesto „malého" dV). Celková sila je z dvoch častí, objemová a plošná:

$$F_i = \int_V f_i dV + \int_{\partial V} \sigma_{ij} dS_j \tag{22}$$

Význam písmenok:

$$f_i \quad : \quad i\text{-ta komponenta hustoty objemovej sily} \tag{23}$$

$$\sigma_{ij} \quad : \quad i\text{-ta komponenta plošnej sily na jednotkovej } j\text{-tej plôške} \tag{24}$$

čiže

$$f_i dV \quad : \quad i\text{-ta komponenta objemovej sily pôsobiacej na objem } dV \tag{25}$$

$$\sigma_{ij} dS_j \quad : \quad i\text{-ta komponenta plošnej sily na plôške } d\mathbf{S} \tag{26}$$

Mená: f_i je *hustota objemovej sily*, σ_{ij} je *tenzor napätia* (*stress tensor*).)

Gaussova veta aplikovaná na druhý integrál dáva

$$F_i = \int_V (f_i + \sigma_{ij,j}) dV \tag{27}$$

Plošný integrál zmizol, plošná sila sa nahradila *dodatočnou efektívnou objemovou.*

Teraz sa vrátim k „malému" objemu a pravú stranu (19) zapíšem v tvare

$$F_i = (f_i + \sigma_{ij,j}) dV \tag{28}$$

(čiže jednoducho zmažem znak integrálu). Po dosadení (21) a (28) do (19) dostávam

$$dm(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) v_i = dV (f_i + \sigma_{ij,j}) \tag{29}$$

a keďže $dm = \rho dV$, tak sme *pohybovú rovnicu tekutiny* dostali v tvare

$$\boxed{\rho(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) v_i = f_i + \sigma_{ij,j}} \tag{30}$$

3.2 Objem fixný v priestore

Lokálny zákon zachovania hybnosti pre kontinuum vyzerá takto:

$$\boxed{\partial_t \pi_i + T_{ij,j} = 0} \tag{31}$$

Pritom interpretácia vstupujúcich členov je:

$$\pi_i \quad : \quad i\text{-ta komponenta hustoty hybnosti} \tag{32}$$

$$T_{ij} \quad : \quad i\text{-ta komponenta toku hybnosti cez jednotkovú } j\text{-tu plôšku} \tag{33}$$

čiže

$$\pi_i dV \quad : \quad i\text{-ta komponenta hybnosti v objeme } dV \tag{34}$$

$$T_{ij} dS_j \quad : \quad i\text{-ta komponenta toku hybnosti cez plôšku } d\mathbf{S} \tag{35}$$

Ten lokálny zákon vznikne Gaussovou vetou z integrálnej bilancie hybnosti vo fixnom, nepohyblivom objeme V

$$\frac{d}{dt}\int_V \pi_i dV + \int_{\partial V} T_{ij} dS_j = 0 \tag{36}$$

(Rovnica (31) má štruktúru *rovnice kontinuity* pre *vektorovú* veličinu.)

Pre tekutinu máme prirodzenú voľbu

$$\pi_i := \rho v_i \tag{37}$$

Trochu menej je ale jasné, ako by mal vyzerať *tenzor hustoty toku hybnosti* (*momentum flux density tensor*) T_{ij}. Skúsim to zistiť z dvoch predpokladov:

1. platí rovnica kontinuity (18) (čiže lokálne sa zachováva hmotnosť)
2. platí pohybová rovnica (30) (čiže bilancia hybnosti kúska dm podľa Newtona)

(Čiže predpokladám, že viem urobiť bilanciu hmotnosti a hybnosti pre *cestujúci* objem a snažím sa odvodiť výraz pre T_{ij} v rovnici (31), čo je bilancia hybnosti pre *stojaci* objem. Tá bilancia spočíva v tom, že zmena hybnosti v tomto objeme sa deje len preto, že tam nejaká hybnosť vtečie a nejaká odtiaľ vytečie. Čiže v tvrdení o lokálnom zákone zachovania.)

Prvý člen v (31) dopadne pre π_i z (37) takto

$$\partial_t \pi_i = \partial_t(\rho v_i) = (\partial_t \rho) v_i + \rho(\partial_t v_i) \tag{38}$$

Prvú zátvorku vyjadrím z (18), druhú z (30) a dostanem (po vykrátení nejakých členov) toto:

$$\partial_t \pi_i = f_i + \partial_j(\sigma_{ij} - \rho v_i v_j) \tag{39}$$

Ak chcem (v zmysle (31)), aby to bolo $-\partial_j T_{ij}$, dostanem podmienku

$$f_i + \partial_j(\sigma_{ij} - \rho v_i v_j + T_{ij}) = 0 \tag{40}$$

Pre *potenciálové* silové pole f_i

$$f_i = -\partial_i \Phi \tag{41}$$

bude

$$\partial_j(\sigma_{ij} - \rho v_i v_j + T_{ij} - \Phi \delta_{ij}) = 0 \tag{42}$$

odkiaľ mám jednoduché riešenie pre hľadané T_{ij}:

$$\boxed{T_{ij} = -\sigma_{ij} + \rho v_i v_j + \Phi \delta_{ij}} \tag{43}$$

Platí aj opačné tvrdenie: pre *toto* T_{ij} (a voľbu (37) pre π_i) dá lokálny zákon zachovania hybnosti (31) pohybovú rovnicu tekutiny (30). (Treba využiť aj lokálny zákon zachovania hmotnosti, čiže rovnicu kontinuity (18).)

Poďakovanie

Ďakujem Vladovi Balekovi za diskusiu, v ktorej sa vyjasnila pointa tohto textu.

Literatúra

[1] Landau, L.D., Lifshitz, E.M., Fluid Mechanics, Pergamon Press (Second Edition) (1987)

[2] M.Brdička: Mechanika kontinua, ČSAV, Praha 1959

[3] D.Ilkovič: Fyzika I, Bratislava, SNTL, 1975
http://www.ujfi.fei.stuba.sk/fyzika-ilkovic-fyzika-1.php

[4] M.Fecko: Sylabus + príklady z teoretickej mechaniky (40 strán)
http://sophia.dtp.fmph.uniba.sk/~fecko/teormech/primech11.pdf
http://davinci.fmph.uniba.sk/~fecko1/teormech/primech11.pdf

[5] Reynolds O., Papers on mechanical and physical subjects-the sub-mechanics of the Universe, Collected Work, Volume III, Cambridge University Press, (1903)

[6] M.Fecko: Modern geometry in not-so-high echelons of physics
Acta Physica Slovaca Vol. 63 No. 5, 261 – 359 (2013)
http://www.physics.sk/aps/index.php?page=previous
http://davinci.fmph.uniba.sk/~fecko1/papers/2013_APS_66_5_261.pdf

[7] M.Fecko: Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov,
Bratislava, Iris 2004 (2.vydanie 2009)