Foucaultovo kyvadlo poruchovo

Marián Fecko, 7.decembra 2005

(Pokračovanie riešenia úlohy 9.10., kde sa to počíta trochu ináč.)

V úlohe 9.10 v texte [1] sa príde (na str. 32; pozri tiež prílohu tu na konci) k rovnici

$$w'' + w = -i\varepsilon w' \tag{1}$$

Ak parametrizujeme neznámu komplexnú funkciu $w(\tau)$ pomocou $r(\tau)$ a $\varphi(\tau)$

$$w(\tau) = r(\tau)e^{i\varphi(\tau)} \tag{2}$$

tak dostaneme

$$w' = e^{i\varphi}(r' + ir\varphi') \qquad w'' = e^{i\varphi}(r'' + 2ir'\varphi' + ir\varphi'' - r(\varphi')^2)$$

a (1) prejde na sústavu dvoch rovníc (reálna a imaginárna časť komplexnej rovnice)

$$r'' + r - r(\varphi')^2 = \varepsilon r\varphi' \tag{3}$$

$$r\varphi'' + 2r'\varphi' = -\varepsilon r' \tag{4}$$

Riešenie tejto sústavy ideme hľadať v tvare mocninných radov

$$r(\tau) = r_0(\tau) + \varepsilon r_1(\tau) + \varepsilon^2 r_2(\tau) + \dots \tag{5}$$

$$\varphi(\tau) = \varphi_0(\tau) + \varepsilon\varphi_1(\tau) + \varepsilon^2\varphi_2(\tau) + \dots \tag{6}$$

(poruchová metóda). Dosadenie radov (5) a (6) do rovníc (3) a (4) a požiadavka vynulovania výrazov pri jednotlivých mocninách premennej ε dá príslušnú nekonečnú reťaz rovníc. Konkrétne pri prvých dvoch (nultej a prvej) vychádzajú sústavy rovníc

$$\text{pri } \varepsilon^0: \qquad r_0'' + r_0 - r_0(\varphi_0')^2 = 0 \tag{7}$$

$$r_0\varphi_0'' + 2r_0'\varphi_0' = 0 \tag{8}$$

$$\text{pri } \varepsilon^1: \qquad r_1'' + r_1 - (r_1(\varphi_0')^2 - 2r_0\varphi_0'\varphi_1') = r_0(\varphi_0')^2 \tag{9}$$

$$r_0\varphi_1'' + r_1\varphi_0'' + 2(r_0'\varphi_1' + r_1'\varphi_0) = -r_0' \tag{10}$$

Sústava (7), (8) zodpovedá *neporušenej úlohe* (je to (3), (4) s nulovým ε, t.j. *bez Coriolisovej sily*).

Sústava (9), (10) dá *prvú opravu* za Coriolisovu silu.

Neporušená sústava (7), (8) síce budí hrôzu, ale sú na to celkom dobré dôvody: opisuje zhruba milión riešení (kadejaké zložité pohyby), ktoré nás nezaujímajú. Nás zaujíma *len jedno* jej riešenie: *rovinné* kmity, ktoré vzniknú vychýlením kyvadla v x-ovom smere. (Keďže neporušená sústava ignoruje Coriolisovu silu, *aj samotné kmity* (nielen počiatočné vychýlenie) sa dejú pozdĺž x-ovej osi.)

Hľadá sa teda jej riešenie s počiatočnými podmienkami

$$r_0(0) = 1 \qquad r_0'(0) = 0 \qquad \varphi_0(0) = 0 \qquad \varphi_0'(0) = 0 \tag{11}$$

(T.j. kyvadlo vychýlime o l pozdĺž x-ovej osi a v čase $\tau = 0$ ho pustíme. Je to to l, ktoré vstupuje do definícií preškálovaných súradníc, t.j. $x + iy = l(\xi + i\eta) \equiv lw$, kde (x, y) dávajú polohu kyvadla pri pohľade zhora.)

Riešenie neporušenej sústavy (7), (8) s počiatočnými podmienkami (11) je

$$r_0(\tau) = \cos\tau \qquad \varphi_0(\tau) = 0 \tag{12}$$

Ak teraz *toto* riešenie dosadíme do sústavy, ktorá zodpovedá oprave prvého rádu (t.j. do rovníc (9) a (10)), dostaneme

$$r_1'' + r_1 = 0 \tag{9'}$$

$$\cos\tau(\varphi_1'') - \sin\tau(1 + 2\varphi_1') = 0 \tag{10'}$$

Zaujímavé pre nás by bolo takéto jej riešenie: v radiálnej premennej by bežalo všetko po starom (nediala by sa žiadna oprava), ale uhlová premenná φ by už po oprave nebola stále nulová (ako v (12)), ale *rovnomerne by rástla* (rovina kyvu by sa *rovnomerne stáčala*). Skúsime teda *ansatz*

$$r_1(\tau) = 0 \qquad \varphi_1(\tau) = \lambda\tau \tag{13}$$

Dosadenie do (9') a (10') ukazuje, že ansatz prejde pre hodnotu $\lambda = -1/2$, t.j.

$$r_1(\tau) = 0 \qquad \varphi_1(\tau) = -\tau/2 \tag{14}$$

je riešenie ($\varphi_1(\tau)$ vtedy vynuluje obe zátvorky v (11').)

Spolu riešenie *do prvého rádu* v ε vyzerá

$$r(\tau) = r_0(\tau) + \varepsilon r_1(\tau) = \cos\tau \tag{15}$$

$$\varphi(\tau) = \varphi_0(\tau) + \varepsilon\varphi_1(\tau) = -\varepsilon\tau/2 \tag{16}$$

Keď sa vrátime k „naozajstnému" času t (t.j. položíme $\tau = \omega_0 t = t\sqrt{l/g}$) a dosadíme explicitné vyjadrenie malého parametra ε (t.j. $\varepsilon = (2\omega/\omega_0)\sin\alpha$), dostaneme

$$r(t) = \cos(\omega_0 t) \tag{17}$$

$$\varphi(t) = (-\omega\sin\alpha)t \equiv -\Omega t \tag{18}$$

Jeho vyjadrenie v pôvodnom jazyku (x, y) je

$$x(t) + iy(t) = lr(t)e^{i\varphi(t)} = l\cos(\omega_0 t)e^{-i\Omega t} \tag{19}$$

Toto riešenie opisuje *rýchle kmitanie* kyvadla (s uhlovou frekvenciou ω_0, rádovo (sekunda)$^{-1}$), kombinované s *pomalým otáčaním* jeho roviny kyvu (s uhlovou frekvenciou $\Omega = \omega\sin\alpha$, rádovo (deň)$^{-1}$)) v smere hodinových ručičiek.

Čas T, za ktorý sa rovina otočí o 360 stupňov sa získa z rovnice $\varphi(t + T) = \varphi(t) + 2\pi$ a vychádza

$$T = \frac{2\pi/\omega}{\sin\alpha} = \frac{\frac{2\pi}{2\pi/1 \text{ deň}}}{\sin\alpha} = \frac{1 \text{ deň}}{\sin\alpha} \tag{20}$$

(Nezabúdajme ale, že *rovina* kývania bude rovnaká už po otočení o 180 stupňov (!), čo sa udeje už po *polovičnom* čase :-)

Príloha: Ako to je v pôvodnom texte [1]

Pre pohodlie čitateľa (a menovateľa rôzneho od nuly) uvádzame doslovné znenie úlohy 9.10 v texte [1]:

$\boxed{9.10}$ Vypočítať efekt stáčania roviny (malých) kmitov Foucaultovho kyvadla v 1.ráde poruchovej teórie. Za aký čas sa kyvadlo otočí dookola?
Návod: podľa (8.3) je sférické kyvadlo v priblížení malých kmitov izotrópny oscilátor s frekvenciou $\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{g}{l}}$, t.j. $\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = 0$ ($\mathbf{r} \equiv (x, y)$). Na točiacej sa Zemi pristúpi (9.6) *Coriolisova sila* (jej zložka v rovine xy), t.j.

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = -2(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}})_\perp$$

($()_\perp$ je zložka $\perp$ na $\mathbf{e}_3$, t.j. v rovine xy).
i) ukázať, že rovnice sú

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 2\omega\sin\alpha\ \dot{y}$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = -2\omega\sin\alpha\ \dot{x}$$

ii) prejsť k bezrozmerným premenným $\xi \equiv \frac{x}{l}, \eta \equiv \frac{y}{l}, \tau \equiv \frac{t}{t_0} \equiv \omega_0 t$ a získať

$$\xi'' + \xi = \varepsilon\eta'$$

$$\eta'' + \eta = -\varepsilon\xi'$$

kde $\varepsilon = 2\frac{\omega}{\omega_0}\sin\alpha$
iii) odhadnúť veľkosť (bezrozmernej) konštanty ε pre kyvadlá bežných veľkostí v našich zemepisných šírkach a legalizovať tak použitie poruchovej metódy
iv) zaviesť $w \equiv \xi + i\eta$ a ukázať, že *ii*) je ekvivalentné

$$w'' + w = -i\varepsilon w'$$

To je rovnica s konštantnými koeficientami. Riešenie hľadať v tvare $w(\tau) = w(0)e^{\alpha\tau}$, využiť $\varepsilon \ll 1$ a ukázať, že $w(\tau) \doteq e^{-i\frac{\varepsilon}{2}\tau}(c_1 e^{i\tau} + c_2 e^{-i\tau}) \equiv e^{-i\frac{\varepsilon}{2}\tau} w_0(\tau)$, kde w_0 je riešenie pre $\varepsilon = 0$.
v) dokázať, že dookola sa rovina kyvov otočí za čas $\bar{t} = \frac{1 \text{ deň}}{\sin\alpha}$. Vysvetliť výsledok pre severný pól z pohľadu *inerciálneho* (netočiaceho sa so Zemou) pozorovateľa.

Literatúra

[1] M.Fecko: Rozšírený sylabus a príklady k prednáške Teoretická mechanika,
http://sophia.dtp.fmph.uniba.sk/~fecko/teormech/primech11.pdf
http://davinci.fmph.uniba.sk/~fecko1/teormech/primech11.pdf