Lagrangeove rovnice 1.druhu

Marián Fecko[*]
KTF, FMFI UK, Bratislava

Na prednáške sme sa dosť obšírne venovali Lagrangeovým rovniciam a dozvedeli sme sa, že v jemnejšom názvosloví sa im hovorí Lagrangeove rovnice *druhého druhu*. Ako vedci, ktorých kľúčovou povahovou črtou je zvedavosť, sme boli zvedaví, prečo sme sa najprv nevenovali Lagrangeovým rovniciam *prvého* druhu. K tejto otázke nás dokopala aj druhá kľúčová povahová črta nás vedcov, snaha mať v hlave poriadok (alebo sa o to aspoň snažiť).

Tu sa trochu na tie Lagrangeove rovnice *prvého* druhu pozrieme. Okrem iného aj preto, aby sme dali za pravdu názoru, že tie rovnice *druhého* druhu sú naozaj *oveľa zaujímavejšie a dôležitejšie.*

Obsah

[*]e-mail: `fecko@fmph.uniba.sk`

1 Úvod

Často sa stáva, že v mechanike treba riešiť *Newtonove* rovnice v situácii, keď sú polohy vstupujúcich hmotných bodov *viazané*.

Ak ide o *holonómne väzby*, teda väzby tvaru [1]

$$\Phi_1(\boldsymbol{r}_1, \dots, \boldsymbol{r}_N) = 0 \tag{1}$$

$$\vdots \tag{2}$$

$$\Phi_k(\boldsymbol{r}_1, \dots, \boldsymbol{r}_N) = 0 \tag{3}$$

tak existuje niekoľko možností, ako postupovať.

Zaslúžene najobľúbenejší je postup známy ako *Lagrangeove rovnice 2.druhu*. Týmto rovniciam sa podrobne venujeme na prednáške (a voláme ich, ako je to vo fyzike zvykom, len *Lagrangeove rovnice*).

V tomto texte sa pozrieme aj na ďalšie dva postupy, a to na

- *D'Alembertov-Lagrangeov princíp* a
- *Lagrangeove rovnice 1.druhu.*

Prvý z nich sa na prednáške objavuje tiež, ale len na chvíľu. *Z neho* sa odvodia Lagrangeove rovnice *2.druhu* a tým sa jeho minúta slávy končí.

Ešte horšie dopadnú Lagrangeove rovnice *1.druhu*, o ktorých na prednáške nehovoríme *nič*. Dá sa povedať, že práve pre zoznámenie sa s týmito rovnicami vznikol tento text. To ostatné tú slúži len pre celkový kontext a porovnanie.

A výsledkom toho porovnania by mal byť záver, že tie priority na prednáške hádam až také zlé nie sú. Že do života si treba odniesť *hlavne* tie Lagrangeove rovnice *2.druhu.*

2 D'Alembertov-Lagrangeov princíp

Pripomeňme si stručne, čo to je *D'Alembertov-Lagrangeov princíp.*

Začnime *Newtonovými rovnicami*

$$\dot{\overline{p}} = \overline{F} \tag{4}$$

[Používame symboliku „paličkových" vektorov (v priestore $\mathbb{R}^{3N}$), ktoré „zjednocujú" obyčajné trojrozmerné vektory (v priestore $\mathbb{R}^3$)

$$\overline{p} \equiv (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) \qquad \overline{F} \equiv (\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_N) \qquad \overline{r} \equiv (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \tag{5}$$

[1] Zaujímavou alternatívou sú *neholonómne* väzby, ktoré viažu okrem *polôh* hmotných bodov aj ich *rýchlosti*. Takéto väzby vznikajú napríklad zápisom podmienky *bezšmykového kontaktu* telies, okrem iného pri opise pohybu kolesa na ceste, pozri [2] a [3]. Mechanika s neholonómnymi väzbami je všeobecne výrazne komplikovanejšia, ako tá, o ktorej budeme hovoriť tu.

zodpovedajúce N individuálnym hmotným bodom.]

Niekedy pre sústavu nie je dostupná každá konfigurácia $\overline{r}$, lebo sú prítomné (holonómne) *väzby* (1) - (3), t.j. stručne

$$\Phi_\alpha(\overline{r}) = 0 \qquad \alpha = 1, \dots, k \tag{6}$$

Vtedy Newtonovu rovnicu spresníme takto:

$$\dot{\overline{p}} = \overline{F} = \overline{F}^{(a)} + \overline{F}^{(r)} \tag{7}$$

Celkovú silu $\overline{F}$ sme rozdelili na *aktívnu* silu $\overline{F}^{(a)}$ (to je tá časť, ktorá by tam bola, aj keby sme - v mysli - väzby zrušili) a *reakciu väzieb* $\overline{F}^{(r)}$ (časť, ktorá by tam bola, keby sme - v mysli - zrušili aktívnu silu).

[Napríklad pre matematické kyvadlo by prvá mentálna operácia znamenala prestrihnutie paličky, na ktorej kyvadlo visí a druhá v zrušení gravitačného poľa, t.j. napríklad prenesení kyvadla do bezváhového stavu v orbitálnej stanici krúžiacej okolo Zeme. (V oboch prípadoch sa z kyvadla stane nekyvadlo.)]

Nepríjemnou časťou sily (ťažko sa explicitne vyjadruje) je práve tá reakcia väzieb $\overline{F}^{(r)}$.

Pripomeňme si, že *konfiguračný priestor* M je množina bodov, do ktorých sa sústava môže naozaj dostať, teda ktoré *vyhovujú väzbám* Φ_α:

$$M = \{\overline{r} \in \mathbb{R}^{3N} \| \boxed{\Phi_\alpha(\overline{r}) = 0}\} \subset \mathbb{R}^{3N} \tag{8}$$

Geometricky vzaté je to M *plocha* v kartézskom priestore $\mathbb{R}^{3N}$.

Ďalej sa zavádza pojem *viruálneho posunutia* $\delta\overline{r}$: Ide o infinitezimálne posunutie z jedného bodu konfiguračného priestoru do druhého - blízkeho - bodu konfiguračného priestoru:

$$\Phi_\alpha(\overline{r}) = 0 \qquad \Phi_\alpha(\overline{r} + \delta\overline{r}) = 0 \tag{9}$$

takže symbolicky môžeme napísať, že

$$\delta\overline{r} \ \parallel \ M \tag{10}$$

(t.j. že vektor $\delta\overline{r}$ ide „v smere plochy" M). Z (9) okamžite dostávame (Taylorov rozvoj do 1.rádu) podmienku

$$\boxed{\delta\overline{r} \cdot \overline{\nabla}\Phi_\alpha = 0} \tag{11}$$

Sila $\overline{F}^{(r)}$, teda reakcia väzieb, je *kolmá* (v zmysle $\mathbb{R}^{3N}$) na plochu $M \subset \mathbb{R}^{3N}$

$$\overline{F}^{(r)} \perp \ M \qquad \text{t.j.} \qquad \overline{F}^{(r)} \cdot \delta\overline{r} = 0 \tag{12}$$

[Vektor $\delta\overline{r}$ je *akýkoľvek* (malý) vektor v smere plochy M. Ak je teda nejaký vektor kolmý na plochu, je vlastne kolmý na (ten akýkoľvek) vektor $\delta\overline{r}$.]

Vlastnosť (12) sa ukazuje byť evolučnou nevýhodou sily $\overline{F}^{(r)}$ - vďaka nej v súťaži neuspeje a vypadne z hry.

Naozaj, ak skalárne vynásobíme dynamickú (Newtonovu) rovnicu (7) virtuálnym posunutím $\delta\overline{r}$, dostaneme

$$\boxed{\dot{\overline{p}} \cdot \delta\overline{r} = \overline{F}^{(a)} \cdot \delta\overline{r}} \tag{13}$$

v ktorej už reakcia väzieb *nie je*.

Ak pozbierame dovedna rovnice, ktoré sme po ceste dostali (a prezieravo orámčekovali, teda (8), (11) a (13)), dostaneme *sústavu*, ktorej sa hovorí *D'Alembertov-Lagrangeov princíp*:

$$(\dot{\overline{p}} - \overline{F}^{(a)}) \cdot \delta\overline{r} = 0 \tag{14}$$

$$\overline{\nabla}\Phi_\alpha \cdot \delta\overline{r} = 0 \tag{15}$$

$$\Phi_\alpha = 0 \tag{16}$$

Jej dôležitou črtou je to, že v nej už reakcia väzieb $\overline{F}^{(r)}$ explicitne *nefiguruje*, vidíme v nej *len aktívnu* silu $\overline{F}^{(a)}$.

Ide o sústavu pozostávajúcu z (obyčajnej) diferenciálnej rovnice (prvá z nich; je tam bodka, čiže *časová derivácia*; v skutočnosti hybnosť obsahuje bodku polohy, takže v reči polohy je tam až druhá časová derivácia) a algebraických rovníc (zvyšok). To, čo z nej chceme dostať, je $\overline{r}(t)$ (trajektórie všetkých hmotných bodov). Ale ako neznáme tam figurujú aj virtuálne posunutia, ktoré síce nepotrebujeme (nezaujímajú nás), ale nemôžeme sa bez nich zaobísť, lebo sú *zreťazené* s tým, čo nás zaujíma. Rozhodne to nie je ten najpraktickejší spôsob riešenia úloh s väzbami, ale keby nebolo nič lepšie, berieme aj to. (Pozri prístup k riešeniu rovinného a sférického kyvadla touto technológiou v častiach 2.1 a 2.2.)

2.1 Príklad: Rovinné matematické kyvadlo

Skúsme sa (na ilustráciu tejto metódy) pozrieť na úlohu o pohybe *rovinného* matematického kyvadla (pozri úlohu 2.4 v texte [1]). Hlavným cieľom tohto paragrafu je *explicitne napísať* rovnice D'Alembertovho-Lagrangeovho princípu pre ten konkrétny problém (a *nie* nájsť ich riešenie).

Máme v hre len *jeden* hmotný bod (závažie m na konci nehmotnej paličky dĺžky l), preto $N = 1$ a paličkové $3N$-rozmerné vektory sa tak redukujú na „obyčajné" trojrozmerné.

Ak vyberieme súradnice (x, y, z) tak, aby kývanie prebiehalo v rovine xz, tak ako väzby môžeme vybrať funkcie

$$\begin{aligned} \Phi_1(x,y,z) &= x^2+y^2+z^2-l^2 & (17) \\ \Phi_2(x,y,z) &= y & (18) \end{aligned}$$

[*Ich súčasné* vynulovanie obmedzuje polohu hmotného bodu na kružnicu polomeru l so stredom v počiatku, čo je presne to, čo potrebujeme; táto kružnica je tu teda - 1-rozmerným - konfiguračným priestorom.]

Keďže ako gradienty týchto funkcií dostávame

$$\begin{aligned} \nabla\Phi_1 &= 2(x,y,z) & (19) \\ \nabla\Phi_2 &= (0,1,0) & (20) \end{aligned}$$

tak rovnice pre virtuálne posunutia

$$\delta\boldsymbol{r} \equiv (\delta x, \delta y, \delta z) \tag{21}$$

vyzerajú

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{r}\cdot\nabla\Phi_1 &= 2(x\delta x+y\delta y+z\delta z)=0 & (22) \\ \delta\boldsymbol{r}\cdot\nabla\Phi_2 &= \delta y=0 & (23) \end{aligned}$$

No a keďže tu

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{p}} &= m(\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z}) & (24) \\ \boldsymbol{F}^{(a)} &= m\boldsymbol{g} \equiv (0,0,-mg) & (25) \end{aligned}$$

tak všeobecná sústava (14) - (16) tu konkrétne vyzerá (po vykrátení všetkého zbytočného) takto:

$$\begin{aligned} \ddot{x}\delta x+\ddot{y}\delta y+(\ddot{z}+g)\delta z &= 0 & (26) \\ x\delta x+y\delta y+z\delta z &= 0 & (27) \\ \delta y &= 0 & (28) \\ x^2+y^2+z^2-l^2 &= 0 & (29) \\ y &= 0 & (30) \end{aligned}$$

Z tejto sústavy potrebujem nájsť $(x(t), y(t), z(t))$. Týmto je splnený hlavný cieľ tohto paragrafu :-)

Keby som sa predsa len chcel posunúť smerom k riešeniu, začnem dobrou správou, že $y(t)$ už mám - podľa (30) to je (v každom čase) nula. S tým je kompatibilné aj (28). (Čestne priznám, že to ma veľmi nepotrápilo, je to tam vlastne „vložené rukou".)

Zoberúc toto do úvahy sa sústava zjednoduší na

$$\begin{aligned} \ddot{x}\delta x + (\ddot{z} + g)\delta z &= 0 && (31) \\ x\delta x + z\delta z &= 0 && (32) \\ x^2 + z^2 - l^2 &= 0 && (33) \end{aligned}$$

v ktorej už nie je po čomkoľvek súvisiacom so smerom (- sociálnou demokraciou) y ani stopy. Naozaj odtiaľ chceme $(x(t), z(t))$, ale strašia tam stále aj virtuálne posunutia $(\delta x, \delta z)$.

Rovnicu (33) „vyriešime" parametrizáciou $\boldsymbol{r}(\varphi)$, menovite

$$\begin{aligned} x &= l \sin\varphi && (34) \\ z &= -l\cos\varphi && (35) \end{aligned}$$

(uhol φ má potom zmysel odklonu kyvadla od zvislej osi). Odtiaľ sa zráta

$$\begin{aligned} &\dot{x} = l\dot{\varphi}\cos\varphi \qquad \ddot{x} = l(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2 \sin\varphi\cos\varphi) \qquad \delta x = l\cos\varphi\delta\varphi && (36) \\ &\dot{z} = l\dot{\varphi}\sin\varphi \qquad \ddot{z} = l(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2 \sin\varphi\cos\varphi) \qquad \delta z = l\sin\varphi\delta\varphi && (37) \end{aligned}$$

Dosadenie týchto výrazov do (32) vedie na identitu $0 = 0$ (overte; nedáva teda nič) a dosadenie do (31) vedie na rovnicu štruktúry

$$A\delta\varphi = 0 \qquad A = A(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) \tag{38}$$

Keďže $\delta\varphi$ je všeobecne nenulové, dostaneme odtiaľ $A = 0$, čo je istá *diferenciálna rovnica druhého rádu*; explicitný výpočet dáva

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0} \tag{39}$$

Ak by sme túto rovnicu vedeli vyriešiť [2] a získať $\varphi(t)$, dosadenie do (34) a (35) by nám dalo $(x(t), z(t))$.

[Trochu iná cesta k (39) by mohla vyzerať takto: Rovnice (31)-(32) prepíšeme ako *jednu maticovú* rovnicu

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} & \ddot{z} + g \\ x & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{40}$$

pre neznámy stĺpček $(\delta x, \delta z)^T$. Samotný tento stĺpček nás síce vôbec nezaujíma, ale vieme, že určite *existuje nenulové* riešenie tejto rovnice. (Keby neexistovalo, spolu s (28) by to znamenalo, že *vôbec* neexistuje *žiadne* (nenulové) virtuálne posunutie, čo zjavne nie je pravda - posunutie v smere kružnice *možné je*.) Nenulové

[2] Pre *malé* výchylky, keď je dobrým priblížením $\sin\varphi \doteq \varphi$, vychádza jednoduchá *lineárna* rovnica (pre *harmonický oscilátor*) známa z úvodného kurzu mechaniky (dostávame teda *harmonické kmity*). Pre *ľubovoľne veľké* výchylky sa tomu venujú úlohy 3a.14 a 6.2 v texte [1].

riešenie *homogénnej lineárnej* sústavy existuje však práve vtedy, keď *determinant* vstupujúcej matice je nulový:

$$\det \begin{pmatrix} \ddot{x} & \ddot{z}+g \\ x & z \end{pmatrix} \equiv z\ddot{x} - x(\ddot{z}+g) = 0 \tag{41}$$

(Týmto krokom sme sa *zbavili nezaujímavých* výrazov $\delta x, \delta z$.) Dostávame tak rovnicu

$$z\ddot{x} - x(\ddot{z}+g) = 0 \tag{42}$$

Ak *do nej* dosadíme parametrizáciu (34), (35), *tiež* dostaneme (39).]

Ešte raz (pozri úvod): Hlavný cieľ tohto paragrafu bolo *explicitne napísať* rovnice D'Alembertovho-Lagrangeovho princípu pre konkrétny problém rovinného matematického kyvadla (a *nie* nájsť ich riešenie). Tie rovnice sú (26) - (30).

To, čo je potom za nimi, je len snaha ukázať, že tie rovnice sú asi správne, lebo ich postupným riešením prichádzame k rovnici (39), ktorej veríme (lebo nám ju buď odvodili v prvom ročníku na Mechanike, alebo ju získame tu z príslušnej Lagrangeovej rovnice 2.druhu (pozri (126) a tiež úlohu 3a.2 v [1]) a tým veríme).

2.2 Príklad: Sférické matematické kyvadlo

Skúsme sa (na ďalšiu ilustráciu tejto metódy) pozrieť na úlohu o pohybe *sférického* matematického kyvadla (pozri úlohu 3a.3 v texte [1]). Hlavným cieľom tohto paragrafu je opäť len *explicitne napísať* rovnice D'Alembertovho-Lagrangeovho princípu pre tento konkrétny problém (a *nie* nájsť ich riešenie).

Máme v hre len *jeden* hmotný bod (závažie m na konci nehmotnej paličky dĺžky l), preto $N = 1$ a paličkové $3N$-rozmerné vektory sa tak redukujú na „obyčajné" trojrozmerné.

Na rozdiel od rovinného kyvadla chýba väzba (18), takže zostane len jedna väzba

$$\Phi_1(x,y,z) \quad = \quad x^2+y^2+z^2-l^2 \tag{43}$$

[*Jej* vynulovanie obmedzuje polohu hmotného bodu na sféru polomeru l so stredom v počiatku, čo je presne to, čo potrebujeme; táto sféra je tu teda - 2-rozmerným - konfiguračným priestorom.]

Keďže jej gradient je

$$\boldsymbol{\nabla}\Phi_1 \quad = \quad 2(x,y,z) \tag{44}$$

tak rovnica pre virtuálne posunutia

$$\delta \boldsymbol{r} \equiv (\delta x, \delta y, \delta z) \tag{45}$$

vyzerá

$$\delta \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\nabla} \Phi_1 = 2(x\delta x + y\delta y + z\delta z) = 0 \tag{46}$$

No a keďže tu (rovnako ako bolo pre *rovinné* kyvadlo)

$$\dot{\boldsymbol{p}} = m(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) \tag{47}$$

$$\boldsymbol{F}^{(a)} = m\boldsymbol{g} \equiv (0, 0, -mg) \tag{48}$$

tak všeobecná sústava (14) - (16) tu konkrétne vyzerá (po vykrátení všetkého zbytočného) takto:

$$\ddot{x}\delta x + \ddot{y}\delta y + (\ddot{z} + g)\delta z = 0 \tag{49}$$

$$x\delta x + y\delta y + z\delta z = 0 \tag{50}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0 \tag{51}$$

Z tejto sústavy potrebujem nájsť $(x(t), y(t), z(t))$. Týmto je splnený hlavný cieľ tohto paragrafu :-)

Keby som to predsa len chcel porovnať s príslušnými Lagrangeovymi rovnicami 2.druhu (aby som sa uistil, že rovnice získané tu sú asi správne), väzbu (51) by som „vyriešil” vhodnou parametrizáciou $\boldsymbol{r}(\vartheta, \varphi)$, menovite

$$x = l \sin\vartheta \cos\varphi \tag{52}$$

$$y = l \sin\vartheta \sin\varphi \tag{53}$$

$$z = -l \cos\vartheta \tag{54}$$

(uhol ϑ má potom zmysel odklonu kyvadla od zvislej osi). Odtiaľ by sa zrátali podobné veci ako v (36) a (37)

$$\dot{x} = \dots \qquad \ddot{x} = \dots \qquad \delta x = \dots \tag{55}$$

$$\dot{y} = \dots \qquad \ddot{y} = \dots \qquad \delta y = \dots \tag{56}$$

$$\dot{z} = \dots \qquad \ddot{z} = \dots \qquad \delta z = \dots \tag{57}$$

Dosadenie týchto výrazov do (50) by dalo $0 = 0$ (overte; nedáva teda nič) a dosadenie do (49) by dalo rovnicu štruktúry

$$A\delta\vartheta + B\delta\varphi = 0 \tag{58}$$

čo vedie (keďže $\delta\vartheta, \delta\varphi$ sú nezávislé a ľubovoľné) na dve rovnice

$$A(\vartheta, \varphi, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}, \ddot{\vartheta}, \ddot{\varphi}) = 0 \tag{59}$$

$$B(\vartheta, \varphi, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}, \ddot{\vartheta}, \ddot{\varphi}) = 0 \tag{60}$$

Ak by sme túto zreťazenú sústavu *dvoch diferenciálnych rovníc druhého rádu* [3] dokázali vyriešiť a získať $(\vartheta(t), \varphi(t))$, dosadenie do (52) - (54) by nám dalo $(x(t), y(t), z(t))$.

[3] Ich explicitný tvar, získaný *inou* metódou (pomocou Lagrangeových rovníc 2.druhu), sa dá nájsť pod číslami (133), (134).

3 Lagrangeove rovnice 1.druhu

Logika cesty k D'Alembertovmu-Lagrangeovmu princípu spočívala v postrehu, že
- (nepríjemná) reakcia väzieb $\overline{F}^{(r)}$ je *kolmá* na plochu M (pozri (12))
- t.j. kolmá na *virtuálne posunutia*
- takže po skalárnom násobení virtuálnymi posunutiami sa *vynuluje*
- takže sa jej *zbavíme* (vypadne z hry).

Výsledné rovnice už silu $\overline{F}^{(r)}$ neobsahujú, obsahujú len silu $\overline{F}^{(a)}$.

Logika Lagrangeových rovníc *1.druhu* je iná - sila $\overline{F}^{(r)}$ nevypadne, ale vhodne ju vyjadríme (s istým prvkom neznáma) a napíšeme rovnice, kde bude figurovať *aj ona*.

Skúsme sa teda zamyslieť: Ako by sme mohli napísať silu, o ktorej vieme *len* to, že je
- *kolmá na plochu* M, pričom vieme, že
- plocha M je zadaná *väzbami* Φ_α?

Odpoveď je v rovnici (11). Tá určuje virtuálne posunutia $\delta\overline{r}$ tak, že sú to (malé) vektory *kolmé na všetky* gradienty $\overline{\nabla}\Phi_\alpha$. To sa dá múdro povedať aj tak, že virtuálne posunutia $\delta\overline{r}$ tvoria *ortogonálny doplnok* priestoru, ktorý je *lineárnym obalom* všetkých gradientov $\overline{\nabla}\Phi_\alpha$.

Pôvodná definícia virtuálnych posunutí však hovorí, že sú to akékoľvek (malé) vektory v smere plochy M. Teda vektory *smerujúce do plochy* tvoria ortogonálny doplnok priestoru, ktorý je lineárnym obalom všetkých gradientov $\overline{\nabla}\Phi_\alpha$.

To však potom tiež znamená (keďže všeobecne $U^{\perp\perp} = U$, teda ortogonálny doplnok k ortogonálnemu doplnku podpriestoru U je ten pôvodný podpriestor U), že priestor vektorov *kolmých na plochu* (t.j.ortogonálny doplnok k podpriestoru vektorov smerujúcich „do plochy") je práve lineárny obal všetkých gradientov $\overline{\nabla}\Phi_\alpha$!

[V bodoch plochy (= konfiguračného priestoru) tak máme tieto zaujímavé *podpriestory* priestoru *všetkých* vektorov V:
- $U = \text{Span}\,\{\overline{\nabla}\Phi_1, \ldots, \overline{\nabla}\Phi_k\}$ = *lineárny obal všetkých gradientov*
- $U^\perp$ = vektory *dotýkajúce* sa plochy (= smerujúce „do plochy", podľa (11))
- $U^{\perp\perp}$ = vektory *kolmé* na plochu
- U = vektory *kolmé* na plochu (lebo $U^{\perp\perp} = U$).

Sú tu teda *len dva* zaujímavé podpriestory, U a $U^\perp$, pričom si slúžia ako *vzájomné ortogonálne doplnky* (vďaka vlastnosti $U^{\perp\perp} = U$).]

No a keďže sila $\overline{F}^{(r)}$ patrí do podpriestoru *kolmého* na plochu, dá sa vyjadriť v tvare

$$\overline{F}^{(r)} = \lambda^\alpha \overline{\nabla}\Phi_\alpha \equiv \lambda^1 \overline{\nabla}\Phi_1 + \cdots + \lambda^k \overline{\nabla}\Phi_k \tag{61}$$

O koeficientoch rozkladu $(\lambda^1, \ldots, \lambda^k)$ nevieme nič, môžu závisieť od polohy $\overline{r}$ aj rýchlosti $\dot{\overline{r}}$.

Z Newtonovej rovnice (7) sa tak stanú *Lagrangeove rovnice 1.druhu*

$$\begin{aligned}\dot{\overline{p}} &= \overline{F}^{(a)} + \lambda^\alpha \overline{\nabla} \Phi_\alpha && (62)\\ \Phi_\alpha &= 0 && (63)\end{aligned}$$

Neznáme sú polohy $\overline{r}(t)$, ale aj koeficienty (funkcie) $(\lambda^1, \dots, \lambda^k)$.

Ak nás zaujíma len pohyb, tak fakt, že zbytočne musíme počítať aj nepotrebné $(\lambda^1, \dots, \lambda^k)$ (keďže sú zreťazené s potrebnými vecami) a na konci ich zahodiť, je mrzutý.

Niekedy nás však tieto koeficienty predsa len môžu zaujímať - pomocou nich môžeme (ak ich vyrátame) vypočítať reakciu väzieb a tá môže byť užitočná v prípade, že chceme zistiť, nakoľko sú *namáhané súčiastky*, ktoré väzby zabezpečujú. (Napríklad nakoľko je namáhaná palička, ktorá realizuje kyvadlo. Ak bude namáhaná viac, ako vydrží, kyvadlo sa roztrhne.)

3.1 Príklad: Rovinné matematické kyvadlo

Chceme explicitne napísať rovnice (62) a (63) pre kyvadlo z paragrafu 2.1.

Opäť máme v hre len *jeden* hmotný bod (závažie m na konci nehmotnej paličky dĺžky l), preto $N = 1$ a paličkové $3N$-rozmerné vektory sa redukujú na „obyčajné" trojrozmerné.

Máme *dve* väzby (17) a (18) a aktívna sila je *gravitačná*, rovnice (62) a (63) teda budú

$$\begin{aligned}m\ddot{\boldsymbol{r}} &= m\boldsymbol{g} + \lambda_1 \boldsymbol{\nabla}\Phi_1 + \lambda_2 \boldsymbol{\nabla}\Phi_2 && (64)\\ \Phi_1(\boldsymbol{r}) &= 0 && (65)\\ \Phi_2(\boldsymbol{r}) &= 0 && (66)\end{aligned}$$

Poďme ich napísať konkrétne(jšie). Gradienty väzieb (17) a (18) sú (pozri (19) a (20))

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\Phi_1 &= 2(x, y, z) \equiv 2\boldsymbol{r} && (67)\\ \boldsymbol{\nabla}\Phi_2 &= (0, 1, 0) && (68)\end{aligned}$$

a preto *úplne explicitne* dostaneme ako Lagrangeove rovnice 1.druhu toto:

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= 2\lambda_1 x && (69)\\ m\ddot{y} &= 2\lambda_1 y + \lambda_2 && (70)\\ m\ddot{z} &= 2\lambda_1 z - mg && (71)\\ x^2 + y^2 + z^2 &= l^2 && (72)\\ y &= 0 && (73)\end{aligned}$$

Z tejto sústavy potrebujem nájsť $(x(t), y(t), z(t))$ a tiež (λ_1, λ_2). Týmto je splnený hlavný cieľ tohto paragrafu :-)

Skúsme z tejto sústavy vyťažiť niečo užitočné. [4]

Najprv si všimneme, že (73) rovno hovorí, že $y(t) = 0$ a (70) potom dáva $\lambda_2 = 0$. Sústava sa teda zjednodušuje (o jeden rozmer a jednu väzbu). Ostane v nej len $(x(t), z(t))$ a λ_1 a vyzerá

$$m\ddot{x} = 2\lambda_1 x \tag{74}$$

$$m\ddot{z} = 2\lambda_1 z + mg \tag{75}$$

$$x^2 + z^2 = l^2 \tag{76}$$

Cez *dvojrozmerné* vektory $\boldsymbol{r} = (x, z)$ a $\boldsymbol{g} = (0, -g)$ to je

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = m\boldsymbol{g} + 2\lambda_1 \boldsymbol{r} \tag{77}$$

$$\boldsymbol{r}^2 = l^2 \tag{78}$$

Skúsme odtiaľ vyjadriť λ_1. Na to vynásobíme prvú rovnicu skalárne vektorom $\boldsymbol{r}$ a využijeme druhú; dostaneme

$$-m\dot{\boldsymbol{r}}^2 = m\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{r} + 2\lambda_1 l^2 \tag{79}$$

▼ Naozaj, opakovaným bodkovaním (= deriváciou podľa času) väzby (78) dostávame

$$\begin{aligned} 0 &= (d/dt)(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}) \\ &= 2\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{r} \\ 0 &= (d/dt)(\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{r}) \\ &= \ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{r} + \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} \end{aligned}$$

takže

$$\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{r} = -\dot{\boldsymbol{r}}^2$$

▲

Keďže kinetická a potenciálna energia tu vyzerajú takto [5]

$$T = \frac{1}{2} m\dot{\boldsymbol{r}}^2 \tag{80}$$

$$U = mgz + mgl = -m\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{r} + mgl \tag{81}$$

tak môžeme (79) prepísať do tvaru

$$-2T = mgl - U + 2\lambda_1 l^2 \tag{82}$$

takže

$$2\lambda_1 = (U - 2T - mgl)/l^2 \tag{83}$$

[4] *Nie vyriešiť* ju. To by bol poriadne ambiciózny cieľ, pozri úlohy 3a.14 a 6.2 v texte [1].

[5] Potenciálna energia je zvolená tak, že má nulovú hodnotu v konfigurácii, keď kyvadlo visí dolu.

a teda reakcia väzby je podľa (69)

$$\boldsymbol{F}^{(r)} = 2\lambda_1 \boldsymbol{r} = \frac{U - 2T - mgl}{l^2}\, \boldsymbol{r} \tag{84}$$

Ak si ešte uvedomím, že polohový vektor $\boldsymbol{r}$ v mieste závažia kyvadla sa dá napísať ako

$$\boldsymbol{r} = -l\boldsymbol{n} \tag{85}$$

kde $\boldsymbol{n}$ je *jednotkový* vektor smerom (od závažia) *do stredu* (k osi kyvadla), tak

$$\boldsymbol{F}^{(r)} = \frac{2T - U + mgl}{l}\, \boldsymbol{n} \tag{86}$$

Otestujme tento (celkom užitočný) vzorček na niekoľkých špeciálnych prípadoch:

1. Kyvadlo voľne visí v polohe dolu (stabilnej rovnováhe). Máme $T = 0 = U$ a teda $\boldsymbol{F}^{(r)} = mg\boldsymbol{n} = mg\boldsymbol{e}_z$. To je rozumné. Hovorí to, že palička *ťahá* závažie silou mg smerom *hore*; presne teda kompenzuje tiažovú silu závažia mg smerom dolu.

2. Kyvadlo voľne stojí v polohe hore (labilnej rovnováhe). Máme $T = 0, U = 2mgl$ a $\boldsymbol{F}^{(r)} = -\ mg\boldsymbol{n} = mg\boldsymbol{e}_z$. To je tiež rozumné. Hovorí to, že palička *tlačí* závažie silou mg smerom *hore*; presne teda kompenzuje tiažovú silu závažia mg smerom dolu.

3. Kyvadlo voľne stojí v polohe hore (labilnej rovnováhe), ale pod vplyvom zamávania motýlich krídel na ostrove Papua - Nová Guinea sa prejaví labilita jeho polohy a začne sa spúšťať smerom dolu. Zaujíma nás, akou silou ťahá palička závažie do stredu v čase, keď je kyvadlo práve *vodorovne*. Vtedy máme $T = mgl, U = mgl$ (hore bolo $E = U = 2mgl$) a $\boldsymbol{F}^{(r)} = 2mg\boldsymbol{n} = -2mg\boldsymbol{e}_x$. Hovorí to, že palička ťahá závažie do stredu silou $2mg$ (realizuje tak *dostredivú* silu veľkosti *dvojnásobnej tiaže*).

4. Ako v bode 3., ale zaujíma nás, akou silou ťahá palička závažie hore v čase, keď je kyvadlo práve *dolu* (kde má zjavne najväčšiu rýchlosť). Vtedy máme $T = 2mgl, U = 0$ a $\boldsymbol{F}^{(r)} = 5mg\boldsymbol{n} = -5mg\boldsymbol{e}_z$. Hovorí to, že palička ťahá závažie hore (do stredu) silou $5mg$ (teda silou *päťnásobnej tiaže*; v tom je jeden diel reakcie na naozajstnú tiaž a štyri diely [6] dostredivej sily za rýchlosť).

3.2 Príklad: Sférické matematické kyvadlo

Chceme explicitne napísať rovnice (62) a (63) pre kyvadlo z paragrafu 2.2.

Opäť máme v hre len *jeden* hmotný bod (závažie m na konci nehmotnej paličky dĺžky l), preto $N = 1$ a paličkové $3N$-rozmerné vektory sa redukujú na „obyčajné" trojrozmerné.

[6] Veľkosť dostredivej sily mv^2/l je priamo úmerná *kinetickej energii* $mv^2/2$. Tá je dolu *dvojnásobná* oproti jej hodnote pri vodorovnej polohe ($2mgl$ v prípade 4. oproti mgl v prípade 3.). Preto aj dostredivá sila paličky je dolu dvojnásobná, $4mg$ voči $2mg$. Ako sa spomínalo, piate mg celkovej reakcie je za tiaž.

Máme *len jednu* väzbu (17) a aktívna sila je *gravitačná*, rovnice (62) a (63) teda budú

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = m\boldsymbol{g} + \lambda_1 \boldsymbol{\nabla}\Phi_1 \tag{87}$$
$$\Phi_1(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{88}$$

Poďme ich napísať konkrétnejšie. Gradient väzbý (17) je (pozri (19)

$$\boldsymbol{\nabla}\Phi_1 = 2(x,y,z) \equiv 2\boldsymbol{r} \tag{89}$$

a teda *úplne explicitne* dostaneme ako Lagrangeove rovnice 1.druhu toto:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = m\boldsymbol{g} + 2\lambda_1 \boldsymbol{r} \tag{90}$$
$$\boldsymbol{r}^2 = l^2 \tag{91}$$

alebo zložkovo

$$m\ddot{x} = 2\lambda_1 x \tag{92}$$
$$m\ddot{y} = 2\lambda_1 y \tag{93}$$
$$m\ddot{z} = 2\lambda_1 z - mg \tag{94}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2 \tag{95}$$

Z tejto sústavy potrebujem nájsť $(x(t), y(t), z(t))$ a tiež λ_1. Týmto je splnený hlavný cieľ tohto paragrafu :-)

Skúsme z tejto sústavy vyťažiť niečo užitočné. [7]

Všimnime si, že sústava (90) a (91) vyzerá formálne úplne rovnako, ako vyzerala sústava (77) a (78) pre *rovinné* kyvadlo. Rozdiel je len v tom, že v tunajšej sú 3-rozmerné vektory, zatiaľ čo v tamtej boli 2-rozmerné. Tá terajšia 3-rozmernosť však vôbec nebráni doslovnému zopakovaniu postupu výpočtu koeficientu λ_1, ktorý sa robil tam! Keď ho teda zopakujeme, dostaneme aj rovnaký výsledok

$$\boldsymbol{F}^{(r)} = \frac{2T - U + mgl}{l}\,\boldsymbol{n} \tag{96}$$

kde $\boldsymbol{n}$ je *jednotkový* vektor smerom (od závažia) *do stredu* (k bodu závesu kyvadla).

Okrem prípadov 1.-4. spomínaných ako test tohto vzorca za výsledkom (86), ktoré *platia aj tu*, môžeme pridať zaujímavý *nový* prípad (nemá analóg pre rovinné kyvadlo), keď (sférické) kyvadlo *rovnomerne krúži* okolo zvislej osi, pričom s touto osou zviera (konštantný) uhol θ_0. (Pozri tiež výsledok (135).)

Ak by sme chceli vedieť, akou silou ťahá palička hmotný bod v tomto prípade, stačí dať do našej sústavy *ansatz*

$$z(t) = -l\cos\vartheta_0 \equiv z_0$$

[7] *Nie vyriešiť* ju, atď.

(Je intuitívne zrejmé, že takéto riešenie *musí* existovať a že bude spočívať v spomínanom krúžení. Dá sa to aj formálne overiť *dorátaním zvyšku* riešenia, t.j. $(x(t), y(t))$.)
Dosadením tohto výrazu do (94) dostaneme

$$2\lambda_1 = -\frac{mg}{l\cos\vartheta_0} \tag{97}$$

t.j.

$$\boldsymbol{F}^{(r)} = \frac{mg}{\cos\vartheta_0}\,\boldsymbol{n} \tag{98}$$

To vyzerá celkom rozumne:

1. Dve rovnovážne polohy (hore a dolu, čo sú špeciálne prípady pre $\vartheta_0 = 0, \pi$), dávajú to, čo treba (body 1. a 2. na konci paragrafu 3.1).

2. Krúživé riešenie existuje len pre uhly z intervalu $\vartheta_0 \in \langle 0, \pi/2)$ (plus výnimočné π) a (v zhode s intuíciou) na približovanie sa (zdola) k hodnote $\vartheta_0 = \pi/2$ treba čoraz viac energie (limitne nekonečno). Ak sa bude kyvadlo krútiť (temer v rovine xy) *obrovskou rýchlosťou*, zjavne bude palička, v snahe udržať hmotný bod na kružnici, napínaná *obrovskou silou*, čo presne hovorí vzorček (98) - funkcia $1/\cos\vartheta_0$ *rastie* (pri približovaní sa (zdola) k hodnote $\vartheta_0 = \pi/2$) *do nekonečna.* (Rovnaký faktor $1/\cos\vartheta_0$ rastúci do nekonečna je vo výsledku pre kvadrát *uhlovej frekvencie* v (135)). Ak teda chceme, aby sa kyvadlo pohybovalo takto a malo uhol ϑ_0 blízky k $\pi/2$, musí sa krútiť veľmi rýchlo a palička je pri tom napínaná veľmi veľkou silou. Čo dá rozum (intuícia) aj bez výpočtov, pokiaľ od nás nikto nechce *kvantifikovať* to *veľmi.* Naše rovnice dajú aj to :-)

4 Lagrangeove rovnice 2.druhu

S týmito rovnicami sa síce zoznamujeme na prednáške hádam aj dostatočne, ale pre porovnanie sa (dúfam) nestane nič zlé, keď sa spomenú aj tu.

Odvodenie z D'Alembertovho-Lagrangeovho princípu (14) - (16) vyzerá takto:
1. Väzby (16) sa vyriešia *parametrizáciou* (pomocou *zovšeobecnených súradníc*)

$$\overline{r} = \overline{r}(q) \equiv \overline{r}(q^1, \dots, q^n) \tag{99}$$

Tým je už rovnica (16) zbytočná (je splnená tou parametrizáciou; tá parametrizácia sa musí urobiť *práve tak, aby* bod $\overline{r}(q)$ ležal *pre každé* q na ploche M).
2. Tým sa *aj* rovnica (15) stane zbytočná (je *tiež* splnená tou parametrizáciou). Detailnejšie: Máme

$$\overline{r} \equiv \overline{r}(q) \quad , \quad \overline{r} + \delta\overline{r} \equiv \overline{r}(q + \delta q) \quad \Rightarrow \quad \delta\overline{r} = \frac{\partial\overline{r}}{\partial q^a}\delta q^a \tag{100}$$

Vidíme, že vektor $\delta\overline{r}$ spája *dva blízke* body *na ploche*, $\overline{r}(q)$ a $\overline{r}(q + \delta q)$, je teda (najvšeobecnejším) virtuálnym posunutím. Zo štruktúry výrazu pre $\delta\overline{r}$ (vpravo) zároveň vidno, že ako *bázu* vektorov *v smere plochy* môžeme zobrať vektory [8]

$$\bar{e}_a := \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^a} \tag{101}$$

Rovnica (15) vlastne hovorí, že

$$\bar{e}_a \cdot \overline{\nabla}\Phi_\alpha = 0 \quad \text{t.j.} \quad \bar{e}_a \perp \overline{\nabla}\Phi_\alpha \tag{102}$$

čo *je* pravda (pozri úvahy o priestore U a $U^\perp$ pred vzorcom (61); $\bar{e}_a$ je báza pre $U^\perp$ a $\overline{\nabla}\Phi_\alpha$ je báza pre U).

3. Dosadenie vyjadrenia pre virtuálne posunutie z (100) do (14) dáva

$$(\dot{\bar{p}} - \overline{F}^{(a)}) \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^a}\delta q^a \quad = \quad 0 \tag{103}$$

To má štruktúru (porovnaj s (38) a (58))

$$A_a \delta q^a = 0 \quad \text{kde} \quad A_a = A_a(q, \dot{q}, \ddot{q}) = (\dot{\bar{p}} - \overline{F}^{(a)}) \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^a} \tag{104}$$

(Pozor: Písmeno (a) na $\overline{F}^{(a)}$ *nie je* index, je to len označenie „aktívnej" zložky sily, pozri (7).) Keďže δq^a sú *ľubovoľné*, dá sa z toho dedukovať [9] platnosť *sústavy diferenciálnych rovníc 2.rádu*

$$\boxed{A_a(q, \dot{q}, \ddot{q}) = 0} \qquad a = 1, \dots, n \tag{105}$$

Toto sú už *budúce* Lagrangeove rovnice 2.druhu, len to na nich zatiaľ nevidno. Na spoznanie ich naozajstného (použiteľného, známeho) tvaru treba zobrať výraz pre A_a z (104) a *upraviť ho.*

Najprv zjavne dostávame

$$\dot{\bar{p}} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^a} = \overline{F}^{(a)} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^a} \tag{106}$$

Vo výraze vpravo je všetko známe (aktívna sila $\overline{F}^{(a)}$ je tá jej jasná časť, už poznám parametrizáciu $\bar{r}(q)$, takže viem vyrátať príslušné parciálne derivácie) a tak úprava, kde to celé len *označíme* (a nejako nazveme)

$$Q_a = \overline{F}^{(a)} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^a} \qquad a - ta \ zovšeobecnená \ sila \tag{107}$$

[8]V modernej diferenciálnej geometrii (pozri napr. [5]) sa táto báza, ak už zabudneme na umiestnenie M do $\mathbb{R}^{3N}$ a chápeme M ako samostatný priestor so súradnicami $(q^1, \dots, q^n)$, označuje $\partial_a \equiv \partial/\partial q^a$ a volá sa *súradnicová* báza (pre vektory na variete M).

[9]Formálne sa dá odvolať (je to však dosť zrejmé, takže netreba) na *nedegenerovanosť* skalárneho súčinu $u \cdot v \equiv u_a v_a$, t.j. vlastnosť $\{u \cdot v = 0 \text{ pre každé } v\} \Rightarrow u = 0$.

je úplne legálna (vieme si to Q_a *vždy vyrátať*). S výrazom vľavo je však, žiaľ, o to viac roboty, o čo jej bolo menej vpravo. Čitateľa odkazujem na text [4] na mojej stránke. Tam sa podrobne dokazuje, že platí identita

$$\dot{\overline{p}} \cdot \frac{\partial \overline{r}}{\partial q^a} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial T}{\partial q^a} \tag{108}$$

kde

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} T_{ab}(q)\ \dot{q}^a \dot{q}^b \tag{109}$$

je *kinetická energia* sústavy - vzniká priamym prepočtom známeho výrazu

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}_1}^2 + \dots + \frac{1}{2} m_N \dot{\mathbf{r}_N}^2 \tag{110}$$

do súradníc $(q^1, \dots, q^n)$ využitím (známej) parametrizácie (99), t.j. podrobne

$$\mathbf{r}_1(q^1, \dots, q^n),\ \dots,\ \mathbf{r}_N(q^1, \dots, q^n) \tag{111}$$

Dostávame tak rovnicu

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial T}{\partial q^a} = Q_a \tag{112}$$

To *už sú* Lagrangeove rovnice 2.druhu, ale zatiaľ pre *všeobecnú* (t.j. nie nevyhnutne potenciálovú) aktívnu silu $\overline{F}^{(a)}$. Oveľa známejšia je však ich verzia, keď aktívna sila $\overline{F}^{(a)}$ *je* potenciálová, teda keď

$$\overline{F}^{(a)} = -\overline{\nabla} U(\overline{r}) \tag{113}$$

pre nejakú funkciu $U(\overline{r})$ (= *potenciálnu energiu* sústavy) a teda keď

$$Q_a = -\frac{\partial U}{\partial q^a} \tag{114}$$

[Naozaj, ak

$$U(q) := U(\overline{r}(q)) \tag{115}$$

je *ohraničenie* funkcie U z $\mathbb{R}^{3N}$ na *podmnožinu* $M \subset \mathbb{R}^{3N}$ (pričom používame na jej označenie *to isté* písmeno :-), tak

$$Q_a = \overline{F}^{(a)} \cdot \frac{\partial \overline{r}}{\partial q^a} = -\overline{\nabla} U(\overline{r}) \cdot \frac{\partial \overline{r}}{\partial q^a} \equiv -\frac{\partial U(\overline{r})}{\partial \overline{r}} \cdot \frac{\partial \overline{r}(q)}{\partial q^a} = \frac{\partial U(q)}{\partial q^a} \tag{116}$$

takže skutočne platí vyjadrenie (114).]

Vtedy sa z (112) stane

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial (T - U)}{\partial q^a} = 0 \tag{117}$$

a keďže $U(q)$ z (115) nezávisí od *bodkovaných* q-čiek, tak rovnako dobre to môžeme zapísať ako

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(T-U)}{\partial\dot{q}^a}-\frac{\partial(T-U)}{\partial q^a}=0 \tag{118}$$

Zápis týchto rovníc sa zjednoduší definovaním funkcie

$$L:=T-U \qquad L(q,\dot{q}):=T(q,\dot{q})-U(q) \qquad \textit{lagranžián} \tag{119}$$

cez ktorú (konečne) dostaneme jej *záverečný* tvar:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^a}-\frac{\partial L}{\partial q^a}=0} \qquad \textit{Lagrangeove rovnice 2.druhu} \tag{120}$$

4.1 Príklad: Rovinné matematické kyvadlo

Máme len jeden hmotný bod, všeobecná parametrizácia $\overline{r}(q)$ sa tu redukuje (napríklad, pozri (34)-(35)) na

$$\mathbf{r}(\varphi)=(l\sin\varphi,0,-l\cos\varphi)\equiv(x(\varphi),y(\varphi),z(\varphi)) \tag{121}$$

Potom

$$\dot{\mathbf{r}}(\varphi,\dot{\varphi})=l\dot{\varphi}(\cos\varphi,0,\sin\varphi) \tag{122}$$

Odtiaľ hneď

$$T(\varphi,\dot{\varphi})=\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 \qquad U(\varphi)=mgl(1-\cos\varphi) \tag{123}$$

a teda

$$L(\varphi,\dot{\varphi})=\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2-mgl(1-\cos\varphi) \tag{124}$$

▼ Naozaj,

$$\begin{aligned} T(\varphi,\dot{\varphi}) &= \tfrac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 \\ &= \tfrac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) \\ &= \tfrac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 \\ U(\varphi) &= U(\mathbf{r}(\varphi)) \\ &= mgl+mgz(\varphi) \\ &= mgl(1-\cos\varphi) \end{aligned}$$

Takto vybratá potenciálna energia má nulovú hodnotu, keď kyvadlo visí dole. ▲

Potom

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\varphi})-(-mgl\sin\varphi)=ml^2\ddot{\varphi}+mgl\sin\varphi \tag{125}$$

a Lagrangeova rovnica 2.druhu (je *jedna*) vyzerá

$$\boxed{\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0} \tag{126}$$

(pozri (39)).

4.2 Príklad: Sférické matematické kyvadlo

Máme len jeden hmotný bod, všeobecná parametrizácia $\overline{r}(q)$ sa tu redukuje (napríklad, pozri (52)-(54)) na $\boldsymbol{r}(\vartheta, \varphi)$, menovite

$$\mathbf{r}(\vartheta, \varphi) = (l \sin\vartheta \cos\varphi, l \sin\vartheta \sin\varphi, -l \cos\vartheta) \tag{127}$$

Potom

$$\dot{\mathbf{r}}(\vartheta, \dot{\vartheta}, \varphi, \dot{\varphi}) = \dot{\vartheta}(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\,\cdot\,) + \dot{\varphi}(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\,\cdot\,) \tag{128}$$

(kde bodky sú ľahko vypočítateľné funkcie uhlov (ϑ, φ) - ale *nie* bodkovaných uhlov). Keď sa z toho zráta $\dot{\mathbf{r}}^2$ a následne kinetická (a podobne potenciálna) energia, dostaneme

$$T(\vartheta, \dot{\vartheta}, \varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta) \qquad U(\vartheta, \varphi) = mgl(1 - \cos\vartheta) \tag{129}$$

a teda

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta) - mgl(1 - \cos\vartheta) \tag{130}$$

Potom

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = \cdots = ml^2 \ddot{\vartheta} - ml^2 \dot{\varphi}^2 \sin\vartheta \cos\vartheta + mgl \sin\vartheta \tag{131}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \cdots = ml^2 (\ddot{\varphi} \sin^2\vartheta + 2\dot{\varphi}\dot{\vartheta} \sin\vartheta \cos\vartheta) \tag{132}$$

a Lagrangeove rovnice 2.druhu (sú *dve*) vyzerajú

$$\boxed{\ddot{\vartheta} - \dot{\varphi}^2 \sin\vartheta \cos\vartheta + (g/l) \sin\vartheta} = 0 \tag{133}$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} \sin^2\vartheta + 2\dot{\varphi}\dot{\vartheta} \sin\vartheta \cos\vartheta} = 0 \tag{134}$$

Hotovo. Tak rýchlo máme rovnice, ktoré treba riešiť (a neznáme sú len to, čo nás zaujíma, $(\vartheta(t), \varphi(t))$).

Skúsme dve zaujímavé špeciálne riešenia:

1. Ansatz $\vartheta(t) = \vartheta_0 = \text{const.}$ vedie na riešenie (overte si :-)

$$(\vartheta(t), \varphi(t)) = (\vartheta_0, \varphi_0 + \omega t) \qquad \omega^2 \equiv \frac{1}{\cos\vartheta_0} \frac{g}{l} \tag{135}$$

T.j. rovnomerné *krúženie* (namiesto kývania, ako sa na *kyvadlo* patrí; sférické kyvadlo sa hrá na *krúžidlo*) okolo zvislej osi uhlovou frekvenciou ω (pozri (98) a pokec tesne za)

2. Ansatz $\varphi(t) = \varphi_0 = \text{const.}$ vedie na riešenie (overte si :-)

$$(\vartheta(t), \varphi(t)) = (\vartheta(t), \varphi_0) \qquad \ddot{\vartheta} + \frac{g}{l} \sin\vartheta = 0 \tag{136}$$

T.j. *kývanie*, ale *v rovine* $\varphi = \varphi_0$ (namiesto v priestore, ako sa *sférickému* kyvadlu toleruje; sférické kyvadlo sa hrá na *rovinné* kyvadlo).

5 Zhrnutie

Hlavným cieľom tohto textu bolo ukázať, ako vyzerajú Lagrangeove rovnice *1.druhu*, lebo sa na prednáške nespomínajú. (A tiež ilustrovať na jednoduchých príkladoch, ako vyzerá ich typické použitie.) Vedľajším (nenápadne zamaskovaným) cieľom bolo ukázať, že keď sa na prednáškach nespomínajú, až tak veľa sa nestráca.

Už tu vidno, že Lagrangeove rovnice *2.druhu* sú lepšie, a to sa ešte neukazovali ich *naozaj silné* stránky (o tých sa hovorí dosť na prednáške). Jednak v samotnej mechanike, ale - z hľadiska teoretickej fyziky ako celku - aj v *iných* oblastiach (teoretickej) fyziky. Z pohľadu celej teoretickej fyziky je víťazstvo Lagrangeových rovníc *2.druhu* úplne jednoznačné.

Literatúra

[1] M.Fecko: Teoretická mechanika - Sylabus + príklady (41 strán)
http://davinci.fmph.uniba.sk/~fecko1/teormech/primech11.pdf

[2] M.Fecko: Menej tradičné aplikácie modernej diferenciálnej geometrie vo fyzike, habilitačná práca (2001),
http://davinci.fmph.uniba.sk/~fecko1/habil/habilpraca.pdf

[3] M.Fecko: Gauge-potential approach to the kinematics of a moving car, Il Nuovo Cimento 111B, 1315-1332 (1996),
http://davinci.fmph.uniba.sk/~fecko1/papers/1996_IlNuovoCimento_B_111_1315.pdf

[4] M.Fecko: Dôkaz jednej identity, ktorá sa zíde v 2.prednáške z teoretickej mechaniky,
http://davinci.fmph.uniba.sk/~fecko1/teormech/teor_mech_identita.pdf

[5] M.Fecko: Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov, Bratislava, Iris 2004 (2.vydanie 2009, 2.opravené vydanie 2018)