Lorentzova sila a jej („zovšeobecnená") potenciálna energia

Marián Fecko*
KTF&DF, FMFI UK, Bratislava

Na prednáške sme sa dozvedeli, že Lorentzova sila (pôsobiaca na bodový náboj e v danom elektrickom a magnetickom poli) nemá („obyčajnú") potenciálnu energiu, ale má zovšeobecnenú *potenciálnu energiu. Tu sú detaily, ktoré sa na tej prednáške nestihli.*

Obsah

*e-mail: `fecko@fmph.uniba.sk`

1 Čo je zovšeobecnená potenciálna energia

Pripomeňme si stručne, čo to je zovšeobecnená potenciálna energia. Pracujme už v jazyku zovšeobecnených súradníc.

Pri odvodení *Lagrangeovych rovníc* („2.druhu") sme prišli k ich tvaru

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial T}{\partial q^a} = Q_a \qquad a = 1, \dots, n \tag{1}$$

kde T je *kinetická energia* sústavy, Q_a je a-ta *zovšeobecnená sila* a n je počet stupňov voľnosti.

Často sa stáva, že sa zovšeobecnené sily dajú vyjadriť v tvare

$$\boxed{Q_a = -\frac{\partial U(q)}{\partial q^a}} \tag{2}$$

Vtedy sa tie sily volajú *potenciálové* (alebo konzervatívne) a funkcia $U(q) \equiv U(q^1, \dots, q^n)$ je („obyčajná") *potenciálna energia*.

Ak sú naše sily potenciálové, z Lagrangeovych rovníc (1) sa zjavne stanú rovnice

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial (T-U)}{\partial q^a} = 0 \qquad a = 1, \dots, n \tag{3}$$

Keďže potenciálna energia $U(q)$ závisí len od polohy, ale nie od rýchlosti (teda od q-čiek, ale *nie* od *bodkovaných* q-čiek), môžeme to $U(q)$ pokojne pridať aj do prvého člena a dostať

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial (T-U)}{\partial q^a} = 0 \qquad a = 1, \dots, n \tag{4}$$

(Do rovnice sme tým pridali *nulu*, takže sme ju nezmenili.) No a keď zavedieme Lagrangeovu funkciu (v brandži *lagranžián*) ako *rozdiel* kinetickej a potenciálnej energie

$$L := T - U \tag{5}$$

dostaneme konečný (a najznámejší) tvar rovníc

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial L}{\partial q^a} = 0 \qquad a = 1, \dots, n \tag{6}$$

Tento tvar rovníc je zodpovedný za spústu výhod, ktoré lagranžovský formalizmus poskytuje. (Napríklad za možnosť získavania *zachovávajúcich sa veličín* cez cyklické súradnice. Nájdenie týchto veličín býva o.i. kľúčové pre *vyriešenie* rovníc.) Preto sme trochu smutní, že sa musíme obmedziť na triedu silových polí štruktúry (2). A to najmä po tom, čo si uvedomíme, že sila, ktorou pôsobí na bodový náboj *magnetické* pole, vyzerá

$$\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \equiv e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \neq -\boldsymbol{\nabla} U(\mathbf{r}) \tag{7}$$

Posledná nerovnosť platí preto, lebo gradient funkcie *polohy* nemá ako získať závislosť od *rýchlosti*.

Preto sa zamyslíme, či by sa predsa len nedali dostať do lagranžovského tvaru aj pohybové rovnice pre širšiu triedu silových polí, ako sú polia štruktúry (2). Zistíme, že dajú :-)

Ak pôjdeme v našom odvodení od konca späť, uvedomíme si, že rezerva sa skrýva na mieste (4). A to v tom, že člen, ktorý sme tam pridali ako nulový, *by* sa tam mohol objaviť aj ako nenulový! Kedy? Keby *takýto* člen bol pôvodne na pravej strane (samozrejme s opačným znamienkom). Čiže keby mala rovnica (1) tvar

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial T}{\partial q^a} = Q_a = -\frac{\partial U}{\partial q^a} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}^a} \qquad a = 1, \dots, n \tag{8}$$

T.j. keby malo silové pole tvar

$$\boxed{Q_a = -\frac{\partial U}{\partial q^a} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}^a}} \tag{9}$$

(a nie len (2)). Funkcia

$$U = U(q, \dot{q}) \equiv U(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) \tag{10}$$

z ktorej sa silové pole $Q_a(q, \dot{q})$ počíta pomocou zložitejšieho vzorca (9) sa volá *zovšeobecnená potenciálna energia*. (Závisí teda aj od *rýchlostí* = *bodkovaných* q-čiek, ináč by sa (9) redukovalo na (2) :-)

Silové polia štruktúry (9) sú zjavne *rozšírením* triedy silových polí oproti („obyčajným") potenciálovým poliam štruktúry (2). Pritom ešte stále nevyčerpávajú všetky silové polia závislé od rýchlosti (pozri úlohu 3b.3 v [1]). Ostáva teda dúfať, že sila od magnetického poľa v tej rozšírenej triede *je*. Ak by to bolo tak, celý nápad so zovšeobecnením (2) na (9) by sa zmenil z neškodnej akademickej hračky na dôležitý nástroj reálnej teoretickej fyziky, keďže málokto asi pochybuje o dôležitosti problému silového pôsobenia (elektrického a) magnetického poľa na náboje pre reálny svet.

2 Lorentzova sila - najdôležiteší príklad

2.1 V čom spočíva úloha (ako vlastne znie otázka)

Pôsobenie elektrického a magnetického poľa (t.j. polí $\mathbf{E}$ a $\mathbf{B}$) na bodový náboj e opisuje

$$\text{Lorentzova sila} \qquad \boxed{\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})} \tag{11}$$

Závisí od polohy $\mathbf{r}$ a času t náboja (cez polia), ale aj od *rýchlosti* $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}}$ náboja. Podrobnejší zápis teda vyzerá

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t, \mathbf{v}) = e(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) \tag{12}$$

Keďže závisí (aj) od rýchlosti, nemôže byť („obyčajná") potenciálová. Ale stále je nádej, že je aspoň „zovšeobecnená potenciálová". Na to, aby takou bola, by musela existovat funkcia $U(\mathbf{r}, t, \mathbf{v})$ taká, že by platilo

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \mathbf{v}} \tag{13}$$

Existuje taká funkcia? A ak áno, ako konkrétne vyzerá? Toto je tá otázka z nadpisu.

2.2 Ansatz a hlavný výpočet

Kľúčovým postrehom pre riešenie úlohy formulovanej na konci odseku 2.1 je fakt, že hľadaná funkcia môže byť *nanajvýš lineárna v rýchlosti* (pozri tiež úlohu 3b.1 v [1]), t.j. že ak vôbec existuje, musí mať tvar

$$U(\mathbf{r}, t, \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{r}, t) + f(\mathbf{r}, t) \tag{14}$$

pre nejaké vektorové pole $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ a nejaké skalárne pole (funkciu) $f(\mathbf{r}, t)$. Náš *ansatz* je teda parametrizovaný (zatiaľ ľubovoľnými) poľami $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ a $f(\mathbf{r}, t)$.

[Naozaj, keby výraz $\partial U/\partial \mathbf{v}$ v (13) ešte obsahoval rýchlosť $\mathbf{v}$, následné d/dt by z nej urobilo zrýchlenie $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$. Zrýchlenie ale v Lorentzovej sile nie je. (Mimochodom, keby bolo v nejakej sile aj zrýchlenie, Newtonova rovnica „$m\times$ zrýchlenie = sila" by mala zrýchlenie na oboch stranách a bolo by to, uznajte, nanajvýš zvláštne.) No a na to, aby výraz $\partial U/\partial \mathbf{v}$ už rýchlosť neobsahoval, môže samotné U obsahovať rýchlosť len nanajvýš lineárne, čiže podľa (14).]

Ak je to tak, treba jednoducho *vyrátať pravú* stranu v (13) pre ansatz (14) a v kútiku duše tajne dúfať, že existuje taký výber polí $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ a $f(\mathbf{r}, t)$, ktorý nám *dá ľavú* stranu v (13).

Keď sa do výpočtu pravej strany (13) pre ansatz (14) pustíme, dostaneme (pozri Dodatok A):

$$\mathbf{F} \equiv -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \mathbf{v}} = -\text{grad}\, f + \partial_t \mathbf{a} - \mathbf{v} \times \text{rot}\, \mathbf{a} \tag{15}$$

Toto sa rovná ľavej strane (13) práve vtedy, keď platí

$$e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -\text{grad}\, f + \partial_t \mathbf{a} - \mathbf{v} \times \text{rot}\, \mathbf{a} \tag{16}$$

čiže práve keď

$$e\mathbf{E} = -\text{grad}\, f + \partial_t \mathbf{a} \tag{17}$$

$$e\mathbf{B} = -\text{rot}\, \mathbf{a} \tag{18}$$

A čo s tým?

Keby sme mali už za sebou prednášku *Teória elektromagnetického poľa*, vec by bola prakticky vybavená (pozri str. 27 v texte [2]). Vyslovili by sme prakticky reflexívne slová *skalárny a vektorový potenciál* a „bolo by vymaľované". Keďže ju za sebou nemáme (veď je až z *letného* semestra), dozvieme sa o tom potrebné minimum v Dodatku B. (A na väčšie podrobnosti, ktoré ale tu nepotrebujeme, si počkáme jeden semester.)

2.3 Na pomoc prichádzajú elektromagnetické potenciály

Ak využijeme fakt existencie skalárneho a vektorového potenciálu (t.j. rovnice (43) a (44) z Dodatku B) pre polia $\mathbf{E}$ a $\mathbf{B}$, z rovníc (17) a (18) sa stanú rovnice

$$e(-\operatorname{grad}\Phi - \partial_t \mathbf{A}) = -\operatorname{grad} f + \partial_t \mathbf{a} \tag{19}$$

$$e(\operatorname{rot}\mathbf{A}) = -\operatorname{rot}\mathbf{a} \tag{20}$$

No a odtiaľ už je vyložene ťažké *ne*prísť na to, ako treba voliť $\mathbf{a}$ a f tak, aby to celé sedelo:

$$\mathbf{a} = -e\mathbf{A} \tag{21}$$

$$f = e\Phi \tag{22}$$

takže (dosadením do (14))

$$U = e(\Phi - \mathbf{v}\cdot\mathbf{A}) \tag{23}$$

alebo podrobne

$$\boxed{U(\mathbf{r},t,\mathbf{v}) = e(\Phi(\mathbf{r},t) - \mathbf{v}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r},t))} \tag{24}$$

Záver: Lorentzova sila *má zovšeobecnenú* potenciálnu energiu U a je ňou výraz (24). Ináč povedané, existuje funkcia $U(\mathbf{r},t,\mathbf{v})$, ktorá vyhovuje podmienke (13) a je daná výrazom (24).

Dôsledok: *Lagranžián* pre *pohyb* bodového náboja e v elektromagnetickom poli $(\mathbf{E},\mathbf{B})$ vyzerá

$$\boxed{L(\mathbf{r},t,\mathbf{v}) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - e(\Phi(\mathbf{r},t) - \mathbf{v}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r},t))} \tag{25}$$

(kde $(\Phi,\mathbf{A})$ sú *potenciály* zodpovedajúce poliam $(\mathbf{E},\mathbf{B})$ vzťahmi (43) a (44)) a vedie na (Lorentzovu) pohybovú rovnicu

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}) \tag{26}$$

Všimnime si, že v *rovniciach* figurujú *priamo polia* $(\mathbf{E},\mathbf{B})$, ale v *lagranžiáne* sa tie polia musia zadať cez svoje *potenciály*!

Ako sa dá táto (lagranžovská) technika použiť na nájdenie zákona zachovania v nejakom konkrétnom elektromagnetickom poli sa dá vidieť napríklad v úlohe 3b.4 v [1].

3 Väzby závislé od času - iný príklad

V úlohe 3b.5 sa dozvedáme nasledujúce pozoruhodné fakty:

Ak by vyjadrenia polôh častíc cez zovšeobecnené súradnice záviseli *od času*

$$\bar{r} = \bar{r}(q, t) \tag{27}$$

(*napríklad* ak by záviseli od času *väzby* [1], ktoré nás priviedli ku konfiguračnému priestoru; $\phi_\alpha(\bar{r}, t) = 0 \Rightarrow \mathbf{r}_k(q^a, t)$), výpočet kinetickej energie dopadne ináč, ako sme zvyknutí. Vyjde toto:

$$T = \frac{1}{2} T_{ab}(q,t)\dot{q}^a\dot{q}^b + \mathcal{A}_a(q,t)\dot{q}^a + \phi(q,t) \tag{28}$$

kde

$$T_{ab} = \sum_{k=1}^{N} m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k(q,t)}{\partial q^a} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k(q,t)}{\partial q^b} \tag{29}$$

$$\mathcal{A}_a = \sum_{k=1}^{N} m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k(q,t)}{\partial q^a} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k(q,t)}{\partial t} \tag{30}$$

$$\phi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k(q,t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k(q,t)}{\partial t} \tag{31}$$

Čo je na tom zaujímavé (a prekvapujúce)?

Keď sa pozrieme na druhý a tretí člen v *kinetickej* energii (28) a porovnáme to s výrazmi (24), (14), vidíme, že *tieto* členy majú štruktúru (zovšeobecnenej) *potenciálnej* energie. Čiže sa dajú *prihodiť* k existujúcej potenciálnej energii (ak nejaká bola) a pozerať sa to celé ináč: Že kinetická energia je len ten prvý člen a tie dva zvyšné sú súčasťou *potenciálnej* energie, čím generujú nejakú *dodatočnú silu* formálne *analogickú Lorentzovej sile* (t.j. *akoby* sa to hýbalo v nejakom dodatočnom „*elektrickom a magnetickom* poli").

Úloha 3b.9 explicitne potvrdzuje tento obraz (pre prípad, keď pôvodná potenciálna energia bola nulová, čiže keď „prihodená" sila je *jediná*). Vidíme v nej silu úmernú rýchlosti (analóg magnetickej sily) aj polohe (analóg elektrickej sily).

A na záver už len krátko spomeňme, že dodatočné sily, ktoré poznáme z teórie *neinerciálnych sústav* (tam sa volajú „*fiktívne*"), majú tiež takýto charakter. Ak sa jedna sústava hýbe voči druhej, vzťahy medzi *súradnicami* viazanými na tieto dve sústavy majú tiež všeobecný charakter (27), takže *kinetická* energia *v novej* sústave bude mať tiež dodatočné členy (štruktúry druhého a tretieho člena v (28)) oproti jej „bežnému tvaru". Tieto sa tiež zvyknú prihadzovať k (pôvodnej) potenciálnej

[1] Napríklad ak by sme študovali korálku pohybujúcu sa v gravitačnom poli na obruči rovnomerne rotujúcej okolo z-ovej osi alebo kyvadlo s premenlivou dĺžkou závesu - úlohy 3b.6 a 3b.7 v [1].

energii (takže na úrovni pohybových *rovníc* vznikajú dodatočné *sily*). Napríklad *Coriolisova* sila je lineárna v rýchlosti a je tak *analógom magnetickej* sily. Zvyšné tri fiktívne sily (*zotrvačná*, *Eulerova* a *odstredivá*) sú analógom *elektrickej* sily.

Poďakovanie

Ďakujem.

4 Dodatky

A Výpočet sily pre náš ansatz pre U

V tomto odseku uvádzame detaily výpočtu, ktorý stojí za výsledkom (15). Celé to je najlepšie robiť komponentne (cez indexy).

Výraz (14) zapísaný cez indexy vyzerá takto:

$$U = v_j a_j + f \tag{32}$$

Potom

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial v_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} a_i \tag{33}$$

Keďže derivovanie podľa komponent $\mathbf{v}$-čka (t.j. $\partial/\partial v_i$) sa už skončilo (a ďalej sa bude derivovať len podľa x_i a t), prejdeme k obľúbenému skrátenému označeniu $\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$. Keď si ešte uvedomíme, čo znamená tá *úplná* časová derivácia d/dt (že sa derivuje voči *všetkým* t-čkam, teda tým explicitným, ale aj tým skrytým v $x_i(t)$), dostaneme toto

$$F_i \equiv -\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial v_i} = (-\mathrm{grad}\, f + \partial_t \mathbf{a})_i + v_j(\partial_j a_i - \partial_i a_j) \tag{34}$$

▼ Máme

$$\begin{aligned} -\tfrac{\partial U}{\partial x_i} + \tfrac{d}{dt} a_i &= -\partial_i U + (\partial_j a_i)\dot{x}_j + \partial_t a_i \\ &= -\partial_i (v_j a_j + f) + (\partial_j a_i) v_j + \partial_t a_i \\ &= -\partial_i f + \partial_t a_i + v_j(\partial_j a_i - \partial_i a_j) \\ &= (-\mathrm{grad}\, f + \partial_t \mathbf{a})_i + v_j(\partial_j a_i - \partial_i a_j) \end{aligned}$$

▲

Keď porovnáme doterajší výsledok (34) s tvrdením (15), vidíme, že prvá časť naozaj sedí a čo treba ešte overiť je to, či platí

$$(-\mathbf{v} \times \mathrm{rot}\, \mathbf{a})_i = v_j(\partial_j a_i - \partial_i a_j) \tag{35}$$

A to veru *platí*.

▼ Naozaj,

$$\begin{aligned}
(-\mathbf{v} \times \mathrm{rot}\, \mathbf{a})_i &= -\epsilon_{ijk} v_j (\mathrm{rot}\, \mathbf{a})_k \\
&= -\epsilon_{ijk} v_j \epsilon_{klm} \partial_l a_m \\
&= -v_j \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} \partial_l a_m \\
&= -v_j (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) \partial_l a_m \\
&= -v_j (\partial_i a_j - \partial_j a_i) \\
&= v_j (\partial_j a_i - \partial_i a_j)
\end{aligned}$$

▲

B Čo sú elektromagnetické potenciály

Svet elektromagnetického poľa sa riadi Maxwellovými rovnicami. (V podobnom zmysle, ako sa svet mechaniky riadi *Newtonovými* rovnicami.) Tie sú spolu štyri, ale to, čo z nich potrebujeme, sa získava len z dvoch z nich. Konkrétne z rovníc

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0 \tag{36}$$

$$\mathrm{div}\, \mathbf{B} = 0 \tag{37}$$

Teraz si spomenieme na identity (úloha 0.12 v [1])

$$\mathrm{rot}\, \mathrm{grad}\, \psi = 0 \qquad \text{pre ľubovoľné } \psi \tag{38}$$

$$\mathrm{div}\, \mathrm{rot}\, \mathbf{C} = 0 \qquad \text{pre ľubovoľné } \mathbf{C} \tag{39}$$

Podľa identity (39) je *jednou z možností*, prečo platí rovnica (37) to, že pole $\mathbf{B}$ je rot nejakého vektorového poľa. A apriori nie je jasné, či to je jediná možnosť, alebo či sa tá rovnica dá splniť aj nejako ináč. V skutočnosti sa ukazuje, že to *je jediná* možnosť. (Za istých podmienok, diskutovaných napríklad v 9.kapitole knihy [3].) T.j. z rovnice (37) vyplýva, že „najvšeobecnejším riešením" tejto rovnice je

$$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\, \mathbf{A} \tag{40}$$

Ak dosadíme (40) do (36), dostaneme

$$\mathrm{rot}\, (\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A}) = 0 \tag{41}$$

Podľa identity (38) je opäť *jednou z možností*, prečo platí rovnica (41) to, že pole $\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A}$ je grad nejakého skalárneho poľa. A opäť apriori nie je jasné, či to je jediná možnosť, alebo či sa tá rovnica dá splniť aj nejako ináč. V skutočnosti sa opäť ukazuje, že to *je jediná* možnosť. (Za istých podmienok, diskutovaných napríklad v 9.kapitole knihy [3].) T.j. z rovnice (41) vyplýva, že „najvšeobecnejším riešením" tejto rovnice je

$$\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A} = -\operatorname{grad} \Phi \tag{42}$$

(znamienko mínus je len konvencia). Keď spojíme (40) a (42), dostaneme hlavný výsledok:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\operatorname{grad} \Phi - \partial_t \mathbf{A} && (43) \\ \mathbf{B} &= \operatorname{rot} \mathbf{A} && (44) \end{aligned}$$

Pole Φ sa volá skalárny potenciál a pole **A** sa volá vektorový potenciál. Vzorce (43) a (44) sa dajú chápať aj tak, že pravé strany sú *najvšeobecnejšie riešenia* rovníc (36) a (37). Ináč povedané, *všetky* tie maxwellovské polia **E** a **B**, ktoré *zodpovedajú realite* (t.j. vyhovujú Maxwellovým rovniciam), sa *dajú vyjadriť cez potenciály.*

Literatúra

[1] M.Fecko: Teoretická mechanika - Sylabus + príklady (41 strán)
http://davinci.fmph.uniba.sk/~fecko1/teormech/primech11.pdf
http://sophia.dtp.fmph.uniba.sk/~fecko/teormech/primech11.pdf

[2] M.Mojžiš: TEMPO (Teória elektromagnetického poľa) (91 strán)
http://sophia.dtp.fmph.uniba.sk/~mojzis/Tempo.pdf

[3] M.Fecko: Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov, Bratislava, Iris 2004 (2.vydanie 2009, 2.opravené vydanie 2018)