**“TEORETICKÁ MECHANIKA ”**
**Podrobná osnova bakalárskej prednášky na FMFI UK Bratislava**
**doc.RNDr.Marián Fecko, PhD.**
**(verzia z 20.9.2022)**

K prednáške existuje elektronický učebný text, ktorý je dostupný na mojej stránke

davinci.fmph.uniba.sk/~fecko1

Obsahuje ku každej kapitole krátke teoretické úvody a pomerne veľa (viac, ako sa bežne stihne zrátať na cvičení) úloh, často s návodmi, niekedy s riešením.

K samotnej prednáške:
Najprv sa motivuje užitočnosť samotného predmetu „teoretická mechanika” pre štúdium **akejkoľvek** fyziky: obsahovo sa síce (skoro) všetko povedalo v prvom ročníku („všetko je v Newtonových zákonoch”), ale tento predmet prináša

• jednak **rafinovanejšie** (hoci jednoduché) **metódy**, ktorými sa dajú riešiť aj náročnejšie problémy (Lagrangeove a Hamiltonove rovnice, ...)
• jednak (**a hlavne**) je úvodom do **teoretickej fyziky v širšom zmysle**; má teda pomôcť nahliadnuť do (niekedy aj trochu abstraktnejších) metód a uvažovania, ktoré sú typické pre celú teoretickú fyziku, avšak na materiáli, kde sa ešte dá **všetko názorne pochopiť** (intuitívne vieme, ako kmitá kyvadlo, ako tečie voda, ...), takže vzniká zdravý návyk testovať „abstraktne” získané výsledky „zdravým rozumom” a aj naopak, učiť sa tieto abstraktné výsledky zdravým rozumom „hádať” („no čo by to asi tak malo robiť, no zrejme ... ”)

**Kritériom pre výber materiálu** v tomto kurze (pod týmto názvom by sa dalo hovoriť o kadečom) je preto

• príprava pojmov na **nadväzujúce** prednášky **teoretického kurzu** (Hamiltonián do kvantovej mechaniky, Liouvillova veta do klasickej štatistickej mechaniky, interakcia stupňov voľnosti do kvantovej teórie poľa, ...)
• ilustrácia spústy **bežných „trikov” teoretickej fyziky** (rozmerová analýza, škálovanie a metóda podobnosti, poruchová metóda, reálna práca s indexmi a tenzormi, ... )
• priama užitočnosť materiálu z **mechaniky** pre širšiu fyzikálnu komunitu, napríklad riešenie Keplerovej úlohy (obeh planét okolo Slnka), teória malých kmitov, tečenie kvapalín, vlny v kontinuu, ...

## 1. týždeň: VÄZBY

Hmotné body sú v mechanike často **viazané** ⇒ Newtonove rovnice sa komplikujú, lebo by sme do nich potrebovali explicitné vyjadrenie síl od väzieb, čo je zložité a nepraktické. Existuje formulácia mechaniky, v ktorej stačí vedieť samotné väzby (nie sily od nich). Je to lagranžovský (a hamiltonovský) formalizmus (ten má aj rôzne iné prednosti).
Tento aparát sa odvodí z Newtonových rovníc, ktorým veríme. Medzikrokom (ktorý sa na tejto prednáške postupne odvodí, ilustruje na jednoduchom príklade a vzápätí sa pre jeho nevýhody rýchlo opustí) je **D’Alembertov-Lagrangeov princíp**

$$
\begin{aligned}
(\dot{\bar p} - \bar F^{(a)}).\delta\bar r &= 0 \\
\delta\bar r.\bar\nabla\phi_\alpha &= 0 \qquad \alpha = 1,\dots,k \\
\phi_\alpha &= 0 \qquad \alpha = 1,\dots,k
\end{aligned}
$$

a jeho špeciálny prípad, **princíp virtuálnych prác**. Po ceste sa zavedú potrebné pojmy, ako **holonómne väzby**, **konfiguračný priestor** a **stupne voľnosti**, **virtuálne posunutie** a **virtuálna práca**, **aktívna sila** a **reakcia väzieb**.

## 2. týždeň: LAGRANGEOVE ROVNICE (2.druhu)

Pomocou D’Alembertovho-Lagrangeovho princípu sa dokončí cesta

Newtonove rovnice ↦ D’Alembertov-Lagrangeov princíp ↦ Lagrangeove rovnice (2.druhu)

Najprv sa odvodia Lagrangeove rovnice 2.druhu pre *všeobecné* sily

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial T}{\partial q^a} = Q_a$$

a z nich najdôležitejší špeciálny prípad, **Lagrangeove rovnice 2.druhu pre potenciálové sústavy**

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial L}{\partial q^a} = 0 \qquad a = 1, \ldots, n$$

Kľúčové slová: **zovšeobecnené súradnice**, **zovšeobecnené sily**, **lagranžián** (Lagrangeova funkcia). Zostavovanie lagranžiánov a rovníc sa ilustruje na jednoduchých príkladoch (pracnejšie príklady sa riešia na cvičeniach).

### 3. týždeň: LAGRANGEOVE ROVNICE a ich silné stránky

Ďalej sa venujeme silnej zbrani tohoto formalizmu, využitiu **cyklických súradníc** (= ktoré nevstupujú do $L$) na nájdenie **zachovávajúcich sa veličín** (pomocou ktorých sa výrazne uľahčuje explicitné riešenie pohybových rovníc). Pristupuje kľúčové slovo **zovšeobecnená (kanonická) hybnosť**. (Len) informatívne sa spomenie **Nötherovej veta**, ktorá dáva do súvisu grupu symetrie $L$ a zákony zachovania zodpovedajúcej dynamiky (technika cyklických súradníc je jej špeciálnym prípadom).
Zavedie sa pojem **zovšeobecnenej potenciálnej energie** (závisí aj od rýchlostí) a ukazuje sa, ako (ľahko) sa zahrnie do lagranžovského formalizmu a že Lorentzova sila nemá obyčajnú potenciálnu energiu, ale má zovšeobecnenú (takže lagranžovský aparát sa dá použiť aj na riešenie pohybu nabitých častíc v daných poliach $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$).
Skúma sa jav **interakcie stupňov voľnosti**. Nastáva podľa definície vtedy, keď pohyb jedného stupňa voľnosti závisí od toho, čo práve robia iné stupne voľnosti. Príznakom interakcie na úrovni **pohybových rovníc** je ich **zreťazenosť**. Ukazuje sa, že príznakom **neinteragovania** rovno na úrovni lagranžiánu je možnosť zapísať celkový lagranžián **ako súčet** dvoch členov, z ktorých každý obsahuje len časť premenných. Nemožnosť takého rozdelenia (a ako dôsledok interakciu) majú zvyčajne na svedomí členy tvaru **súčinu** (tie sa nedajú zapísať ako súčet).

### 4. týždeň: PRINCÍP NAJMENŠIEHO ÚČINKU („Hamiltonov princíp”)

Lagrangeove rovnice sa dajú odvodiť aj z **variačného princípu**. Oboznámime sa s motiváciou pre zavedenie (najkratšie čiary, brachystochrona, reťazovka, ... ) a s technickými základmi **variačného počtu** (nástroja na hľadanie extrémov **funkcionálov**) a presvedčíme sa, že vhodný funkcionál, ktorému sa hovorí **účinok** (účinkový integrál), dáva ako podmienku extrému práve Lagrangeove rovnice. Formuluje sa explicitne princíp najmenšieho účinku: pohyb po reálnej trajektórii extremalizuje účinok.
Celý tento materiál nie je zaujímavý pre potreby riešenia bežných úloh teoretickej mechaniky, ale skôr z hľadiska perspektívy **použitia vo vyššej fyzike**, kde je technicky veľmi užitočný.

### 5. týždeň: HAMILTONOVE (kanonické) ROVNICE

Ďalším vhodným nástrojom v teoretickej mechanike je **kanonický formalizmus** (= hamiltonovský). Namiesto zovšeobecnených rýchlostí pracuje so zovšeobecnenými hybnosťami. Formálny prechod zabezpečuje **Legendreova transformácia**, zaujímavá aj sama osebe (používa sa napríklad aj v termodynamike). Namiesto lagranžiánu tu pracujeme s **hamiltoniánom**. Priestor (2n-rozmerný), v ktorom fungujú súradnice $(q^a, p_a)$, sa volá **fázový priestor**. Dynamiku (ktorá sa dá vyjadriť aj výstižnou predstavou **fázového toku**) v ňom diktujú **Hamiltonove rovnice**

$$\dot{q}^a = \frac{\partial H}{\partial p_a} \qquad \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q^a} \qquad\quad a = 1, \ldots, n$$

(ukazuje sa, že sú ekvivalentné Lagrangeovým). Vo fázovom priestore platí **Liouvillova veta** - pri časovom vývoji sa zachováva **fázový objem**. Formálnym nástrojom v teórii sú aj **Poissonove zátvorky**, ktoré sa motivujú (na tejto úrovni formalizmu táto motivácia nie je bohvieako silná) výpočtom časovej derivácie ľubovoľnej funkcie vo fázovom priestore.

### 6. týždeň: INFORMÁCIE O POHYBE ZÍSKATEĽNÉ BEZ RIEŠENIA (pohybových) ROVNÍC

Spomínajú sa metódy, ktoré umožňujú dozvedieť sa niečo dôležité o riešení pohybových rovníc **bez toho**, aby sa tieto (diferenciálne !) rovnice **explicitne vyriešili** (čo je dôležité, lebo pohybové rovnice sa dajú exaktne riešiť **iba výnimočne**!). Okrem pripomenutia **rozmerovej analýzy** ide hlavne o využitie **fázového portrétu** a oboznámenie sa s technikou **škálovania a podobnosti**. Škálovanie sa robí najprv na úrovni pohybových rovníc (kde sa lepšie vidí, ako to funguje), potom sa ukazuje, ako sa to dá rutinne a elementárne robiť pomocou lagranžiánu.

### 7. týždeň: PROBLÉM DVOCH TELIES

Hlavným cieľom je presné riešenie **Keplerovej úlohy** (sústava Slnko + 1 planéta, ale aj ,,klasický" atóm vodíka), ale najprv sa rieši až po úroveň **,,kvadratúr"** (integrálov) všeobecnejšia úloha o 2 telesách, ktoré interagujú **centrálnou potenciálovou silou**. Vhodná zámena súradníc (ťažisko + relatívny polohový vektor) rozreťazí stupne voľnosti a naozaj treba riešiť už **len jedno** fiktívne teleso v **centrálnom poli**, čo sa dorobí po vyššie spomenutú úroveň. Robí sa to pomocou lagranžiánu, čo zároveň poskytuje netriviálnu ilustráciu lagranžovského formalizmu. Po ilustrácii kvalitatívnych metód z minulej prednášky (,,2. Keplerov zákon" pomocou škálovania, finitné a infinitné riešenia z obrázku) sa zodpovedajúci integrál (,,kvadratúra") naozaj zráta pre potenciálnu energiu $\propto 1/r$ (Keplerova úloha), čím sa príde k štandardným výsledkom tejto teórie (orbity = kužeľosečky, vyjadrenie ich parametrov pomocou hodnôt fyzikálnych veličín). **Orientačne** sa spomenie jav **precesie perihélia**, za ktorý môžu dve malé opravy doterajšieho prístupu (modifikácia poľa vplyvom iných planét a modifikácia Newtonovho gravitačného zákona všeobecnou teóriou relativity).

### 8. týždeň: MALÉ KMITY

Ak $\mathcal{U}(q^1,..,q^n)$ má **minimum** v $q_0 \equiv (q_0^1,..,q_0^n)$, tak v jeho okolí je možný univerzálny typ pohybu - malé kmity. Ak je celková energia $E$ **len trochu** väčšia ako $\mathcal{U}(q_0)$, tak $q$ je vždy blízko k $q_0 \Rightarrow$ Taylorov rozvoj. Ak sa takto aproximuje pôvodný lagranžián, vyjde približný lagranžián parametrizovaný dvoma (konštantnými) maticami $M_{ij}$ a $K_{ij}$

$$L(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}M_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j - \frac{1}{2}K_{ij}x^ix^j$$

Keďže obsahuje súčiny rôznych stupňov voľnosti, tieto stupne interagujú a celkovo vyzerá pohyb dosť zložito. Dá sa však úplne rozreťaziť vhodnou lineárnou zámenou súradníc $x_i \mapsto A_{ij}x_j \equiv \xi_i$. Výsledné súradnice sa volajú **normálne súradnice**. V nich

$$L = L_1 + .. + L_n \qquad L_i \equiv \frac{1}{2}\dot{\xi}_i^2 - \frac{1}{2}\omega_i^2\xi_i^2$$

$\Rightarrow$ je to sústava **neinteragujúcich** lineárnych harmonických oscilátorov. Ich frekvencie $\omega_i$ sú **charakteristické frekvencie** sústavy a dajú sa nájsť aj v pôvodných premenných riešením **sekulárnej rovnice**

$$\det|K - \omega_i^2 M| = 0 \Rightarrow \omega_1^2,..,\omega_n^2$$

Špeciálne riešenia pohybových rovníc sú **módy** (normálne kmity) - pri nich je nenulové len jedno $\xi_i$ (pritom ale v pôvodných súradniciach všetky $x_i$!). Všeobecné riešenie je **superpozícia** (= lineárna kombinácia) módov ($\Rightarrow$ už nemá pevnú frekvenciu a vyzerá preto na pohľad zložito).
Táto téma je dôležitá aj v teórii **poľa**; jednoduchý príklad ukazujú úlohy o strune a jej módoch.

### 9. týždeň: POHYBOVÉ ROVNICE V NEINERCIÁLNEJ VZŤAŽNEJ SÚSTAVE

Daňou za to, že mechanické javy pozorujeme zo ,,zlej" (= neinerciálnej) sústavy je objavenie sa **,,fiktívnych síl"**. Prvý typ neinerciálnosti je ,,translačná" neinerciálnosť; za ňu je (priestorovo homogénna) *zotrvačná sila* $-m\mathbf{A}$, takže zatiaľ

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r},t) - m\mathbf{A}$$

Druhý typ neinerciálnosti súvisí **s rotáciou** voči inerciálnej sústave. Tu je výhodné zaviesť dvojaké repéry (ortonormované bázy): $\mathbf{e}_i$ - repér stojaci v inerciálnej sústave a $\mathbf{e}_a(t)$ - repér stojaci v točiacej sa sústave (takže voči inerciálnej sa točí). Fakt, že druhá sústava sa točí práve uhlovou rýchlosťou $\boldsymbol{\omega}(t)$ voči prvej je odrazený (podrobne sa vysvetlí, prečo) v jednoduchej kinematickej rovnici $\dot{\mathbf{e}}_a(t) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_a(t)$. Ak polohový vektor zapíšeme v rozloženom tvare $\mathbf{r}(t) = x_i(t)\mathbf{e}_i = x_a(t)\mathbf{e}_a(t)$, tak dvojnásobným derivovaním priamočiaro vyjde

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}_i \mathbf{e}_i = \ddot{x}_a \mathbf{e}_a + 2\boldsymbol{\omega} \times (\dot{x}_a \mathbf{e}_a) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

Prvá rovnosť dáva pôvodnú rovnicu v inerciálnej sústave, druhá dáva tri fiktívne sily (**Coriolisovu, Eulerovu** a **odstredivú**); vo vhodnom označení dostaneme celkovú pohybovú rovnicu vo všeobecnej neinerciálnej sústave v tvare

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \underbrace{-m\mathbf{A}}_{\text{Zotrvač}} \underbrace{-2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})}_{\text{Coriolis}} \underbrace{-m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}}_{\text{Euler}} \underbrace{-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})}_{\text{Odstreď}}$$

(Terminológia je zjavne po objaviteľoch; volali sa Zotrvač, Coriolis, Euler a Odstreď.) Na výpočet niektorých efektov, ktoré sú dôsledkom dodatočných členov v pohybovej rovnici (Foucaultovo kyvadlo, odklon od zvislého smeru pri páde na Zemi ...), je výhodné použiť **poruchový počet**. Je to jednoduchá a nesmierne užitočná metóda hľadania približných riešení zložitých (napríklad diferenciálnych) rovníc špeciálnej (a našťastie dostatočne často sa vyskytujúcej) štruktúry: dá sa použiť vtedy, ak sa daná sústava ,,málo líši" od exaktne riešiteľnej, t.j. ak v úlohe máme prirodzene **malý parameter** $\epsilon << 1$ taký, že pre $\epsilon = 0$ dostávame exaktne riešiteľnú sústavu. Riešenie ,,porušenej" ($\epsilon \neq 0$) sústavy sa hľadá v tvare mocninného radu v $\epsilon$,

$$\boldsymbol{\xi}(\tau; \varepsilon) = \boldsymbol{\xi}_0(\tau) + \varepsilon \boldsymbol{\xi}_1(\tau) + \varepsilon^2 \boldsymbol{\xi}_2(\tau) + \dots$$

Pre jednotlivé členy sa získavajú jednoduché rekurentné rovnice (nultá zodpovedá neporušenej úlohe).

## 10.týždeň: MECHANIKA TUHÉHO TELESA

Pohyb tuhého telesa: translačný + rotačný. Tu sa budeme zaoberať už len rotačnou časťou pohybu (ťažisko stojí na mieste). Všetky body v telese v danom čase rotujú okolo spoločnej osi spoločnou uhlovou rýchlosťou $\boldsymbol{\omega}(t)$. Výpočet kinetickej energie a momentu hybnosti vedie na výsledky

$$T = \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j \equiv \frac{1}{2} I(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})$$
$$L_i = I_{ij} \omega_j$$

V oboch sa vyskytuje dôležitý objekt, **tenzor zotrvačnosti** tuhého telesa, ktorý má tvar objemového integrálu

$$I_{ij} := \int_V dm(\mathbf{r}^2 \delta_{ij} - x_i x_j)$$

Komponenty $I_{ab}$ voči (točiacim sa) osiam **spojeným s telesom** nezávisia (na rozdiel od ,,laboratórnych" zložiek $I_{ij}(t)$) od času. Vhodným výberom osí v telese (**hlavné osi**) sa dosiahne diagonálny tvar. Sú (len) 4 typy diagonálnych tvarov ($\leftrightarrow$ ,,zotrvačníkov"): **sférický, symetrický, asymetrický** a **rotátor**. To, ako dopadne zotrvačník v tejto klasifikácii, má vplyv na jeho možný rotačný pohyb. Explicitne sa napríklad ukazuje, že voľný symetrický zotrvačník môže konať (na rozdiel od sférického) **regulárnu precesiu** (teleso sa točí okolo svojej osi + os okolo (konštantného) momentu hybnosti). Na riešenie pohybov zotrvačníkov sa dajú použiť **Eulerove** kinematické a dynamické **rovnice**. Ide o sústavu 3+3=6 rovníc pre **Eulerove uhly** $(\varphi, \vartheta, \psi)$ (čo sú isté zovšeobecnené súradnice vhodné na opis konfigurácie tuhého telesa s fixovaným ťažiskom) ako funkcie času (t.j. na opis rotácie v priestore).

## 11. týždeň: MECHANIKA KONTINUA (spojitého prostredia; všeobecný úvod)

Sily v kontinuu sú dvojaké: objemové a plošné. Objemové sily (napríklad gravitačná) neprinášajú nič nové: sú charakterizované **hustotou objemovej sily** $\mathbf{f}_{obj} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$, čo je isté **vektorové pole** definované (v každom čase) v priestore, v ktorom sa vyskytuje kontinuum. Celková objemová sila je daná jednoducho (objemovým) integrálom: $\mathbf{F}_{obj} = \int_V \mathbf{f} dV$.

Analýza plošných síl ukazuje, že tu je to zložitejšie. Na úplný opis plošných síl treba v každom čase poznať isté **tenzorové pole** druhého rangu $\sigma_{ij}(\mathbf{r}, t)$, ktorému sa hovorí **tenzor napätia**. Pomocou neho sa plošná sila, ktorá pôsobí cez plôšku $d\mathbf{S}$, vyjadruje (lineárnym, **Cauchyho**) vzťahom

$$(d\mathbf{f}_{pl})_i = \sigma_{ij} dS_j$$

a celková plošná sila, ktorá pôsobí cez hranicu $\Sigma$ objemu $V$, je daná (plošným) integrálom

$$(\mathbf{F}_{pl})_i = \int_{\Sigma} \sigma_{ij} dS_j \qquad \Sigma = \partial V \text{ - hranica objemu } V$$

Ak sa napíše Newtonova rovnica pre infinitezimálny objem kontinua (a uváži sa, že celková sila je súčtom objemovej a plošnej sily), získa sa všeobecná **pohybová rovnica kontinua**:

$$f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho a_i \qquad \mathbf{a}(\mathbf{r}, t) \textbf{ - pole zrýchlenia}$$

Explicitný rozpis tejto rovnice je rôzny pre **tekutiny** a pre **pružné prostredie**.

## 12. týždeň: MECHANIKA KONTINUA - TEKUTINY

Pre tekutiny je základnou kinematickou premennou (vektorové) **pole rýchlostí** $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Z neho sa odvodí, že pole zrýchlenia, potrebné do pohybovej rovnice, má tvar $\mathbf{a} = (\mathbf{v}.\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$. Ďalej sa treba zaoberať tenzorom napätia. Pre ideálnu a viskóznu kvapalinu sa zdôvodnia vyjadrenia

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \qquad \text{pre } \textbf{ideálnu tekutinu}$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \qquad \text{pre } \textbf{viskóznu tekutinu}$$

Dosadenie týchto výrazov do pohybovej rovnice kontinua dáva potom rovnice

$$(\mathbf{v}.\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} p + \mathbf{g} \qquad \textbf{Eulerova rovnica}$$

$$(\mathbf{v}.\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} p + \mathbf{g} + \frac{\eta}{\rho}(\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}.\mathbf{v}) + \triangle \mathbf{v}) \qquad \textbf{Navierova-Stokesova rovnica}$$

Neznámych funkcií je príliš veľa (tri rovnice pre päť neznámych funkcií $\mathbf{v}, p, \rho$). Jednu rovnicu pridáva zákon zachovania hmotnosti v tvare

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}.(\rho \mathbf{v}) = 0 \qquad \textbf{rovnica kontinuity}$$

Pre nestlačiteľnú kvapalinu je to už v poriadku: hustota $\rho$ už nie je neznáma a máme práve 4 rovnice pre 4 neznáme. Použitie Navierových-Stokesových rovníc sa ilustruje na príklade tečenia vody v rúrke kruhového prierezu.
Dôležitým špeciálnym prípadom je **stacionárne prúdenie** ($\partial_t \mathbf{v} = \mathbf{0}$). Pre takýto prípad sa z Eulerovej rovnice odvodí (jednoduchšia) **Bernoulliho rovnica**

$$\frac{1}{2}\rho_0 v^2 + p + \rho_0 g z = \text{ konšt. pozdĺž prúdnice.}$$

Ak sa to obmedzí navyše na **nevírové prúdenie** ($\mathrm{rot}\, \mathbf{v} = \mathbf{0}$), ten istý výraz je dokonca konštantný v objeme. Ukáže sa, ako sa Bernoulliho rovnica typicky používa.

## 13. týždeň: MECHANIKA KONTINUA - LINEÁRNA PRUŽNOSŤ

Pre pružné kontinuum je základnou kinematickou premennou (vektorové) **pole posunutí** $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ (zavádza sa tak, aby platilo $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$)

Kľúčovým pojmom je **deformácia**. Dochádza k nej (podľa definície) vtedy, keď sa menia relatívne vzdialenosti hmotných bodov prostredia. Niektoré polia posunutí nevedú k deformácii (zodpovedajú **izometriám** = transláciám a rotáciám). Vtedy sa kontinuum pohybuje vlastne ako tuhé teleso a to nás tu nezaujíma.
Otázkou je, aký objekt jednoznačne kóduje (malé) deformácie (keď sme práve nahliadli, že pole posunutí to nie je). Vhodné úvahy (najčistejšie realizované pomocou diferenciálnej geometrie, čo ale vychádza za rámec tejto prednášky) ukazujú, že túto úlohu hrá isté tenzorové pole druhého rangu vyrobené z poľa posunutí, a to **tenzor deformácie**

$$\varepsilon_{ij} := u_{(i,j)} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

Empiricky sa vie, že medzi dôvodom deformácie a samotnou (dostatočne malou) deformáciou je **lineárna** závislosť. To je obsahom Hookovho zákona. Dôvod deformácie je zakódovaný v tenzore napätia (ak chcem niečo zdeformovať, musím to silou ťahať či skrúcať, čiže pôsobiť na objekt **plošnými silami**), deformácia v tenzore deformácie, takže máme všeobecne

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \qquad \textbf{Hookov zákon}$$

V princípe by bolo vstupujúce pole tenzora 4.rangu dané $3^4 = 81$ zložkami, ale jeho všeobecné symetrie to redukujú na 21. Najdôležitejší prípad, **izotropné homogénne kontinuum**, dokonca vedie na tvar, ktorý závisí len od **dvoch konštánt** (vysvetľuje sa, prečo)

$$\sigma_{ij} = \lambda\vartheta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \qquad \vartheta \equiv \varepsilon_{ii}$$

(Veličina $\vartheta$ sa volá **objemová dilatácia** a je na to dobrý dôvod, lebo si z celej deformácie všíma iba to, ako sa pri nej menia objemy.) Ak sa toto vyjadrenie dosadí do všeobecnej pohybovej rovnice kontinua, získa sa pohybová rovnica pružného (homogénneho a izotrópneho) kontinua

$$\rho\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda+\mu)\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}.\mathbf{u}) + \mu\triangle\mathbf{u} + \mathbf{f} \qquad \textbf{Lamého rovnica}$$

## 14. týždeň: MECHANIKA KONTINUA - ZVUKOVÉ VLNY

V pružnom kontinuu sa vyšetruje, či je schopné prenášať **lineárne polarizovanú rovinnú vlnu**. Na to sa dosadí **ansatz** $\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}f(\mathbf{n}.\mathbf{r},t)$ do Lamého rovnice bez objemovej sily. **Vyjde**, že to funguje, ba dokonca dvojako: sú možné **priečne a pozdĺžne vlny**. Vyjde aj rýchlosť ich šírenia

$$v_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \qquad v_l = \sqrt{\frac{2\mu+\lambda}{\rho}}$$

(pozdĺžne sú rýchlejšie), vyjadrená cez pružné charakteristiky prostredia.
V ideálnej tekutine: **linearizuje** sa sústava pohybových rovníc (Eulerova plus rovnica kontinuity) a predpokladá sa daný vzťah $p = p(\rho)$ (barotrópnosť). Vyjdú vlnové rovnice, vlny sú tu **len pozdĺžne**, rýchlosť ich šírenia je $c_0 = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}(\rho_0)}$. Pre **adiabatické** zmeny to dáva $c_0 = \sqrt{\gamma\frac{p_0}{\rho_0}}$.

## DOPLŇUJÚCA LITERATÚRA:


1. **J.R.Taylor** : Classical Mechanics, University Science Books, 2005
2. **Ch.Kittel,V.Knight,M.Ruderman**: Mechanics (Berkley Physics Course 1) Mc Graw-Hill 1965
3. **R.Feynman, Leighton, Sands**: Feynmanove prednášky z fyziky 1,4, Alfa, Bratislava, 1986,1989
4. **T.W.B.Kibble**: Classical Mechanics, McGraw Hill, London, 1973
5. **J.Horský,J.Novotný,M.Štefaník**: Mechanika ve fyzice, Academia 2001
6. **M.Brdička,A.Hladík**: Teoretická mechanika, Academia, Praha, 1987
7. **M.Brdička**: Mechanika kontinua, ČSAV, Praha 1959

**8. J.W.Leech**: Classical Mechanics, 1958 (český preklad SNTL, Praha, 1970)
**9. D.Ilkovič**: Fyzika I., SNTL, Bratislava, 1972
**10. V.Obetková,A.Mamrillová,A.Košinárová**: Teoretická mechanika, Alfa, Bratislava, 1990
**11. H.Goldstein**: Classical Mechanics, Adison-Wesley,1959
**12. L.D.Landau,E.M.Lifšic**: Mechanics, 3-rd ed., Butterworth-Heinemann Ltd., 1995
(v slovenčine čiastočne v Úvode do teoretickej fyziky 1., Alfa, Bratislava 1980)
**13. V.I.Arnoľd**: Mathematical methods of classical mechanics, Springer-Verlag, 1978 (veľmi náročné)
**14. M.Fecko**: Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov, Iris, Bratislava 2004, 2008, 2018
**15.**: rôzne zdroje z internetu (pozri ,,Zopár poznámok k literatúre" na mojej stránke)