

Rozšírený SYLABUS a PRÍKLADY k prednáške  
 “TEORETICKÁ MECHANIKA ”  
 Marián Fecko  
 13.verzia (z 26.9.2018; prvá bola z 90-tych rokov)

**0. VEKTOROVÁ ALGEBRA A ANALÝZA**

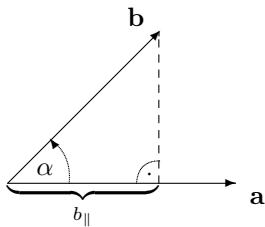
Def.1.  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := ab \cos \alpha \equiv ab_{\parallel} \equiv a_{\parallel} b$

Def.2.  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$

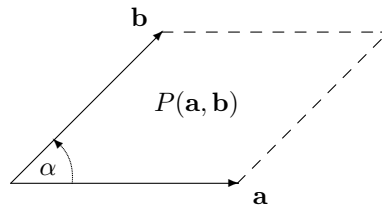
i)  $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{c} \perp \mathbf{b}$

ii)  $|\mathbf{c}| = ab \sin \alpha \equiv \text{plocha } P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

iii) smer  $\mathbf{c}$ : pravidlo vývrtky



Obr. Def.1



Obr. Def.2

0.1 Overiť, že skalárny aj vektorový súčin sú *bilineárne zobrazenia*  $\Rightarrow$  stačí vedieť ich hodnoty na báze, lebo

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_i \mathbf{e}_i) \cdot (b_j \mathbf{e}_j) = a_i b_j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j)$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_i \mathbf{e}_i) \times (b_j \mathbf{e}_j) = a_i b_j (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j)$$

Použila sa (a ďalej sa bude používať) tzv. (Einsteinova) *sumačná konvencia*: *dvakrát sa opakujúci index znamená automaticky sumáciu*, čiže napr.

$$a_i \mathbf{e}_i := \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i$$

0.2 Overiť, že na pravotočivej ortonormálnej báze platí

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$$

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k$$

kde sa použil *Kroneckerov symbol*  $\delta_{ij}$  ( $= 0$  pre  $i \neq j$  a  $1$  pre  $i = j$ ) a *Levi-Civitol symbol*  $\varepsilon_{ijk}$  (je úplne antisymetrický a  $\varepsilon_{123} = 1$ ).

0.3 Ukázať, že

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$$

0.4 Dokázať, že platí

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij} = \varepsilon_{jki}$$

(invariantnosť voči cyklickým zámienám). Odtiaľ, že

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$$

0.5 Náhodne overiť *Davis-cupovú identitu*

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnk} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}$$

(mnemotechnika: v piatok hrá prvý proti prvému ( $im$ ) a druhý proti druhému ( $jn$ ), v nedelu prvý proti druhému ( $in$ ) a druhý proti prvému ( $jm$ )). Dokázať

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mjk} = 2\delta_{im} \quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6 \quad \delta_{ij}a_j = a_i \quad \delta_{ii} = 3$$

**0.6** Dokázať, že

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \end{aligned}$$

Návod: (0.3),(0.5)

**0.7** Overiť, že

i) pre determinant matice  $3 \times 3$  platí

$$\det A = \varepsilon_{ijk}A_{1i}A_{2j}A_{3k} \equiv \frac{1}{3!}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}A_{il}A_{jm}A_{kn}$$

ii) pre determinant matice blízkej k jednotkovej platí

$$\det(1_n + \epsilon C) = 1 + \epsilon \text{Tr } C + \dots$$

(Stopa matice  $X \equiv \text{Tr } X := X_{ii} \equiv$  súčet diagonálnych elementov).

**0.8** Nech

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

t.j.  $A_{1i} = \mathbf{e}_i$ ,  $A_{2j} = a_j$ ,  $A_{3k} = b_k$ .

Dokázať, že platí

$$\det A = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i \mathbf{e}_i$$

Pozn.: odvodený výsledok umožňuje počítať vektorový súčin pomocou determinantu. Tento postup je však zbytočne ťažkopádnejší, ako priame použitie komponentného vzorca odvodeného v úlohe (0.3)

**0.9** Pre ľubovoľnú štvorcovú  $n \times n$  maticu  $B \leftrightarrow B_{ij}$  existuje jednoznačný rozklad ( $M^T$  je *transponovaná matrica* k  $M$ , t.j.  $M_{ij}^T = M_{ji}$ )

$$\begin{aligned} B &= S + A \\ S &\equiv \frac{1}{2}(B + B^T) \quad A \equiv \frac{1}{2}(B - B^T) \end{aligned}$$

t.j.

$$\begin{aligned} B_{ij} &= S_{ij} + A_{ij} \\ S_{ij} &\equiv \frac{1}{2}(B_{ij} + B_{ji}) \quad A_{ij} \equiv \frac{1}{2}(B_{ij} - B_{ji}) \end{aligned}$$

(na symetrickú a antisymetrickú časť). Nech ďalej  $s$  je ľubovoľná  $n \times n$  *symetrická matrica* ( $s^T = s$ ), a  $a$  je ľubovoľná *antisymetrická matrica* ( $a^T = -a$ ). Ukázať, že

i)

$$\text{Tr}(Bs) = \text{Tr}(Ss) \quad \text{Tr}(Ba) = \text{Tr}(Aa) \quad \text{Tr}(sa) = 0$$

t.j.

$$B_{ij}s_{ji} = S_{ij}s_{ji} \quad B_{ij}a_{ji} = A_{ij}a_{ji} \quad s_{ij}a_{ji} = 0$$

ii)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk}s_{jk} &= 0 \\ a_i &:= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}a_{jk} \quad \Rightarrow \quad (a_1, a_2, a_3) = (a_{23}, a_{31}, a_{12}) \end{aligned}$$

Nech  $x_i$  sú *kartézske súradnice* v  $\mathbb{R}^3$  ( $x \equiv x_1, y \equiv x_2, z \equiv x_3$ ).

Def.3.  $\nabla \equiv (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$  ("nabla operátor";  $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}$ )

Def.4.  $\text{grad } f \equiv \nabla f$

Def.5.  $\text{div } \mathbf{A} \equiv \nabla \cdot \mathbf{A}$

Def.6.  $\text{rot } \mathbf{A} \equiv \nabla \times \mathbf{A}$

Def.7.  $\Delta f = \text{div grad } f$

**0.10** Ukázať, že v kartézskych súradniciach

$$\begin{aligned}(\text{grad } f)_i &\equiv \partial_i f \equiv f_{,i} \\ \text{div } \mathbf{A} &\equiv \partial_i A_i \equiv A_{i,i} \\ (\text{rot } \mathbf{A})_i &\equiv \varepsilon_{ijk} (\partial_j A_k) \equiv \varepsilon_{ijk} A_{k,j} \\ \Delta f &\equiv \partial_i \partial_i f \equiv f_{,ii}\end{aligned}$$

Návod: (0.3).

**0.11** Dokázať

$$\partial_i r \equiv r_{,i} = \frac{x_i}{r}$$

( $r \equiv |\mathbf{r}| \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ )

**0.12** Dokázať

$$\begin{aligned}\text{rot grad } f &= \mathbf{0} && \text{pre ľubovoľné } f \\ \text{div rot } \mathbf{A} &= 0 && \text{pre ľubovoľné } \mathbf{A}\end{aligned}$$

Návod:  $(\text{rot grad } f)_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k f$ ;  $\text{div rot } \mathbf{A} = \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k$  a aplikovať  $\varepsilon_{ijk} S_{jk} = 0$  z (0.9).

**0.13** Dokázať, že ak  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{r}$ , tak

$$\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

t.j. také silové pole je vždy potenciálové. Nájsť potenciálnu energiu.

Návod:  $(\text{rot } \mathbf{F})_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j (f x_k) = \dots$ ; hľadať ju v tvare  $U(\mathbf{r}) = h(r) \Rightarrow (-\nabla U)_i = -h'(r) \partial_i r = \dots$  (0.11).

**0.14** Nájsť potenciálnu energiu pre silové pole  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\alpha}{r^2} \mathbf{r}$ . (Návod: (0.13))

**0.15** Vypočítať  $\text{div } \mathbf{F}$  pre  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  z (0.13).

**0.16** Overiť, že

$$\Delta f(r) = f'' + \frac{2}{r} f' \equiv \frac{1}{r^2} (r^2 f)'$$

Recept 1. Krivkový integrál („2.druhu“)  $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$

( $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  - vektorové pole,  $C$  - krivka)

sa počíta takto: Krivka  $C$  sa *parametrizuje*, t.j. vyjadrí v tvare  $\mathbf{r}(u)$ ,  $u \in \langle a, b \rangle$ . Potom

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \equiv \int_C A_i dx_i = \int_a^b \mathbf{A}(\mathbf{r}(u)) \cdot \frac{d\mathbf{r}(u)}{du} du \equiv \int_a^b \Phi(u) du$$

kde

$$\Phi(u) := \mathbf{A}(\mathbf{r}(u)) \cdot \frac{d\mathbf{r}(u)}{du}$$

Recept 2. Plošný integrál („2.druhu“)  $\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$

( $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  - vektorové pole,  $S$  - dvojrozmerná plocha)

sa počíta takto: plocha  $S$  sa *parametrizuje*, t.j. vyjadrí v tvare  $\mathbf{r}(u, v)$ ,  $(u, v) \in \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ . Potom

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \equiv \int_S A_i dS_i = \int_a^b du \int_c^d dv A_i(\mathbf{r}(u, v)) \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x^j}{\partial u} \frac{\partial x^k}{\partial v} \equiv \int_a^b du \int_c^d dv \Psi(u, v)$$

kde

$$\Psi(u, v) := A_i(\mathbf{r}(u, v)) \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x^j(u, v)}{\partial u} \frac{\partial x^k(u, v)}{\partial v} \equiv \mathbf{A} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right)$$

Pozn.: z receptov 1,2 (na ich odvodenie a viac detailov si treba počkať na príslušné časti kurzu matematickej analýzy alebo diferenciálnej geometrie) vidno, že

$$dx_i \mapsto \frac{dx_i(u)}{du} du \quad dS_i \mapsto \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x^j}{\partial u} \frac{\partial x^k}{\partial v} du dv \equiv \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right)_i du dv$$

V matematickej analýze sa dokazuje (kľúčový!) fakt, že tieto integrály *nezávisia* od parametrizácie, ale len od „množiny bodov“, ktorá sa parametrizuje (čiže parametrizáciu možno použiť *ľubovoľnú* a dá to vždy to isté).  
 Tvrdenie 1 (Gaussova veta): Nech  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  je vektorové pole v  $\mathbb{R}^3$ ,  $D$  - 3-rozmerná oblasť v  $\mathbb{R}^3$ ,  $\partial D$  - je jej hranica (2-rozmerná uzavretá plocha). Potom platí

$$\int_{\partial D} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_D (\operatorname{div} \mathbf{A}) dV$$

Tvrdenie 2 (Stokesova veta): Nech  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  je vektorové pole v  $\mathbb{R}^3$ ,  $S$  - 2-rozmerná plocha v  $\mathbb{R}^3$ ,  $\partial S$  - jej hranica (1-rozmerná uzavretá krivka  $\equiv$  slučka). Potom platí

$$\int_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\operatorname{rot} \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

(Pozn.1.: presnejšie znenie týchto viet obsahuje o.i. aj pravidlá o zosúladení orientácií; ich nerešpektovanie môže spôsobiť, že dostaneme rovnosť len až na znamienko.)

Pozn.2.: tvrdenie 2 platí pre *ľubovoľnú* plochu  $S$  natiahnutú na (fixnú) hranicu  $\partial S$ .)

**0.17** Vypočítať  $dS_i(u, v) \equiv \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x^j}{\partial u} \frac{\partial x^k}{\partial v} du dv$  pre

*i*) sféru (alebo jej časť) polomeru  $R$  (použiť  $(u, v) \equiv (\vartheta, \varphi)$  zo *sférických súradníc*  $r, \vartheta, \varphi$ )

*ii*) plášť valca polomeru  $R$  (na boku súradnice  $\varphi, z$ , na podstave a vrchu  $r, \varphi$  z pôvodných *cyklindrických súradníc*)

*iii*) plášť hranola rozmerov  $a, b, c$  ( $u, v \mapsto$  zodpovedajúce *kartézské súradnice*)

**0.18** Nech  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = (0, 0, v_0 = \text{konšt})$  je pole rýchlostí pre tečenie kvapaliny. Vypočítať objem kvapaliny, ktorý pretečie za 1 sekundu

*i*) cez hornú polsféru polomeru  $R$

*ii*) cez kruh polomeru  $R$  (ktorý uzatvára tú polsféru na polguľu) orientovaný  $\perp$  na smer tečenia

*iii*) cez kruh polomeru  $R$  orientovaný pod uhlom  $\alpha$  voči smeru tečenia ( $\alpha$  je uhol medzi  $\mathbf{v}$  a normálou ku kruhu)

Návod: Vo všetkých prípadoch to získať poctivým výpočtom plošných integrálov  $\int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$  podľa Receptu 2 a až potom to kontrolovať zdravým rozumom.

**0.19** Nech  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  je pole rýchlostí pre tečenie viskózne kvapaliny v rúre kruhového prierezu (úlohy (11.9), (11.10)). Vypočítať objem kvapaliny, ktorý pretečie fixovaným prierezom rúrky za 1 sekundu.

Návod: vypočítať  $\int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$  pomocou polárnych súradníc v kruhu.

**0.20** Ukázať, že výsledky úlohy (0.18) *i*), *ii*) sú konzistentné s tvrdením Gaussovej vety.

**0.21** Dokázať kritérium potenciálovosti silového poľa  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  v  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathbf{F} \text{ potenciálové} \Leftrightarrow \operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

Návod: *i*)  $\leftarrow$  úloha (0.12),  $\rightarrow$ : definovať funkciu  $U(\mathbf{r}) := -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'$  ( $\mathbf{r}_0$  - fixovaný bod). Ukázať, že:

*ii*) integrál nezávisí od cesty (t.j. je korektné definovaný; využiť Stokesovu vetu)

*iii*)  $-\nabla U = \mathbf{F}$

*iv*) iný výber  $\mathbf{r}_0$  vedie na  $U \mapsto U + \text{konšt}$  ( $\Rightarrow \mathbf{F} \mapsto \mathbf{F}$ )

Pozn.: uvedené tvrdenie platí v *jednoducho súvislých* priestoroch, t.j. takých, kde sa dá stiahnuť každá slučka.

Porozmýšľať, kde sa tento fakt využíva.

**0.22** Ukázať, že  $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$  je to isté ako

$$F_{i,j} = F_{j,i} \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{resp.} \quad F_{[i,j]} = 0$$

**0.23** Dokázať jednoduchšiu implikáciu v kritériu potenciálovosti silového poľa pre  $N$  častíc, t.j.

$\bar{F}$  potenciálové ( $F_A = -U_{,A}$ )  $\Rightarrow F_{A,B} = F_{B,A}$

Pozn.: na zopakovanie dôkazu opačnej implikácie podľa návodu v (0.21) treba zovšeobecnenie Stokesovej vety (existuje - Stokesova veta v teórii diferenciálnych foriem).

# 1. SÚSTAVA (NEVIAZANÝCH) HMOTNÝCH BODOV

## 1 hmotný bod:

Kinematika:

trajektória (poloha)  $\mathbf{r}(t)$   
 (okamžitá) rýchlosť  $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$   
 (okamžité) zrýchlenie  $\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)$   
 (úlohy (1.1) - (1.5))

Dynamika: 3 Newtonove zákony

Ďalšie pojmy:

práca  $A := \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

2. Newtonov zákon dá  $A = T_2 - T_1$  ( $T \equiv \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$  - kinetická energia)

potenciálové (konzervatívne) silové pole: ak  $\exists$  funkcia  $U(\mathbf{r})$  taká, že

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) \equiv -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \equiv -\text{grad } U(\mathbf{r})$$

kritérium potenciálovosti:  $\mathbf{F}$  potenciálové  $\Leftrightarrow \text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$  (príklady (0.21), (0.22))

V potenciálovom poli  $A = U_2 - U_1 \Rightarrow$

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2$$

(zachovanie celkovej mechanickej energie)

## N hmotných bodov:

Kinematika:  $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}_i, \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}_i, \mathbf{a} \mapsto \mathbf{a}_i$  ( $i = 1, \dots, N$ )

Dynamika:  $\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_i \equiv \dot{\mathbf{p}}_i$

Rozklad  $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij}$  ( $\mathbf{F}_i^{(e)}$  - vonkajšia na  $i$ -tu,  $\mathbf{F}_{ij}$  -  $j$ -ta na  $i$ -tu)

Potom platí: (využije sa zákon akcie-reakcie  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ )

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}^{(e)}$$

(„prvá veta impulzová“;  $\mathbf{P} := \sum_i \mathbf{p}_i$  - celková hybnosť,  $\mathbf{F}^{(e)} := \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)}$  - celková vonkajšia sila; vpravo je len celková vonkajšia sila, t.j. na celkovú hybnosť sústavy nemajú vplyv vnútorné sily) a (využije sa  $\mathbf{F}_{ij} \parallel (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$  - centrálnosť vnútorných síl)

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N}^{(e)}$$

(„druhá veta impulzová“;  $\mathbf{L} := \sum_i \mathbf{L}_i \equiv \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$  - celkový moment hybnosti,  $\mathbf{N}^{(e)} := \sum_i \mathbf{N}_i^{(e)} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)}$  - celkový moment vonkajších síl; na celkový moment hybnosti nemajú vplyv momenty vnútorných síl)

Zákony zachovania pre izolovanú sústavu:

$$\mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{P} = \text{konšt} \quad (\text{celkovej hybnosti})$$

$$\mathbf{N}^{(e)} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{L} = \text{konšt} \quad (\text{celkového momentu hybnosti})$$

3N-rozmerný formalizmus:

$$(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \longleftrightarrow \bar{\mathbf{r}} \equiv (x_1, \dots, z_N) \equiv ((\mathbf{r}_1)_x, \dots, (\mathbf{r}_N)_z)$$

$$(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) \longleftrightarrow \bar{\mathbf{p}} \equiv ((\mathbf{p}_1)_x, \dots, (\mathbf{p}_N)_z)$$

$$(\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_N) \longleftrightarrow \bar{\mathbf{F}} \equiv ((\mathbf{F}_1)_x, \dots, (\mathbf{F}_N)_z)$$

$$(\nabla_1, \dots, \nabla_N) \longleftrightarrow \bar{\nabla} \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_N} \right)$$

Potom Newtonove rovnice

$$\bar{\mathbf{F}} = \dot{\bar{\mathbf{p}}}$$

t.j. formálne ako *jedna* hmotný bod, ale v 3N-rozmernom priestore

Teraz potenciálové pole: ak  $\bar{\mathbf{F}}(\bar{\mathbf{r}}) = -\bar{\nabla} U(\bar{\mathbf{r}})$  pre nejakú  $U(\bar{\mathbf{r}})$

resp.  $F_A(\bar{\mathbf{r}}) = -\frac{\partial U}{\partial r_A} \equiv -U_{,A}$

alebo tiež  $\mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = -\nabla_i U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \equiv -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}$

Kritérium potenciálovosti:

$$\bar{\mathbf{F}} \text{potenciálové} \Leftrightarrow F_{A,B} = F_{B,A} \quad (\text{úloha (0.23)})$$

- 1.1 Rovnomerný pohyb po špirále (tvaru solenoidu) v priestore - zapísať  $\mathbf{r}(t)$ , vypočítať  $\mathbf{v}(t)$ ,  $\mathbf{a}(t)$ .
- 1.2 Nájsť  $\mathbf{r}(t)$  pre rovnomerný pohyb ( $|\mathbf{v}| = \text{konšt}$ ) po logaritmickú špirálu v rovine ( $r(\varphi) = a e^{b\varphi}$ ). Ukázať, že  $r$  rastie s časom lineárne.
- 1.3 Bod v rovine sa pohybuje tak, že uhol medzi smerom jazdy a smerom k fixnému bodu je konštantný. Ukázať, že dráha je logaritmická špirála.
- 1.4 Nájsť rovnicu *loxodrómy*, t.j. krivky na sfére, ktorá zvierá so všetkými poludníkmi rovnaký (daný) uhol  $\alpha_0$ .  
Návod: pre ľub. krivku na sfére (polomeru  $R$ ) platí  $\mathbf{r}(t) = (R \sin \vartheta \cos \varphi, R \sin \vartheta \sin \varphi, R \cos \vartheta)$ , kde  $\vartheta(t), \varphi(t)$  sú funkcie parametra  $t$ . Zapísať krivku  $\mathbf{r}_0(t)$  pre pohyb pozdĺž poludníka a od hľadanej krivky  $\mathbf{r}(t)$  žiadať, aby uhol medzi  $\dot{\mathbf{r}}_0(t)$  a  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  bol  $\alpha_0$ . Vzniknutú diferenciálnu rovnicu separovať a nájsť riešenie v implicitnom tvare  $f(\vartheta, \varphi) = 0$ .
- 1.5 Ukázať, že pri pohybe v rovine platí: ak je sektorová ( $\equiv$  plošná) rýchlosť ( $\dot{S} \equiv \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}$  -prečo?) konštantná, tak zrýchlenie má vždy smer do (od) stredu.  
Návod: nahliadniť, že  $d\mathbf{S} = \mathbf{r} \times dt \dot{\mathbf{r}}$ ; potom  $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{k}$  a  $(d/dt)$  teda  $\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0$
- 1.6 Ukázať, že ak  $\mathbf{L}$  je konštantný (pre jeden hmotný bod), tak pohyb je v rovine kolmej na  $\mathbf{L}$  a prechádzajúcej „počiatkom“ (bodom, voči ktorému sa odčíta  $\mathbf{L}$ ). Nájsť rovnicu tejto roviny.  
Návod:  $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{k}$ , násobiť skalárne vektorom  $\mathbf{r}$ ; rovnica roviny je  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + q = 0$
- 1.7 Overiť (výpočtom  $\text{rot } \mathbf{F}$ ), že silové pole  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{r}$  je potenciálové. Nájsť potenciálnu energiu.  
Návod: hľadať v tvare  $U(\mathbf{r}) = \mathcal{U}(r)$ . Overiť, že  $-\nabla U = -\frac{U'(r)}{r}\mathbf{r}$  a porovnať s daným  $\mathbf{F}$ .
- 1.8 Aplikovať (1.7) na gravitačné (elektrostatické) silové pole

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\alpha}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad \alpha = \text{konšt}$$

- 1.9 Odvodiť gravitačné silové pole  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -mge_3$  tesne nad zemou z poľa v príklade (1.8)  
Návod: vypočítať 0. člen Taylorovho rozvoja v  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  okolo  $r = R$ , kde  $R \equiv$  polomer Zeme; to isté najprv analogickou aproximáciou potenciálnej energie - tam však treba aj 1.člen Taylorovho rozvoja - prečo?
- 1.10 Vypočítať  $U(\mathbf{r})$  pre pole z úlohy (1.8) integrovaním  $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  po vhodnej ceste.
- 1.11 Vypočítať  $U(\mathbf{r})$  pre izotropný priestorový oscilátor, t.j.  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -k\mathbf{r}$  ( $k > 0$ ).  
Návod: pozri návod k úlohe (1.7)
- 1.12 Nech potenciálna energia interakcie dvoch hmotných bodov má tvar  $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathcal{U}(r)$ , kde  $r \equiv |\mathbf{r}|$ ,  $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ . Overiť, že príslušné sily spĺňajú zákon akcie a reakcie. Napísať zodpovedajúce Newtonove rovnice. Odvodiť z nich, že ťažisko sa pohybuje rovnomerne priamočiara.
- 1.13 Overiť, že *homogénne silové pole* ( $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \text{const}$ ) je potenciálové a nájsť  $U(\mathbf{r})$ . Špecifikovať na zemské gravitačné pole, t.j.  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = m\mathbf{g} = -mge_3$ .
- 1.14 Riešiť úlohu o páde telesa o hmotnosti  $m$  z veľkej výšky na teleso o hmotnosti  $M$  ( $m \ll M \Rightarrow$  predpokladať, že teleso  $M$  sa nehýbe).  
Návod: treba riešiť rovnicu  $m\ddot{x} = -\kappa m M/x^2$ . Keďže tu figurujúca sila  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -(\kappa M m/r^2)(\mathbf{r}/r)$  má potenciálnu energiu, možno využiť 1. integrál  $\equiv$  celkovú energiu, t.j. riešiť (ekvivalentnú) rovnicu *prvého* rádu  $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \kappa \frac{mM}{x} = E = \text{konšt.} = -\frac{\kappa m M}{x_0}$  ( $x_0 \equiv x(0)$ ); predpokladá sa  $\dot{x}(0) = 0$ .  
Zaviesť bezrozmerné premenné  $\xi \equiv \frac{x}{x_0}$ ,  $\tau = \sqrt{\frac{2\kappa M}{x_0^3}} t \equiv \frac{t}{t_0}$  ( $t_0$  je akýsi charakteristický čas zostavený z konštant vstupujúcich do úlohy - aký je asi jeho význam?), a rovnicu separovať na tvar

$$-\sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} d\xi = d\tau$$

(prečo treba voliť znamienko „-“ pred odmocninou?). Na to substitúcia (porovnať s úlohou (4.4))  $\xi = \cos^2 \frac{\psi}{2} \equiv \frac{1}{2}(1 + \cos \psi)$ .

Vyjde  $\tau = \frac{1}{2}(\psi + \sin \psi)$ ,  $\xi = \frac{1}{2}(1 + \cos \psi)$  Ukázať, že ide o *cykloidu* v rovine  $\xi\tau$  (polomer kola  $R = \frac{1}{2}$ ).  
Pre *malé* časy ( $\leftrightarrow$  malé  $\psi$ ) vyjadriť v explicitnom tvare a dostať  $x(t) \doteq x_0 - \frac{x_0}{4t_0^2} t^2$

## 2. VÄZBY

$N$  hmotných bodov *bez väzieb*:  $\bar{r} \equiv (r_1, \dots, r_{3N}) \in \mathbb{R}^{3N}$

(Holonómne) väzby: sústava rovníc  $\phi_\alpha(\bar{r}) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, k < 3N$

Tie  $\bar{r}$ , ktoré vyhovujú všetkým väzbám, tvoria *konfiguračný priestor* sústavy (úloha (2.1))

$$M = \{\bar{r} \in \mathbb{R}^{3N}; \phi_\alpha(\bar{r}) = 0 \text{ pre } \alpha = 1, \dots, k < 3N\} \equiv \text{skutočný životný priestor sústavy}$$

Def:  $\dim M =$ : počet *stupňov voľnosti*  $\equiv 3N - k =: n$

Nech  $\bar{r} \in M$ ,  $\delta\bar{r}$  infinitezimálny prírastok taký, že aj  $\bar{r} + \delta\bar{r} \in M$ . Potom

$$\phi_\alpha(\bar{r}) = 0 \quad \phi_\alpha(\bar{r} + \delta\bar{r}) = 0$$

$\Rightarrow$

$$\delta\bar{r} \cdot \bar{\nabla} \phi_\alpha|_{\bar{r}} = 0 \quad \alpha = 1, \dots, k$$

t.j. v inom zápise  $\delta\mathbf{r}_1 \cdot \nabla_1 \phi_\alpha|_{\bar{r}} + \dots + \delta\mathbf{r}_N \cdot \nabla_N \phi_\alpha|_{\bar{r}} = 0$

Také  $\delta\bar{r}$  sa volajú *virtuálne posunutia* (sú to teda malé posunutia z  $M$  opäť do  $M$ )

Pohyb sústavy s väzbami:

$$\dot{\bar{p}} = \bar{F} = \bar{F}^{(a)} + \bar{F}^{(r)}$$

$\bar{F}^{(a)}$  - *aktívna sila*: tá časť, ktorá by ostala, aj keby sa väzby zrušili (napr. gravitačná)

$\bar{F}^{(r)}$  - *reakcia väzby* - nepríjemný (úloha (2.6)) člen - je snaha vyhnúť sa jeho explicitnému výpočtu

Dá sa to takto: postulát

$$\text{pre virtuálne posunutie } \delta\bar{r} \cdot \bar{F}^{(r)} = 0$$

(motivácia:  $\bar{F}^{(r)} \perp M$ ,  $\delta\bar{r} \parallel M$ )

Potom

$$(\dot{\bar{p}} - \bar{F}) = 0 \quad / \cdot \delta\bar{r}$$

dáva sústavu rovníc

$$\begin{aligned} (\dot{\bar{p}} - \bar{F}^{(a)}) \cdot \delta\bar{r} &= 0 \\ \delta\bar{r} \cdot \bar{\nabla} \phi_\alpha &= 0 \quad \alpha = 1, \dots, k \\ \phi_\alpha &= 0 \quad \alpha = 1, \dots, k \end{aligned}$$

Týchto  $2k + 1$  rovníc sa volá *D'Alambertov-Lagrangeov princíp* (úloha (2.4))

Špeciálne riešenie = státie - možné len v *rovnovážnych polohách*. Tam  $\frac{d}{dt}$  (čohokoľvek) = 0  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \bar{F}^{(a)} \cdot \delta\bar{r} &= 0 \\ \delta\bar{r} \cdot \bar{\nabla} \phi_\alpha &= 0 \\ \phi_\alpha &= 0 \end{aligned}$$

čo je *princíp virtuálnych prác*: práca aktívnych síl pri virtuálnom posunutí (výraz  $\bar{F}^{(a)} \cdot \delta\bar{r}$ ) je v rovnovážnej polohe nulová (úlohy (2.3), (2.5))

*Zovšeobecnené súradnice* - ľubovoľné „dobré“ súradnice  $q^a \equiv (q^1, \dots, q^n)$  na  $M$ .

Pomocou nich pre ľubovoľné  $\bar{r} \in M$  vyjadrenie

$$\bar{r} = \bar{r}(q) \equiv \bar{r}(q^1, \dots, q^n)$$

(parametrizácia konfiguračného priestoru - úloha (2.1)). Potom ľubovoľné virtuálne posunutie má tvar

$$\delta\bar{r} = \frac{\partial \bar{r}(q)}{\partial q^a} \delta q^a$$

Pozn.: D'Alambertov-Lagrangeov princíp je na praktické riešenie jednoduchých úloh dosť ťažkopádny (napr. zbytočne veľa rovníc - počet rovníc  $\equiv 2k + 1$  stúpa s počtom väzieb, zatiaľ čo počet stupňov voľnosti  $n = 3N - k$  klesá, t.j. životného priestoru je s rastúcim  $k$  čoraz menej). Pre nás slúži ako most na trase

Newtonove rovnice  $\mapsto$  D'Alambert-Lagrangeov princíp  $\mapsto$  Lagrangeove rovnice (2.druhu)

**2.1** Zapísať väzby (v tvare  $\Phi_\alpha(\vec{r}) = 0, \alpha = 1, \dots, k$ ) a aktívnu silu  $\vec{F}^{(a)}$  pre

i) rovinné matematické kyvadlo

ii) sférické kyvadlo

iii) dvojné rovinné kyvadlo

iv) dvojné sférické kyvadlo

Vo všetkých prípadoch určiť „typ“ konfiguračného priestoru (kružnica,...), jeho rozmer ( $\equiv$  počet stupňov voľnosti) a zaviesť zovšeobecnené súradnice

**2.2** Zapísať explicitne rovnice pre virtuálne posunutia ( $\delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\Phi_\alpha = 0$ ) pre situácie z úlohy (2.1)

**2.3** Nájsť rovnovážne polohy sústav z úlohy (2.1) pomocou princípu virtuálnych prác (t.j. riešiť sústavu  $\Phi_\alpha = 0, \delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\Phi_\alpha = 0, \vec{F}^{(a)} \cdot \delta\vec{r} = 0$ ; pozri tiež (3b.15))

**2.4** Zapísať a riešiť rovnice zodpovedajúce D'Alembertovmu - Lagrangeovmu princípu (t.j.  $\Phi_\alpha = 0, \delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\Phi_\alpha = 0, (\dot{\vec{p}} - \vec{F}^{(a)}) \cdot \delta\vec{r} = 0$ ) pre rovinné matematické kyvadlo (úloha (2.1i)).

**2.5** Riešiť úlohu o rovnováhe na páke (ramená  $l_1, l_2$ , na ich koncoch sily  $F_1, F_2$  smerom dolu) pomocou princípu virtuálnych prác (pozri tiež (3b.15)).

**2.6** Vypočítať reakciu väzby pre prípad rovinného matematického kyvadla využitím známej (úloha (3a.2)) pohybovej rovnice v zovšeobecnenej súradnici  $\varphi$ . Overiť pre tento prípad platnosť všeobecnej rovnice  $\delta\vec{r} \cdot \vec{F}^{(r)} = 0$ .

Návod: zaviesť parametrizáciu

$$(x(\varphi), y(\varphi), z(\varphi)) \equiv \mathbf{r}(\varphi) = l(\sin \varphi, 0, -\cos \varphi) \equiv l \mathbf{e}_r$$

Potom využitím rovnice  $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$  a definovaním  $\mathbf{e}_\varphi \equiv (\cos \varphi, 0, \sin \varphi)$  dostať

$$\ddot{\mathbf{r}} = g \sin \varphi (-\mathbf{e}_\varphi) + l\dot{\varphi}^2 (-\mathbf{e}_r)$$

a teda

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}} = -mg \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi - ml\dot{\varphi}^2 \mathbf{e}_r$$

Keďže

$$\mathbf{F}^{(a)} \equiv m\mathbf{g} = mg \sin \varphi (-\mathbf{e}_\varphi) + mg \cos \varphi \mathbf{e}_r$$

tak

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(r)} \equiv \mathbf{F} - \mathbf{F}^{(a)} &= (mg \cos \varphi + ml\dot{\varphi}^2)(-\mathbf{e}_r) = \\ &= -\mathbf{F}_\perp^{(a)} + ml\dot{\varphi}^2(-\mathbf{e}_r) \end{aligned}$$

Reakcia väzby sa teda skladá z dvoch častí:

1. (opačne vzatá) časť aktívnej sily kolmá ( $\perp$ ) na konfiguračný priestor
2. dostredivá sila („dynamicky“ vznikutá - prejavuje sa až pri pohybe)

Keďže  $\delta\vec{r}$  je tu  $\sim \mathbf{e}_\varphi$  (smer do konfiguračného priestoru, (2.2i)) a  $\mathbf{F}^{(r)} \sim \mathbf{e}_r$ , platí  $\delta\vec{r} \equiv \delta\mathbf{r} \perp \mathbf{F}^{(r)} \equiv \vec{F}^{(r)}$  a teda  $\delta\vec{r} \cdot \vec{F}^{(r)} = 0$

### 3. LAGRANGEOVE ROVNICE (2.druhu)

Vychádzame z D'Alambertovho-Lagrangeovho princípu

$$\begin{aligned} (\dot{\vec{p}} - \vec{F}^{(a)}) \cdot \delta\vec{r} &= 0 \\ \vec{\nabla}\phi_\alpha \cdot \delta\vec{r} &= 0 \\ \phi_\alpha &= 0 \end{aligned}$$



Väzby (3.rovnica) sa „vyriešia” parametrizáciou konfiguračného priestoru pomocou zovšeobecnených súradníc

$$\bar{r} = \bar{r}(q^1, \dots, q^n)$$

Potom virtuálne posunutia sú

$$\delta\bar{r} = \frac{\partial\bar{r}}{\partial q^a} \delta q^a$$

Keďže zložky  $\delta\bar{r}$  nie sú nezávislé, zatiaľ čo  $\delta q^a$  sú nezávislé, prvá rovnica *nedáva*  $\dot{\bar{p}} - \bar{F}^{(a)} = 0$ , ale *dáva*

$$(\dot{\bar{p}} - \bar{F}^{(a)}) \cdot \frac{\partial\bar{r}}{\partial q^a} = 0$$

Definuje sa *a*-ta *zovšeobecnená sila*

$$Q_a := \bar{F}^{(a)} \cdot \frac{\partial\bar{r}}{\partial q^a}$$

Výpočet ďalej ukazuje, že

$$\dot{\bar{p}} \cdot \frac{\partial\bar{r}}{\partial q^a} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial T}{\partial q^a}$$

kde  $T = T(q, \dot{q}, t)$  = kinetická energia sústavy

a tak dostávame *Lagrangeove rovnice* 2.druhu pre všeobecné sily

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial T}{\partial q^a} = Q_a$$

Pre potenciálovú sústavu

$$Q_a = \bar{F}^{(a)} \cdot \frac{\partial\bar{r}}{\partial q^a} = -\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\bar{r}} \cdot \frac{\partial\bar{r}}{\partial q^a} \equiv -\frac{\partial U}{\partial q^a}$$

kde

$$U(q) := \mathcal{U}(\bar{r}(q))$$

Dostávame teda *Lagrangeove rovnice* 2.druhu pre potenciálové sústavy

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial L}{\partial q^a} = 0 \quad a = 1, \dots, n$$

kde *lagranžián* (*Lagrangeova funkcia*) je

$$L(q, \dot{q}, t) := T(q, \dot{q}) - U(q, t)$$

(úlohy (3a.1) - (3a.15))

Z tvaru  $T$  v premenných  $\bar{r}, \dot{\bar{r}}$  ( $T \equiv \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{r}_k^2$ ) vychádza, že všeobecne

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} T_{ab}(q, t) \dot{q}^a \dot{q}^b - U(q, t) \equiv \frac{1}{2} (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \begin{pmatrix} T_{11} & \dots & T_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n1} & \dots & T_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix} - U(q, t)$$

Zákony zachovania: *cyklická súradnica*  $\equiv$  ktorá nevstupuje explicitne do  $L$  (a mohla by). Platí  $t$  cyklické  $\Rightarrow$  zachovanie  $E(q, \dot{q}) := \dot{q}^a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} - L$  (pre  $L = T - U$ ) =  $T + U$  (celková energia)

$q^a$  cyklické  $\Rightarrow$  zachovanie  $p_a(q, \dot{q}) := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}$  (*a*-ta *kanonická hybnosť* (= *zovšeobecná hybnosť*))

(úlohy (3a.2) - (3a.6))

*Nötherovej veta*: za  $k$ -parametrickú grupu symetrie  $L$  je  $k$  zákonov zachovania

*Zovšeobecná potenciálna energia*: ak  $\exists U(q, \dot{q}, t)$  také, že

$$Q_a = -\frac{\partial U}{\partial q^a} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}^a}$$

Potom tiež Lagr. rovnice v tvare (úlohy (3b.1) - (3b.12))

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial L}{\partial q^a} = 0$$

Dôležitý príklad: *Lorentzova sila* (úloha (3b.2), (3b.4), (3b.10)-(3b.12))

### 3a - potenciálové sily

3a.1 Overiť, že Newtonove rovnice pre  $N$  neviazaných hmotných bodov

$$m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = -\nabla_k U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$$

sú Lagrangeove rovnice pre

$$L(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \dot{\mathbf{r}}_k^2 - U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$$

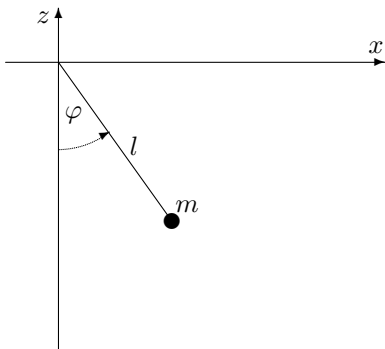
t.j.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_k} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_k} = \mathbf{0}$$

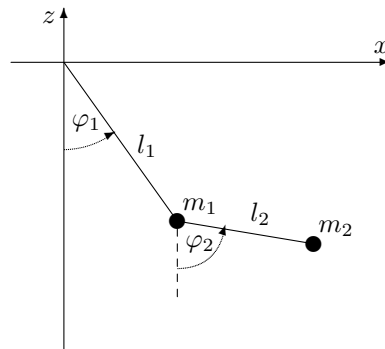
3a.2 Rovinné matematické kyvadlo. Napísať  $L(\varphi, \dot{\varphi}, t)$ , pohybové rovnice, zákony zachovania. Overiť, že pre isté  $\varphi_0$  je státie ( $\varphi(t) = \varphi_0$ ) riešením pohybových rovníc (najprv skúsiť *uhádnuť* pre aké).

3a.3 Sférické kyvadlo. Napísať  $L(\vartheta, \varphi, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}, t)$ , rovnice. Uhádnuť nejaké riešenie (ktoré nie je státie). Pre aké  $\vartheta_0, \varphi_0$  je státie ( $\vartheta(t) = \vartheta_0, \varphi(t) = \varphi_0$ ) riešením? Napísať všetky zákony zachovania.

3a.4 Dvojné rovinné kyvadlo. Napísať  $L(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, t)$ , rovnice, zákony zachovania. Overiť, že  $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$  všeobecne *nie je* riešením (kmitanie ako jedno „dlhé“ kyvadlo).



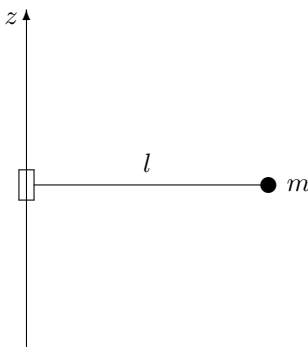
Obr. 3a.2



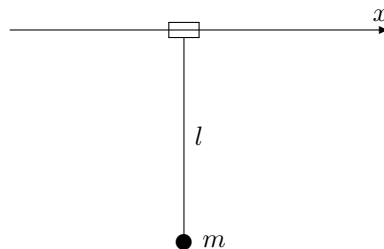
Obr. 3a.4

3a.5 Bod viazaný na zvislý valec. V cylindrických súradniciach napísať  $L(\varphi, z, \dot{\varphi}, \dot{z}, t)$ , rovnice, riešenie, zákony zachovania. Interagujú stupne voľnosti  $\varphi, z$ ?

3a.6 Bod viazaný na vodorovný valec. Napísať  $L(\varphi, x, \dot{\varphi}, \dot{x}, t)$ , rovnice, zákony zachovania. Uhádnuť nejaké riešenia (státie aj rôzne od státia).

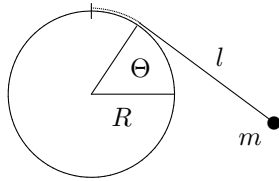


Obr. 3a.5



Obr. 3a.6

3a.7 Kyvadlo podľa obrázku (šnúrka, ktorá je vždy napnutá, je jedným koncom pripevnená na vrchu valca polomeru  $R$ ). Napísať  $L(\theta, \dot{\theta}, t)$ , rovnice.



Obr. 3a.7

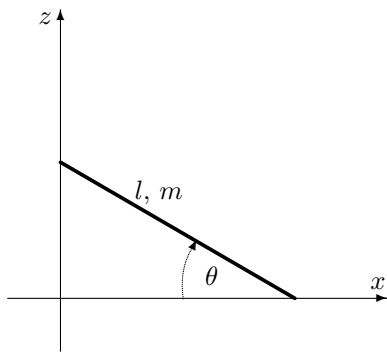
**3a.8** Rebrík ( $m, l$ ) pri stene (bez trenia). Napísať  $L(\theta, \dot{\theta}, t)$ , rovnice.

**3a.9** Dva hmotné body  $m$  sú viazané na osi  $x, z$  a spojené nehmotnou paličkou dĺžky  $l$ . Gravitačné pole je v smere osi  $z$ .

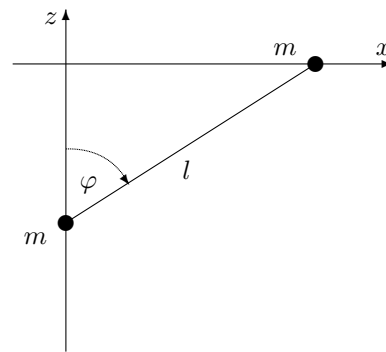
i) napísať  $L(\varphi, \dot{\varphi}, t)$

ii) dedukovať, že tento systém sa správa presne tak, ako rovinné matematické kyvadlo

iii) ukázať, že v istom intervale uhlov sa systém správa ako rebrík z úlohy (3a.8)



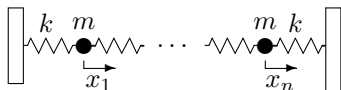
Obr. 3a.8



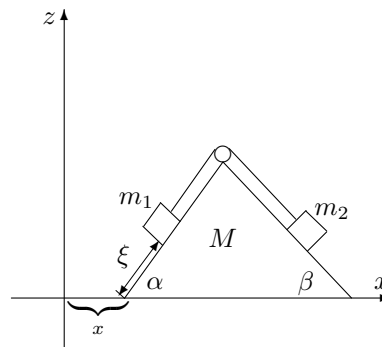
Obr. 3a.9

**3a.10** „Lineárna retiazka“  $n$  rovnakých guľčiek a  $n+1$  pružiniek. Napísať lagranžián  $L(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, t)$ , rovnice ( $x_i$  je výchylka  $i$ -tej guľčky smerom vpravo oproti rovnovážnej polohe).

**3a.11.** 'Strecha' hmotnosti  $M$  sa pohybuje bez trenia v smere osi  $x$ . Cez ňu je prehodené lano, na jeho koncoch sú závažia  $m_1, m_2$  (obr.). Napísať  $L(x, \xi, \dot{x}, \dot{\xi}, t)$ , pohybové rovnice, zachovávané sa veličiny.



Obr. 3a.10



Obr. 3a.11

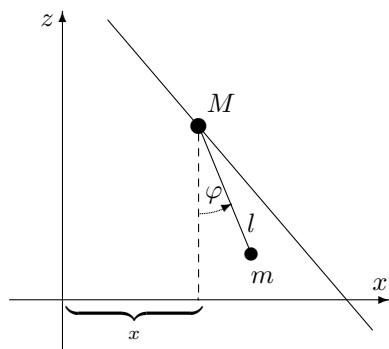
**3a.12** Po nekonečnom šikmom drôte sa kľže korálka hmotnosti  $M$ , na nej je zavesené (rovinné - v rovine danej drôtom a gravitačným zrýchlením) kyvadlo ( $l, m$ ) ;

i) napísať  $L(x, \varphi, \dot{x}, \dot{\varphi}, t)$ , rovnice,

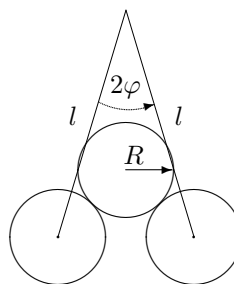
ii) intuitívne odhadnúť, či existuje riešenie tvaru  $\varphi = \text{konšt.}$

iii) overiť svoju intuíciu dosadením patričného ansatzu do pohyb. rovníc

**3a.13** Na nitiach dĺžky  $l$  visia dva rovnaké homogénne valce polomeru  $R$ . Na nich je voľne položený (taký istý) tretí valec (obr.). Nájsť  $L(\varphi, \dot{\varphi}, t)$ . Prediskutovať rozumné hodnoty parametrov.



Obr. 3a.12



Obr. 3a.13

**3a.14** i) Nájsť riešenie pohybovej rovnice (3a.2) rovinného matematického kyvadla (pre ľubovoľné - nielen malé - výchylky).

Návod: využiť 1.integrál  $\equiv$  energiu (za nevstupovanie  $t$  do  $L$ ), príslušnú rovnicu 1.rádu separovať a riešenie vyjadriť pomocou špeciálnej funkcie (*eliptický integrál 1. druhu*)

$$F(x; k) := \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}$$

ii) ukázať, že pre  $x \ll 1$  je asymptoticky

$$F(x; k) \approx \frac{1}{k} \arcsin(kx)$$

iii) v tejto aproximácii vyjadriť riešenie z bodu i). Overiť, že sa reprodukuje výsledok, ktorý sa získa obmedzením sa na malé výchylky v pôvodnej pohybovej rovnici (aproximácia  $\varphi \sim \sin \varphi$ ).

**3a.15** Definuje sa *Eulerov-Lagrangeov výraz* pre lagranžián  $L(q, \dot{q}, t)$  (ktorý nemusí mať nevyhnutne štruktúru  $T - U$ ):

$$\mathcal{E}_a^L \equiv \mathcal{E}_a^L(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) := \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial L}{\partial q^a}$$

t.j. Lagrangeove rovnice 2.druhu sú

$$\mathcal{E}_a^L = 0 \quad a = 1, \dots, n$$

Ukázať, že

$$\mathcal{E}_a^{L_1 + \lambda L_2} = \mathcal{E}_a^{L_1} + \lambda \mathcal{E}_a^{L_2} \quad \mathcal{E}_a^f = 0$$

$$(\lambda \in \mathbb{R}, f = f(q, t) \Rightarrow \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q^a} \dot{q}^a \equiv \dot{f}(q, \dot{q}, t))$$

Dva lagranžiány nazveme *ekvivalentné* (označujeme ' $\sim$ '), ak vedú na rovnaké rovnice. Ukázať, že

$$L \sim \lambda L + \dot{f}$$

Návod:  $\mathcal{E}_a^{\lambda L + \dot{f}} = \lambda \mathcal{E}_a^L$ . Poučenia: aditívne členy tvaru  $\dot{f}$  možno teda v lagranžiáne škrtnúť a celý lagranžián sa dá bezbolestne vynásobiť konštantou.

**3a.16**

i) Ukázať, že pre

$$L = \frac{1}{2} T_{ab}(q) \dot{q}^a \dot{q}^b - U(q)$$

majú Eulerove-Lagrangeove výrazy (pozri (3a.15)) tvar

$$\mathcal{E}_a^L = T_{ab} \dot{q}^b + \Gamma_{abc}(q) \dot{q}^b \dot{q}^c + U_{,a}(q)$$

kde veličiny  $\Gamma_{abc}(q)$  sú definované ako

$$\Gamma_{abc}(q) := \frac{1}{2} (T_{ab,c} + T_{ac,b} - T_{bc,a})$$

(v diferenciálnej geometrii sú známe pod názvom *Christoffelove symboly* 1.druhu pre *metrický tenzor*  $T_{ab}(q)$ ; ale o tom potom (potom = v diferenciálnej geometrii).)  
Lagrangeove rovnice potom sú ekvivalentné rovniciam

$$\ddot{q}^a + \Gamma_{bc}^a(q)\dot{q}^b\dot{q}^c = -(T^{-1})^{ab}(q)U_{,b}(q)$$

kde

$$\Gamma_{bc}^a(q) := (T^{-1})^{ad}(q)\Gamma_{abc}(q)$$

(„Christoffelove symboly 2.druhu“.)

ii) Vypočítať všetky  $\Gamma_{abc}$ ,  $\Gamma_{bc}^a$  pre sférické kyvadlo (3a.3).

Návod: na ii) - porovnať konkrétne rovnice z (3a.3) so všeobecným tvarom daným tu a uvedomí si, že  $\Gamma_{bc}^a = \Gamma_{cb}^a$ ,  $\Gamma_{abc} = \Gamma_{acb}$ .

### 3b - zovšeobecnená potenciálna energia

**3b.1** Ukázať, že ak nechceme mať v zovšeobecnenej sile zrýchlenia (t.j. chceme len  $Q_a(q, \dot{q}, t)$ ), tak zovšeobecná potenciálna energia môže byť nanajvyš lineárna v zovšeobecných rýchlostiach, t.j.

$$\mathcal{U}(q, \dot{q}, t) = \mathcal{A}_a(q, t)\dot{q}^a + \phi(q, t)$$

**3b.2** Dokázať, že  $\mathcal{U}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = e(\varphi(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t))$  zodpovedá *Lorentzovej sile*

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = e(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t))$$

( $\varphi, \mathbf{A}$  sú skalárny a vektorový potenciál polí  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ , t.j.  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ ,  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ). Porovnať s (3b.1)

**3b.3** Ukázať, že sila trenia  $\mathbf{F} = -k\mathbf{v}$  nemá potenciálnu energiu (ani zovšeobecnenú).

Návod: podľa (3b.1) je prípadné  $\mathcal{U} = \mathbf{v} \cdot \mathcal{A}(\mathbf{r}, t) + \phi(\mathbf{r}, t)$ . Vypočítať  $\mathbf{F} \equiv -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{v}}$  a overiť, že sa to nemôže pre žiadne  $\mathcal{A}$ ,  $\phi$  rovnať  $-k\mathbf{v}$ ; pozri tiež (3c.3).

**3b.4** Ukázať, že  $\mathbf{A} \equiv \frac{1}{2}\mathbf{B}_0 \times \mathbf{r}$ ,  $\varphi \equiv 0$  ( $\mathbf{B}_0$  - konštantný vektor) dávajú polia  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$  (homogénne konštantné magnetické pole). Preto  $L$  pre pohyb bodového náboja v takomto poli je

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + \frac{e}{2}\mathbf{v} \cdot (\mathbf{B}_0 \times \mathbf{r})$$

Dokázať, že sa zachováva  $\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{L} + \frac{e}{2}(\mathbf{r} \times \mathbf{B}_0)^2$ , kde  $\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} \equiv m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ .

Návod: ak má  $\mathbf{B}_0$  smer osi  $z$ , zápis  $L$  v cylindrických súradniciach dá zákon zachovania  $p_\varphi$ , čo je práve to, čo sa tu chce.

**3b.5** Ukázať, že ak väzby závisia explicitne od času ( $\phi_\alpha(\bar{\mathbf{r}}, t) = 0 \Rightarrow \mathbf{r}_k(q^a, t)$ ), tak kinetická energia má štruktúru

$$T = \frac{1}{2}T_{ab}(q, t)\dot{q}^a\dot{q}^b + \mathcal{A}_a(q, t)\dot{q}^a + \phi(q, t)$$

kde

$$T_{ab} = \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k(q, t)}{\partial q^a} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k(q, t)}{\partial q^b}$$

$$\mathcal{A}_a = \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k(q, t)}{\partial q^a} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k(q, t)}{\partial t}$$

$$\phi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k(q, t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k(q, t)}{\partial t}$$

Zdôvodniť, že posledné dva členy možno interpretovať ako zovšeobecnenú potenciálnu energiu. (Návod: (3b.1))

**3b.6** Hmotný bod je viazaný na kružnicu umiestnenú vertikálne, ktorá sa rovnomerne otáča okolo svojej (zvislej) osi. Napíšte  $L(\varphi, \dot{\varphi}, t)$ , rovnice, uhádnite jedno riešenie. (Návod: (3b.5))

**3b.7** Rovinné kyvadlo s danou premenlivou dĺžkou závesu  $l(t)$ . Napísať  $L(\varphi, \dot{\varphi}, t)$ , rovnice. (Návod: (3b.5))

**3b.8** Nech  $L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2}T_{ab}\dot{q}^a\dot{q}^b - (A_a\dot{q}^a + \phi)$ . Ukázať, že zámerna

$$A_a \mapsto A_a + \frac{\partial\chi}{\partial q^a} \equiv A'_a \quad \phi \mapsto \phi + \frac{\partial\chi}{\partial t} \equiv \phi'$$

(kalibračná transformácia potenciálov  $A_a, \phi$  generovaná ľubovoľnou funkciou  $\chi(q, t)$ ) pridáva k  $L$  iba nepodstatný člen a nemení pohybové rovnice (porovnaj s (3a.15)).

**3b.9** Ukázať explicitne, že pohybové rovnice vyplývajúce z  $L$  z úlohy (3b.8) obsahujú  $A_a, \phi$  iba v takých kombináciách, ktoré sú kalibračne invariantné, t.j. nemenia sa pri zamenách z úlohy (3b.8)

Návod: ukázať, že pohybová rovnica má tvar

$$\mathcal{E}_a^L \equiv T_{ab}\ddot{q}^b + \Gamma_{abc}\dot{q}^b\dot{q}^c + (\partial_t T_{ab} + \Omega_{ab})\dot{q}^b + \Omega_a = 0$$

kde  $\Gamma_{abc}$  boli definované v (3a.16) a

$$\Omega_{ab}(q, t) := \partial_a A_b - \partial_b A_a$$

$$\Omega_a(q, t) := \partial_a \phi - \partial_t A_a$$

takže  $A_a, \phi$  sa v pohybových rovniciach objavujú len cez kombinácie  $\Omega_{ab}$  a  $\Omega_a$ . Ukázať, že tieto výrazy sú kalibračne invariantné.

**3b.10** Vypočítať  $\Omega_{ab}, \Omega_a$  pre prípad lagranžiánu opisujúceho pohyb bodového náboja ( $e, m$ ) v elektromagnetickom poli, t.j.  $L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - e(\dot{\phi} - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A})$  (pozri úlohu (3b.2)). Ukázať, že ako kalibračne invariantné kombinácie tu vychádzajú vektory  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  zodpovedajúce  $\phi, \mathbf{A}$ .

Návod: ukázať, že v kartézskych súradniciach

$$\Omega_{ij} \equiv \partial_i(-eA_j) - \partial_j(-eA_i) = -e\varepsilon_{ijk}B_k$$

$$\Omega_i \equiv \partial_i(e\phi) - \partial_t(-eA_i) = -eE_i$$

**3b.11** Špecifikovať pohybovú rovnicu z úlohy (3b.9) na situáciu z úlohy (3b.10)

Návod: ukázať, že  $\Gamma_{ijk} = 0$  v kartézskych súradniciach, a že ostane

$$m\ddot{x}_i = e(E_i + \varepsilon_{ijk}\dot{x}_j B_k) \equiv e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_i$$

**3b.12** Nech pole  $\mathbf{B}$  nezávisí od času a pohybuje sa v ňom bodový náboj ( $m, e$ ), pričom jeho trajektória je  $\mathbf{r}_e(t)$ . Ukázať, že  $\hat{\mathbf{r}}(t) \equiv \mathbf{r}_{(-e)}(-t)$  je tiež riešením pohybových rovníc. Aká je fyzikálna interpretácia tohoto riešenia? (Poznámka: prechod  $\mathbf{r}_e(t) \mapsto \mathbf{r}_{(-e)}(-t)$  sa volá "transformácia CT"- súčasná nábojová ( $C \leftrightarrow \text{charge}$ ) a časová ( $T \leftrightarrow \text{time}$ ) inverzia.)

**3b.13** Ukázať, že rovnovážne polohy pre systém s väzbami sa získavajú z rovníc

$$Q_a = 0 \quad a = 1, \dots, n$$

( $Q_a$  sú zovšeobecnené sily).

Návod: rozpísať explicitne Lagrangeove rovnice 2.druhu (pre všeobecné sily)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial T}{\partial q^a} \equiv \mathcal{E}_a^T = Q_a$$

a overiť, že pre státie  $\mathcal{E}_a^T = 0$  ((3a.15),  $\mathcal{E}_a^T$  z (3a.16) pre  $U = 0$ )

**3b.14** Ukázať, že podmienka  $Q_a = 0$  (3b.13) vedie pre potenciálové sily na algoritmus

$$\text{rovnovážne polohy} \Leftrightarrow \text{kritické body potenciálnej energie}$$

t.j.

$$q_0 \text{ rovnovážny} \Leftrightarrow dU(q_0) = 0$$

**3b.15** Riešiť ešte raz úlohy (2.3) a (2.5) aparátom z (3b.13), (3b.14)

**3b.16** Ukázať, že  $(\mathbb{R}^n, +)$  je grupa.

Návod: overiť, že

$$(x_1, \dots, x_n) \circ (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

spĺňa axiomy grupy.

Pozn.: Keďže grupové prvky sú charakterizované  $n$ -ticou spojitych premenných ( $\equiv$  súradníc), povie sa, že je to  $n$ -parametrická spojité grupa.

**3b.17** Nech  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  je množina funkcií  $n$  premenných ( $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \ni f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ),

$$\mathcal{R}_a \equiv \mathcal{R}_{(a_1, \dots, a_n)} : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$$

sú operátory na takýchto funkciách dané predpisom

$$(\mathcal{R}_a f)(x) := f(x + a)$$

( $a \equiv (a_1, \dots, a_n)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ). Ukázať, že

i) zobrazenia (operátory)  $\mathcal{R}_a$  tvoria grupu (ak sa ako „násobenie“ zoberie zloženie zobrazení)

ii) predpis

$$(\mathbb{R}^n, +) \ni a \mapsto \mathcal{R}_a$$

je izomorfizmus grúp

iii) prvky  $\mathcal{R}_{(0, \dots, 0, b, 0, \dots, 0)}$ ,  $b \in \mathbb{R}$  tvoria („jednoparametrické“) podgrupy

iv) podmienka

$$\mathcal{R}_{(b, 0, \dots, 0)} f = f \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

znamená, že  $f$  nezávisí od  $x_1$  (analogicky pre  $x_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ ). (Terminológia:  $f$  je *invariantná* voči podgrupe  $\mathcal{R}_{(b, 0, \dots, 0)}$ )

**3b.18** Lagranžian je funkcia na  $\mathbb{R}^{2n+1}$ ,  $L \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^{2n+1})$  so súradnicami  $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ . Definujme operátory

$$(\mathcal{R}_{(a_0, a_1, \dots, a_n)} L)(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) := L(t + a_0, q^1 + a_1, \dots, q^n + a_n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$$

Ukázať, že

i) invariantnosť  $L$  voči podgrupe  $\mathcal{R}_{(b, 0, \dots, 0)}$  znamená cykličnosť  $t$

ii) invariantnosť  $L$  voči podgrupe  $\mathcal{R}_{(0, b, \dots, 0)}$  znamená cykličnosť  $q^1$

$\vdots$

invariantnosť  $L$  voči podgrupe  $\mathcal{R}_{(0, 0, \dots, b)}$  znamená cykličnosť  $q^n$

iii) za každú invariantnosť z i) resp. ii) je nejaký zákon zachovania

Pozn.: toto je špeciálny prípad *Noetherovej vety* („za  $k$ -parametrickú grupu invariantnosti  $L$  je  $k$  zákonov zachovania“).

### 3c - všeobecné sily

**3c.1** Nech zovšeobecnená sila  $Q_a$  je súčet potenciálovej a nepotenciálovej časti:

$$Q_a = -\frac{\partial U(q, t)}{\partial q^a} + \tilde{Q}_a$$

Ukázať, že

i) pohybové rovnice sú

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial L}{\partial q^a} = \tilde{Q}_a$$

kde  $L \equiv T - U$

ii) za nevstupovanie  $t$  do  $L$  je rovnica

$$\dot{E} = \tilde{Q}_a \dot{q}^a \quad (= \text{výkon nepotenciálovej časti sily})$$

kde  $E \equiv T + U$

**3c.2** Rovinné matematické kyvadlo s odporom vzduchu ( $\mathbf{F}_{odp} = -k\mathbf{v}$ ). Napísať  $L(\varphi, \dot{\varphi}, t)$ , pohybovú rovnicu. Vyrátať  $\dot{E}$  a ukázať, že  $\dot{E} \leq 0$ . (Návod: (3c.1))

**3c.3** Metódami štatistickej fyziky sa ukazuje, že *sily trenia* sa dajú písať v tvare

$$\tilde{Q}_a = -\alpha_{ab}\dot{q}^b$$

príčom (konštantné) koeficienty  $\alpha_{ab}$  spĺňajú

$$\alpha_{ab} = \alpha_{ba}$$

Ukázať, že potom

i)

$$\tilde{Q}_a = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}^a}$$

kde *disipatívna funkcia*  $\mathcal{F}$  je

$$\mathcal{F} \equiv \frac{1}{2}\alpha_{ab}\dot{q}^a\dot{q}^b$$

ii) Lagr. rovnice sú

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial L}{\partial q^a} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}^a}$$

iii) za cykličnosť  $t$  je rovnica

$$\dot{E} = -2\mathcal{F}$$

kde  $E = T + U$  (odtiaľ je priama interpretácia  $\mathcal{F}$  ako (dvojnásobku) výkonu disipatívnych síl)

iv) dedukovať z iii), že  $\alpha_{ab}$  tvoria kladne definitnú maticu

v) vypočítať  $\mathcal{F}$  pre úlohu (3c.2) a overiť výsledky z iii), iv)

#### 4. PRINCÍP NAJMENŠIEHO ÚČINKU („Hamiltonov“)

*Diferenciálny princíp*: zo situácie (= bodu trajektórie) v čase  $t$  predpis na výpočet situácie v čase  $t+\varepsilon$ . Technický nástroj: diferenciálne rovnice. Príklad: Newtonove a Lagrangeove rovnice (budú ešte Hamiltonove rovnice)

*Integrálny princíp*: výpoveď o trajektórii ako celku. Nástroj: *variáčny počet*. Príklad: princíp najmenšieho účinku.

*Funkcionál*: predpis funkcia  $\mapsto$  číslo (napr.  $q(t) \mapsto \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$ )

Variáčny počet: extrémny funkcionálov.

Účinkový funkcionál  $\equiv$  účinok:  $= \int_{t_1}^{t_2} L(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n, t) dt \equiv S^L[q]$

Pri malých variáciách  $q \mapsto q + \delta q$  sa tento integrál správa takto (úloha (4.1)):

$$S^L[q+\delta q] = S^L[q] + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) \delta q^a dt + \dots \equiv S^L + \delta S^L + \dots$$

takže platí

$$\text{Lagrangeove rovnice} \quad \Leftrightarrow \quad \delta S^L = 0$$

$\Rightarrow$

formulácia princípu: pohyb po reálnej trajektórii extremalizuje účinok

**4.1** Nech

$$S^L[q] \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$$

je účinkový integrál,

$q^a(t) \mapsto q^a(t) + \delta q^a(t)$  sú malé zmeny  $q^a$  také, že  $\delta q^a(t_1) = \delta q^a(t_2) = 0$ . Ukázať, že do prvého rádu v  $\delta q^a$  platí

$$S^L[q + \delta q] \equiv S^L + \delta S^L = S^L + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta S^L[q]}{\delta q^a} (t) \delta q^a(t) dt$$



kde funkcionálna derivácia účinku  $S^L[q]$ , t.j.  $\frac{\delta S^L}{\delta q^a}$  ( $\equiv$  podľa definície to, čo sa objaví v poslednom integráli pri  $\delta q^a(t)$ ), vychádza

$$\frac{\delta S^L[q]}{\delta q^a}(t) = \frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \equiv -\mathcal{E}_a^L(q, \dot{q}, \ddot{q}, t)$$

(pozri (3a.16))

Preto platí

$$\delta S^L = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_a^L = 0$$

čiže Eulerove-Lagrangeove rovnice sú nevyhnutnou podmienkou extrémum funkcionálu  $S^L[q]$ .

**4.2** Z princípu najmenšieho účinku ( $\delta S \stackrel{!}{=} 0$ ) odvodiť necitlivosť rovnice  $\mathcal{E}_a^L = 0$  na zámenu  $L \mapsto \lambda L + \dot{f}$  (pozri (3a.16)).

Návod: overiť  $S^{\lambda L + \dot{f}}[q] = \lambda S^L[q] + \text{konštanta}$  nezávislá od  $q(t)$  vnútri intervalu  $(t_1, t_2) \Rightarrow \mathcal{E}_a^{\lambda L + \dot{f}} \equiv \frac{\delta S^{\lambda L + \dot{f}}}{\delta q^a} = \lambda \frac{\delta S^L}{\delta q^a} = \lambda \mathcal{E}_a^L$ .

**4.3** Nájsť najkratšiu spojnicu bodov  $(x_0, y_0)$  a  $(x_1, y_1)$  v rovine.

Návod:  $l_{01}[y] = \int_{x_0}^{x_1} L(y, y', x) dx$ , kde  $L = \sqrt{1 + y'^2}$ . Využiť cykličnosť  $x$ .

**4.4** Riešiť úlohu o *brachystochrone*: nájsť tvar (dobře namydleného) drôtu  $y(x)$ , po ktorom sklzáne vlastnou tiažou korálka z (vyššieho) bodu A do (nižšieho) bodu B za najkratší čas

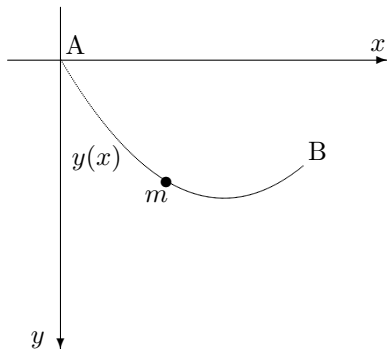
Návod:  $t_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} L(y, y', x) dx$ , kde  $L = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}$ . Využiť prvý integrál za cykličnosť súradnice  $x$ , t.j.  $y' \frac{\partial L}{\partial y'} - L =$

konšt. Dostať túto rovnicu do tvaru  $k^2 2gy(1 + y'^2) = 1$ , resp. pre  $f(x) = 2k^2 gy(x)$  do tvaru  $\sqrt{\frac{f}{1-f}} df = 2k^2 g dx$ . Substitúcia  $f \equiv \sin^2 \varphi \equiv \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$  dá po preintegrovaní *parametrický tvar riešenia* (označ.  $\psi = 2\varphi$ )

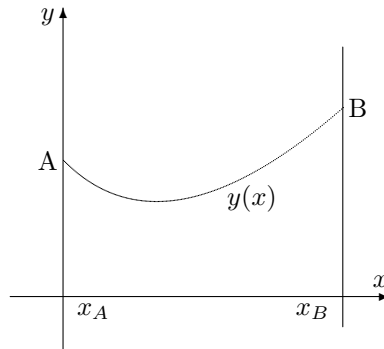
$$x(\psi) = R(\psi - \sin \psi) - x(0)$$

$$y(\psi) = R(1 - \cos \psi)$$

kde  $R \equiv \frac{1}{4k^2 g}$ . Ukázať, že to je *cykloida*, t.j. krivka, ktorá vznikne gúľaním sa kola polomeru  $R$  po  $x$ -ovej osi ( $x(\psi)$ ,  $y(\psi)$  sú súradnice bodu fixovaného na obvode kola, ak je koleso otočené o uhol  $\psi$ ).



Obr. 4.4



Obr. 4.5

**4.5** Riešiť úlohu o *reťazovke*: nájsť tvar voľne visiacej (dokonale ohybnej ale nenafahujúcej sa) reťaze. Koncové body a dĺžka sú dané.

Návod: minimalizovať potenciálnu energiu reťaze  $U[y] = \int_{x_A}^{x_B} \rho g y \sqrt{1 + y'^2} dx$  za vedľajšej podmienky, že dĺžka

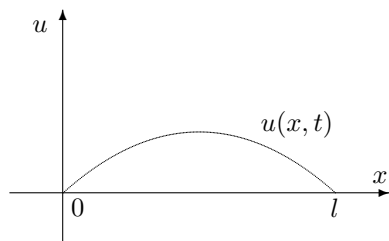
reťaze je daná, t.j.  $\int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'^2} dx = l$ . Na to riešiť variačný problém pre  $L_\lambda[y] \equiv \rho g y \sqrt{1 + y'^2} + \lambda \sqrt{1 + y'^2}$ ;  $\lambda$  = "Lagrangeov multiplikátor".

Rovnicu pre 1. integrál (za cykličnosť  $x$ )  $y' \frac{\partial L_\lambda}{\partial y'} - L_\lambda = K = \text{konšt.}$  do viesť do tvaru

$$\frac{K dy}{\sqrt{(\rho g y + \lambda)^2 - K^2}} = dx$$

Substitúcia  $\rho g y + \lambda = kch \alpha$  dá  $k\alpha/\rho g = x + q$  ( $q = \text{konšt.}$ ) a celkovo  $y(x) = A \operatorname{ch}(x/A + B) + C$ . Skúsit to nakresliť a porozmýšľať o význame ľubovoľných konštánt  $A, B, C$  vo „všeobecnom“ riešení a o tom, aké podmienky ich fixujú v „partikulárnom“ riešení.

**4.6** Odvodiť lagranžián a účinok pre malé priečne *kmity struny* (dĺžka  $l$ , prierez  $s$ ) upevnenej na oboch koncoch, ktorá je natiahnutá napätím  $\sigma_0$  a má hustotu  $\rho_0$ .



Obr. 4.6

Návod: element medzi  $x$  a  $x + dx$  má kinetickú energiu  $\frac{1}{2}(s\rho_0 dx)(\partial_t u)^2$  a potenciálnu energiu (voči stavu, keď je struna rovná)  $s\sigma_0(dl(x) - dx) \doteq s\sigma_0 \frac{1}{2}(\partial_x u)^2 dx$  (element sa natiahne z dĺžky  $dx$  na  $dl(x) = \sqrt{1 + (\partial_x u)^2} dx \doteq \dots$ , prekonávajúc silu  $s\sigma_0$ ). Potom

$$T[u](t) = \frac{1}{2}(s\rho_0) \int_0^l dx (\partial_t u)^2 \quad U[u](t) = \frac{1}{2}(s\sigma_0) \int_0^l dx (\partial_x u)^2$$

Potom lagranžián je

$$L(t) \equiv L[u](t) = T[u](t) - U[u](t) = \int_0^l dx \mathcal{L}(\partial_x u, \partial_t u)$$

kde *hustota lagranžiánu*  $\mathcal{L}$  je

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(s\rho_0(\partial_t u)^2 - (s\sigma_0)(\partial_x u)^2)$$

a účinok je

$$S^{\mathcal{L}}[u] = \int_{t_1}^{t_2} dt L[u](t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l dx \mathcal{L}$$

**4.7** Odvodiť pohybovú rovnicu (malých priečných kmitov) struny prechodom k Fourierovým koeficientom v premennej  $x$ .

Návod (pozri úlohu (4.6)): keďže  $u(0, t) = u(l, t) = 0$ , možno hľadanú funkciu  $u(x, t)$  rozvinúť do Fourierovho radu

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) e_n(x)$$

$$e_n(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (\Rightarrow e_n(0) = e_n(l) = 0)$$

i) ukázať, že

$$(e_n, e_m) \equiv \int_0^l e_n(x) e_m(x) dx = \delta_{nm}$$

a teda

$$c_n(t) = (u, e_n) \equiv \int_0^l u(x, t) e_n(x) dx$$

Zaviesť tiež

$$f_n(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{n\pi}{l} x = \frac{l}{n\pi} e'_n(x)$$

a ukázať, že  $(f_n, f_m) = \delta_{nm}$

ii) dosadiť rozvoj  $u = \sum c_n e_n$  do lagranžiánu z úlohy (4.6) a ukázať, že

$$L(t) = \sum_{n=1}^{\infty} L_n(c_n, \dot{c}_n)$$

kde

$$L_n(c_n, \dot{c}_n) \equiv (s\rho_0) \left\{ \frac{1}{2} (\dot{c}_n^2 - \omega_n^2 c_n^2) \right\} \quad \omega_n^2 \equiv \frac{\sigma_0}{\rho_0} \frac{\pi^2}{l^2} n^2 \equiv \omega_1^2 n^2$$

V premenných  $c_n(t)$ ,  $n = 1, 2, \dots, \infty$  namiesto  $u(x, t)$  sa teda javí struna ako súbor  $\infty$ -ného počtu *neinteragujúcich lineárnych harmonických oscilátorov* (s frekvenciou závislou od  $n$ ).

iii) pohybové rovnice oscilátorov

$$\ddot{c}_n + \omega_n^2 c_n = 0$$

prepísať späť do jazyka  $u(x, t)$ . Na to využiť

$$\ddot{c}_n = (\partial_t^2 u, e_n) \quad \omega_n^2 c_n = -\frac{\sigma_0}{\rho_0} (\partial_x^2 u, e_n)$$

Potom

$$0 = \ddot{c}_n + \omega_n^2 c_n = (e_n, \partial_t^2 u - \frac{\sigma_0}{\rho_0} \partial_x^2 u)$$

a odtiaľ (úplnosť systému  $e_n$ )

$$(\partial_t^2 - v_0^2 \partial_x^2) u(x, t) = 0 \quad v_0^2 \equiv \frac{\sigma_0}{\rho_0}$$

čo je *vlnová rovnica* pre  $u(x, t)$ .

4.8 Nech má účinok tvar (pozri napr. (4.6))

$$S^{\mathcal{L}}[u] \equiv S^{\mathcal{L}}[u^1, \dots, u^N] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{I_3} d^3x \mathcal{L}(u^a, \partial_t u^a, \partial_i u^a, x^i, t)$$

kde  $I_3 =$  (trojrozmerný) hranol,  $u^a = u^a(x^1, x^2, x^3, t)$ ,  $a = 1, \dots, N$ . Ukázať, že pri variácii  $u^a \mapsto u^a + \delta u^a$  ( $\delta u^a \ll u^a$ ) takej, že

$$\delta u^a(x, t_1) = \delta u^a(x, t_2) = 0 \quad x \text{ ľubovoľné}$$

a

$$\delta u^a(x, t) = 0 \quad x \in \partial I_3, t \text{ ľubovoľné}$$

( $\partial I_3$  je hranica  $I_3$ ) sa mení  $S^{\mathcal{L}}[u]$  (do 1. rádu v  $\delta u^a$ ) na

$$S^{\mathcal{L}}[u + \delta u] = S^{\mathcal{L}}[u] + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{I_3} d^3x \left( \frac{\delta S^{\mathcal{L}}[u]}{\delta u^a} \right) (x, t) \delta u^a(x, t) + \dots$$

kde

$$\frac{\delta S^{\mathcal{L}}[u]}{\delta u^a} (x, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^a} - \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t u^a)} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i u^a)}$$

Teda ak zavedieme *Eulerov Lagrangeov výraz* (3a.15), (4.1) zodpovedajúci *hustote lagranžiánu*  $\mathcal{L}$  ako

$$\mathcal{E}_a^{\mathcal{L}} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^a} - \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t u^a)} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i u^a)}$$

tak

$$\frac{\delta S^{\mathcal{L}}[u]}{\delta u^a} = \mathcal{E}_a^{\mathcal{L}}$$

a preto nevyhnutné podmienky extrémum funkcionálu  $S^{\mathcal{L}}[u]$  sú

$$\mathcal{E}_a^{\mathcal{L}} = 0 \quad a = 1, \dots, N$$

Pozn.: ak zavedieme štvorrozmerný hranol  $I_4 = \langle t_1, t_2 \rangle \times I_3$  a označíme  $t \equiv x^0$ , tak

$$S^{\mathcal{L}}[u] = \int_{I_4} d^4x \mathcal{L}(u^a, \partial_\mu u^a, x^\mu) \quad d^4x \equiv dx^0 d^3x,$$

$\delta u^a$  sú nulové na  $\partial I_4$  a

$$\mathcal{E}_a^{\mathcal{L}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^a} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u^a)} \right)$$

kde  $\mu$  beží hodnotami 0,1,2,3 (takéto označenia sú štandardné v teórii relativity).

**4.9** Odvodiť pohybovú rovnicu (malých priečných kmitov) struny variáciou účinku podľa  $u(x, t)$ .

Návod: (4.6), (4.7), (4.8); pohybové rovnice v jazyku  $c_n(t)$  sa dajú odvodiť variáciou podľa  $c_n$ , pričom  $\delta c_n(t_1) = \delta c_n(t_2) = 0$ . Potom

$$u \equiv \sum c_n e_n \mapsto \sum (c_n + \delta c_n) e_n \equiv u + \delta u$$

kde

$$\delta u(x, t) = \sum \delta c_n(t) e_n(x)$$

a teda

$$\delta u(x, t_1) = \delta u(x, t_2) = \delta u(0, t) = \delta u(l, t) = 0$$

Preto podmienky

$$\frac{\delta S[c_1, \dots]}{\delta c_n}(t) = 0$$

vedú na

$$\frac{\delta S[u]}{\delta u}(x, t) = 0$$

Použiť výsledok úlohy (4.8) a získať

$$\frac{\delta S[u]}{\delta u}(x, t) = -s\rho_0(\partial_t^2 - v_0^2 \partial_x^2)u(x, t) \quad v_0^2 \equiv \frac{\sigma_0}{\rho_0}$$

a teda

$$(\partial_t^2 - v_0^2 \partial_x^2)u(x, t) = 0$$

**4.10** Vymyslieť príklad, ktorý ukáže, že *ansatz* sa dosadzuje do pohybových rovníc odvodených z úplného lagranžianu, NIE do lagranžianu (z ktorého sa potom odvodí pohybové rovnice), t.j. že operácie ansatzu a odvodenia pohybových rovníc nekomutujú a správne poradie je „najprv úplné rovnice, potom ansatz“. Zdôvodniť toto poradie z variačného princípu.

Návod: extrém voči (ansatzom) obmedzeným variáciám ešte nemusí byť extrém voči „úplným“ variáciám.

**4.11.** i) Overiť, že účinok, moment hybnosti a Planckova konštanta  $\hbar$  majú rovnaký rozmer (preto možno merať účinok aj moment hybnosti v jednotkách  $\hbar$ )

ii) vypočítať číselnú hodnotu účinku pre pád kameňa hmotnosti 1kg na zem z výšky 1m

iii) vypočítať číselnú hodnotu účinku za jeden obeh po kruhovej orbite pre planétu okolo Slnka a elektrón okolo protónu v atóme vodíka (použiť typické hodnoty polomerov, hmotností,...)

iv) vypočítať číselnú hodnotu momentu hybnosti pre situácie z iii)

v) rozhodnúť, pre ktoré situácie z ii)-iv) je  $\hbar$  vhodná škála na meranie účinku resp. momentu hybnosti (t.j.  $\frac{S}{\hbar}$  resp.  $\frac{|L|}{\hbar}$  sú slušné čísla)

## 5. HAMILTONOVE (kanonické) ROVNICE

Nech  $x_1, \dots, x_n \mapsto y_1(x), \dots, y_n(x)$ , t.j.  $y_i = y_i(x)$  je zámena súradníc.

Legendreova transformácia (úplná): ak  $\exists \mathcal{L}(x)$  taká, že

$$y_i(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial x_i}$$

Inverzná - tiež Legendreova, generovaná  $\mathcal{H}(y) := \sum_{i=1}^n x_i(y)y_i - \mathcal{L}(x(y))$

Čiastočná Legendreova transformácia:

$$x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n \mapsto y_1(x), \dots, y_k(x), x_{k+1}, \dots, x_n$$

prícom  $y_i(x) = \frac{\partial L(x)}{\partial x_i} \quad i = 1, \dots, k$

Inverzná: generovaná

$$H(y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^k x_i y_i - L$$

t.j.

$$x_i = \frac{\partial H}{\partial y_i} \quad i = 1, \dots, k$$

Tiež platí  $\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{\partial L}{\partial x_i} \quad i = k+1, \dots, n$

V mechanike:  $q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n, t \mapsto q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n, t$   
kde

$$p_i := \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}^i}$$

⇒ ide o (čiastočnú) Legendreovu transformáciu.

Potom

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad i = 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial H}{\partial q^i} = -\frac{\partial L}{\partial q^i} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = -\dot{p}_i \quad i = 1, \dots, n$$

kde

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t)$$

To sú *Hamiltonove kanonické rovnice* ( $2n$  obyčajných diferenciálnych rovníc 1. rádu pre  $q(t), p(t)$ ). Je to ekvivalentný spôsob riešenia mechanických úloh.

*Fázový priestor*:  $2n$ -rozmerný priestor so súradnicami  $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$

*Rozšírený fázový priestor*:  $2n + 1$ -rozm. priestor so súradnicami  $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n, t)$

Nech  $F, G$  sú funkcie na (prípadne rozšírenom) fázovom priestore. Potom ich *Poissonove zátvorky*  $\{F, G\}$  je funkcia

$$\{F, G\} := \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q^i} - \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} \right)$$

(úlohy (5.7) - (5.12)).

*Fázový tok*:  $\phi_t : (q(0), p(0)) \mapsto (q(t), p(t))$  podľa Hamiltonových rovníc

*Liouvillova veta* (5.13): pri fázovom toku sa zachováva *fázový objem*  $\text{vol } D(t) := \int_{D(t)} dq dp$

**5.1** Ukázať, že pre lagranžián štruktúry

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} T_{ab}(q, t) \dot{q}^a \dot{q}^b - U(q, t) \equiv \frac{1}{2} (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \begin{pmatrix} T_{11} & \dots & T_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n1} & \dots & T_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix} - U(q, t)$$

vychádza zodpovedajúci hamiltonián v tvare

$$H(q, p, t) = \frac{1}{2} (T^{-1})^{ab} p_a p_b + U \equiv \frac{1}{2} (p_1, \dots, p_n) \begin{pmatrix} (T^{-1})^{11} & \dots & (T^{-1})^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (T^{-1})^{n1} & \dots & (T^{-1})^{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} + U(q, t)$$

5.2 Ukázať, že pre lagranžian štruktúry

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} T_{ab}(q, t) \dot{q}^a \dot{q}^b - \mathcal{U}(q, \dot{q}, t)$$

kde

$$\mathcal{U}(q, \dot{q}, t) \equiv \phi(q, t) - A_a(q, t) \dot{q}^a$$

vychádza zodpovedajúci hamiltonián v tvare

$$H(q, p, t) = \frac{1}{2} (T^{-1})^{ab}(q, t) (p_a - A_a)(p_b - A_b) + \phi$$

5.3 Napísať  $H(q, p, t)$  a príslušné pohybové rovnice pre situácie z príkladov (3a.1) až (3a.10)

Návod: (5.1)

5.4 Napísať  $H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  a Hamiltonove rovnice pre pohyb bodového náboja ( $m, e$ ) v danom elektromagnetickom poli  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ .

Návod: (3b.2), (5.2)

5.5 Ukázať, že  $H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  pre pohyb bodového náboja v danom elektromagnetickom poli  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  sa dá získať formálne takto:

1. napíše sa  $H_0(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  pre náboj *bez poľa*, t.j.  $H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$
2. urobí sa zámena (“zapnutie elektromagnetickej interakcie”)

$$H_0 \mapsto H_0 + e\phi$$

$$\mathbf{p} \mapsto \mathbf{p} - e\mathbf{A}$$

t.j. spolu  $H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = H_0(\mathbf{r}, \mathbf{p} - e\mathbf{A}, t) + \phi$ .

Návod: (5.4)

5.6 Nech

$$S^H[q, p] := \int_{t_1}^{t_2} (p_a(t) \dot{q}^a(t) - H(q, p, t)) dt$$

je funkcionál na krivkách vo *fázovom priestore*. Ukázať, že pre infinitezimálne variácie  $\delta q^a(t), \delta p_a(t)$  spĺňajúce  $\delta q^a(t_1) = \delta q^a(t_2) = 0$  (od  $\delta p_a$  sa nežiada nič!) platí

$$\frac{\delta S^H[q, p]}{\delta q^a}(t) = -\dot{p}_a - \frac{\partial H}{\partial q^a}$$

$$\frac{\delta S^H[q, p]}{\delta p_a}(t) = \dot{q}^a - \frac{\partial H}{\partial p_a}$$

a teda (“zovšeobecnený”) princíp najmenšieho účinku  $\delta S^H \stackrel{!}{=} 0$  dáva priamo Hamiltonove rovnice.

Návod: (4.1)

5.7 *Poissonove zátvorky* dvoch funkcií v (prípadne rozšírenom) *fázovom priestore* sa definujú ako funkcia

$$\{f, g\} := \frac{\partial f}{\partial p_a} \frac{\partial g}{\partial q^a} - \frac{\partial g}{\partial p_a} \frac{\partial f}{\partial q^a}$$

Dokázať, že majú vlastnosti

$$i) \{f_1 + \lambda f_2, g\} = \{f_1, g\} + \lambda \{f_2, g\}$$

$$\{f, g_1 + \lambda g_2\} = \{f, g_1\} + \lambda \{f, g_2\}$$

(bilinearita)

$$ii) \{f, g\} = -\{g, f\}$$

(antisymetria)

$$iii) \{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$$

(Jacobiho identita)

$$iv) \{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h$$

(Leibnizovo pravidlo)

Definujeme operátor na funkciách

$$D_f : g \mapsto \{f, g\}$$

Dokázať, že má vlastnosti

$$v) D_f(g_1 + \lambda g_2) = D_f(g_1) + \lambda D_f(g_2)$$

(linearita)

$$vi) D_f(gh) = (D_f g)h + g(D_f h)$$

(Leibnizovo pravidlo)

t.j.  $D_f$  sa správa ako “derivácia algebry funkcií” ( $\equiv$  je lineárny a na súčine podľa Leibnizovho pravidla).

vii) Vypočítať  $D_f$  explicitne ako diferenciálny operátor 1. rádu.

5.8) Nech  $f(q, p, t)$  je funkcia na rozšírenom fázovom priestore,  $q^a(t), p_a(t)$  riešenia Hamiltonových rovníc. Ukázať, že

$$\dot{f} \equiv \frac{d}{dt} f(q(t), p(t), t) = \{H, f\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

5.9) Ukázať, že Hamiltonove rovnice sa dajú napísať v tvare

$$\dot{q}^a = \{H, q^a\}$$

$$\dot{p}_a = \{H, p_a\}$$

Návod: použiť  $f = q^a$  resp.  $p_a$  v (5.8)

5.10) Nech  $f(p, q), g(p, q)$  sú dve zachovávané sa veličiny vo fázovom priestore ( $\dot{f} = \dot{g} = 0$ ). Ukázať, že potom aj

i)  $f + \lambda g$

ii)  $\{f, g\}$

sú zachovávané sa veličiny.

Návod na ii): (5.8), (5.7)iii)

5.11) Dokázať

$$\{q^a, q^b\} = 0 = \{p_a, p_b\} \quad \{p_a, q^b\} = \delta_a^b$$

(„fundamentálne Poissonove zátvorky”).

5.12) Nech  $x_i, p_i$  sú kartézské zložky polohového vektora  $\mathbf{r}$  a hybnosti  $\mathbf{p}$  jedného hmotného bodu bez väzieb. Ukázať, že

i)  $\{x_i, x_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$

ii)  $\{p_i, x_j\} = \delta_{ij}$

iii)  $\{L_i, x_j\} = -\varepsilon_{ijk} x_k$

$$\{L_i, p_j\} = -\varepsilon_{ijk} p_k$$

$$\{L_i, L_j\} = -\varepsilon_{ijk} L_k$$

iv)  $\{L_i, \mathbf{L}^2\} = \{L_i, \mathbf{p}^2\} = \{L_i, \mathbf{r}^2\} = 0$

pričom  $\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  je moment hybnosti ( $L_i = \varepsilon_{ijk} x_j p_k$ ).

5.13.)  $H(x, p) \equiv \frac{p^2}{2} - x$  zodpovedá jednorozmernému pohybu hmotného bodu  $m = 1$  pod vplyvom konštantnej sily  $F_0 = 1$  (ujasniť si).

i) vypočítať explicitne fázový (hamiltonovský) tok

$$(x, p) \mapsto (x(t), p(t))$$

$(x(t), p(t))$  sú riešenia Hamiltonových rovníc s počiatočnou podmienkou  $x(0) = x, p(0) = p$ .

ii) nech  $D(0) \equiv \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$  je štvorec v rovine  $xp$  (fázovom priestore),  $D(t)$  jeho obraz voči fázovému toku. Nakresliť, ako bude vyzeráť  $D(-2), D(-1), D(0), D(1), D(2)$  (t.j. v diskretných časoch  $t = -2, -1, 0, 1, 2$ ).

iii) overiť, že hoci dochádza k deformácii štvorca, plocha útvaru  $D(t)$  (pre  $t$  z úlohy ii)) je stále taká istá (Liouvillova veta).

5.14.) i) Ukázať, že ak lagranžian nezávisí explicitne od  $t$ , tak to platí aj pre príslušný hamiltonián

ii) že potom je  $H$  1. integrál

Návod: odvodiť  $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$ ; (5.8).

5.15) Zistiť, či prechod od polárnych ku kartézskym súradniciam je Legendreova transformácia. To isté pre lineárnu ( $x_i \mapsto y_i = A_{ij} x_j$ ) resp. afínnu ( $x_i \mapsto y_i = A_{ij} x_j + a_i$ ) zámenu v  $\mathbb{R}^n$ .

## 6. INFORMÁCIE O POHYBE ZÍSKATEĽNÉ BEZ RIEŠENIA (pohybových) ROVNÍC

Fázový portrét: pre 1 stupeň voľnosti = krivky  $E = \text{konšt}$  v rovine  $qp$  (fáz. priestore; úlohy (6.1)-(6.4), (6.7), (6.8), (7.5))

Dáva rýchlo a lacno prehľad o *kvalitatívnych vlastnostiach riešení*, čo často z exaktného tvaru riešenia vidno ťažšie. Príklad: rovinné matematické kyvadlo (úlohy (3a.14) versus (6.2)).

*Podobné riešenia* - získané z nejakého pevného (vhodným) *preškálovaním* premenných a parametrov (6.9)-(6.14)

V lagr. formalizme: vhodnosť škálovania  $\Leftrightarrow L \mapsto \lambda L$

*Exaktné riešenie* versus fázový portrét, *mechanická podobnosť, rozmerová analýza*

**6.1** Nakresliť fázový portrét lineárneho harmonického oscilátora.

i) Pomocou neho určiť hodnotu integrálu

$$\mathcal{P}(E) \equiv \int_{D_E} dx dp$$

kde  $D_E \equiv \{(x, p) | H(x, p) \leq E\}$ .

ii) to isté vypočítať ako

$$2 \int_{x_{min}}^{x_{max}} p_E(x) dx$$

Návod:  $\frac{p^2}{2m} + U(x) = E \Rightarrow p_E(x) = \dots$

**6.2** Nakresliť fázový portrét rovinného matematického kyvadla. Aké typy riešení existujú?

**6.3** Nakresliť fázový portrét pre jednorozmerný pohyb pod vplyvom konštantnej sily  $F(x) = F_0$ .

Návod: (1.13), (5.13)

**6.4** Nakresliť fázový portrét pre hmotný bod v jednorozmernej potenciálovej jame.

$$U(x) = 0 \quad |x| \leq a$$

$$U(x) = U_0 > 0 \quad |x| > a$$

Návod: uvažovať realistickejší prípad s trochu zaoblenými hranami

**6.5** Predstaviť si (prípadne vypočítať), ako sa budú vyvíjať v čase nejaké dvojrozmerné oblasti vo fázových priestoroch z príkladov (6.1) až (6.4) a porozmýšľať o Liouvillovej vete v kontexte týchto úloh (pozri (5.13)).

**6.6\*** Nech  $H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + U(x)$  a nech fázová trajektória s energiou  $E$  zodpovedá periodickému riešeniu (perióda  $t_E$ ). Ukázať, že

i)

$$t_E = 2m \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{dx}{p_E(x)}$$

( $p_E(x)$  je z rovnice  $\frac{p^2}{2m} + U(x) = E$ )

ii) ukázať, že platí

$$P(E) = \int t_E dE$$

( $P(E)$  je definované v úlohe (6.1)). Overiť výsledok na lineárnom harmonickom oscilátore (kde  $P(E) = Et_E$ ).

Návod: vypočítať  $\frac{d}{dE} P(E)$  pomocou (6.1ii)

**6.7** Nech  $H(x, p) \equiv a^2 p^2 + U(x)$  je hamiltonián systému s jedným stupňom voľnosti  $x$  ( $a > 0$ ).

Ukázať, že jeho fázový portrét má tieto vlastnosti:

i) je symetrický voči osi  $x$

ii) v bodoch, kde pretína  $x$ -ovú os sú príslušné fázové krivky vždy presne zvislé ( $\parallel$  s osou  $p$ ), ak nejde o rovnovážnu polohu (príkladom na rovnovážnu polohu tohoto typu je úloha (6.8))

iii) overiť ich v konkrétnych prípadoch (6.1)

Návod ii): Krivky fázového portréту možno zapísať v tvare

$$\phi(x, p) = 0$$

pre

$$\phi(x, p) \equiv a^2 p^2 + U(x) - E$$



Lokálne ich možno zapísať v tvare  $x = f(p)$  alebo  $p = h(x)$ . Platí

$$\frac{dx}{dp} \equiv \frac{df(p)}{dp} = -\frac{\phi_{,p}}{\phi_{,x}} = \dots$$

**6.8** Vyšetriť správanie sa rovinného matematického kyvadla s energiou  $E = 2mgl$  (ak v polohe dolu má nulovú energiu) v okolí vratkej rovnovážnej polohy ( $\varphi = \pi$ ).

Návod: ide o pohyb po *separatrise* (krivke, ktorá oddeľuje na fázovom portréte topologicky rôzne riešenia). Ukázať, že jej rovnica je

$$p_\varphi(\varphi) = \pm 2ml\sqrt{gl} \cos \frac{\varphi}{2}$$

Aproximovať v okolí uvažovaného bodu *priamkou*  $p_\varphi = a\varphi + b$  a vzniknutú („linearizovanú“) rovnicu ( $p_\varphi$  súvisí s  $\varphi$ ) riešiť. Interpretovať v jazyku reálneho pohybu kyvadla.

**6.9** V lagranžiáne pre voľný pád  $L(z, \dot{z}) = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz$  urobiť preškáľovanie všetkých premenných aj parametrov, t.j.

$$z \mapsto Az$$

$$t \mapsto Bt$$

$$m \mapsto Cm$$

$$g \mapsto Dg$$

i) Overiť, že potom  $L \equiv T - U \mapsto C\frac{A^2}{B^2}(T - \frac{DB^2}{A}U) \equiv L'$  a teda pre  $A = DB^2$  je  $L' = \text{konšt.}L$

Nech teraz padá kameň hmotnosti  $m_0$  na Zemi z (malej) výšky  $h_0$  za čas  $t_0$ . Zistiť

ii) za aký čas by padal ten istý kameň z tej istej výšky na Mesiaci ( $D \sim 1/6$ )

iii) z akej výšky by musel padať kameň, aby mu to trvalo 2x dlhšie

iv) za aký čas spadne 3x ťažší kameň

v) ako sa interpretuje fakt, že na C nevyšli nijaké obmedzenia

vi) overiť výsledky “výpočtov” pomocou škálovania z explicitného riešenia  $z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$ .

**6.10** Nech sa rovinné kyvadlo dĺžky  $l_0$  a hmotnosti  $m_0$  kýva na Zemi s periódou  $t_0$ . Preškáľovaním príslušného lagranžiánu (3a.2) zistiť:

i) ako sa zmení perióda po prenesení na Mesiac

ii) aké predĺženie  $l_0$  treba na zdvojnásobenie periódy

iii) ako sa zmení perióda, ak sa zdvojnásobí amplitúda kmitov ( $\varphi_{max} \mapsto 2\varphi_{max}$ )

iv) prečo sa (pomocou škálovania) *nedá* odpovedať na otázku iii)

Návod: iv): lebo zámena  $\varphi \mapsto A\varphi$  nespôsobí  $L \mapsto \lambda L$  („ $\varphi$  sa *nedá* škáľovať“)

**6.11** Preškáľovaním vhodných premenných a parametrov lagranžiánu pre Keplerovu úlohu (pre  $m \ll M$ )

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + \kappa mM\frac{1}{r}$$

zistiť

i) ako by sa zmenila obežná doba Zeme (po tej istej elipse), ak by bolo Slnko 3x ťažšie, ako je

ii) ako by sa zmenila obežná doba Zeme, ak by bola Zem 2x ťažšia, ako je

iii) ako sa zmení pomer (veľká poloos)<sup>3</sup>/(obežná doba)<sup>2</sup> pre n-krát väčšiu elipsu

iv) či je výsledok iii) ekvivalentný 3.Keplerovmu zákonu

v) polomer kruhovej orbity pre stacionárnu družicu v jednotkách vzdialenosti Zem-Mesiac

Návod na iv): sú všetky elipsy (riešenia Keplerovej úlohy) nevyhnutne podobné?

**6.12** Elektrón v homogénnom magnetickom poli  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0$  (3b.4). Ukázať

i) že možným pohybom je rovnomerný pohyb po kružnici

ii) že v 3x silnejšom poli je možný pohyb po tej istej kružnici. Ako sa zmení doba obehu?

iii) ako sa zmení obežná doba, ak po 3x väčšej kružnici obieha *pozitrón*?

**6.13** Do akčného filmu treba nakrútiť scénu, pri ktorej sa mrakodrap výšky 100m zosype (voľným pádom) na zem. Scéna sa simuluje pádom „mrakodrapu“ výšky 1m. Ako treba zrýchliť alebo spomaliť film, aby nakrútená pasáž pôsobila dôveryhodne?

Návod: (6.9)

**6.14** Družica obieha okolo planéty polomeru  $R$  a *konštantnej* hustoty  $\rho$  tesne nad jej povrchom. Ukázať, že jej obežná doba  $T$  nezávisí od  $R$ . (Návod: rozmerová analýza,  $T = T(R, \rho, \kappa)$ .)

- i) rozmerovou analýzou  
 ii) explicitným výpočtom  $T$   
 Návod: i)  $T = T(\rho, R, \kappa)$

## 7. PROBLÉM DVOCH TELIES

Ak sú v hre len 2 telesá interagujúce centrálnymi potenciálovými silami, (úloha (7.1)iv) tak

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathcal{U}(r) \quad r \equiv |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$$

Pohybové rovnice v premenných  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  sú zrefázené, ale v premenných

$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{R} \equiv \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{M} \quad (M \equiv m_1 + m_2)$$

(relatívny vektor a ťažisko) sa rozrefázia:

$$L = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 - \mathcal{U}(r) \equiv L_1(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}) + L_2(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$$

kde  $\mu \equiv m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  je redukovaná hmotnosť sústavy

Pohyb ťažiska triviálny  $\Rightarrow$  redukcia úlohy o dvoch telesách na úlohu o jednom (formálnom) telese v centrálnom poli ( $\mathbf{F} \equiv -\nabla \mathcal{U}(r) = -\mathcal{U}'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$ ) V centr. poli  $\mathbf{L} = \text{konšt} \Rightarrow$  pohyb v rovine (1.6)  $\Rightarrow$

$$L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}, t) = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \mathcal{U}(r)$$

Cykličnosť  $t, \varphi \Rightarrow E, p_\varphi = \text{konšt} \Rightarrow$  riešenie „v kvadrátúrach“

Keplerova úloha:  $\mathcal{U}(r) = -\alpha/r$ . Dráhy kuželosečky, typ podľa energie.

Precesia perihélia: narušenie  $\mathcal{U}(r) \sim 1/r$  (ostatné planéty, efekt všeob. teórie relativity) vedie na neuzavreté trajektórie (veľmi slabý jav)

**7.1** Ukázať, že zámena súradníc  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \mapsto (\mathbf{r}, \mathbf{R})$ , kde  $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  je relatívny vektor a  $\mathbf{R} \equiv \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$  je poloha ťažiska, je regulárna, t.j. jakobián  $\frac{\partial(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\partial(\mathbf{r}, \mathbf{R})}$  je všade nenulový. Nájsť inverzný prechod  $(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \mapsto (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ .

**7.2** Vzájomná interakcia hmotných bodov je daná potenciálnou energiou

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathcal{U}(r)$$

kde  $r = |\mathbf{r}|$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  (pozri (1.12), (7.12)).

- i) ukázať, že rovnice v premenných  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  sú zrefázené  
 ii) rozrefáziť rovnice zámennou z úlohy (7.1)  
 iii) rozrefáziť rovnice ako v ii), ale pomocou lagranžianu  
 iv) ukázať, že potenciálna energia je translačne a rotačne invariantná, t.j. (7.12)

$$U(A\mathbf{r}_1 + \mathbf{a}, A\mathbf{r}_2 + \mathbf{a}) = U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$$

(pozri (7.12) pre  $A \in SO(3)$  (t.j.  $A^T A = \mathbb{I}$ ,  $\det A = 1$ ),  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ ).

**7.3** Vypočítať redukovanú hmotnosť pre atóm vodíka (sústava protón - elektrón), pozitronium (pozitron - elektrón) a sústavy Slnko - Jupiter, Slnko - Zem a Zem - Mesiac

**7.4** Nakresliť priebeh efektívnej potenciálnej energie  $\mathcal{U}_{ef}(r) \equiv \mathcal{U}(r) + \mathcal{M}^2 / 2\mu r^2$  ( $\mu$  - redukovaná hmotnosť,  $\mathcal{M}^2$  - kvadrát momentu hybnosti) pre

- i) Keplerovu úlohu ( $\mathcal{U}(r) = -\alpha/r$ )  
 ii) harmonickú silu ( $\mathcal{U}(r) = k(r - a)^2 / 2$ )

**7.5** Pohyb v centrálnom poli  $U(r)$  je vždy v rovine (1.6) a je daný hamiltoniánom

$$H(r, p_r, \varphi, p_\varphi, t) = \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{p_\varphi^2}{2\mu r^2} + U(r)$$

*i)* ukázať, že cykličnosť  $t, \varphi$  vedie na fakt, že (ak  $p_\varphi \equiv \mathfrak{M}$ ) platí rovnica

$$\mathcal{H}(r, p_r; \mathfrak{M}) \equiv \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{\mathfrak{M}^2}{2\mu r^2} + U(r) = E$$

( $E$  je celková energia).

*ii)* nakresliť *kvalitatívne* krivky  $\mathcal{H} = E$  v rovine  $r, p_r$ , t.j. fázový portrét (6.kap.) pre Keplerovu úlohu

*iii)* vyčítať z neho ohraňujúce hodnoty  $r$  pre danú energiu

*iv)* „uvidieť“ triedu *periodických riešení* (pre isté hodnoty  $E$ )

Návod:  $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$  ( $\alpha > 0$ )  $\Rightarrow \mathcal{H} = E \Leftrightarrow p_r = \pm \sqrt{2\mu(E - \mathcal{U}_{ef})}$  pre  $\mathcal{U}_{ef}(r) = U(r) + \frac{\mathfrak{M}^2}{2\mu r^2}$ .

Nakresliť si (kvalitatívne)  $E - \mathcal{U}_{ef}(r)$  a z toho  $p_r = \pm \sqrt{\dots}$ .

**7.6** Ukázať, že pre celkový moment hybnosti sústavy dvoch telies platí (v označeniach z úlohy (1.12))

$$\mathbf{L} \equiv m_1 \mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_2 = M \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} + \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$$

Pri voľbe počiatku súradníc v ťažisku ( $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ ) teda dostávame

$$\mathbf{L} = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$$

takže výraz  $\mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$  má význam celkového momentu hybnosti sústavy *voči ťažisku*.

**7.7** Ukázať, že pri pohybe v centrálnom poli  $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$  sa zachováva *Rungeho-Lenzov vektor*

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{v} \times \mathbf{L} - \alpha \frac{\mathbf{r}}{r}$$

Návod: využiť pohybovú rovnicu  $m\dot{\mathbf{v}} = -\vec{\nabla}U = -\frac{\alpha}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$  a jej dôsledok  $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{0}$ .

**7.8** Z rovnice elipsy  $\frac{p}{r} = 1 + e \cos \varphi$  a vyjadrenia  $(p, e)$  cez fyzikálne parametre  $|E|, \alpha, \mu, m = |\mathbf{L}|$  dokázať

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{\alpha}{2|E|} \qquad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{m}{\sqrt{2\mu|E|}}$$

$$r_{min} = \frac{p}{1 + e} = a(1 - e) \qquad r_{max} = \frac{p}{1 - e} = a(1 + e)$$

( $a, b$  sú veľká resp. malá polos elipsy,  $r_{min}, r_{max}$  sú *perihélium* resp. *afélium*).

**7.9** Dokázať, že Rungeho-Lenzov vektor (úloha (7.7)) má

*i)* smer hlavnej polosi (orientácia od ohniska k perihéliu)

*ii)* veľkosť  $\alpha e$  ( $e$  - *excentricita* (výstrednosť)).

Návod: vypočítať ho v perihéliu a využiť  $\mathbf{A}(t) = \mathbf{konšt}$ . Na *ii)* využiť výsledky úlohy (7.8)

**7.10** Riešiť pohybovú rovnicu pre hmotný bod v (centrálnom) poli  $U(\mathbf{r}) = \mathcal{U}(r) = kr^2/2$ .

Návod: pohyb je v rovine. Zapiš a riešiť pohybovú rovnicu v kartézskych súradniciach a spoznať v trajektórii *elipsu so stredom* (nie ohniskom ako u planét) v počiatku súradníc ( $\equiv$  “centre” poľa).

**7.11** Nech  $r, \varphi$  sú polárne súradnice inerciálneho pozorovateľa,  $r', \varphi'$  polárne súradnice pozorovateľa na grafónovom tanieri, ktorý sa otáča rovnomerne uhlovou rýchlosťou  $\omega$ . Pozorovateľ na tanieri kreslí elipsu

$$\varphi'(t) = t$$

$$r'(t) = \frac{p}{1 + e \cos t}$$

*i)* ukázať, že

$$r' = r$$

$$\varphi' = \varphi - \omega t$$

ii) ukázať, že inerciálny pozorovateľ vidí kresliť krivku

$$\varphi(t) = (1 + \omega)t$$

$$r(t) = \frac{p}{1 + e \cos t}$$

resp.

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + e \cos(\frac{1}{1+\omega}\varphi)}$$

iii) ukázať, že to dáva algoritmus na kreslenie krivky

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + e \cos(b\varphi)},$$

a to: treba kresliť elipsu (jednotkovou uhlovou rýchlosťou voči tanieru) na tanieri otáčajúcom sa uhlovou rýchlosťou  $\omega = \frac{1-b}{b}$  a pozrieť sa na to, čo sa kreslí v „inerciálnej“ rovine.

iv) vypočítať uhol otočenia perihélia za 1 obch pre  $b = 1 + \varepsilon$ ,  $\varepsilon \ll 1$ . Návod: vtedy  $\omega \doteq -\varepsilon \Rightarrow$  za čas  $t = 2\pi$  sa stihne tanier otočiť o  $2\pi\varepsilon$ .

**7.12** Nech  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $T_a : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  funguje podľa pravidla  $(x, y) \mapsto (x+a, y+a)$  (translácia o „vektor“  $(a, a)$ ).

i) ukázať, že najvšeobecnejšia funkcia  $f(x, y)$ , ktorá je *invariantná* voči  $T_a$  (t.j.  $f(x+a, y+a) = f(x, y)$ ) má tvar

$$f(x, y) = h(x-y)$$

kde  $h$  je *ľubovoľná* funkcia *jednej* premennej.

ii) zovšeobecniť na vektorové argumenty: že najvšeobecnejšia *translačne invariantná* potenciálna energia pre dva hmotné body  $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  (t.j. taká, že  $U(\mathbf{r}_1 + \mathbf{a}, \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}) = U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  pre ľubovoľné  $\mathbf{a}$ ) má tvar

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathcal{U}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

kde  $\mathcal{U}$  je *ľubovoľná* funkcia *jedného* vektora.

Návod na i): zaviesť namiesto  $(x, y)$  premenné  $u \equiv x - y$ ,  $v \equiv x + y$ , vyjadriť  $T_a$  cez ne, zapísať cez ne podmienku invariantnosti funkcie  $\hat{f}(u, v) := f(x, y)$ . Pre ii) analogicky  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{v} \equiv \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$ .

## 8. MALÉ KMITY

Ak  $\mathcal{U}(q^1, \dots, q^n)$  má minimum v  $q_0 \equiv (q_0^1, \dots, q_0^n)$ , tak v jeho okolí je možný univerzálny typ pohybu - *malé kmity*. Ak je celková energia  $E$  len trochu väčšia ako  $\mathcal{U}(q_0)$ , tak vždy  $q$  blízko k  $q_0 \Rightarrow$  Tayl. rozvoj. Vyjde

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} M_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j - \frac{1}{2} K_{ij} x^i x^j$$

$$x^i \equiv q^i - q_0^i \quad M_{ij} \equiv T_{ij}(q_0) \quad K_{ij} \equiv \left. \frac{\partial^2 \mathcal{U}(q)}{\partial q^i \partial q^j} \right|_{q_0}$$

Lin. zámena  $x_i \mapsto A_{ij} x_j \equiv \xi_i$  umožňujú prechod k *normálnym súradniciam*; v nich

$$L = L_1 + \dots + L_n \quad L_i \equiv \frac{1}{2} \dot{\xi}_i^2 - \frac{1}{2} \omega_i^2 \xi_i^2$$

$\Rightarrow$  sústava *neinteragujúcich lin. harm. oscilátorov*. Ich frekvencie  $\omega_i \equiv$  *charakteristické frekvencie* sa dajú nájsť (aj v pôvodných premenných) riešením *sekulárnej rovnice*

$$\det |K - \omega_i^2 M| = 0 \Rightarrow \omega_1^2, \dots, \omega_n^2$$

Špeciálne riešenia pohyb. rovníc: *módy* - nenulové len jedno  $\xi_i$ . Všeob. riešenie je *superpozícia* módov ( $\Rightarrow$  už nemá pevnú frekvenciu).

Táto teória je dôležitá aj v teórii *poľa*; jednoduchý príklad: úlohy o strune a jej módoch (4.6)-(4.9).

8.1 Urobiť aproximáciu malých kmitov v lagranžiánoch z úloh (3a.2), (3a.4), (3a.7), (3a.10). Vypísať explicitne matice  $M_{ij}, K_{ij}$  (figurujúce vo všeobecnom tvare  $L = \frac{1}{2}M_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - \frac{1}{2}K_{ij}x_ix_j$ ).

8.2 Riešiť sekulárnu rovnicu  $\det(K - \omega^2 M) = 0$  a nájsť charakteristické frekvencie  $\omega_a$  pre úlohu (3a.4)

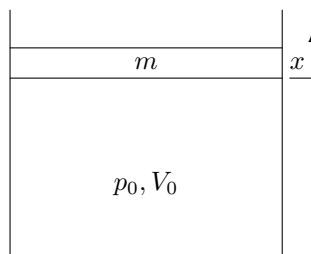
8.3 Presvedčiť sa, že rozvoj lagranžiánu z úlohy (3a.3) v okolí minima potenciálnej energie vo sférických súradniciach je problematický (súradnice sú tam *defektné*). Overiť, že problém je *len* v súradniciach, nie v podstate veci.

Návod: napísať  $L$  v obyčajných kartézskych súradniciach  $x, y$  (priemet hmotného bodu v zvislom smere do roviny  $xy$ ) a vypočítať približný lagranžián v okolí minima  $U(x, y)$ . Nájsť  $M_{ij}, K_{ij}$ , určiť charakteristické frekvencie a módy. Overiť, že sférické kyvadlo sa pri malých kmitoch správa ako *izotropný* dvojrozmerný harmonický oscilátor (7.10).

8.4 Sústava  $n$  rovinných kyvadliel spriahnutých pružinkami. Napísať lagranžián pre malé kmity, vypísať matice  $M_{ij}, K_{ij}$ . Riešiť úlohu (charakteristické frekvencie, módy) pre  $n = 2$ .

8.5 Vyšetriť malé kmity sústavy z úlohy (3a.13)

8.6 Uvažujme systém (1 stupeň voľnosti) pozostávajúci zo zvislého valca naplneného ideálnym plynom, ktorý je zhora uzavretý voľne sa pohybujúcim piestom (plocha  $S$ , hmotnosť  $m$ ).



Obr. 8.6

Nech *rovnovážny* tlak a objem sú  $p_0$  ( $\equiv mg/S$  - prečo?),  $V_0$ . Odvodíť vzorec na výpočet  $\gamma \equiv c_p/c_v$  plynu z pozorovanej frekvencie malých kmitov sústavy.

Návod: pre  $x$  podľa obr. platí  $p(x)V^\gamma(x) = p_0V_0^\gamma$ , kde  $V(x) = V_0 + Sx$ . Odtiaľ silu na piest  $F(x)$  a vypočítať  $\omega$  pre malé kmity.

## 9. POHYBOVÉ ROVNICE V NEINERCIÁLNEJ VZŤAŽNEJ SÚSTAVE

„Translačná“ neinerciálnosť: (úloha (9.1))

Nech  $\rho$  - voči inerc. sústave,  $\mathbf{r}(t)$  voči neinerc.,  $\mathbf{R}(t)$  - počiatok neinerc. voči inerc.

Potom  $\rho(t) = \mathbf{R}(t) + \mathbf{r}(t)$

Newtonove rovnice v inerciálnej sústave sú  $m\ddot{\rho}(t) = \mathbf{F}(\rho, t)$ .

Ich prepis do neinerciálnej sústavy vedie na

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) - m\mathbf{A}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) := \mathbf{F}(\mathbf{r} + \mathbf{R}(t), t) \quad \mathbf{A}(t) := \ddot{\mathbf{R}}(t)$$

Dodatočná (fiktívna) sila ( $-m\mathbf{A}$ ) sa volá *zotrvačná sila*. Nezávisí od  $\mathbf{r}$  ( $\Rightarrow$  homogénne pole - ako tiažové)

„Rotačná“ neinerciálnosť: (úloha (9.4))

ak  $\mathbf{e}_i$  - ortonormovaná báza stojaca v inerciálnej sústave

$\mathbf{e}_\alpha(t)$  - ortonormovaná báza stojaca v neinerciálnej sústave

tak

$\dot{\mathbf{e}}_\alpha(t) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_\alpha(t)$  (neinerciálna sústava sa otáča uhlovou rýchlosťou  $\boldsymbol{\omega}$  voči inerciálnej)

Nech  $\mathbf{r}(t) = x_i(t)\mathbf{e}_i = x_\alpha(t)\mathbf{e}_\alpha(t)$

Derivovanie dáva

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}_i\mathbf{e}_i = \ddot{x}_\alpha\mathbf{e}_\alpha + 2\dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\dot{x}_\alpha\mathbf{e}_\alpha) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

$\Rightarrow$  Coriolisova, Eulerova a odstredivá sila. Vo vhodnom označení (9.4)

celkovo (pre translačnú aj rotačnú neinerčiálnosť) rovnice v tvare

$$m\mathbf{a} = \mathcal{F} \underbrace{-m\mathbf{A}}_{\text{Zotrvač}} \underbrace{-2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})}_{\text{Coriolis}} \underbrace{-m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}}_{\text{Euler}} \underbrace{-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})}_{\text{Odstred'}}$$

$\Rightarrow$  spolu 4 dodatočné (fiktívne) sily v neinerčiálnej sústave (mená podľa svojich objaviteľov).

*Poruchový počet* - metóda hľadania približných riešení pohyb. rovníc zložitých sústav. Dá sa použiť, ak sa daná sústava „málo líši“ od exaktne riešiteľnej, t.j. ak tam existuje malý parameter  $\epsilon \ll 1$  taký, že pre  $\epsilon = 0$  dostávame exaktne riešiteľnú sústavu. Riešenie „porušenej“ ( $\epsilon \neq 0$ ) sústavy sa hľadá v tvare mocn. radu v  $\epsilon$ . Aplikácie: (9.6), (9.7), (9.8), (9.9), (9.10) (Foucaultovo kyvadlo, odklon od zvislého smeru pri páde ..)

**9.1** Nech  $\boldsymbol{\rho}(t)$  je trajektória hmotného bodu voči inerciálnej sústave  $S$ ,  $\mathbf{R}(t)$  počiatok sústavy  $S'$ , pričom  $S'$  sa voči  $S$  neotáča,  $\mathbf{r}(t)$  trajektória toho istého hmotného bodu voči  $S'$  (teda  $\boldsymbol{\rho}(t) = \mathbf{R}(t) + \mathbf{r}(t)$ ).

i) Ukázať, že ak pohybová rovnica v  $S$  bola

$$m\ddot{\boldsymbol{\rho}}(t) = -\nabla_{\boldsymbol{\rho}}U(\boldsymbol{\rho}, t) \equiv \mathbf{F}(\boldsymbol{\rho}, t),$$

tak v  $S'$  je

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = -\nabla_{\mathbf{r}}U(\mathbf{r}, t) - m\mathcal{A}(t) \equiv \mathcal{F}(\mathbf{r}, t) - m\mathcal{A}(t)$$

pričom  $\mathcal{A}(t) \equiv \ddot{\mathbf{R}}(t)$  je zrýchlenie  $S'$  voči  $S$ ,  $U(\mathbf{r}, t) \equiv U(\mathbf{r} + \mathbf{R}(t), t)$ ,  $\mathcal{F}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{F}(\mathbf{r} + \mathbf{R}(t), t)$ .

ii) urobiť to isté pomocou lagranžiánu: prepísať zodpovedajúci  $L(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}, t)$  do jazyka  $\mathbf{r}$  a napísať pohybové rovnice v premenných  $\mathbf{r}$

iii) zámena  $\boldsymbol{\rho} \mapsto \mathbf{r}$  závisí od času ( $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(\mathbf{r}, t)$ ). Aplikovať výsledky úlohy (3b.5), napísať explicitne novú potenciálnu energiu  $U$ , vypočítať z nej silu a porovnať s i)

**9.2** Ukázať, že

i) riešením rovnice

$$\dot{\mathbf{b}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{b}$$

je pre  $\boldsymbol{\Omega} = \text{konšt}$  rovnomerné otáčanie sa  $\mathbf{b}$  okolo  $\boldsymbol{\Omega}$  s uhlovou rýchlosťou  $|\boldsymbol{\Omega}|$

ii) aj pre  $\boldsymbol{\Omega}(t)$  platí

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{b}^2) = 0$$

$\Rightarrow \mathbf{b}(t)$  je tiež otáčanie sa (ale už všeobecne nie okolo stálej osi a nie všeobecne stále tou istou uhlovou rýchlosťou).

**9.3** Nech  $\mathbf{e}_{\alpha}(t)$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$  je ortonormovaný pravotočivý repér, t.j.:

$$\mathbf{e}_{\alpha} \cdot \mathbf{e}_{\beta} = \delta_{\alpha\beta}$$

$$\mathbf{e}_{\alpha} \times \mathbf{e}_{\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{e}_{\gamma}$$

Interpretovať rovnicu  $\dot{\mathbf{e}}_{\alpha}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}_{\alpha}(t)$ . Aký je zmysel toho, že na  $\boldsymbol{\omega}$  nie je index  $\alpha$ ?

**9.4** Nech ortonormálny pravotočivý repér  $\mathbf{e}_i$  je v pokoji voči inerciálnej sústave ( $\mathbf{e}_i(t) = \mathbf{e}_i(0)$ ), repér  $\mathbf{e}_{\alpha}(t)$  sa voči inerciálnej sústave otáča uhlovou rýchlosťou  $\boldsymbol{\omega}(t)$ , t.j.  $\dot{\mathbf{e}}_{\alpha}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}_{\alpha}(t)$ . Nech  $\mathbf{r}(t) = x_i(t)\mathbf{e}_i = x_{\alpha}(t)\mathbf{e}_{\alpha}(t)$

i) aký zmysel majú  $x_i, x_{\alpha}$ ?

ii) ukázať, že  $\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}_i\mathbf{e}_i = \dot{x}_{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$

iii) aký je rozdiel medzi  $(\dot{\mathbf{r}})_{\alpha} \equiv \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_{\alpha}$  a  $\dot{x}_{\alpha}$ ?

iv) ukázať, že  $\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}_i\mathbf{e}_i = \ddot{x}_{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha} + 2\boldsymbol{\omega} \times (\dot{x}_{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$

t.j. pre  $\mathbf{a} \equiv \ddot{x}_{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha}$ ,  $\mathbf{v} \equiv \dot{x}_{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha}$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

v) aká je interpretácia vektorov  $\dot{\mathbf{r}}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\ddot{\mathbf{r}}$ ,  $\mathbf{a}$ ?

**9.5** Aká je číselná veľkosť  $|\boldsymbol{\omega}|$  pre točenie sa Zeme okolo svojej osi?

**9.6** i) Ukázať, že pohyb hmotného bodu nízko nad (točiacou sa) Zemou sa riadi rovnicou

$$m\mathbf{a} = -m\mathbf{g}\mathbf{e}_3 - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

ii) Nech charakteristická dĺžka úlohy je  $l$ ,  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{n}$  ( $\mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|} \equiv \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}$ ). Prepísať rovnicu do *bezrozmerného tvaru* zavedením  $\boldsymbol{\xi} \equiv \frac{\mathbf{r}}{l}$ ,  $\tau \equiv \frac{t}{t_0} \equiv \sqrt{\frac{g}{l}}t$ . Ukázať, že má tvar

$$\boldsymbol{\xi}'' \equiv \frac{d^2 \boldsymbol{\xi}(\tau)}{d\tau^2} = -\mathbf{e}_3 - \varepsilon \mathbf{n} \times \boldsymbol{\xi}'$$

kde  $\varepsilon \equiv 2\omega \sqrt{\frac{l}{g}} \equiv \sqrt{\frac{l}{l_0}}$  ( $l_0 \equiv \frac{g}{4\omega^2}$ )

iii) vypočítať numericky hodnotu  $l_0$

iv) odhadnúť  $\varepsilon$  pre bežné hodnoty  $l$  ( $\sim 1$  až  $100m$ ) a overiť, že  $\varepsilon$  je v diferenciálnej rovnici v ii) *malý parameter*.

9.7] Napísať rovnice pre riešenie diferenciálnej rovnice z úlohy (9.6) v poruchovom rozvoji v malom parametri  $\varepsilon$ . Návod: hľadať riešenie  $\boldsymbol{\xi}(\tau; \varepsilon)$  v tvare  $\boldsymbol{\xi}_0(\tau) + \varepsilon \boldsymbol{\xi}_1(\tau) + \varepsilon^2 \boldsymbol{\xi}_2(\tau) + \dots$ . Ukázať, že

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_0'' &= -\mathbf{e}_3 \\ \boldsymbol{\xi}_1'' &= -\mathbf{n} \times \boldsymbol{\xi}_1' \\ &\vdots \\ \boldsymbol{\xi}_k'' &= -\mathbf{n} \times \boldsymbol{\xi}_{k-1}' \\ &\vdots \end{aligned}$$

9.8] Nájsť riešenie úlohy (9.7) do rádu  $\varepsilon$  (t.j.  $\boldsymbol{\xi}(\tau) \doteq \boldsymbol{\xi}_0(\tau) + \varepsilon \boldsymbol{\xi}_1(\tau)$ ) pre situáciu zodpovedajúcu voľnému pádu z výšky  $h \ll R \equiv$  polomer Zeme. Návod: počiatkové podmienky

$$\boldsymbol{\xi}(0) = \mathbf{e}_3 \quad \boldsymbol{\xi}'(0) = \mathbf{0}$$

celé naložiť na  $\boldsymbol{\xi}_0(\tau)$ ; potom počiatkové podmienky pre  $\boldsymbol{\xi}_1$  budú *homogénne*, t.j.

$$\boldsymbol{\xi}_1(0) = \mathbf{0} = \boldsymbol{\xi}_1'(0)$$

Ukázať, že riešením vzniknutých úloh

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_0'' &= -\mathbf{e}_3 & \boldsymbol{\xi}_0(0) &= \mathbf{e}_3, \boldsymbol{\xi}_0'(0) = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\xi}_1'' &= -\mathbf{n} \times \boldsymbol{\xi}_1' & \boldsymbol{\xi}_1(0) &= \mathbf{0} = \boldsymbol{\xi}_1'(0) \end{aligned}$$

je

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_0(\tau) &= \left(1 - \frac{\tau^2}{2}\right) \mathbf{e}_3 \\ \boldsymbol{\xi}_1(\tau) &= \frac{\tau^3}{6} \cos \alpha \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

( $\mathbf{n} = \cos \alpha \mathbf{e}_2 + \sin \alpha \mathbf{e}_3$  ak  $\alpha$  je zemepisná šírka,  $\mathbf{e}_1$  smeruje na východ a  $\mathbf{e}_2$  smeruje na sever) a teda

$$\boldsymbol{\xi}(\tau) = \left(1 - \frac{\tau^2}{2}\right) \mathbf{e}_3 + \varepsilon \frac{\tau^3}{6} \cos \alpha \mathbf{e}_1$$

9.9] Vypočítať, o koľko a ktorým smerom sa vychýli od zvislého smeru (definovaného olovničkou v klude) kameň, ktorý padá z výšky  $h = 100m$  resp.  $1000m$ .

Návod: v riešení úlohy 8 sa vrátiť k rozmerným veličinám a dostať  $\mathbf{r}(t)$  v prvom priblížení. Pozrieť sa na  $x(t)$  v čase, keď sa  $z(t)$  anuluje.

9.10] Vypočítať efekt stáčania roviny (malých) kmitov Foucaultovho kyvadla v 1. ráde poruchovej teórie. Za aký čas sa kyvadlo otočí dookola? Návod: podľa (8.3) je sférické kyvadlo v priblížení malých kmitov izotropný oscilátor s frekvenciou  $\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{g}{l}}$ , t.j.  $\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \mathbf{0}$  ( $\mathbf{r} \equiv (x, y)$ ). Na točiacej sa Zemi pristúpi (9.6) *Coriolisova sila* (jej zložka v rovine  $xy$ ), t.j.

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = -2(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}})_{\perp}$$

(( $\perp$ ) je zložka  $\perp$  na  $\mathbf{e}_3$ , t.j. v rovine  $xy$ ).

i) ukázať, že rovnice sú

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 2\omega \sin \alpha \dot{y}$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = -2\omega \sin \alpha \dot{x}$$

ii) prejsť k bezrozmerným premenným  $\xi \equiv \frac{x}{l}, \eta \equiv \frac{y}{l}, \tau \equiv \frac{t}{t_0} \equiv \omega_0 t$  a získať

$$\xi'' + \xi = \varepsilon \eta'$$

$$\eta'' + \eta = -\varepsilon \xi'$$

kde  $\varepsilon = 2 \frac{\omega}{\omega_0} \sin \alpha$

iii) odhadnúť veľkosť (bezrozmernej) konštanty  $\varepsilon$  pre kyvadlá bežných veľkostí v našich zemepisných šírkach a legalizovať tak použitie poruchovej metódy

iv) zaviesť  $w \equiv \xi + i\eta$  a ukázať, že ii) je ekvivalentné

$$w'' + w = -i\varepsilon w'$$

To je rovnica s konštantnými koeficientami. Riešenie hľadať v tvare  $w(\tau) = w(0)e^{\alpha\tau}$ , využiť  $\varepsilon \ll 1$  a ukázať, že  $w(\tau) \doteq e^{-i\frac{\varepsilon}{2}\tau}(c_1 e^{i\tau} + c_2 e^{-i\tau}) \equiv e^{-i\frac{\varepsilon}{2}\tau} w_0(\tau)$ , kde  $w_0$  je riešenie pre  $\varepsilon = 0$ .

v) dokázať, že dookola sa rovina kyvov otočí za čas  $\bar{t} = \frac{1}{\sin \alpha} \frac{d\theta}{dt}$ . Vysvetliť výsledok pre severný pól z pohľadu *inerciálneho* (netočiaceho sa so Zemou) pozorovateľa.

## 10. MECHANIKA TUHÉHO TELESA

Pohyb tuhého telesa: translačný + rotačný.

Rotačný pohyb (pri fixovanom ťažisku): vyjde

$$T = \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j \equiv \frac{1}{2} I(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})$$

$$L_i = I_{ij} \omega_j$$

kde *tenzor zotrvačnosti* má tvar

$$I_{ij} := \int_V dm (\mathbf{r}^2 \delta_{ij} - x_i x_j)$$

Komponenty  $I_{ab}$  voči osiam spojeným s telesom nezávisia (na rozdiel od  $I_{ij}$ ) od času. Vhodným výberom osí v telese (*hlavné osi*) sa dosiahne diagonálny tvar. Sú 4 typy diagonálnych tvarov ( $\leftrightarrow$  zotrvačníkov): sférický, symetrický, asymetrický a rotátor. Ak rotácia je okolo fixnej osi danej vektorom  $\mathbf{n}$ , stačí vedieť *moment zotrvačnosti* voči tejto osi  $\equiv I(\mathbf{n}, \mathbf{n}) \equiv I_{ij} n_i n_j$ . (10.4)

*Eulerove uhly* ( $\varphi, \vartheta, \psi$ ) - isté zovšeob. súradnice vhodné na opis konfigurácie tuhého telesa s fixovaným 1 bodom (napr. ťažiskom (t.j. na opis rotácie v priestore).

*Eulerove kinematické rovnice:*

$$\omega_1 = \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi$$

$$\omega_2 = \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi$$

$$\omega_3 = \dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}$$

*Eulerove dynamické rovnice:*

$$I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 = N_1$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = N_2$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 = N_3$$



(všetky zložky sú voči *telesovým* osiam)

Regulárna *precesia* voľného zotrvačníka: teleso sa točí okolo svojej osi + os okolo (konštantného) momentu hybnosti (10.7)

**10.1** i) Ukázať, že pri pohybe tuhého telesa v (homogénnom) gravitačnom poli sú translačný pohyb ťažiska a rotačný pohyb okolo ťažiska navzájom *nezávislé*.

ii) to isté pre voľné tuhé teleso

Návod: i) ak tuhé teleso je sústava hm. bodov s hmotnosťou  $m_1, \dots, m_N$  v polohách  $\boldsymbol{\rho}_1, \dots, \boldsymbol{\rho}_N$  (voči inerc. sústave), tak

$$L = \frac{1}{2} \sum_k m_k \dot{\boldsymbol{\rho}}_k^2 + \mathbf{g} \cdot \left( \sum_k m_k \boldsymbol{\rho}_k \right) \quad (\mathbf{g} \equiv -g\mathbf{e}_3)$$

Ukázať, že ak  $\mathbf{R}$  je poloha ťažiska a  $\mathbf{r}_k$  sú relatívne vektory voči ťažisku ( $\boldsymbol{\rho}_k = \mathbf{R} + \mathbf{r}_k$ ) tak

$$L = \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 + M \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}}_{L_{tr}(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k^2}_{L_{rot}} = L_{tr} + L_{rot}$$

pričom  $L_{rot} = \frac{1}{2} I_{ab} \omega_a \omega_b$  (10. kap.) je kinetická energia ( $\equiv$  lagranžián) rotačného pohybu voči ťažisku,  $L_{tr}$  je lagranžián translačného pohybu ťažiska. Rotačný pohyb teda prebieha nezávisle na transl. pohybe ťažiska. ii)

$\mathbf{g} = \mathbf{0}$

**10.2** Vypočítať tenzor zotrvačnosti voči ťažisku

i) homogénnej gule hmotnosti  $M$  a polomeru  $R$ ;

ii) homogénnej sféry hmotnosti  $M$  a polomeru  $R$ ;

iii) homogénnej kocky umiestnenej tak, že steny sú kolmé na osi  $x, y, z$ ;

iv) zdôvodniť (bez výpočtov integrálov), že výsledok iii) platí aj pre ináč otočenú kocku.

Návod na iv): kocka je *sférický zotrvačník*.

**10.3.** Čo z výsledkov úlohy 10.2. sa dá povedať o  $I_{ab}$  len z rozmerových dôvodov a symetrie?

**10.4** Ukázať, že ak  $\mathbf{n}$  je jednotkový vektor umiestnený v ťažisku telesa, tak

$$I_{\mathbf{n}} \equiv I(\mathbf{n}, \mathbf{n}) \equiv I_{ab} n_a n_b = \int_V \rho(\mathbf{r}) r_{\perp}^2 d^3r$$

kde  $r_{\perp}$  je vzdialenosť hmotného elementu v bode  $\mathbf{r}$  od osi danej vektorom  $\mathbf{n}$ . ( $I_{\mathbf{n}}$  je *moment zotrvačnosti* telesa voči osi danej jednotkovým vektorom  $\mathbf{n}$ .)

**10.5** Ukázať, že

i) žiadne teleso nemôže mať v hlavných osiach tenzor zotrvačnosti tvaru

$$I_{ab} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I_{11} \neq 0$$

ii) keď už  $I_{33} = 0$ , tak  $I_{11} = I_{22} \neq 0$  (rotátor).

Návod:

i)  $I_{22} = 0$  napríklad znamená (podľa (10.4)), že celá hmotnosť je skoncentrovaná na osi  $y$ ,  $I_{33} = 0$  analogicky na osi  $z$ . Predstaviť si také teleso.

ii) zdôvodniť, že keď je celá hmotnosť na osi  $z$ , tak  $I_{11} = I_{22}$  a pre teleso nenulových rozmerov je to  $\neq 0$ .

**10.6** Dokázať, že najvšeobecnejším pohybom (pri fixovanom ťažisku) *voľného sférického zotrvačníka* je rovnomerné otáčanie okolo osi fixnej v priestore.

Návod: ukázať, že z  $I_{ab} = I \delta_{ab}$  vyplýva  $I_{ij} = I \delta_{ij} \Rightarrow z L_i = \text{konšt.}$  (prečo?) vyplýva  $\omega_i = \text{konšt.}$

**10.7** Riešením Eulerových (dynamických a kinematických) rovníc ukázať, že voľný *symetrický zotrvačník* (s fixovaným ťažiskom) môže konať *regulárnu precesiu*.

Návod: ak  $I_1 = I_2 \equiv I \neq I_3$ , tak Eulerove dynamické rovnice (pre  $\mathbf{N} = \mathbf{0}$ ) sú

$$I \dot{\omega}_1 + (I_3 - I) \omega_2 \omega_3 = 0$$

$$I\dot{\omega}_2 + (I - I_3)\omega_1\omega_3 = 0$$

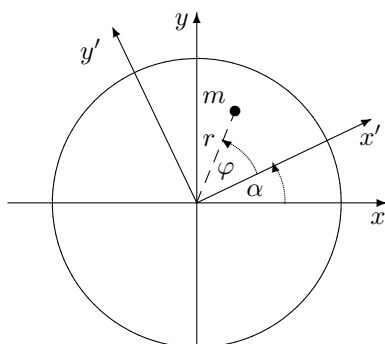
$$I_3\dot{\omega}_3 = 0$$

Keďže z tretej rovnice  $\omega_3 = \text{konšt}$ , prvé dve sú *lineárne*. Vyriešiť, dosadiť riešenie do Eulerových kinematických rovníc a ukázať, že existuje riešenie tvaru

$$\varphi(t) = at \quad \vartheta(t) = \vartheta_0 \quad \psi(t) = bt$$

pre vhodné konštanty  $a, b$ . Zdôvodniť, že  $b$  je uhlová rýchlosť otáčania okolo z-ovej osi zotrvačníka,  $a$  je uhlová rýchlosť otáčania sa tejto osi okolo (konštantného)  $\mathbf{L}$ ,  $\vartheta_0$  je uhol medzi z-ovou osou zotrvačníka a vektorom  $\mathbf{L}$ .

**10.8** Mravec hmotnosti  $m$  začne kráčať po (pôvodne stojacom) gramofónovom tanieri (moment zotrvačnosti voči osi otáčania =  $I$ ) po ceste  $r(\lambda), \varphi(\lambda), \lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$ , pričom  $r, \varphi$  sú polárne súradnice voči osiam  $x', y'$  spojeným s tanierom.



Obr. 10.8

Nech  $\alpha$  je uhol medzi laboratórnou osou  $x$  a osou  $x'$  na tanieri. Vypočítať zmenu  $\alpha$  (t.j.  $\alpha(\lambda_2) - \alpha(\lambda_1)$ ). Návod: zachováva sa  $L_z$ , pritom má nulovú hodnotu (na začiatku všetko stálo). Pritom

$$L_z = 0 = I\dot{\alpha} + mr^2(\dot{\alpha} + \dot{\varphi}) \Rightarrow d\alpha = \frac{mr^2}{I + mr^2} d\varphi$$

Integrovaním získat hľadaný vzťah.

## 11. MECHANIKA SPOJITÉHO PROSTREDIA (kontinua)

Sily v kontinuu: objemové a plošné

Celková objemová:  $\mathbf{F}_{obj} = \int_V \mathbf{f}_{obj} dV$ ,  $\mathbf{f}_{obj}$  - hustota objemovej sily

Plošné: treba *tenzor(ové pole) napätia*  $\sigma_{ij}(\mathbf{r}, t)$ . Pomocou neho

$$(d\mathbf{f}_{pl})_i = \sigma_{ij} dS_j$$

a celková plošná sila je

$$(\mathbf{F}_{pl})_i = \int_{\Sigma} \sigma_{ij} dS_j \quad \Sigma = \partial V - \text{hranica objemu } V$$

Všeobecná *pohybová rovnica kontinua*:

$$f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho a_i \quad \mathbf{a}(\mathbf{r}, t) - \text{pole zrýchlenia}$$

Explicitný rozpis rôznych pre *tekutiny* a *pružné prostredie*

Tekutiny: kinematika - *pole rýchlostí*  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$

Potom  $\mathbf{a} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ . Ďalej

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \quad \text{pre ideálnu tekutinu}$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{pre viskóznú tekutinu}$$

Odtiaľ potom

$$\text{Eulerova rovnica} \quad (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}$$

Navierova-Stokesova rovnica

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \frac{\eta}{\rho} (\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \Delta \mathbf{v})$$

Rovnica kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

Bernoulliho rovnica (stacionárne, nevírové prúdenie, t.j.  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0}$ ,  $\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}$ ):

$$\frac{1}{2} \rho_0 v^2 + p + \rho_0 g z = \text{konšt.}$$

Pružné kontinuum: kinematika - pole posunutí  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  ( $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ )

Deformácia - ak sa menia relatívne vzdialenosti (t.j. nespráva sa to ako tuhé teleso)

Opisuje ju tenzor(ové pole) deformácie (11.11)

$$\varepsilon_{ij} := u_{(i,j)} \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

V lineárnej teórii pružnosti: lineárny vzťah  $\varepsilon \leftrightarrow \sigma$ , t.j.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (\text{Hookov zákon})$$

Pre izotropné homogénne kontinuum (11.14)

$$\sigma_{ij} = \lambda \vartheta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad \vartheta \equiv \varepsilon_{ii} - \text{objemová dilatácia} \quad (11.15)$$

Pohybová rovnica (Lamého rovnica):

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}$$

Zvukové vlny v pružnom kontinuu: ansatz  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}f(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}, t)$  (11.16);

priečne vlny s rýchlosťou šírenia  $v_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ , pozdĺžne vlny s rýchlosťou šírenia  $v_l = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho}}$

Zvukové vlny v ideálnej tekutine: malé odchýlky od statickej situácie  $\Rightarrow$  linearizácia sústavy pohyb. rovníc (Eulerovej, r.kontinuity a  $p = p(\rho)$ ). Vyjdú vlnové rovnice, vlny sú len pozdĺžne, rýchlosť šírenia  $c_0 = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}(\rho_0)}$ .

Pre adiabatické zmeny vyjde  $c_0 = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}$ .

11.1 Z definície

$$(\mathbf{df}_{pl})_i = \sigma_{ij} dS_j \equiv \sigma_{ij} n_j dS$$

dedukovať, že interpretácia  $ij$ - zložky tenzora napätia je:  $\sigma_{ij} = i$ -ta zložka vektora napätia ( $\mathbf{t} \equiv \frac{d\mathbf{f}_{pl}}{dS}$ ) na plôške  $d\mathbf{S} = dS \mathbf{e}_j$  (t.j. orientovanej v smere  $j$ -tej osi).

11.2 Riešiť hydrostatickú rovnicu  $\nabla p = \rho \mathbf{g}$  pre vodu (považovať za nestlačiteľnú) v akváriu tvaru hranola. Vypočítať tlak na dne.

11.3 Odvodiť Archimedov zákon z rovnice hydrostatiky  $\nabla p = \rho \mathbf{g}$ .

Návod: ukázať, že  $(F^{pl})_i \equiv \int_{\Sigma} \sigma_{ij} dS_j = -Mg_i$ , kde  $M = \int_V \rho dV$ .

11.4 Odvodiť Archimedov zákon bez akýchkoľvek výpočtov.

Návod: voda v rovnováhe sa nehýbe  $\Rightarrow$  objemová a plošná sila ľubovoľného mysleného objemu  $V$  sa kompenzujú. Nahraď v tomto objeme  $V$  vodu telesom.

**11.5** Ukázať, že dôsledkom rovnice kontinuity pre nestlačiteľnú kvapalinu ( $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ ) je fakt, že pri tečení rúrou premenlivého prierezu je priemerná rýchlosť v užšej časti rúry väčšia ako v širšej.

Návod:  $0 = \int_V (\operatorname{div} \mathbf{v}) dV$ . Aplikovať na vhodný objem a použiť Gaussovu vetu.

**11.6** *Newtonovo vedro*: nájsť rovnicu rotačnej plochy, ktorá vzniká ako povrch vody (nestlačiteľnej) v rovnomernej sa točiacom vedre (uhlová rýchlosť  $\Omega$ ). Riešiť

- i) v inerciálnej sústave;
- ii) v sústave spojenej s točiacim sa vedrom.

Návod:

- i) ansatz  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \Omega \times \mathbf{r}$  v Eulerovej rovnici (zdôvodniť!), vypočítať  $p(x, y, z)$ ; rovnica plochy je  $p(x, y, z) = p_0 = \text{atmosférický tlak}$  (zdôvodniť!);
- ii) zaviesť potenciálnu energiu za odstredivú silu, minimalizovať celkovú potenciálnu energiu (za gravitačnú a odstredivú silu) pri fixovanom celkovom objeme vody vo vedre.

[Odpoveď: rotačný paraboloid.]

**11.7** Vyrátať rýchlosť vytekajúcej kvapaliny cez malú dierku v hĺbke  $h$  (*Toricelliho vzorec*)

Návod: použiť Bernoulliho rovnicu.

**11.8** Nájsť  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  - ustálený stav - pre pohyb viskózne kvapaliny medzi dnom (stojacim) a vodorovnou doskou ťahanou rýchlosťou  $V$  v smere osi  $x$ .

Návod: považovať dno a dosku za nekonečnú, ansatz  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (v(z), 0, 0)$  v Navierovej-Stokesovej rovnici.

**11.9** Riešiť úlohu o rovnomernom (bez zrýchlenia) tečení vody v záchodovej rúrke kruhového prierezu, ak je rúrka

- i) vodorovná;
- ii) zvislá.

Návod: i) ansatz  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = (v(x, y, z), 0, 0)$ . Rovnica kontinuity (pre nestlač. kvapalinu) dáva  $v(y, z)$ . Dosadenie do

$$\rho \mathbf{a} = \mathbf{0} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \eta \Delta \mathbf{v}$$

vedie na  $p(x, y, z, t) = \psi(x) - \rho g z$  plus  $\psi'(x) = \eta \Delta v(y, z)$ . Separácia premenných dá

$$\psi(x) = kx + p_0 \quad \Delta v = \frac{k}{\eta}$$

Úloha pre  $v(y, z)$  je „Dirichletova úloha“ v kruhu  $y^2 + z^2 \leq R^2$  (*Poissonova rovnica* vnútri,  $v = 0$  na hranici). Rieši sa v polárnych súradniciach v rovine  $yz$  s výsledkom

$$v(y, z) = \frac{k}{4\eta} (y^2 + z^2 - R^2)$$

Naozajstné tečenie si vyžaduje  $k < 0$  (ak smer vpravo) a teda treba zabezpečiť (konštantný) *spád tlaku* ( $k = \partial_x p = \text{konšt.} < 0$ ).

ii) ansatz  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = (0, 0, v(x, y, z))$ . Rovnica kontinuity (pre nestlač. kvapalinu) dáva  $v(x, y)$ . Dosadenie do

$$\rho \mathbf{a} = \mathbf{0} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \eta \Delta \mathbf{v}$$

vedie na  $p(x, y, z, t) = p(z)$  plus  $\rho g + p'(z) = \eta \Delta v(x, y)$ . Separácia premenných dá

$$p(z) = (\tilde{k} - \rho g)z + p_0 \quad \Delta v = \frac{\tilde{k}}{\eta}$$

Úloha pre  $v(x, y)$  je rovnaká ako pre i), t.j.

$$v(x, y) = \frac{\tilde{k}}{4\eta} (x^2 + y^2 - R^2)$$

Naozajstné tečenie smerom dolu ( $\tilde{k} > 0$ ) je možné aj bez spádu tlaku, ak  $\tilde{k} = \rho g$  (napr. ak oba konce sú otvorené - vtedy je na nich *atmosférický tlak*).

Pozn.: v zvislej rúrke je sila od viskozity (=plošná) kompenzovaná *objemovou* (=gravitačnou) silou  $\Rightarrow$  netreba

spád tlaku. Vo vodorovnej rúrke je objemová sila  $\perp$  smer tečenia, preto nemôže prekonávať odpor za viskozitu  $\Rightarrow$

treba spád tlaku (rovnováha dvoch plošných síl).

11.10 i) Vypočítať rozmer dynamického ( $\eta$ ) aj kinematického ( $\nu \equiv \frac{\eta}{\rho}$ ) koeficientu viskozity v Navierovej-Stokesovej rovnici.

ii) ukázať, že pri zanedbanej objemovej sile ( $\mathbf{g} = 0$ ) sa z troch charakteristických parametrov úlohy o tečení viskózne kvapaliny (charakt. dĺžky  $L$  - napr. polomeru rúry, charakt. rýchlosti  $V$  a kinematického koeficientu viskozity  $\nu$ ) dá zostaviť práve jeden bezrozmerný výraz, a to *Reynoldsovo číslo*

$$\mathcal{R} \equiv \frac{LV}{\nu} \equiv \frac{LV\rho}{\eta}$$

iii) ukázať, že v prípade  $\mathcal{R} \ll 1$  (kedy to nastáva?) je člen  $\frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$  zanedbateľný voči  $\nu \Delta \mathbf{v}$ . Tým sa stanú rovnice pre tečenie viskózne (nestlačiteľnej) kvapaliny sústavou *lineárnych* rovníc

$$\eta \Delta \mathbf{v} = \nabla p$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Návod: v bezrozmerných premenných  $\xi \equiv \frac{\mathbf{r}}{L}$ ,  $\mathbf{u} \equiv \frac{\mathbf{v}}{V}$ ,  $\tau \equiv \frac{V}{L}t$  vyzerá Navierova-Stokesova rovnica takto

$$\mathcal{R} \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = -\mathcal{R} \frac{\nabla_{\xi} p}{\rho V^2} + \nabla_{\xi} (\nabla_{\xi} \cdot \mathbf{u}) + \Delta_{\xi} \mathbf{u}$$

a teda pre nestlačiteľnú tekutinu (kvapalinu, napríklad vodu; vtedy  $\nabla_{\xi} \cdot \mathbf{u} = 0$ ,  $\rho = \text{const.}$ )

$$\mathcal{R} \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = -\mathcal{R} \nabla_{\xi} \left( \frac{p}{\rho V^2} \right) + \Delta_{\xi} \mathbf{u}$$

11.11 Ukázať, že výraz (*tenzor deformácie*)

$$\varepsilon_{ij} := u_{(i,j)} \equiv \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

je nulový pre pole posunutí  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  zodpovedajúce infinitezimálnej

i) globálnej translácii ( $u_i(\mathbf{r}, t) = b_i = \text{konšt} \ll 1$ )

ii) globálnej rotácii (o uhol  $\alpha \ll 1$  okolo  $\mathbf{n}$ :  $u_i(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_{ijk} \alpha n_j x_k$ )

(ako sa patrí na objekt, ktorý má signalizovať *deformáciu*).

Pozn.: deformácia je to, čo *mení* relatívne vzdialenosti v telese; obe uvažované posunutia sú *izometrie* Euklidovského priestoru, t.j. *nemenia* relatívne vzdialenosti ľubovoľných dvoch bodov v telese.

11.12 Opísať názorne deformáciu hranola danú poľom posunutí  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = kx\mathbf{e}_1$  (t.j.  $u_i = kx_1\delta_{i1}$ ).

Vypočítať  $\varepsilon_{ij}$ .

11.13 Opísať (názorne) deformáciu zvislého valca danú poľom posunutí

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = kz(y\mathbf{e}_1 - x\mathbf{e}_2)$$

( $k \ll 1$ ). Vypočítať  $\varepsilon_{ij}$ .

11.14 i) Ukázať, že ak

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \nu \delta_{il} \delta_{jk}$$

(izotrópne homogénne pružné kontinuum), tak všeobecné symetrie  $C_{ijkl}$  vedú na  $\mu = \nu$ .

ii) Odvodiť potom zo všeobecného Hookovho zákona

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

vzťah

$$\sigma_{ij} = \lambda \vartheta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

kde

$$\vartheta \equiv \varepsilon_{ii} \equiv \text{Tr } \bar{\varepsilon} \quad (\equiv \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$$

iii) Vypočítať inverzný vzťah  $\varepsilon_{ij}(\sigma_{kl})$ .

Návod: hľadať v tvare  $\varepsilon_{ij} = \alpha\sigma_{ij} + \beta\delta_{ij}$  a overiť, že  $\alpha = \frac{1}{2\mu}$ ,  $\beta = -\frac{1}{2\mu} \left( \frac{\lambda\sigma_{kk}}{3\lambda+2\mu} \right)$ .

**11.15** Ukázať, že veličina  $\vartheta \equiv \varepsilon_{ii}$  (11.14) má význam *objemovej dilatácie*, t.j. pri  $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{r}'$  sa elementárny objem mení ako  $dV \mapsto (1 + \vartheta)dV \equiv dV'$ , takže

$$\vartheta = \frac{dV' - dV}{dV}$$

Návod: všeobecne  $dV' \equiv d^3r' = Jd^3r \equiv JdV$ , kde  $J \equiv \det \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \mathbf{r}}$  je jakobián zámenny. Použiť vzťah (0.7)  $\det(I_n + \kappa A) \doteq 1 + \kappa \text{Tr } A$  ( $\kappa \ll 1$ ).

**11.16** Interpretovať ansatz pre pole posunutí  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}f(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}, t)$ , kde  $\mathbf{A} = \text{konšt}$ ,  $\mathbf{n} = \text{konšt}$ ,  $\mathbf{n}^2 = 1$ ,  $f(\xi, t)$  je ľubovoľná funkcia dvoch premenných ( $\xi = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}$ ).

**11.17** Dosadením ansatzu z (11.16) do pohybovej rovnice pružného kontinua (so zanedbanou objemovou silou)

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u}$$

overiť, že príslušné  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  je riešením, ak

i) buď  $\mathbf{A} \perp \mathbf{n}$  a  $(\partial_t^2 - v_t^2 \Delta)f = 0$  kde  $v_t \equiv \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$

ii) alebo  $\mathbf{A} \parallel \mathbf{n}$  a  $(\partial_t^2 - v_l^2 \Delta)f = 0$  kde  $v_l \equiv \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho}}$

Interpretovať ako možnosť šírenia sa priečných resp. pozdĺžnych vln. Aké sú ich rýchlosti ?

**11.18** Ideálna tekutina so zanedbanou objemovou silou sa opisuje sústavou rovníc

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (\text{Eulerova rovnica})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{rovnica kontinuity})$$

Ukázať, že

i) existuje statické riešenie  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ,  $\rho = \rho_0 = \text{konšt.}$ ,  $p = p_0 = \text{konšt.}$

ii) ansatz

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} + \hat{\mathbf{v}}$$

$$\rho = \rho_0 + \hat{\rho}$$

$$p = p_0 + \hat{p}$$

kde veličiny so strieškou sú *malé* odchýlky od statického riešenia, vedie na *linearizovanú* sústavu

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}$$

iii) potom

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \frac{\partial p}{\partial t} \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \Delta p$$

iv) dodatočný predpoklad *barotropnosti tekutiny* ( $p = p(\rho)$ ) dáva

$$(\partial_t^2 - c_0^2 \Delta) \rho = 0$$

$$(\partial_t^2 - c_0^2 \Delta) p = 0$$

$$(\partial_t^2 - c_0^2 \Delta) \mathbf{v} = c_0^2 \text{rot rot } \mathbf{v}$$

( $v$  malé), kde

$$c_0^2 \equiv \frac{dp}{d\rho}(\rho_0),$$

t.j. rozruch sa šíri v tekutine v tvare *vln* rýchlosťou  $c_0$ .

v) vypočítať  $c_0$  pre *izotermickú* resp. *adiabatickú* závislosť  $p(\rho)$ .

**11.19** Hľadať riešenie (vlnovej) rovnice pre rýchlosť  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  z úlohy 11.18iv) ansatzom  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}f(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}, t)$ , kde  $\mathbf{A} = \text{konšt}$ ,  $\mathbf{n} = \text{konšt}$ ,  $\mathbf{n}^2 = 1$ ,  $f(\xi, t)$  je ľubovoľná funkcia dvoch premenných ( $\xi \equiv \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}$ ), t.j. (pozri 11.16) v tvare *rovinatej, lineárne polarizovanej vlny*. (Vlna sa šíri v smere jednotkového vektora  $\mathbf{n}$ , jej polarizácia má smer vektora  $\mathbf{A}$ .)

Presvedčiť sa, že

i) dosadenie spomínaného ansatzu do vlnovej rovnice

$$(\partial_t^2 - c_0^2 \Delta) \mathbf{v} = c_0^2 \text{rot rot } \mathbf{v}$$

dáva podmienku

$$\mathbf{A}(\partial_t^2 - c_0^2 \Delta) f = c_0^2 (\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{A})) \Delta f$$

ii) táto podmienka sa dá zjednodušiť na

$$[\partial_t^2 f] \mathbf{A} = [c_0^2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}) \Delta f] \mathbf{n}$$

iii) odtiaľ je *jedinou* prípustnou alternatívou prípad  $\mathbf{A} \parallel \mathbf{n}$  plus platnosť vlnovej rovnice pre  $f$

$$(\partial_t^2 - c_0^2 \Delta) f = 0$$

čo opisuje *pozdlžnu* vlnu, ktorá sa šíri rýchlosťou  $c_0$ . V ideálnej tekutine sa tak môžu šíriť (na rozdiel od pružného kontinua, pozri 11.17) *len pozdlžne* vlny

iv) uvažované rýchlostné pole  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  vyhovuje *homogénnej* vlnovej rovnici

$$(\partial_t^2 - c_0^2 \Delta) \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Pravá strana (zdroj) vo vlnovej rovnici v i) sa teda v skutočnosti (v pozdlžnej vlně) *neuplatní* a slúži v nej len ako „filter“, ktorý „prepustí“ len pozdlžne vlny (vylúči priečne vlny).

## REGISTER

- adiabatická závislosť 38  
 afélium 27  
 aktívna sila 7  
 ansatz 20  
 antisymetrická matica 2  
 Archimedov zákon 35  
 atmosférický tlak 36  
  
 barotrópnosť tekutiny 38  
 Bernoulliho rovnica 35  
 bezrozmerný tvar 31  
 bilinéarne zobrazenie 1  
 brachystochrona 17  
  
 centrálné pole 26  
 Coriolisova sila 31  
 cyklická súradnica 9  
 cykloida 6, 17  
 cylindrické súradnice 4  
 časová inverzia 14  
  
 D'Alambertov-Lagrangeov princíp 7  
 Davis-cupová identita 1  
 defektné súradnice 29  
 deformácia 37  
 diferenciálny princíp 16  
 Dirichletova úloha 36  
 disipatívna funkcia 16  
 druhá veta impulzová 5  
  
 ekvivalentné lagranžiány 12  
 elipsa 27  
 eliptický integrál 1.druhu 12  
 Eulerov-Lagrangeov výraz 12,19  
 Eulerova rovnica 35,38  
 Eulerove dynamické rovnice 32  
 Eulerove kinematické rovnice 32  
 Eulerove uhly ( $\varphi, \vartheta, \psi$ ) 32  
 exaktné riešenie 24  
 excentricita 27  
  
 fázový objem 21  
 - priestor 21,22  
 - portrét 23  
 - tok 21  
 funkcionál 16  
 -na derivácia 17  
  
 Hamiltonove kanonické rovnice 21  
 hlavné osi 32  
  
 homogénne poč. podmienky 31  
 homogénne silové pole 6  
 Hookov zákon 35  
 hustota lagranžiánu 18,19  
 hustota objemovej sily 34  
 hydrostatická rovnica 35  
  
 charakteristické frekvencie 28  
 Christoffelove symboly 13  
  
 ideálna tekutina 34  
 inerciálny pozorovateľ 32  
 integrálny princíp 16  
 invariantná 15,28  
 izometrie 37  
 izotermická závislosť 38  
 izotropný oscilátor 29  
 izotropné homogénne kontinuum 35  
  
 jednoducho súvislá oblasť 4  
  
 kalibračne invariantné 14  
 kalibračná transformácia 14  
 kanonická hybnosť 9  
 kartézske súradnice 2  
 Keplerova úloha 26  
 kmity struny 18  
 konfiguračný priestor 7  
 kritické body 14  
 Kroneckerov symbol 1  
 kvalitatívne vlastnosti 24  
  
 lagranžián 9  
 Lagrangeova funkcia 9  
 Lagrangeove rovnice 9  
 Lamého rovnica 35  
 Legendreova transformácia 20  
 Levi-Civitov symbol 1  
 linearizácia sústavy 35  
 Lineárna retiazka 11  
 lineárna teória pružnosti 35  
 Liouvillova veta 21,23  
 Lorentzova sila 9,13  
 loxodróma 6  
  
 módy 28  
 malý parameter 31  
 malé kmity 28  
 mechanická podobnosť 24  
 metrický tenzor 13  
  
 moment zotrvačnosti 32,33  
  
 nabla operátor 2  
 nábojová inverzia 14  
 najkratší čas 17  
 Navierova-Stokesova rovnica 35  
 neinteragujúce LHO 19, 28  
 nestlačiteľná 35  
 nevírové prúdenie 35  
 Newtonovo vedro 36  
 Noetherovej veta 9, 15  
 normálne súradnice 28  
 $n$ -parametrická spojitá grupa 15  
  
 objemová dilatácia 35,38  
  
 parametrický tvar riešenia 17  
 parametrizovať 3  
 perihélium 27  
 periodické riešenie 27  
 Planckova konštanta 20  
 podobné riešenia 24  
 pohybová rovnica kontinua 34  
 Poissonova rovnica 36  
 Poissonove zátvoky 21,22  
 pole posunutí 35  
 pole rýchlostí 34  
 pole zrýchlenia 34  
 poruchový počet 30  
 potenciálové sily 14  
 pozitron 25  
 precesia 33  
 precesia perihélia 26  
 preškáľovanie 24  
 princíp virtuálnych prác 7  
 práca 5  
 pružné kontinuum 35  
 pružné prostredie 34  
 prvá veta impulzová 5  
  
 reakcia väzby 7  
 redukovaná hmotnosť 26  
 regulárna precesia 33  
 reťazovka 17  
 Reynoldsovo číslo 37  
 čiastočná Legendreova transformácia 21  
 riešenie „v kvadrátúrach“ 26  
 rovnica kontinuity 35,38  
 rovnica hydrostatiky 35  
 rovnovážne polohy 7,14



- |                              |                           |                                     |
|------------------------------|---------------------------|-------------------------------------|
| rovnovážny tlak 29           | sumácia 1                 | vektor napätia 35                   |
| rozmerová analýza 24         | superpozícia 28           | virtuálne posunutia 7               |
| rozšírený fázový priestor 21 | symetrický zotrvačník 33  | viskózna tekutina 35                |
| Rungeho-Lenzov vektor 27     | symetrická matica 2       | vlnová rovnica 19                   |
|                              |                           | vlny 38                             |
| sekulárna rovnica 28         | tekutiny 34               | vonkajšia sila 5                    |
| separatrisa 25               | telesové osi 33           |                                     |
| sférický zotrvačník 33       | tenzor deformácie 35,37   | zotrvačná sila 29                   |
| sférické súradnice 4         | tenzor napätia 34,35      | zovšeobecnená hybnosť 9             |
| sily trenia 16               | tenzor zotrvačnosti 32    | zovšeobecnená potenciálna energia 9 |
| spád tlaku 36                | Toricelliho vzorec 36     | zovšeobecnená sila 9                |
| stacionárne prúdenie 35      | translačne invariantná 28 | zovšeobecnené súradnice 7           |
| stopa matice 2               | transponovaná matica 2    | zrýchlenie 30                       |
| stupne voľnosti 7            |                           | zvukové vlny 35                     |
| sumačná konvencia 1          | variačný počet 16         |                                     |

### DOPLŇUJÚCA LITERATÚRA:

1. J.R.**Taylor**: Classical Mechanics, University Science Books, 2005
2. Ch.**Kittel**, V.**Knight**, M.**Ruderman**: Mechanics (Berkeley Physics Course 1) Mc Graw-Hill 1965
3. R.**Feynman**, **Leighton**, **Sands**: Feynmanove prednášky z fyziky 1,4, Alfa, Bratislava, 1986,1989
4. T.W.B.**Kibble**: Classical Mechanics, McGraw Hill, London, 1973
5. J.**Horský**, J.**Novotný**, M.**Štefaník**: Mechanika ve fyzice, Academia 2001
6. M.**Brdička**, A.**Hladík**: Teoretická mechanika, Academia, Praha, 1987
7. M.**Brdička**: Mechanika kontinua, ČSAV, Praha 1959
8. J.W.**Leech**: Classical Mechanics, 1958 (český preklad SNTL, Praha, 1970)
9. D.**Ilkovič**: Fyzika I., SNTL, Bratislava, 1972
10. V.**Obetková**, A.**Mamrillová**, A.**Košinárová**: Teoretická mechanika, Alfa, Bratislava, 1990
11. H.**Goldstein**: Classical Mechanics, Adison-Wesley, 1959
12. L.D.**Landau**, E.M.**Lifshitz**: Mechanics, 3-rd edition, Butterworth-Heinemann Ltd., 1995  
. (v slovenčine čiastočne v Úvode do teoretickej fyziky 1., Alfa, Bratislava 1980)
13. V.I.**Arnold**: Mathematical methods of classical mechanics, Springer-Verlag, 1978
14. J.**Tillich**, L.**Richterek**: Klasická mechanika, <http://optics.upol.cz/~richterek/mechanika/index.html>
15. M.**Fecko**: Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov, Iris, Bratislava 2004, 2008

Pozn.: autor (fecko@fmph.uniba.sk)

1. uvíta upozornenia na akékoľvek chyby, ktoré sa v tomto texte vyskytujú resp. návrhy na jeho vylepšenie,
2. je vďačný za pomoc pri technickej realizácii textu J.Hitzingerovi, E.Masárovi, E.Sallerovi a S.Slizzovi