

UNIVERZITA KOMENSKÉHO, BRATISLAVA
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

TEORETICKÁ MECHANIKA

Úvod	1
1 Matematický aparát teoretickej mechaniky	3
1.1 Einsteinova sumačná konvencia	3
1.1.1 Základné operácie s vektormi podľa Einsteinovej sumačnej konvencie	3
1.1.2 Diferenciálny operátor $\vec{\nabla}$, divergencia, gradient a rotácia	6
1.2 Príklady na vektorový a diferenciálny počet v Einsteinovej sumačnej konvencii	8
1.2.1 Vektorové identity	8
1.2.2 Diferenciálne operátory	9
1.2.3 Gauss-Ostrogradského veta*	11
1.2.4 Kelvin-Stokesova veta*	11
2 Mechanika sústavy viazaných hmotných bodov	12
2.1 d'Alembertov - Lagrangeov princíp	12
2.1.1 Väzby, väzbové rovnice	12
2.1.2 Aktívne sily, reakčné sily väzieb	13
2.1.3 Nezávislé väzby, dimenzia konfiguračného priestoru	13
2.1.4 Princíp virtuálneho posunutia	15
2.1.5 d'Alembertov - Lagrangeov princíp	17
2.2 Lagrangeove rovnice II. druhu	19
2.2.1 Zovšeobecnené súradnice, Lagrangeove rovnice II. druhu	19
2.2.2 Zákony zachovania	28
2.2.3 Zákon zachovania energie	29
2.3 Princíp najmenšieho účinku	30
2.3.1 Matematické okienko do variačného počtu	30
2.3.2 Účinok, princíp extrémálneho účinku	35
2.4 Hamiltonove rovnice	36
2.4.1 Legendreova transformácia	36
2.4.2 Hamiltonove rovnice	38
2.4.3 Poissonove zátvorky	40
3 Ďalšie aplikácie Lagrangeovského a Hamiltonovského prístupu v mechanike	41
3.1 Potenciálna energia a sila*	41
3.1.1 Zovšeobecnená potenciálna energia*	41
3.1.2 Nepotenciálová zložka sily a jej výkon*	47
3.2 Fázový priestor	50
3.2.1 Kvalitatívne riešenie Hamiltonových rovníc*	50
3.2.2 Liouvilleova veta*	63
3.3 Škálovanie	69
3.4 Problém dvoch telies	71
3.5 Malé kmity	79
3.5.1 Príklady z kmitov	83
3.6 Pohyb v neinerciálnej vzťažnej sústave	92
3.6.1 Voľný pád telesa na rotujúcu zem	95
3.7 Tuhé teleso	102
3.7.1 Kinetická energia, rotačná energia a moment zotrvačnosti tuhého telesa	102
3.7.2 Steinerova veta a veta o kolmých osiach*	107
3.7.3 Kinematika voľného sférického zotrvačníka	110
3.7.4 Eulerove rovnice pre rotáciu tuhého telesa, Eulerove uhly	111
3.7.5 Ďalšie príklady*	117

4	Úvod do mechaniky kontinua a hydrodynamiky	123
4.1	Všeobecná pohybová rovnica kontinua	124
4.2	Kvapaliny	127
4.2.1	Tok ideálnej kvapaliny, Eulerova rovnica	127
4.2.2	Rovnica kontinuity	129
4.2.3	Tok ideálnej nestlačiteľnej kvapaliny	129
4.2.4	Hydrostatika	130
4.2.5	Stacionárne tečenie nevírového poľa, Bernoulliho rovnica	131
4.2.6	Fyzikálna interpretácia vírivosti	133
4.2.7	Tok viskózne kvapaliny, Navier-Stokesova rovnica	137
4.2.8	Ďalšie príklady z hydrodynamiky riešiteľné analyticky*	139
4.3	Pružné kontinuum	156
4.3.1	Tenzor deformácie	156
4.3.2	Hookov zákon	157
4.3.3	Hookov zákon pre homogénne a izotrópne kontinuum	159
4.3.4	Objemová dilatácia	160
4.3.5	Homogénne a izotrópne pružné kontinuum, Lamého rovnica	160
4.4	Vlny v pružnom kontinuu a v kvapalinách	161
4.4.1	Vlny v izotropnom pružnom kontinuu	161
4.4.2	Vlny v ideálnej kvapaline	163

Napriek tomu, že je celý tento text chápaný ako okrajový doplnkový materiál, bez ktorého sa predmet teoretická mechanika bez problémov zaobíde, som mal celý čas nutkanie napísať o týchto záležitostiach čo najviac a čo najzaujímavejšie. Mnohokrát už počas písania ba aj po napísaní a pri následnej kontrole som sa prichytil ako uvažujem, čo všetko by sa ešte dalo doplniť, čo všetko tu ešte nie je a koľko zaujímavých príkladov a demonštrácií by sa mohlo v tomto texte ešte nachádzať. Tieto myšlienky treba v istom okamihu rázne stopnúť, ináč sa zo 100 stranového textu za istý čas stane 150 stranový, následne 200 stranový, potom 300 stranový a kto ovláda inžiniersku indukciu, dôjde ku divergencii jeho rozsahu s časom idúcim do nekonečna (ešte že žijeme obmedzený čas). Užitočná fráza, ktorú som si zopakoval, najmä pri kontrole a diskusii tohto textu s inými ľuďmi bola, že predsa mojím cieľom nie je „spasiť svet“. V opačnom prípade by hrozilo, že už i tak dlhý text nadobudne formu zbierky toho, čo považujem za zaujímavé, no s časom (a rozsahom) rastúcim nad všetky medze by sa text nenávratne vzdával od sylabu a myšlienky tohto predmetu. Napriek ráznym pokusom priškrtiť moje vyčíňanie sa stalo, že nie všetky veci tu spísané sa naozaj aj skúšajú, ba dokonca vôbec spomínajú na prednáške. V takom prípade sú príslušné časti označené hviezdíčkou (daná časť je užitočná a vyžaduje sa ako všeobecná vedomosť ku skúške), poprípade dvoma hviezdíčkami (keby tu daná dvojhviezdíčková časť nebola, vôbec nič by sa nestalo). Po tomto podivnom úvode k úvodu by sme mohli prejsť ku serióznemu úvodu, ktorý aj spomenie, o čom predmet vlastne bude.

O čom je vlastne teoretická mechanika? Čitateľ má možno po absolvovaní predmetu mechanika pocit, že vie všetko vypočítať a nič v mechanike mu už problém nerobí. Opak je pravdou, tí pozornejší museli postrehnúť, že celá mechanika je v podstate ťažko univerzálne obsiahnuteľná oblasť problémov, no tam, kde existuje istá algoritmizácia riešenia mechanických problémov, je dobré ju nájsť a naučiť sa ju používať. Týmto rozhodne nechceme naznačovať, že kurzom teoretická mechanika je už vyriešený každý problém a druh problému v mechanike. Dalo by sa povedať, že napriek zložitosti a kráse týchto algoritmov, sme pokryli len istý zlomok toho, čo všetko by sa ešte mohlo dať vyriešiť. Šikovnému čitateľovi nič nebráni zobrať do ruky pero, ďalej stavať na týchto odvodeniach vlastné úvahy a pokúsiť sa riešiť ďalšie mechanické problémy, ktoré samozrejme nemôžu byť všetky zaradené do jediného jednosemestrálneho kurzu.

Od predmetu mechanika sa líši hlavne prístupom k jednotlivým mechanickým problémom. Jednou z hlavných výhod teoretického prístupu k mechanike je samotné ošetrovanie väzieb pohybu. V klasickom prístupe k mechanike je potrebné pre každú väzbu (napr. kyvadlo viazané paličkou ku stene) uvažovať sily, ktoré dané teleso udržiavajú na dráhe, ktorú táto väzba určuje. Toto môže byť vo všeobecnosti veľmi obtiažne. Ukazuje sa, že hľadať tieto sily v skutočnosti nie je potrebné, stačí poznať väzbové rovnice a tzv. aktívne sily, ktoré sú v systéme prítomné.

Prvý prístup, v ktorom nepotrebujeme poznať priamo sily väzieb je d’Alambertov - Lagrangeov princíp, ktorý sa ale ukáže byť nie veľmi vhodný na riešenie praktických problémov mechaniky. Obsahuje totiž viac rovníc, ako je na riešenie nutné. Ako ďalšie sa využije nájdenie takej parametrizácie, ktorá spĺňa väzbové rovnice a hlavným výstupom budú Lagrangeove rovnice.

V ďalšej časti tohto kurzu sa budeme venovať Hamiltonovým rovniciam, ktoré za cenu zdvojnásobenia počtu rovníc znížia ich rád. Hamiltonián sa objavuje hlavne v kvantovej mechanike, avšak je užitočné sa s ním oboznámiť už teraz.

V nasledujúcej kapitole sa venujeme neinerciálnym vzáporným sústavám a problémom týkajúcich sa tuhých telies.

V poslednej časti pokračujeme témou o kontinuu, kde sa pozrieme na kvapaliny a elastické kontinuum. Pri kvapalinách opustíme známe vody Lagrangeovského opisu systému a využijeme Eulerov opis, čo však nakoniec prinesie svoj úžitok.

Pri všetkých týchto témach sa naučíme aktívne používať Einsteinovu sumačnú konvenciu a rôzne pomôcky skracujúce zápis, čo šetrí miesto a zdravý rozum v odvodeniach. Tento aparát je veľmi užitočný aj ku ďalším predmetom (teória relativity, kde sa indexová matematika privedie do úplne inej úrovne, poprípade teória elektromagnetického poľa a iné) a fyzik sa bez neho určite nezaobíde (avšak každý človek má inú hranicu straty zdravého rozumu). Aj keď je možné všetky odvodenia prejsť kompletne bez používania tohto aparátu, je veľmi silno odporúčané si ho rýchlo osvojiť, keďže jeho krása a výhody ďaleko prevyšujú tých pár hodín námahy.

Tento text je založený na prednáškach doc. Mariána Fecka z predmetu Teoretická mechanika. Kvalita týchto prednášok je každoročne vyzdvihovalá v študentskej ankete. Samotný text sa opiera o zrozumiteľný výklad na prednáškach a v niektorých smeroch ho rozširuje o riešenia ďalších zaujímavých problémov mechaniky.

Moja veľká vďaka patrí Františkovi Hermanovi, ktorý znovu prešiel celé skriptá a naozaj detailne sa venoval ich obsahu aj forme, čo ho stálo určite veľa nervov a času. Napriek tomu, koľko energie bolo vložené do opravy samotných skript sa určite ešte veľa chýb nenašlo. Najlepšia spätná väzba však pochádza od samotných čitateľov, preto prosíme priamo Vás: akúkoľvek nezrovnalosť, nejasnosť, nebodaj chybu, nič nehovoriaci obrázok, alebo čokoľvek, čo by sa Vám nezdalo nám pošlite na mail rabatin.b@gmail.com, určite sa budeme periodicky snažiť o nápravu nahromadených chýb¹.

¹Napísať môžete aj keď nás chcete potešiť, skritizovať nás, alebo nám len zapriať pekný deň.

Matematický aparát teoretickej mechaniky

V tomto učebnom texte budeme používať rôzne značky, skratky a konvencie, ktoré majú za cieľ skrátiť, zjednodušiť a zintuitívniť zápisy, ktoré budeme používať.

Je dobré pri odvodení mnohých vektorových rovníc pracovať len s jednou komponentou naraz. Ak sa dajú tieto odvodenia robiť všeobecne pre i -tu komponentu, budeme to tak robiť. Namiesto vektora $\vec{A}$ tak budeme napr. pre jeho i -tu zložku písať A_i . V texte budeme taktiež hojne využívať koncepciu voľných a sčítacích indexov, ktorá má názov *Einsteinova sumačná konvencia*.

1.1 Einsteinova sumačná konvencia

Jednoduchý popis tejto konvencie je, že ak sa vo výraze objaví nejaký index *dvakrát*, automaticky to implikuje *sumáciu*. Takýto index budeme volať *sčítací*. Vychádza otázka, aké sú *hranice* sumácie, čo ak mám vo výraze *jeden* index len *jedenkrát* a čo ak mám vo výraze *jeden* index viac než *dva razy*? Ak máme vo výraze index, ktorý sa tam nachádza len *jedenkrát*, ide o tzv. *voľný* index, teda výsledok výrazu závisí od konkrétnej *voľby* indexu (čo za neho dosadíme). Najlepšie sa na túto otázku odpovedá v príkladoch. Ak sa vo výraze nachádza niektorý index viac než dvakrát, ide o nezmysel, teda o preklep (aspoň čo sa týka Einsteinovej sumačnej konvencie, ako taká nepozná, čo je výraz s tromi rovnakými indexami). Ak sme si vedomí, že tie tri indexy majú opodstatnenie, sumu ručne pripíšeme. Čo sa týka hraníc sumácie, poväčšinou sa sumuje od 1 po 3, ak sa nachádzame v priestore $\mathbb{R}^3$, no hranice závisia od konkrétnej situácie (v prípade poriadneho značenia sa dajú hranice dobre určiť a nebýva s tým problém).

1.1.1 Základné operácie s vektormi podľa Einsteinovej sumačnej konvencie

Symbols δ_{ij} a ε_{ijk}

Výraz δ_{ij} sa nazýva *Kroneckerova delta* (popr. *Kroneckerov delta symbol*). Ako na prvý pohľad vidno, sú v ňom práve *dva rôzne* indexy, každý z nich použitý len *jedenkrát*, teda oba sú *voľné* (teda výsledok *závisí* od ich voľby, čo za ne konkrétne dosadíme). Keďže sú oba voľné, očakáva sa, že doplníme, čo je výsledkom výrazu δ_{ij} pre konkrétne i a j . Definícia znie jednoducho:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (1.1)$$

Táto definícia naozaj určí hodnotu výrazu δ_{ij} pre akékoľvek i a j , ktoré si vymyslíme. Ďalšiu prácu s týmto symbolom uvidíme na praktických príkladoch, no jeden si môžeme dovoliť už teraz:

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3 \quad (1.2)$$

Výraz ε_{ijk} je *Levi-Civita symbol*, je to úplne antisymetrický tenzor. Je zdĺhavé definovať tento výraz pre každé i, j a k ($1 \leq i, j, k \leq 3$), ale platí, že $\varepsilon_{123} = 1$ a navyše pri výmene akýchkoľvek dvoch indexov sa znamienko zmení na opačné:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{123} &= 1 \\ \varepsilon_{ijk} &= -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{ikj}\end{aligned}\tag{1.3}$$

Z tejto definície je jednoduché odvodiť, že ak sa pri Levi-Civitom symbole zhodujú aspoň dva indexy, celý výraz je nulový. Napr.:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{123} &= 1 & \varepsilon_{132} &= -1 \\ \varepsilon_{131} &= 0 & \varepsilon_{321} &= -1 \\ \varepsilon_{33k} &= 0\end{aligned}$$

Davis Cup identita

Platí veľmi dôležitá a často využívaná identita¹:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}\tag{1.4}$$

Báza $\mathbb{R}^3$

V trojrozmernom Euklidovskom priestore existuje *pravouhlá pravotočivá báza*. Táto báza je tvorená troma vektormi jednotkovej dĺžky, ktoré sú navzájom kolmé. Zvyčajne sa označujú $\vec{i}$, $\vec{j}$ a $\vec{k}$ (jednotkový vektor v smere osi x , v smere osi y a v smere osi z). Pre potreby Einsteinovej sumačnej konvencie je dobré, ak miesto vektorov $\vec{i}$, $\vec{j}$ a $\vec{k}$ používame označenia $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ a $\vec{e}_3$. Potom $\vec{e}_1$ bude jednotkový vektor v smere osi x , $\vec{e}_2$ v smere osi y a $\vec{e}_3$ v smere osi z . Zjavná výhoda je, že tieto označenia majú v sebe index, ak teda napíšeme vektor $\vec{e}_i$, myslí sa tým i -ty bázičný vektor (teda vo výraze ostane jediný voľný index, ktorý má takú úlohu, že ak sa chceme už konkrétne spýtať „ktorý?“ tak si za i dosadíme konkrétne číslo).

Vektor a jeho vyjadrenie

Majme vektor $\vec{a}$, ktorý je z $\mathbb{R}^3$. Jeho zložky budú:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\tag{1.5}$$

Ak teda budeme chcieť vyjadriť nejakú zložku vektora $\vec{a}$ no bez bližšej špecifikácie, použijeme označenie a_i . Vyjadrenie tohto vektora pomocou bázy $\vec{e}_i$ (už používame to, čo sme práve zaviedli, teda báza $\vec{e}_i$ znamená pravotočivá pravouhlá báza, z ktorej sa sústredíme na jej i -tu komponentu bez bližšieho určenia, čo je to vlastne i) je suma:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 a_i\vec{e}_i$$

No v zmysle Einsteinovej sumačnej konvencie si okamžite uvedomíme, že sumu pred výrazom môžeme zmazať, čo nám niekedy môže náramne skrátiť výrazy, s ktorými pracujeme:

$$\vec{a} = a_i\vec{e}_i\tag{1.6}$$

Je zrejmé, že index i je len *sčítací* - na ňom výsledok *nezávisí* (tak ako v prípade *určitého* integrálu výsledok nezávisí na tom, či integračnú premennú pomenujeme x , t , alebo u , výsledok bude závisieť len od hraníc a tvaru funkcie). Rovnako dobre by sme mohli napísať: $\vec{a} = a_j\vec{e}_j$, alebo $\vec{a} = a_k\vec{e}_k$, alebo $\vec{a} = a_c\vec{e}_c$, ...

¹Ktorá dostala názov podľa konvencie: každý (voľný index) s každým (voľným indexom).

Skalárny súčin

Ak teraz máme dva vektory, $\vec{a}$ a $\vec{b}$ (a vektor $\vec{b}$ má zložky označené b_i , teda analogicky k prvému prípadu, keď sme označovali vektor $\vec{a}$), ich skalárny súčin je daný výrazom:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$$

teda podľa Einsteinovej sumačnej konvencie píšeme:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i \quad (1.7)$$

Štvorec dĺžky vektora $\vec{a}$ potom vypočítame ako skalárny súčin s tým istým vektorom:

$$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = a_i a_i \quad (1.8)$$

Dobré by bolo zistiť, ako interagujú Kroneckerova delta a výraz, ktorý má v sebe jeden z indexov tohto symbolu. Skúsme, čo dá súčin a_i s δ_{ij} :

$$a_i \delta_{ij} = a_1 \delta_{1j} + a_2 \delta_{2j} + a_3 \delta_{3j}$$

Toto zdanlivo nikam neviedlo, avšak je treba si uvedomiť, že pre konkrétne j len jeden z výrazov na pravej strane je nenulový (pretože Kroneckerova delta je rovná nule, ak sa jej dva indexy nezhodujú a j môže byť rovné len jedinému číslu). Konkrétne ktorý? No predsa ten, ktorý trafí číselne j , teda z troch sčítancov ostane jediný, a to a_j :

$$a_i \delta_{ij} = a_j \quad (1.9)$$

V praxi teraz vidíme, že výsledok niečoho, čo má jeden voľný index j (lebo i je sčítací index) je zas niečo, čo má v sebe jeden voľný index a tým je j . Toto je dobrá intuitívna pomôcka na overenie správnosti výrazov, ktoré sme počítali - ak sa nezhodujú voľné indexy toho, čo počítame s tým, čo sme dostali, niekde je chyba.

Skalárny súčin teraz môžeme napísať ešte trochu inak, pomocou delta symbolu:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i \delta_{ij} b_j \quad (1.10)$$

Keďže symbol delta funguje tak, že „skočí“ na cudzí index a premení ho na dostupný voľný (tak, ako sme videli v príklade $a_i \delta_{ij} = a_j$), tak si môže vybrať, či v tomto prípade delta skočí na a_i , alebo na b_j , výsledok nebude závisieť od tejto voľby (ani nemôže - lebo i a j sú v tomto prípade sčítacie indexy, výsledok od nich nezávisí):

$$a_i \delta_{ij} b_j = a_j b_j = a_i b_i = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Vektorový súčin

Vektorový súčin sa už vyjadruje trochu zložitejšie, budeme na to potrebovať ε_{ijk} (tak ako sme na skalárny súčin potrebovali δ_{ij} , čo však nebolo úplne nutné). Je zvykom z výrazov, ktoré sú *vektory* (popríklad viacrozmerné tenzory), vyjadrovať len i -tu zložku (popríklad ij -tu zložku v prípade matice, ijk -tu zložku, ... v prípade viacerých rozmerov). Potom i -ta zložka vektorového súčinu vektorov $\vec{a}$ a $\vec{b}$ sa počíta nasledovne:

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \quad (1.11)$$

Tento fakt sa dá overiť ručne v prípade každej zložky vektorového súčinu. Ešte predtým si treba uvedomiť, že keď za i dosadíme konkrétne číslo (napr. 1), tak ohľadom j a k sa má zmysel zaoberať len ak $i \neq j \neq k \neq i$, pretože inak ε_{ijk} aj tak dá nulu (viď definícia ε_{ijk} (1.3)).

Môžeme sa presvedčiť o správnosti vyjadrenia vektorového súčinu pomocou Levi-Civitovho symbolu:

$$\begin{aligned}\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_1 &= \varepsilon_{1jk} a_j b_k = \varepsilon_{123} a_2 b_3 + \varepsilon_{132} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_2 &= \varepsilon_{2jk} a_j b_k = \varepsilon_{213} a_1 b_3 + \varepsilon_{231} a_3 b_1 = a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_3 &= \varepsilon_{3jk} a_j b_k = \varepsilon_{312} a_1 b_2 + \varepsilon_{321} a_2 b_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1\end{aligned}$$

Ak by sme z nejakého dôvodu chceli počítať celý vektorový súčin ako vektor, teda nie po zložkách, je to možné - poznáme totiž i -tu zložku vektora, ktorý počítame, takže k nemu stačí pripísať i -ty bázičný vektor:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{e}_i \varepsilon_{ijk} a_j b_k \quad (1.12)$$

1.1.2 Diferenciálny operátor $\vec{\nabla}$, divergencia, gradient a rotácia

Pomocou indexovej notácie je v *kartézskej* súradnicovej sústave definovaný operátor ∇_i (nabla) ako výraz $\frac{\partial}{\partial x_i}$, čo sa v nasledujúcich prípadoch ukáže byť opodstatnené.

V nasledujúcich častiach považujeme výraz x_i za i -tu zložku polohového vektora $\vec{r}$ v kartézskych súradniciach, teda $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$.

Divergencia

Divergencia je operátor, ktorý sa štandardne aplikuje na vektorovú funkciu (vektor) a jej symbolický zápis je skalárny súčin:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \quad (1.13)$$

Tu vidno, že ak sme výraz $\frac{\partial}{\partial x_i}$ označili ako ∇_i , potom skalárny súčin $\vec{\nabla}$ s vektorovou funkciou dá presne ten výsledok, aký od divergencie očakávame:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \nabla_i F_i = \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \quad (1.14)$$

Gradient

Gradient sa púšťa na skalárnu funkciu (ale sú prípady, keď gradient aplikujeme na vektor), výsledkom je vektor (v prípade, ak ho aplikujeme na vektor, výsledkom bude tenzor - matica) a jej symbolický zápis je nasledovný:

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) \quad (1.15)$$

V tomto prípade prísne sledujme indexovú notáciu, k čomu nás dovedie:

$$\left(\vec{\nabla} f \right)_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Rozpísané vektorovo:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x_i} \vec{e}_i = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) \quad (1.16)$$

čo je to, čo sme od gradientu očakávali.

Gradient pustený na vektor by sme počítali nasledovne:

$$\left(\vec{\nabla} \vec{F}\right)_{ij} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad (1.17)$$

Jeho výsledkom je matica:

$$\vec{\nabla} \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2} & \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

Nič nám však nebráni definovať gradient vektora opačne:

$$\left(\vec{\nabla} \vec{F}\right)_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \quad (1.19)$$

Jeho výsledkom je *iná* matica (*transponovaná* k tej pôvodnej):

$$\vec{\nabla} \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} & \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

Ak v priebehu nejakých odvodení narazíme na gradient vektora, bude vždy zrejmé, o ktorý prípad sa jedná (popríklad dostaneme oba vyššie prípady v súčte, čo je ale necitlivé na zámenu indexov i a j , vďaka symetrii).

Rotácia

Rotácia je operátor, ktorý sa aplikuje na vektor a počíta sa ako vektorový súčin:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} \quad (1.21)$$

Potom i -ta zložka rotácie $\vec{F}$ sa počíta pomocou Levi-Civitovho symbolu ε_{ijk} :

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right)_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial F_k}{\partial x_j} \quad (1.22)$$

Výsledkom je vektor:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial F_k}{\partial x_j} \vec{e}_i = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right) \vec{e}_1 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right) \vec{e}_2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) \vec{e}_3 \quad (1.23)$$

1.2 Príklady na vektorový a diferenciálny počet v Einsteinovej sumačnej konvencii

1.2.1 Vektorové identity

Začneme dôležitými (a menej dôležitými) identitami, ktoré súvisia so skalárnym a vektorovým súčinom. Všimneme si, že zakaždým, keď chceme napísať skalárny alebo vektorový súčin, skontrolujeme, či už vo výraze nemáme indexy, aké sme zamýšľali použiť - ak áno, premeníme sčítacie indexy za nové, aby sme predišli viac než dvom rovnakým indexom vo výraze.

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b})_i &= \underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{-\varepsilon_{ikj}} a_j b_k = -\varepsilon_{ikj} b_k a_j = -(\vec{b} \times \vec{a})_i \implies \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \\ \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= a_i \varepsilon_{ijk} b_j c_k = c_k \varepsilon_{kij} a_i b_j = b_j \varepsilon_{jki} c_k a_i \implies \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) \\ [\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})]_i &= \varepsilon_{ijk} a_j (\vec{b} \times \vec{c})_k = \varepsilon_{ijk} a_j \varepsilon_{klm} b_l c_m = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} a_j b_l c_m \stackrel{(DC)}{=} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) a_j b_l c_m = \\ &= a_j c_j b_i - a_j b_j c_i = [(\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}]_i \implies \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} \end{aligned}$$

Tu sa pozastavíme nad tým, že chvíľu predtým, ako sme chceli napísať $\varepsilon_{ijk} a_j b_k \varepsilon_{ijk} c_j d_k$ sa zháčime a všimneme si, že takto by sme mali niektoré indexy až štyrikrát, preto výraz zmeníme na $\varepsilon_{ijk} a_j b_k \varepsilon_{imn} c_m d_n$. Samostatne sú oba pravdivé ($\varepsilon_{ijk} a_j b_k$ je i -ta zložka $\vec{a} \times \vec{b}$, aj $\varepsilon_{ijk} c_j d_k$ je i -ta zložka $\vec{c} \times \vec{d}$), no keď ich chceme zlúčiť spolu, je nutné indexy premenovať:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= \underbrace{(\vec{a} \times \vec{b})_i}_{\varepsilon_{ijk} a_j b_k} \underbrace{(\vec{c} \times \vec{d})_i}_{\varepsilon_{imn} c_m d_n} = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \varepsilon_{imn} c_m d_n = \\ &= \varepsilon_{jki} \varepsilon_{mni} a_j b_k c_m d_n \stackrel{(DC)}{=} (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}) a_j b_k c_m d_n = a_j c_j b_k d_k - a_j d_j b_k c_k \\ &\implies (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) (\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d}) (\vec{b} \cdot \vec{c}) \end{aligned}$$

Predtým, než sa pustíme do kapitoly o diferenciálnych identitách, zavedieme označenie, ktoré mnohokrát ušetrí miesto a rovnice sa budú dať písať do jedného riadku - miesto výrazu derivácie podľa i -tej súradnice $\frac{\partial}{\partial x_i}$ budeme používať výraz ∂_i .

1.2.2 Diferenciálne operátory

Sem patria všetky lahôdky typu divergencia, gradient a rotácia v rôznych kombináciach násobného aplikovania, kde možných spôsobov je nekonečne veľa.

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot (f \vec{F}) &= \partial_i (f F_i) = F_i \partial_i f + f \partial_i F_i \implies \vec{\nabla} \cdot (f \vec{F}) = \vec{F} \cdot (\vec{\nabla} f) + f (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) \\
 \vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) &= \partial_i (\varepsilon_{ijk} F_j G_k) = \varepsilon_{ijk} G_k \partial_i F_j + \varepsilon_{ijk} F_j \partial_i G_k = G_k \varepsilon_{kij} \partial_i F_j - F_j \varepsilon_{jik} \partial_i G_k \\
 &\implies \vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{G}) \\
 [\vec{\nabla} (f g)]_i &= \partial_i (f g) = g \partial_i f + f \partial_i g \implies \vec{\nabla} (f g) = g \vec{\nabla} f + f \vec{\nabla} g \\
 [\vec{\nabla} (\vec{F} \cdot \vec{G})]_i &= \partial_i (F_j G_j) = G_j \partial_i F_j + F_j \partial_i G_j \\
 \vec{\nabla} (\vec{F} \cdot \vec{G}) &= (\vec{\nabla} \vec{F}) \cdot \vec{G} + (\vec{\nabla} \vec{G}) \cdot \vec{F}
 \end{aligned}$$

Skalárny súčin „ $\cdot$ ” je teraz chápaný ako súčin matíc:

$$(\vec{\nabla} \vec{F}) \cdot \vec{G} + (\vec{\nabla} \vec{G}) \cdot \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_1 F_1 & \partial_1 F_2 & \partial_1 F_3 \\ \partial_2 F_1 & \partial_2 F_2 & \partial_2 F_3 \\ \partial_3 F_1 & \partial_3 F_2 & \partial_3 F_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial_1 G_1 & \partial_1 G_2 & \partial_1 G_3 \\ \partial_2 G_1 & \partial_2 G_2 & \partial_2 G_3 \\ \partial_3 G_1 & \partial_3 G_2 & \partial_3 G_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

Gradient skalárneho súčinu má ešte iné, krajšie vyjadrenie. Jeho dôkaz pozostáva v rozpísaní oboch strán a v manuálnom overení pravdivosti tvrdenia (bez dôkazu - odvodenie by obsahovalo isté umelé kroky):

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} (\vec{F} \cdot \vec{G}) &= (\vec{F} \cdot \vec{\nabla}) \vec{G} + (\vec{G} \cdot \vec{\nabla}) \vec{F} + \vec{F} \times (\vec{\nabla} \times \vec{G}) + \vec{G} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \\
 [\vec{\nabla} \times (f \vec{F})]_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j (f F_k) = \varepsilon_{ijk} F_k \partial_j f + \varepsilon_{ijk} f \partial_j F_k = \varepsilon_{ijk} f \partial_j F_k - \varepsilon_{ikj} F_k \partial_j f \\
 &\implies \vec{\nabla} \times (f \vec{F}) = f \vec{\nabla} \times \vec{F} - \vec{F} \times \vec{\nabla} f \\
 [\vec{\nabla} \times (\vec{F} \times \vec{G})]_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j (\vec{F} \times \vec{G})_k = \varepsilon_{ijk} \partial_j (\varepsilon_{kmn} F_m G_n) = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnk} (G_n \partial_j F_m + F_m \partial_j G_n) = \\
 &= (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) (G_n \partial_j F_m + F_m \partial_j G_n) = \underbrace{G_j \partial_j F_i}_{[\vec{G} \cdot \vec{\nabla}]_i} - \underbrace{G_i \partial_j F_j}_{[(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}) \vec{G}]_i} + \underbrace{F_i \partial_j G_j}_{[\vec{F} \cdot \vec{\nabla}]_i} - \underbrace{F_j \partial_j G_i}_{[(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}) \vec{F}]_i} \\
 &\implies \vec{\nabla} \times (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{F} (\vec{\nabla} \cdot \vec{G}) - \vec{G} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) + (\vec{G} \cdot \vec{\nabla}) \vec{F} - (\vec{F} \cdot \vec{\nabla}) \vec{G}
 \end{aligned}$$

Výraz $(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}) \vec{F}$ chápeme nasledovne:

$$(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}) \vec{F} = G_j \partial_j F_i \vec{e}_i = (G_1 \partial_1 + G_2 \partial_2 + G_3 \partial_3) \vec{F} = \begin{pmatrix} G_1 \partial_1 F_1 + G_2 \partial_2 F_1 + G_3 \partial_3 F_1 \\ G_1 \partial_1 F_2 + G_2 \partial_2 F_2 + G_3 \partial_3 F_2 \\ G_1 \partial_1 F_3 + G_2 \partial_2 F_3 + G_3 \partial_3 F_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) &= \partial_i (\varepsilon_{ijk} \partial_j F_k) = \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j F_k = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j F_k + \underbrace{\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j F_k}_{\varepsilon_{jik} \partial_j \partial_i F_k} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j F_k + \varepsilon_{jik} \overbrace{\partial_j \partial_i F_k}^{\partial_i \partial_j F_k} \right) = \frac{1}{2} \partial_i \partial_j F_k (\varepsilon_{ijk} - \varepsilon_{ijk}) = 0 \\
 \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) &= 0 \\
 [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f)]_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j (\vec{\nabla} f)_k = \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k f \stackrel{\text{analogicky}}{=} \dots = 0 \\
 \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) &= 0 \\
 \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) &= \partial_i (\partial_i f) = \partial_i \partial_i f \equiv \vec{\nabla}^2 f = \Delta f
 \end{aligned}$$

Operátor Δ voláme *Laplaceov operátor*, púšťa sa na *skalárnu* funkciu alebo na *vektorovú* funkciu *po zložkách* a v kartézskych súradniciach vyzerá nasledovne:

$$\begin{aligned}
 \Delta f = \vec{\nabla}^2 f &= (\partial_1, \partial_2, \partial_3) \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} f = (\partial_1 \partial_1 + \partial_2 \partial_2 + \partial_3 \partial_3) f = \partial_1 \partial_1 f + \partial_2 \partial_2 f + \partial_3 \partial_3 f \\
 [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F})]_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j (\vec{\nabla} \times \vec{F})_k = \varepsilon_{ijk} \partial_j (\varepsilon_{kmn} \partial_m F_n) = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnk} \partial_j \partial_m F_n = \\
 &= (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \partial_j \partial_m F_n = \partial_i \partial_j F_j - \partial_j \partial_j F_i \\
 \implies \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) &= \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \Delta \vec{F} \\
 \Delta (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) &= \partial_i \partial_i \partial_j F_j = \partial_j \partial_i \partial_i F_j \implies \Delta (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot (\Delta \vec{F}) \\
 \vec{\nabla} \cdot (f \vec{\nabla} g) &= \partial_i (f \partial_i g) = (\partial_i g) (\partial_i f) + f \partial_i \partial_i g \implies \vec{\nabla} \cdot (f \vec{\nabla} g) = f \Delta g + \vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} g \\
 f \Delta g - g \Delta f &= f \partial_i \partial_i g - g \partial_i \partial_i f = f \partial_i (\partial_i g) - g \partial_i (\partial_i f) = \\
 &= \partial_i (f \partial_i g - g \partial_i f) - (\partial_i) (g \partial_i f) + (\partial_i) (f \partial_i g) = \partial_i (f \partial_i g - g \partial_i f) \\
 \implies f \Delta g - g \Delta f &= \vec{\nabla} \cdot (f \vec{\nabla} g - g \vec{\nabla} f) \\
 \Delta (f g) &= \partial_i \partial_i (f g) = \partial_i [\partial_i (f g)] = \partial_i (g \partial_i f + f \partial_i g) = \\
 &= (\partial_i g) (\partial_i f) + g \partial_i \partial_i f + (\partial_i f) (\partial_i g) + f \partial_i \partial_i g \\
 \implies \Delta (f g) &= f \Delta g + 2 \vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} g + g \Delta f
 \end{aligned}$$

Táto časť sa snažila ukázať stručnosť narábania s Einsteinovou sumačnou konvenciou. Kto by neveril, môže si skúsiť dané výrazy rozpisovať pre jednotlivé zložky a používať sumy. Existuje mnoho ďalších identít, na niektoré narazíme pri odvodeniach v mechanike viazaných hmotných bodov, tuhom telese, mechanike kontinua a hydrodynamike.

V neskorších kapitolách budeme hojne využívať dve vety prerábajúce oblasť integrovania: Gaussovu a Stokesovu (popr. Greenovu) vetu.

1.2.3 Gauss-Ostrogradského veta*

Nech $V \subset \mathbb{R}^3$ je uzavretá a ohraničená množina, ktorá má po častiach hladkú hranicu $\partial V \equiv S$ a vektorové pole $\vec{F}$ je spojitě diferencovateľné. Potom platí veta²:

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (1.24)$$

Najprv sa pozrime na ľavú stranu; podintegrálna funkcia je skalárna a je výsledkom divergencie vektorového poľa, je teda možné ju napísať ako $\partial_i F_i$. Pravá strana je už plošný integrál II. druhu, teda násobíme vektorové pole v danom bode s diferenciálom plochy, čo však možno napísať ako:

$$\vec{F} \cdot d\vec{S} = \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

kde $\vec{n}$ je normálový vektor plochy hranice v danom mieste. Celú Gaussovú vetu môžeme prepísať ako:

$$\iiint_V \partial_i F_i dV = \oiint_S F_i dS_i \quad (1.25)$$

V prípade poľa vyššieho rádu (tenzorového), alebo v prípade viacerých indexov zmotaných na ľavej strane (alebo pravej strane, ak začíname od plošného integrálu) je recept nasledovný: pozri sa, na ktorý index skáče derivácia (napr. i -ty), keď ho nájdeš, zmaž deriváciu a diferenciál dV a pripíš príslušnú zložku diferenciálu plochy dS_i (a integrál zmen z objemového na plošný).

1.2.4 Kelvin-Stokesova veta*

Nech $C (= \partial D)$ je kladne orientovaná, po častiach hladká, jednoduchá uzavretá krivka a nech D je plocha ohraničená touto krivkou a vektorové pole $\vec{F}$ je spojitě diferencovateľné. Potom platí veta³:

$$\iint_D (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (1.26)$$

Podobným postupom možno danú vetu napísať v indexoch:

$$\iint_D \varepsilon_{ijk} \partial_j F_k dS_i = \oint_C F_i dl_i \quad (1.27)$$

²Divergence theorem

³Curl theorem

2

Mechanika sústavy viazaných hmotných bodov

Pripomíname, že vo všetkých výrazoch odteraz budeme používať Einsteinovu sumačnú konvenciu - pre každý index, ktorý uvidíme vo výraze dvakrát (v súčine, napríklad $a_i b_i$) si pred ním predstavíme sumu (čiže z $a_i b_i$ by vzniklo: $\sum_{i=1}^N a_i b_i = \vec{a} \cdot \vec{b}$). V prvých výrazoch tejto kapitoly pripomenieme sumačnú konvenciu pridaním sumy do zátvorky, neskôr je treba túto konvenciu spoznať automaticky.

2.1 d'Alembertov - Lagrangeov princíp

2.1.1 Väzby, väzbové rovnice

Každá väzba, ktorú v sebe system má, je obyčajne určená rovnicou:

$$\Phi_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \dots, \dot{\vec{r}}_n, t) = 0 \quad (2.1)$$

kde $\Phi_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \dots, \dot{\vec{r}}_n, t)$ je vo všeobecnosti funkcia času, polôh a rýchlostí hmotných bodov v sústave, ktorú skúmame. Množinu bodov, ktoré spĺňajú väzbové rovnice budeme nazývať *konfiguračný priestor* M .

Príklad: Majme v rovine xz ($y = 0$) jeden hmotný bod hmotnosti m a polohou $\vec{r}$, ktorý je však viazaný na kružnicu s polomerom R so stredom v bode $[0, 0, 0]$. Vieme, že rovnica takejto kružnice je:

$$x^2 + z^2 = R^2$$

Druhé obmedzenie, ktoré máme je fakt, že pohyb sa koná v rovine xz , teda:

$$y = 0$$

Vieme, že väzbové rovnice sú tvaru $\Phi_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_n, t) = 0$, teda naše väzbové rovnice budú vyzeráť nasledovne:

$$\Phi_1(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = x^2 + z^2 - R^2 (= 0)$$

$$\Phi_2(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = y (= 0)$$

Systém, ktorý sme práve popisovali má aj meno, označuje sa ako *rovinné matematické kyvadlo*. Vieme, že na hmotný bod $\vec{r}$ určite pôsobí sila $\vec{F} = m\vec{g} = m\ddot{\vec{r}}$. Avšak takýto opis by viedol ku pohybu po parabole, keďže v tejto rovnici nie je zohľadnená práve sila, ktorá udržiava hmotný bod na danej kružnici (vieme, že by to v skutočnosti bola dostredivá sila).

2.1.2 Aktívne sily, reakčné sily väzieb

Zavedme teraz vo všeobecnosti dve zložky sily, ktoré pôsobia na body v systéme. Jedna zložka budú *aktívne* sily $\vec{F}^{(a)}$, teda také sily, ktoré ostanú prítomné aj po tom, čo by sme si odmysleli väzby (teda pri rovinnom matematickom kyvadle je aktívna sila jedine gravitačná, pretože táto sila ostane, aj keď bod nebude viazaný na kružnicu). Ďalej zavedieme *reakciu väzieb* $\vec{F}^{(r)}$, čo sú práve sily, ktoré udržujú hmotné body na trajektóriách určených väzbovými rovnicami. Platí:

$$\vec{F} = \vec{F}^{(a)} + \vec{F}^{(r)} \quad (2.2)$$

Samotné väzbové rovnice by mali byť nezávislé. V praxi to znamená, že žiadnu skupinu väzieb nemôžeme vylúčiť bez toho, aby sme nestratili informáciu o konfiguračnom priestore (v príklade matematického kyvadla nemôžeme vylúčiť druhú rovnicu $y = 0$, pretože takýto pohyb by sa konal na celom valci a nielen na kružnici). Zároveň pripúšťame len „slušné“ väzby (napríklad väzba $x^2 + y^2 + z^2 (= 0)$ nie je slušná, pretože aj keď je len jedna, jej riešením je jediný bod $x = y = z = 0$). Presné definovanie tejto záležitosti by v tomto momente ničomu neprospelo.

2.1.3 Nezávislé väzby, dimenzia konfiguračného priestoru

Za týchto predpokladov platí, že dimenziu konfiguračného priestoru vypočítame ako rozdiel dimenzie priestoru, v ktorom uvažujeme pohyb hmotných bodov (pre N hmotných bodov potrebujeme $3N$ premenných na ich opis, teda dimenzia tohto priestoru je $3N$) a počtu väzbových rovníc. Ak máme N hmotných bodov a počet nezávislých, slušných väzbových rovníc je k , potom dimenziu konfiguračného priestoru n vypočítame ako:

$$n = 3N - k \quad (2.3)$$

Odteraz sa budeme zaoberať len väzbami, ktoré sú *holonómne*, teda také, ktoré závisia len od $\vec{r}$ a nie od $\dot{\vec{r}}$, popr. vyšších derivácií, alebo *explicitne* od času.

Uvažujme teraz všeobecný prípad, kedy máme N hmotných bodov $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots$ až $\vec{r}_N$. Ich hmotnosti sú $m_1, m_2, \dots$ až m_N . Pre tieto hmotné body platí:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}_1 \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= \vec{F}_2 \\ &\vdots \\ m_N \ddot{\vec{r}}_N &= \vec{F}_N \end{aligned}$$

Polohy $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ chápeme ako N bodov v $3D$:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= (x_1, y_1, z_1) \\ \vec{r}_2 &= (x_2, y_2, z_2) \\ &\vdots \\ \vec{r}_N &= (x_N, y_N, z_N) \end{aligned}$$

Definujme *jedinú* polohu $\bar{r}$:

$$\bar{r} = (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_N, y_N, z_N) \quad (2.4)$$

Túto polohu $\bar{r}$ chápeme ako *jeden* hmotný bod v $3ND$. Teraz jednoducho definujeme konfiguračný priestor M :

$$\begin{aligned} M &= \{\bar{r}; \forall i: 1 \leq i \leq k: \Phi_i(\bar{r}) = 0\} \\ M &\subseteq \mathbb{R}^{3N-k} \\ M &\subset \mathbb{R}^{3N} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Analogicky ku $\bar{r}$ definujeme rýchlosť $\bar{v}$:

$$\bar{v} = (\dot{\bar{r}}_1, \dot{\bar{r}}_2, \dots, \dot{\bar{r}}_N) = (\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2, \dots, \dot{x}_N, \dot{y}_N, \dot{z}_N) \quad (2.6)$$

Hybnosť $\bar{p}$ bude:

$$\bar{p} = (\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N) = (m_1 \dot{\bar{r}}_1, \dots, m_N \dot{\bar{r}}_N) = (m_1 \dot{x}_1, m_1 \dot{y}_1, m_1 \dot{z}_1, m_2 \dot{x}_2, \dots, m_N \dot{y}_N, m_N \dot{z}_N) \quad (2.7)$$

Sila $\bar{F}$:

$$\bar{F} = (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N) \quad (2.8)$$

V tejto pruhovanej konvencii platí zákon sily:

$$\bar{F} = \dot{\bar{p}} \quad (2.9)$$

Pre nezávislé väzby Φ_1, Φ_2 , až Φ_k platí, že hodnosť Jacobiho matice J_{ij} ($1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq N$):

$$J_{ij} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}$$

je maximálna možná, teda $h(J) = \min(r(J), s(J)) = \min(k, 3N)$ a to v každom bode $\bar{r}$, ktorý spĺňa tieto väzbové rovnice. Pripomíname, ako vyzerá Jacobiho matica J :

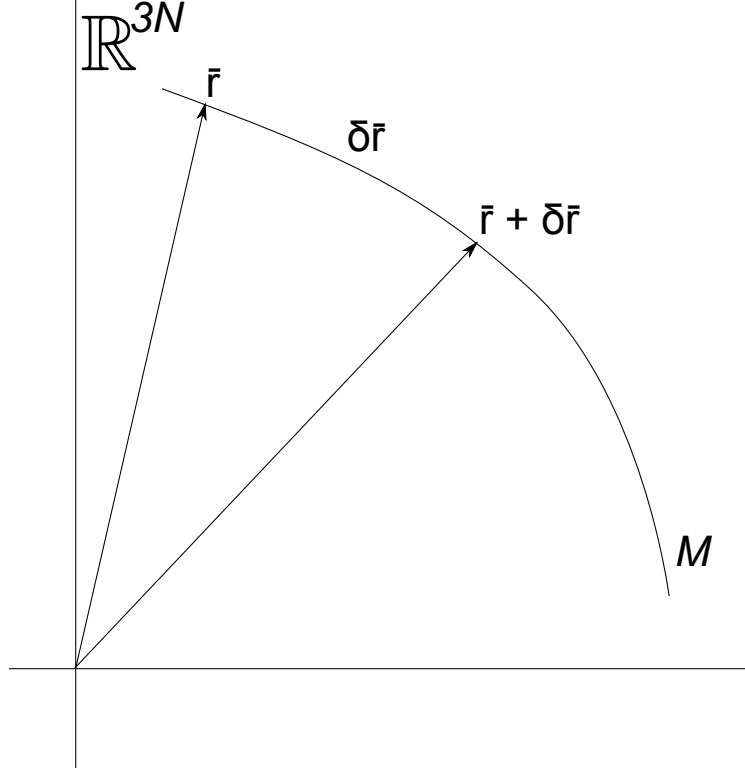
$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_N} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_1} & \frac{\partial \Phi_k}{\partial z_1} & \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_k}{\partial z_N} \end{pmatrix}$$

2.1.4 Princíp virtuálneho posunutia

Predstavme si teraz, že sa nachádzame v takom bode $\bar{r}$, ktorý naozaj spĺňa väzbové rovnice, teda patrí do konfiguračného priestoru M . Posuňme sa do bodu $\bar{r} + \delta\bar{r}$, ktorý taktiež spĺňa väzbové rovnice, teda platí:

$$\forall i : 1 \leq i \leq k : \Phi_i(\bar{r}) = \Phi_i(\bar{r} + \delta\bar{r}) = 0 \quad (2.10)$$

Orientačný obrázok k situácii:



Rozviňme výraz $\Phi_i(\bar{r} + \delta\bar{r})$ do Taylorovho radu v okolí bodu $\bar{r}$ (keďže hodnotu $\delta\bar{r}$ pokladáme za *malú*):

$$\Phi_i(\bar{r} + \delta\bar{r}) = \Phi_i(\bar{r}) + \left(\sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \bar{r}_j} \delta \bar{r}_j \right) + \mathcal{O}(|\delta\bar{r}|^2)$$

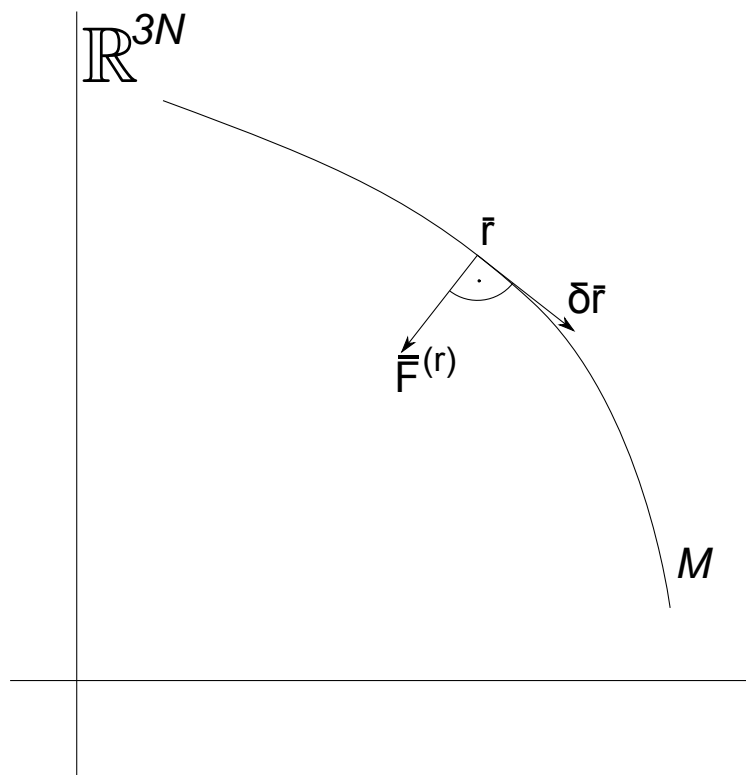
kde $\mathcal{O}(|\delta\bar{r}|^2)$ je zvyšok radu, ktorý sa vzhľadom na malosť $\delta\bar{r}$ mení len málo (a teda je možné ho zanedbať). Ak operátor $\frac{\partial}{\partial(\bar{r})_i}$ označíme ako $\bar{\nabla}_i$ ($1 \leq i \leq 3N$), potom druhý výraz v Taylorovom rozvoji bude $\left(\sum_{j=1}^{3N} (\bar{\nabla} \Phi_i)_j \delta \bar{r}_j \right)$, teda skalárny súčin gradientu i -tej väzbovej funkcie s virtuálnym posunutím v $3ND$ (zároveň už zanedbáme zvyšok radu, ktorý sa nemení do prvého rádu zmeny malej hodnoty $\delta\bar{r}$):

$$\Phi_i(\bar{r} + \delta\bar{r}) = \Phi_i(\bar{r}) + \bar{\nabla} \Phi_i \cdot \delta\bar{r}$$

Za predpokladu, že sa naozaj uspokojíme s dvoma členmi Taylorovho rozvoja, potom člen $\bar{\nabla} \Phi_i \cdot \delta\bar{r}$ musí byť rovný nule, pretože oba body ($\bar{r}$ aj $\bar{r} + \delta\bar{r}$) spĺňajú väzbové rovnice, teda použitím (2.10) musí platiť:

$$\Phi_i(\bar{r}) = \Phi_i(\bar{r} + \delta\bar{r}) = 0 \implies \boxed{\bar{\nabla} \Phi_i \cdot \delta\bar{r} = 0} \quad (2.11)$$

Tento výsledok bude ešte dôležitý. Rozoberme si teraz samotnú reakčnú silu $\bar{F}^{(r)}$. Na to, aby udržala bod na konfiguračnom priestore M , musí platiť, že táto sila bude kolmá na dotyčnicu ku konfiguračnému priestoru. V tomto prípade viac napovie obrázok:



Platí teda, že skalárny súčin virtuálneho posunutia s touto reakčnou silou je nulový:

$$\bar{F}^{(r)} \cdot \delta \bar{r} = 0, \quad (2.12)$$

teda že skalárny súčin virtuálneho posunutia s celkovou silou bude rovný skalárnemu súčinu virtuálneho posunutia s aktívnou silou, čo znamená, že prácu koná len aktívna zložka sily, ktorá na bod pôsobí:

$$\bar{F} \cdot \delta \bar{r} = \bar{F}^{(a)} \cdot \delta \bar{r} \quad (2.13)$$

Z (2.9) a (2.13) vyplýva:

$$\dot{\bar{p}} \cdot \delta \bar{r} = \bar{F} \cdot \delta \bar{r} = \bar{F}^{(a)} \cdot \delta \bar{r} \quad (2.14)$$

Čo možno prepísať ako:

$$\left(\dot{\bar{p}} - \bar{F}^{(a)} \right) \cdot \delta \bar{r} = 0 \quad (2.15)$$

2.1.5 d'Alembertov - Lagrangeov princíp

Z práve odvodených výsledkov a z väzbových rovníc dostávame d'Alembertov - Lagrangeov princíp:

$$\begin{aligned} \left(\dot{\vec{p}} - \vec{F}^{(a)} \right) \cdot \delta \vec{r} &= 0 \\ \vec{\nabla} \Phi_i(\vec{r}) \cdot \delta \vec{r} &= 0 \\ \Phi_i(\vec{r}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Vzhľadom na to, že index i beží od 1 do k , d'Alembertov - Lagrangeov princíp zahŕňa $2k + 1$ rovníc. Toto sa ukazuje byť veľmi neefektívne, ak narastá počet bodov zároveň s počtom väzbových rovníc. Príkladom by bol opis pohybu tuhého telesa, kde na každý nový bod, ktorý v telese uvažujeme, musíme uvažovať aj väzbovú rovnicu ktorá povie, že v prípade rotácie tento bod rotuje okolo *jedinej* osi spolu so všetkými ostatnými bodmi a ďalšiu väzbovú rovnicu, ktorá udržiava vzdialenosti medzi každými dvoma bodmi. Je jasné, že d'Alembertov - Lagrangeov princíp je v tomto prípade (a v mnohých iných) len ťažko aplikovateľný - vzniká veľké množstvo ďalších rovníc, ktoré v konečnom dôsledku dávajú opis niečoho, čo vôbec nepotrebujeme (virtuálne posunutia). Na nasledujúcom jednoduchom príklade demonštrujeme neefektívnosť tohto princípu.

Príklad: rovinné matematické kyvadlo. V systéme je jediný hmotný bod $\vec{r}$ s hmotnosťou m viazaný na kružnicu so stredom v bode $[0, 0, 0]$ a polomerom l (dĺžka kyvadla), ktorá leží v rovine xz , pričom $y = 0$. Jediná aktívna sila je gravitačná v smere $-z$. Toto sú všetky potrebné informácie na výpočet nasledujúcich výrazov potrebných na zostavenie sústavy rovníc:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= m(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \implies \dot{\vec{p}} = m(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) \\ \vec{F}^{(a)} &= (0, 0, -mg) \\ \Phi_1 &= x^2 + z^2 - l^2 \\ \Phi_2 &= y \\ \vec{\nabla} \Phi_1 &= (2x, 0, 2z) \\ \vec{\nabla} \Phi_2 &= (0, 1, 0) \\ \delta \vec{r} &= (\delta x, \delta y, \delta z)^T \end{aligned}$$

Samotná sústava rovníc:

$$\begin{aligned} (2.16 \text{ I.}) &\implies \left\{ \begin{pmatrix} \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} + g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} = 0 \quad (a) \right. \\ (2.16 \text{ II.}) &\implies \left\{ \begin{aligned} \begin{pmatrix} x & 0 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} &= 0 \quad (b) \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} &= 0 \quad (c) \end{aligned} \right. \\ (2.16 \text{ III.}) &\implies \begin{cases} x^2 + z^2 - l^2 = 0 & (d) \\ y = 0 & (e) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Z (2.17 c) vyplýva, že $\delta y = 0$ (pohyb sa koná len v rovine xz , teda sústava nepripúšťa virtuálne posunutie v smere y). Z (2.17 b) vyplýva $x\delta x + z\delta z = 0$. Ak $\delta y = 0$, potom z (2.17 a) vyplýva $\ddot{x}\delta x + (\ddot{z} + g)\delta z = 0$. Maticový zápis oboch výsledkov naraz je teraz užitočnejší:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} & \ddot{z} + g \\ x & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vieme, že táto rovnosť má byť splnená vždy, pre každé δx a δz , ktoré vyhovujú virtuálnym posunutiam v rámci konfiguračného priestoru M . Potom však musí platiť, že determinant tejto sústavy je rovný nule:

$$\begin{vmatrix} \ddot{x} & \ddot{z} + g \\ x & z \end{vmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

Spolu s prvou väzbovou rovnicou dostávame takúto rovnice:

$$\begin{aligned} \ddot{x}z - x(\ddot{z} + g) &= 0 \\ x^2 + z^2 &= l^2 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Jednou z možností, ako sa dopracovať k nejakému výsledku je vhodne zvoliť súradnicovú sústavu. V tomto prípade zvolíme polárnu sústavu (r, φ) takú, že pre $\varphi = 0$ dostaneme voľne visiace kyvadlo. Keďže kyvadlo má konštantnú dĺžku, tak $r = l$ a môžeme písať:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \sin(\varphi) \\ 0 \\ -l \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Vidíme, že pri takto zvolených súradniciach sú automaticky splnené obe väzbové rovnice. Vypočítajme $\ddot{x}$ a $\ddot{z}$:

$$\begin{aligned} x &= l \sin(\varphi) \\ \dot{x} &= l \cos(\varphi) \dot{\varphi} \\ \ddot{x} &= -l \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + l \cos(\varphi) \ddot{\varphi} \\ z &= -l \cos(\varphi) \\ \dot{z} &= l \sin(\varphi) \dot{\varphi} \\ \ddot{z} &= l \cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 + l \sin(\varphi) \ddot{\varphi} \end{aligned}$$

Z rovnice (2.18 I.) (rovnica (2.18 II.) je splnená automaticky) teda dostávame:

$$\begin{aligned} [-l \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + l \cos(\varphi) \ddot{\varphi}] [-l \cos(\varphi)] - l \sin(\varphi) [l \cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 + l \sin(\varphi) \ddot{\varphi} + g] &= 0 \\ -l^2 \ddot{\varphi} [\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)] - lg \sin(\varphi) &= 0 \\ \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin(\varphi) &= 0 \end{aligned}$$

Toto je naozaj správna rovnica rovinného matematického kyvadla. Vidíme, že počas jej odvodenia sme museli použiť rôzne kroky a postupy, ktoré sa nedajú univerzálne algoritmicke opísať, avšak vo výsledku dostávame rovnicu pre *jedinú* premennú φ . Intuícia nám teda vraví, že z piatich rovníc by stačila jedna (vo vhodnej kombinácii), aby sme sa dopracovali k rovnakému výsledku. Kľúčový rozdiel medzi piatimi rovnicami d'Alembertovho - Lagrangeovho princípu a jedinou výslednou rovnicou je, že zatiaľ čo pôvodne sme dovoľovali virtuálnym posunutiam ísť v ktoromkoľvek smere a jeho správnosť určili až samotné rovnice, v priebehu výpočtu sme zistili, že existujú súradnice (*parametrizácia*), ktoré sú akoby „šité na mieru“ a poskytujú práve toľko voľnosti, koľko je v systéme treba, teda pre žiaden uhol φ sa nedostaneme mimo kružnice, na ktorej sa deje pohyb, no zároveň rozumným spôsobom opíše celú kružnicu. Za pomoci zovšeobecnenia myšlienky súradníc ušitých na mieru väzbovým rovniciam odvodíme Lagrangeove rovnice, ktorých počet je rovný počtu stupňov voľnosti systému.

2.2 Lagrangeove rovnice II. druhu

2.2.1 Zovšeobecnené súradnice, Lagrangeove rovnice II. druhu

Ako sme už naznačili, často platí, že pre náš systém existujú také súradnice, ktoré sú preň ako šité na mieru, pre matematické kyvadlo to bol napríklad uhol φ . Predpokladajme, že taká parametrizácia existuje, teda existuje n súradníc q takých, že *automaticky* platí:

$$\Phi_i(\bar{r}) = \Phi_i(\bar{r}(q)) = 0, \forall i; 1 \leq i \leq n,$$

teda rovnica (2.16 III.) je automaticky splnená (definitoricky). Pomocou Taylorovho rozvoja počítajme $\delta\bar{r}$:

$$\begin{aligned} \delta\bar{r} &= \bar{r}(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, \dots, q_n + \delta q_n) - \bar{r}(q_1, q_2, \dots, q_n) = \\ &= \bar{r}(q_1, q_2, \dots, q_n) + \delta q_1 \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} + \delta q_2 \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2} + \dots + \delta q_n \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_n} - \bar{r}(q_1, q_2, \dots, q_n) = \left(\sum_{i=1}^n \right) \delta q_i \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \end{aligned}$$

Spočítajme teraz výraz v (2.16 II.) pre a -tu väzbovú funkciu:

$$\left(\sum_{i=1}^{3N} \right) \frac{\partial \Phi_a}{\partial r_i} \delta r_i = \left(\sum_{j,k=1}^n \right) \frac{\partial \Phi_a}{\partial q_j} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{3N} \right) \frac{\partial q_j}{\partial r_i} \frac{\partial r_i}{\partial q_k}}_{=\delta_{jk}} \delta q_k = \left(\sum_{j=1}^n \right) \frac{\partial \Phi_a}{\partial q_j} \delta q_j \stackrel{!}{=} 0$$

Vieme, že pre *akékoľvek* q je *každá* väzbová rovnica rovná nule (pretože q parametrizujú kofiguračný priestor tak, aby to platilo), čo ale znamená, že vzhľadom na zovšeobecnené súradnice q je každá väzbová rovnica *konštantou* (konkrétne rovnou nule), čo sa inak dá napísať tak, že $\frac{\partial \Phi_a}{\partial q_j} = 0$, teda výraz vyššie je identicky rovný nule. To ale znamená, že rovnica (2.16 II.) taktiež bez námahy automaticky platí a ostáva už len rovnica (2.16 I.):

$$\left(\dot{\bar{p}} - \bar{F}^{(a)} \right) \cdot \delta\bar{r} = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{3N} \right) \left(\dot{\bar{p}}_j - \bar{F}_j^{(a)} \right) \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_i} \delta q_i = 0$$

Vieme, že táto rovnosť platí pre *každý* vektor $\delta\mathbf{q}$. Potom neostáva nič iné, len že zvyšok musí byť rovný nule (ak je skalárny súčin $x \cdot y$ rovný nule pre každé x , potom platí, že $y = 0$):

$$\forall \delta\mathbf{q} : \left(\dot{\bar{p}}_j - \bar{F}_j^{(a)} \right) \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_i} \delta q_i = 0 \implies \forall i; 1 \leq i \leq n : \left(\dot{\bar{p}}_j - \bar{F}_j^{(a)} \right) \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_i} = 0$$

Roznásobme zátvorku a výraz s aktívnymi silami presuňme na druhú stranu. Označme tento výraz ako $Q_i(\mathbf{q})$ - zovšeobecnené sily:

$$\frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_i} \dot{p}_j = \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{3N} \bar{F}_j^{(a)} \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_i} \right)}_{Q_i(q)} \quad (2.19)$$

Pravá strana je tým vybavená, v ľavej si všimneme, že prvý súčiniteľ je nederivovaný podľa času, kým druhý je, čo sa dá prepísať ako časová derivácia súčinu dvoch funkcií, od ktorej odpočítame opačnú kombináciu derivovania podľa času¹:

$$\frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_i} \dot{p}_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_i} \bar{p}_j \right) - \bar{p}_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_i} \right)$$

Výraz:

$$\frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_i} \bar{p}_j \quad (2.20)$$

má fyzikálny rozmer:

$$\left[\frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_i} \bar{p}_j \right] = \frac{Js}{[q_i]} = \frac{J}{[\dot{q}_i]}.$$

Výraz:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_i} \right) \bar{p}_j \quad (2.21)$$

Má rozmer:

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_i} \right) \bar{p}_j \right] = \frac{J}{[q_i]}.$$

Intuícia nám vraví, že ak má niečo jednotku Joule na jednotku i -tej zovšeobecnenej súradnice, jedna z možností je, že výraz je parciálnou deriváciou energie podľa zovšeobecnenej súradnice. Keďže výrazy na ľavej strane sa skladajú z polôh a aj z hybností, je pravdepodobné, že pôjde o *kinetickú* energiu sústavy (k tomuto tušeniu prispieva aj fakt, že aktívne sily sme presunuli na pravú stranu - potenciálna energia by sa mohla skrývať iba v aktívnych silách). Nájdime teda kinetickú energiu sústavy:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \vec{v}_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_a} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_b} \dot{q}_a \dot{q}_b$$

Nájdime $\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{q}_i}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_a} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_b} (\delta_{ia} \dot{q}_b + \dot{q}_a \delta_{ib}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left[m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_b} \dot{q}_b + m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_a} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_a \right] = \\ &= \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_b} \dot{q}_b = \sum_{k=1}^N m_k \dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^N \vec{p}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{3N} \bar{p}_j \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_i} = \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_i} \bar{p}_j \end{aligned}$$

Vidíme, že výraz, ktorý sme dostali, zodpovedá výrazu (2.20).

¹Odtiaľ už neuvádzame pomocné sumy, pre správne rozpísanie výrazov s dvoma zhodnými indexami stačí použiť Einsteinovu sumačnú konvenciu (a danú sumu si tam domyslieť). Namiesto parciálnej derivácie podľa času použijeme výraz $\partial_t f$, pre deriváciu podľa i -tej *kartézskej* súradnice použijeme $\partial_i f$.

Spočítajme $\frac{\partial E_{kin}}{\partial q_i}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_k}{\partial q_i} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \left(\frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_a \partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_b} + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_a} \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_b \partial q_i} \right) \dot{q}_a \dot{q}_b = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \left[\underbrace{\frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_a} \right) \dot{q}_a}_{\frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_a} \dot{q}_a \right)} \underbrace{\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_b} \dot{q}_b}_{\dot{\vec{r}}_k} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_b} \right) \dot{q}_b}_{\frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_b} \dot{q}_b \right)} \underbrace{\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_a} \dot{q}_a}_{\dot{\vec{r}}_k} \right] = \\ &= \sum_{k=1}^N m_k \dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_a} \dot{q}_a \right) = \sum_{k=1}^N \vec{p}_k \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^N \vec{p}_k \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \right) = \sum_{j=1}^{3N} \vec{p}_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right) \vec{p}_j \end{aligned}$$

Dostali sme výraz zhodný s (2.21).

Z (2.19) a predošlých výpočtov vyplýva nasledujúca rovnosť:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i(q) \quad (2.22)$$

kde T sme označili celkovú kinetickú energiu sústavy.

Veľmi dôležitá poznámka: tento vzťah platí len vtedy, ak použijeme predpoklad, že *parciálna* derivácia q podľa $\dot{q}$ je nulová, teda tieto veličiny na sebe nezávisia (môžu sa meniť nezávisle od seba). V odvodení (2.22) sme tento fakt skryto predpokladali (z toho vyplýva, že ani q nezávisí $\dot{r}$ a tak ďalej, všetky kombinácie výrazov, kde jeden je bodkovaný a druhý nie je). Tento predpoklad sa zdá byť vzhľadom na situáciu trochu zvláštny, pretože človek sa zamyslí a povie si - veď počkaj, však keď mením funkciu polohy, potom aj funkcia rýchlosti sa musí meniť! To je síce pravda, lenže po prvé fakt, že $\frac{\partial q}{\partial \dot{q}} = 0$ môžeme brať ako postulát, za ktorého pravdivosti platí aj (2.22) a po druhé, všetky funkcie, v ktorých vystupuje q aj $\dot{q}$ môžeme chápať ako funkciu dvoch okienok (plus ďalšie okienko za čas): $f(q, \dot{q}) \leftrightarrow f(\diamond, \circ)$. Jej derivácia podľa niektorého okienka teda nesúvisí s inými okienkami a opačne. Nieкого by mohlo pri závislosti q od $\dot{q}$ napadnúť vytvárať nezmyselné reťazce vzájomných parciálnych derivácií:

$$\frac{\partial f[q(\dot{q}, t), \dot{q}(q, t), t(q, \dot{q})]}{\partial q} = \frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial q}$$

Tento prístup však pripomína skôr totálnu deriváciu, preto sa dohodneme, že v prípade parciálnej derivácie si budeme všimáť jedine explicitné závislosti a derivácie budeme vykonávať slepo podľa okienok:

$$f[\cancel{q(\dot{q}, t)}, \cancel{\dot{q}(q, t)}, \cancel{t(q, \dot{q})}] = f(q, \dot{q}, t) \leftrightarrow f(\diamond, \circ, \star) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial q} = \frac{\partial f}{\partial \diamond}, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial f}{\partial \circ}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \star}$$

Koniec-koncov, vyžadovať od parciálnej derivácie, aby menila len tú svoju premennú nie je až také zvláštne, na totálne zmeny boli vymyslené totálne derivácie. Na tento princíp musíme pamätať aj pri všetkých nasledujúcich odvodeníach, teda akékoľvek parciálne derivovanie podľa niektorej z premenných bude ignorovať ostatné premenné, pokiaľ nie je prítomná explicitná závislosť. Príklad explicitnej závislosti:

$$f[q, \dot{q}, t] = \sin(q) - \dot{q}^2 + qt; \quad \frac{\partial f}{\partial q} = \cos(q) + t, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{q}} = -2\dot{q}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = q$$

Prípad implicitnej závislosti. Pri totálnej derivácii najprv zderivujeme funkciu podľa okienok (ignorujeme ostatné okienka) a zderivujeme okienko podľa času (pridáme nad okienko bodku a pamätáme, že $\dot{t} = 1$):

$$f[q, \dot{q}, t] = e^{q(t)} + \dot{q}(t) \implies f[q, \dot{q}, \cancel{t}] \implies \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}} \frac{d\dot{q}}{dt} + \cancel{\frac{\partial f}{\partial t} \frac{dt}{dt}} = \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}} \ddot{q} = e^q \dot{q} + \ddot{q}$$

Počas odvodenia sme došli k užitočnému postupu, ako sa dá vypočítať kinetická energia sústavy, pokiaľ máme zadanú parametrizáciu q :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \underbrace{m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}}_{T_{ij}} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \cdots & T_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n1} & T_{n2} & \cdots & T_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix}$$

$$T_{ij} = \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \quad (2.23)$$

Podstatnou myšlienkou ďalších odvození je, že častokrát platí, že sila $\vec{F}^{(a)}$ je potenciálová. Nutnou aj postačujúcou podmienkou potenciálovosti sily $\vec{F}^{(a)}$ je²:

$$\forall \vec{r} \in E^3 : \frac{\partial \vec{F}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \vec{F}_j}{\partial x_i} \Leftrightarrow \exists U : \vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

Potom sa zovšeobecnená sila dá napísať pomocou *gradientu* nejakej funkcie $U(\mathbf{q})$ - potenciálnej energie:

$$\left(\frac{\partial \vec{F}_i^{(a)}}{\partial x_j} = \frac{\partial \vec{F}_j^{(a)}}{\partial x_i} \right) \Leftrightarrow \left(\vec{F}^{(a)} = -\vec{\nabla} U \right)$$

Detaily tohto výpočtu budeme prezentovať v príkladoch, ktoré sa v texte vyskytnú. Pre zovšeobecnené sily $Q_i(\mathbf{q})$ môžeme písať:

$$Q_i(\mathbf{q}) = \vec{F}^{(a)} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = -\vec{\nabla} U \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_j} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$$

Použitím tohto výsledku z (2.22) dostávame:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} &= Q_i(q) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} &= -\frac{\partial U}{\partial q_i} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_i} &= 0 \end{aligned}$$

Predpokladáme, že potenciálna energia U *nezávisí* od iných parametrov, ako sú zovšeobecnené súradnice. Potom platí $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = 0$ a môžeme písať:

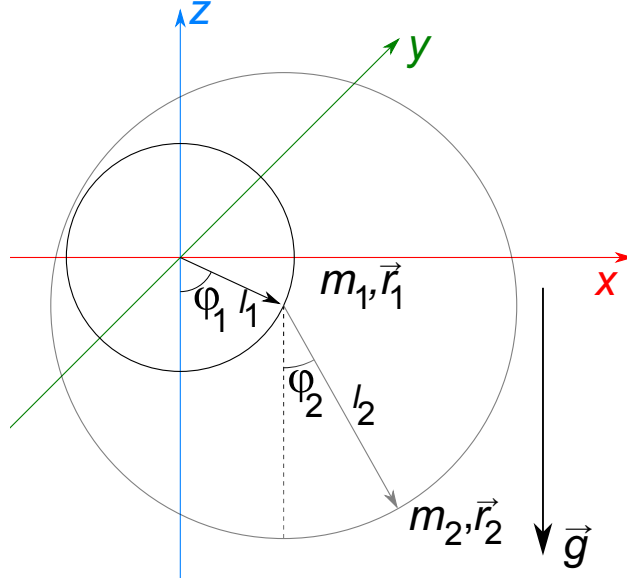
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_i} = 0$$

Ak teraz zavedieme funkciu zvanú *Lagrangián* $L = T - U$, teda rozdiel kinetickej a potenciálnej energie sústavy, tak dostávame výsledné *Lagrangeove rovnice II. druhu*:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (2.24)$$

²Toto platí len pre sily a k nim prislúchajúce potenciály, ktoré v sebe obsahujú len súradnice v Euklidovskom priestore, ktorý označujeme E^3 . Sily, ktoré v sebe obsahujú aj čas a poprípade vyššie derivácie polôh, môžu mať zovšeobecnenú potenciálnu energiu, ale nebude to tak vždy. Ak by sme totiž aj silu závislú od rýchlostí počítali len ako $F_i = -\partial_i U$, dostali by sme, že trecia sila $F_i = -k\dot{x}_i$ by mala mať potenciál $U = k\dot{x}_i x_i$, čo však nie je pravda, ako uvidíme neskôr.

Príklad: dvojné rovinné matematické kyvadlo. Takýto systém sa skladá z dvoch hmotných bodov v rovine xz ($y = 0$). Prvý hmotný bod $\vec{r}_1$ hmotnosti m_1 je zavesený na nehmotnej paličke (počiatok v $[0, 0, 0]$) dĺžky l_1 . Na ňom je zavesená druhá nehmotná palička dĺžky l_2 , na ktorej konci je umiestnený druhý hmotný bod $\vec{r}_2$ hmotnosti m_2 . Na celý systém pôsobí homogénne tiažové pole v smere $-z$. Nákres:



Na opísanie každého stavu tohto systému sú potrebné len dva parametre - uhly φ_1 a φ_2 . Parametrizácia prvého hmotného bodu je jednoduchá:

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} l_1 \sin(\varphi_1) \\ 0 \\ -l_1 \cos(\varphi_1) \end{pmatrix}$$

Polohu druhého hmotného bodu opíšeme takmer rovnako, akurát stred druhej kružnice (s polomerom l_2) nebude v $[0, 0, 0]$, ale tam, kde leží polohový vektor $\vec{r}_1$:

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \begin{pmatrix} l_2 \sin(\varphi_2) \\ 0 \\ -l_2 \cos(\varphi_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \sin(\varphi_1) + l_2 \sin(\varphi_2) \\ 0 \\ -l_1 \cos(\varphi_1) - l_2 \cos(\varphi_2) \end{pmatrix}$$

Na výpočet kinetickej energie potrebujeme poznať rýchlosti oboch bodov:

$$\vec{v}_1 = \dot{\vec{r}}_1 = \begin{pmatrix} l_1 \cos(\varphi_1) \dot{\varphi}_1 \\ 0 \\ l_1 \sin(\varphi_1) \dot{\varphi}_1 \end{pmatrix} = \dot{\varphi}_1 l_1 \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1) \\ 0 \\ \sin(\varphi_1) \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \dot{\vec{r}}_2 = \begin{pmatrix} l_1 \cos(\varphi_1) \dot{\varphi}_1 + l_2 \cos(\varphi_2) \dot{\varphi}_2 \\ 0 \\ l_1 \sin(\varphi_1) \dot{\varphi}_1 + l_2 \sin(\varphi_2) \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix}$$

Kinetická energia sústavy:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \dot{\varphi}_1^2 l_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\varphi}_1^2 l_1^2 + m_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{1}{2} m_2 \dot{\varphi}_2^2 l_2^2$$

$$T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 & \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 & m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\ m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) & m_2 l_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix}$$

Potenciálnu energiu spočítame ako súčet jednotlivých potenciálnych energií oboch bodov, $m_1 g h_1 + m_2 g h_2$, kde h_1 a h_2 sú výšky bodov $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$ oproti počiatku $[0, 0, 0]$:

$$U = m_1 g h_1 + m_2 g h_2 = -m_1 g l_1 \cos(\varphi_1) - m_2 g [l_1 \cos(\varphi_1) + l_2 \cos(\varphi_2)]$$

Lagrangian L tejto sústavy bude:

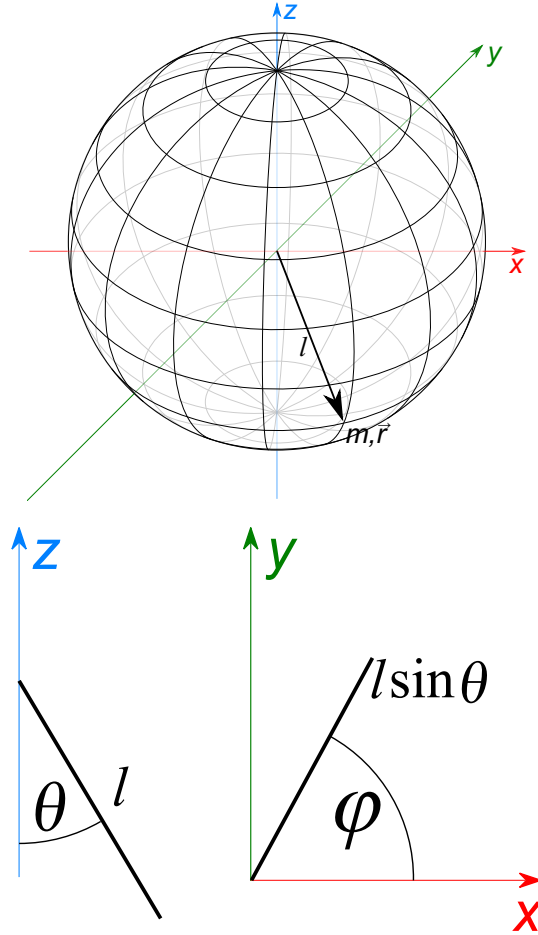
$$\begin{aligned} L &= T - U \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 & \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 & m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\ m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) & m_2 l_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} \\ &\quad + m_1 g l_1 \cos(\varphi_1) + m_2 g [l_1 \cos(\varphi_1) + l_2 \cos(\varphi_2)] \end{aligned}$$

Výsledným produktom budú *dve* Lagrangeove rovnice, každá za jeden stupeň voľnosti.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} &= 0 \end{aligned}$$

Ich výsledný tvar nebudeme kvôli ich zložitosti uvádzať (nie je však ťažké ich získať, ak má človek dostatok miesta). Vo výsledku je to sústava dvoch nelineárnych diferenciálnych rovníc druhého rádu, ktoré samozrejme nie je možné riešiť analyticky a ktoré vykazujú silné chaotické správanie (teda ich časový vývoj pohybu veľmi citlivo závisí od počiatočných podmienok). Môže sa zdať, že sme si vyjadrením pohybových rovníc tejto sústavy nijako nepomohli, faktom však ostáva, že bez aparátu Lagrangeových rovníc by bolo samotné vyjadrenie veľmi obtiažne. Vo fyzike sa za dôležitý medzivýsledok považuje už len samotné napísanie pohybových rovníc, ich analytické riešenie častokrát nie je možné. Čo sa týka nejakej časti analytického riešenia, občas vieme uhádnuť, čo by systém mal robiť za určitých podmienok - napríklad vieme, že dvojné rovinné matematické kyvadlo vie pokojne stáť, ak ho nebudeme dráždiť, v tom prípade $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Túto podmienku samozrejme výsledné rovnice určite spĺňajú, no takýto pohyb je značne triviálny. Podobné „tipy“, ktoré chceme preveriť analytickým výpočtom sa nazývajú „ansatz“ (an educated guess - kvalifikovaný odhad), teda uhádneme časť riešenia, dosadíme ho do pohybových rovníc, z ktorých nám potencionálne ešte môže vyjsť nejaká podmienka na parametre, ktoré si v ansatzi určíme. Ako príklad na tento princíp dobre poslúži sférické matematické kyvadlo.

Príklad: sférické matematické kyvadlo. Sférické matematické kyvadlo je sústava pozostávajúca z jediného hmotného bodu $\vec{r}$ hmotnosti m v gravitačnom poli, ktorý je viazaný na *sféru* s polomerom l so stredom $[0, 0, 0]$ (zavesený na paličku dĺžky l , ktorá je ukotvená v počiatku súradnicovej sústavy). Ako zovšeobecnené súradnice tu poslúžia uhly φ a θ . Uhol θ bude odklon paličky od osi $-z$ (keď kyvadlo voľne visí, tak $\theta = 0$), uhol φ bude uhol, ktorý zvierá priemet polohy $\vec{r}$ do roviny xy s kladným zmyslom osi x . Viac napovedia obrázky:



Bod $\vec{r}$ teda bude v súradniciach φ a θ vyzerat' nasledovne:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} l \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ l \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ -l \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Vektor rýchlosti $\vec{v}$ vypočítame ako $\dot{\vec{r}}$:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} l \cos(\theta) \cos(\varphi) \dot{\theta} - l \sin(\theta) \sin(\varphi) \dot{\varphi} \\ l \cos(\theta) \sin(\varphi) \dot{\theta} + l \sin(\theta) \cos(\varphi) \dot{\varphi} \\ l \sin(\theta) \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

Kinetická energia T :

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta) \dot{\varphi}^2)$$

Potenciálna energia U :

$$U = mgh = -mgl \cos(\theta)$$

Lagrangián sústavy bude:

$$L = T - U = \frac{1}{2}ml^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta)\dot{\varphi}^2 \right) + mgl \cos(\theta)$$

Rovnica pre súradnicu θ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0 \\ \ddot{\theta} - \frac{1}{2} \sin(2\theta)\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{l} \sin(\theta) &= 0 \end{aligned}$$

Rovnica pre súradnicu φ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0 \\ \sin(2\theta)\dot{\theta}\dot{\varphi} + \sin^2(\theta)\ddot{\varphi} &= 0 \end{aligned}$$

Tieto rovnice predstavujú znova sústavu nelineárnych diferenciálnych rovníc druhého rádu, ktoré sa nedajú riešiť analyticky, ale môžeme skúmať konkrétny ansatz, ktorý nás zaujíma. Zaujímavé by napríklad bolo zistiť, či existuje riešenie v tvare $\theta = \theta_0 = \text{konšt.}$, $\varphi = \omega t$. Ansatz sa overuje dosadením do všetkých rovníc, ktoré máme k dispozícii (nie do Lagrangiánu!). Ďalšie úpravy ukážu, či je systém schopný konať taký druh pohybu, poprípade aj dostaneme podmienku, aké musia byť parametre, aby taký pohyb sústava mohla vykonávať (pri tomto ansatzi sme bližšie nešpecifikovali, koľko presne je ω a θ_0 , takže očakávame, že nám tuto informáciu rovnice láskavo podajú). Dosadením dostaneme tieto rovnice:

$$\begin{aligned} -\sin(\theta_0) \cos(\theta_0) \omega^2 + \frac{g}{l} \sin(\theta_0) &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Z druhej rovnice sme sa takto nič nedozvedeli, platí automaticky, čo znamená, že druhá rovnica ani nepožaduje nejaké špeciálne podmienky ohľadom ω a θ_0 - je splnená automaticky pre každý pohyb, ktorý má konštantné θ a časovo lineárne premenné φ . Predpokladajme, že θ_0 nie je ani 0, ani π , zároveň nech m a l sú kladné. Potom prvá rovnica hovorí nasledovné:

$$g = l \cos(\theta_0) \omega^2 \implies \omega^2 = \frac{g}{l \cos(\theta_0)}$$

Čo sme to vlastne dostali? Skúmali sme, či dokáže dakéto kyvadlo konať ustálený pohyb po kružnici v istej výške nad rovnovážnou polohou tak, že θ ostáva konštantná a φ s časom lineárne narastá (bod sa otáča dookola rovnomerne). Zistili sme, že takýto pohyb je možný a navyše sme dostali aj podmienku, kedy je táto rovnováha splnená. Jednak systém môže takýto pohyb konať len ak $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ (aby ω bola reálna konštanta), zároveň sme aj dostali presný vzťah medzi θ_0 a ω (ak l a g sú dané). Navyše sme zistili, že tento vzťah neobsahuje hmotnosť m , čo znamená, že hmotnosť bodu na paličke nemá vplyv na takýto rovnomerný pohyb po kružnici. Ďalšiu vec, ktorú vidíme zo vzťahu pre θ_0 a ω je, že keď sa θ_0 blíži ku $\frac{\pi}{2}$, ω musí narastať nad všetky medze do nekonečna, aby mohla taká rovnováha nastať. Toto ale úplne vystihuje našu intuitívnu predstavu o takomto druhu pohybu - každý, kto sa už snažil roztočiť guľičku na šnúrke si musel všimnúť, že čím rýchlejšie točí šnúrkou, tým vyššie sa dvihne guľička, no nikdy nedosiahne do takej výšky, aby šnúrka kmitala v jednej rovine.

Ďalší zaujímavý ansatz tohto problému je prípad, kedy $\varphi = \varphi_0 = \text{konšt.}$, pričom na θ nenakladáme nijakú podmienku, teda nemôžeme predpokladať, že by nejaká (a tým pádom aj všetky ďalšie) časová derivácia θ bola nulová. Vtedy z pohybových rovníc dostaneme:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$$

$$0 = 0$$

Ako vidíme, druhú rovnicu náš ansatz znovu vôbec nezaujíma - je pravdivá. Prvá rovnica je vlastne rovnica rovinného matematického kyvadla. Naozaj, pri konštruovaní tohto ansatzu sme mali na mysli prípad, kedy sa kyvadlo, napriek tomu, že je sférické, bude kývať len v jednej rovine, preto $\varphi = \varphi_0$. Na θ sme nekládli žiadnu podmienku (t.j. systém si mohol robiť čo uznal za vhodné v medziach konštantného φ) a systém si povedal, že najvšeobecnejší pohyb, aký bude θ robiť, je pohyb rovinného matematického kyvadla. Túto rovnicu je možné analyticky riešiť pomocou eliptického integrálu prvého druhu (dostaneme závislosť $t(\theta)$) a Jacobiho amplitúdnej funkcie am (dostaneme závislosť $\theta(t)$). Tento systém, narozdiel od lineárneho harmonického oscilátora má viac možností ako sa správať v závislosti od energie, ktorú mu na začiatku udelíme. Ak má málo energie, bude kmitať v okolí rovnovážnej polohy (vtedy sa zvykne písať $\sin(\theta) \approx \theta$) a jeho časový vývoj bude takmer zhodný s lineárnym harmonickým oscilátorom (aspoň prvých pár periód). Ak mu udelíme *presne* toľko energie, aby vládol vystúpiť do rovnovážnej polohy *navrchu gule* (vtedy celková energia $T + U$ bude rovná potenciálnej energii U v bode navrchu gule), časový vývoj θ bude uhol, ktorý sa bude exponenciálne pomaly blížiť k hodnote π , no teoreticky sa do tejto polohy nikdy nedostane. Ďalšou možnosťou je prípad, kedy je energia o niečo (nie oveľa) vyššia ako energia potrebná na vystúpanie do vratkej rovnovážnej polohy - vtedy bude bod obiehať kružnicu nerovnomernou uhlovou rýchlosťou, teda θ bude rásť, ale nie lineárne (pohyb je periodický, avšak θ už nie je periodická funkcia času). Ak bude energia oveľa väčšia ako energia potrebná na vystúpanie do vratkej rovnovážnej polohy, potom tento pohyb bude znovu pohyb po kružnici, avšak θ bude takmer lineárne rastúca funkcia času - kyvadlo si skoro ani nevšimne, že sa mu nejako mení potenciálna energia, pretože táto bude *zanedbateľná* oproti kinetickej (vtedy platí, že $T \gg U$, teda $E = T + U \approx T$). Všetky tieto prípady sú zahrnuté v špeciálnych Jacobiho funkciách, teda pri určitých hodnotách energie, alebo pri konkrétnych zanedbaniach sa tieto prípady dajú nájsť vo výslednom časovom vývoji θ , no ak aj tieto funkcie nepoznáme, tieto prípady sa dajú overiť ansatzmi.

Jednu z hlavných výhod Lagrangeových rovníc sme už načrtli - je ňou samotný počet rovníc, ktorý je presne taký, aký je počet stupňov voľnosti v systéme. Ďalšou nespornou výhodou je, že z Lagrangianu sa dajú priamo odčítať zákony zachovania (ktoré môžu značne uľahčiť rozbor výsledných rovníc).

2.2.2 Zákony zachovania

Zákony zachovania³ sú nespornou výhodou konštrukcie lagrangiánu a rovníc, ktoré z neho vyplývajú. Lagrangián je vo všeobecnosti funkcia zovšeobecnených súradníc, zovšeobecnených rýchlostí a času. Takú súradnicu, ktorá nebude vstupovať do Lagrangiánu explicitne (t.j. keď napíšeme Lagrangián a jedno písmenko, ktoré by v ňom mohlo byť, v ňom nie je) budeme nazývať *cyklickou*. Platí teda:

$$L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) = L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) \implies \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \implies q_i \text{ je cyklická súradnica}$$

Odvodíme si, aký to má vlastne význam, napíšeme teda pohybovú rovnicu pre i -tu zovšeobecnenú súradnicu q_i :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Výrok, ktorý dostávame tvrdí, že *totálna* časová derivácia výrazu $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ je rovná nule. To ale znamená, že samotný výraz je časovo nepremenný, teda konštantný:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \implies \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{konšt.}$$

Výraz $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ budeme nazývať *zovšeobecnená hybnosť* p_i , ktorej význam pochopíme hlbšie až neskôr, pri Hamiltonových rovniciach - zatiaľ nám stačí, že ak i -ta zovšeobecnená poloha je cyklická, potom i -ta zovšeobecnená hybnosť p_i , sa v čase zachováva. Keďže potenciálna energia nezvykne obsahovať rýchlosť, táto parciálna derivácia sa vzťahuje zrejme na kinetickú energiu. Zaujímá nás teda výraz:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \stackrel{\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}=0\right)}{=} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$$

Z odvodení vieme, čomu je rovná kinetická energia, počítame teda výraz:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{1}{2} T_{ab} \dot{q}_a \dot{q}_b \right) = \frac{1}{2} T_{ab} (\delta_{ia} \dot{q}_b + \dot{q}_a \delta_{ib}) = \frac{1}{2} T_{ib} \dot{q}_b + \frac{1}{2} T_{ai} \dot{q}_a = \frac{1}{2} T_{bi} \dot{q}_b + \frac{1}{2} T_{ai} \dot{q}_a = T_{ai} \dot{q}_a$$

V poslednom kroku sme využili, že matica T_{ab} je symetrická, čo vidno z definície (2.23), teda $T_{ab} = T_{ba}$.

Ešte sme nespomenuli, čo to znamená, ak náhodou do Lagrangiánu nevstupuje zovšeobecnená rýchlosť $\dot{q}_i$. Overme si, čo sa v tom prípade stane:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Za tejto podmienky sa z pohybovej rovnice vyklúje:

$$\cancel{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

To ale znamená, že ani zovšeobecnená súradnica q_i nesmie vystupovať v Lagrangiáne explicitne. Ak sa teda v lagrangiáne nachádza zovšeobecnená súradnica q_i a zovšeobecnená rýchlosť $\dot{q}_i$ sa v ňom nenachádza, niečo je *zle*.

³Mimochodom, miesto pojmu „zachovávaná sa veličina“ (conserved quantity) sa občas používa výraz „integrál pohybu“ (integral of motion).

2.2.3 Zákon zachovania energie

Nerозobrali sme poslednú možnosť, ktorá nám ostala - cykličnosť času t , teda fakt, že čas t explicitne nevystupuje v Lagrangiane. Tieto odvodenia sú platné len pre potenciálne energie, v ktorých nevystupuje explicitne žiadna zovšeobecnená rýchlosť. Za týchto predpokladov platí:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Pozrieme sa na to, aký to má pre nás dôsledok. Počítajme totálnu časovú deriváciu:

$$\frac{dL}{dt} = \dot{L} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \cancel{\frac{\partial L}{\partial t}}$$

Z Lagrangeovej rovnice pre i -tu súradnicu vieme:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Môžeme teda písať:

$$\dot{L} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i$$

Na pravej strane spoznáme totálnu deriváciu:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i$$

Teda $\dot{L}$ bude:

$$\dot{L} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \quad (2.25)$$

Rozoberme výraz $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i$:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \frac{1}{2} T_{ab} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (\dot{q}_a \dot{q}_b) \dot{q}_i = \frac{1}{2} T_{ab} (\delta_{ia} \dot{q}_b + \dot{q}_a \delta_{ib}) \dot{q}_i = \frac{1}{2} T_{ab} \dot{q}_b \dot{q}_a + \frac{1}{2} T_{ab} \dot{q}_a \dot{q}_b = T_{ab} \dot{q}_a \dot{q}_b = 2T$$

Potom z (2.25) dostaneme:

$$\begin{aligned} \dot{L} &= \frac{d}{dt} (2T) = 2\dot{T} \implies 2\dot{T} - \dot{L} = 2\dot{T} - (\dot{T} - \dot{U}) = \dot{T} + \dot{U} = \dot{E} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial t} &= 0 \implies \dot{E} = 0 \implies E = \text{konšt.} \end{aligned} \quad (2.26)$$

teda vyšlo nám tvrdenie, že ak čas explicitne nevstupuje do Lagrangianu, potom sa energia v čase zachováva.

2.3 Princíp najmenšieho účinku

2.3.1 Matematické okienko do variačného počtu

Čokoľvek, čo funkcii $f(x)$ priradí číslo $s(f)$ budeme volať funkcionál. Môže ním byť napr. funkcionál operujúci na funkciách definovaných v bode $x = 0$ a jeho hodnota bude $s(f) = f(0)$. Týmto každej funkcii f definovanej v bode 0 priradíme jej funkčnú hodnotu v bode 0. Ďalším funkcionálom, ktorý sa nám priam ponúka, je nejaký určitý integrál - napr. funkcionál operujúci na funkciách integrovateľných na množine $(0, 1)$, ktorý potom každej funkcii $f(x)$ priradí číslo - hodnotu určitého integrálu v hraniciach od 0 po 1:

$$s(f) = \int_0^1 f(x) dx$$

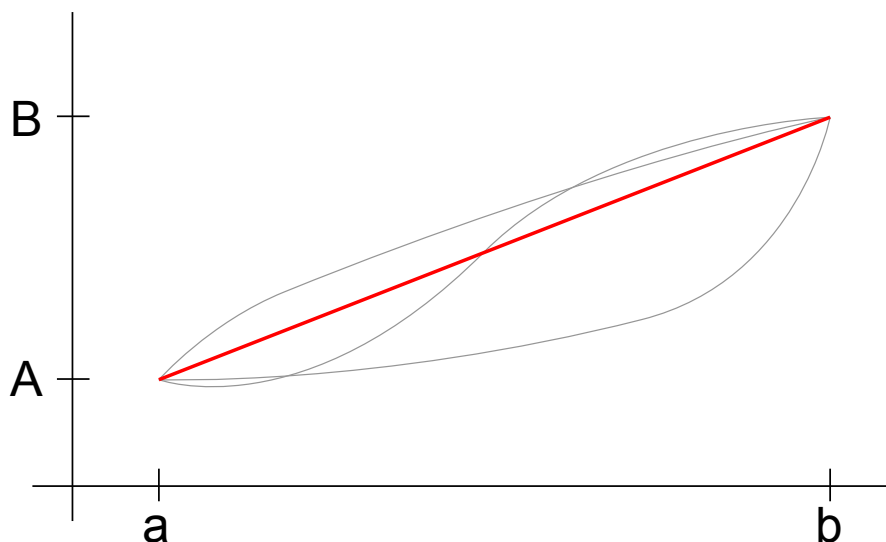
Takto máme priam nekonečne veľa zaujímavých funkcionálov, ktoré sú prakticky využiteľné aj vo fyzike, ako sa uvidí neskôr:

$$s(f) \mapsto \begin{cases} f(a) \\ \int_a^b f(x) dx \\ \vdots \end{cases}$$

Predstavme si napr. ľubovoľnú funkciu $f(x)$ na intervale (a, b) . Dĺžku tejto funkcie vypočítame pomocou funkcionálu:

$$L_a^b(f) = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2} dx; \quad \begin{matrix} f(a) = A \\ f(b) = B \end{matrix} \quad (2.27)$$

Vieme, že najkratšia spojnice dvoch bodov je úsečka. Preto bude l pre danú dvojicu a, b, A a B minimálne práve vtedy, keď je funkcia f lineárna (konštantná, ak $A = B$). Avšak nájsť univerzálny spôsob minimalizácie funkcionálu pre takéto typy problémov je vo všeobecnosti ťažká úloha. Za povšimnutie stojí nutnosť okrajovej podmienky - bez nej by v riešení ostali stupne voľnosti navyše⁴.



Obrázok 2.1: Úsečka je najkratšia spojnice dvoch bodov. Lineárna funkcia minimalizuje funkcionál (2.27) pri daných okrajových podmienkach.

⁴V tomto prípade by bez definovania okrajovej podmienky bola vyhovujúcou funkciou konštantná funkcia (vtedy $f' = 0$, čo je najoptimálnejšia hodnota v danej situácii) a to v ľubovoľnej výške nad osou x .

Iný príklad by bola tzv. brachistochróna⁵. Predstavme si ľubovoľnú krivku $y = f(x)$, po ktorej sa môže bez trenia kĺzať korálka. Ak by sme skúšali rôzne tvary kriviek, zistili by sme, že korálky pustené z určitého bodu $x = a$ dorazia do bodu $x = b$ v rôznych časoch. Brachistochróna je krivka, po ktorej je čas potrebný na sklúznutie minimálny. Tento problém sa tiež dá zakódovať do reči funkcionálu a jeho minimalizácie. Použijeme pri tom už známy fakt, že infinitezimálna dĺžka kúsku krivky v bode x je:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Rýchlosť korálky v bode x bude infinitezimálna trajektória ds , podelená infinitezimálnym časom dt , za ktorý túto trajektóriu korálka prejde:

$$v = \frac{ds}{dt} \implies dt = \frac{1}{v} ds$$

Zdefinujme, že $y(0) = 0$, teda potenciálna energia $mgy(0)$ bude nulová. Na začiatku korálka stojí, takže aj kinetická energia bude nulová. Krivka, po ktorej pôjde korálka, bude zrejme záporná, ak $y(0) = 0$ (aby platil zákon zachovania energie). Nech je teda naša funkcia $y(x)$ kladná a krivka teda bude opísaná pomocou funkcie $-y(x)$. Potom potenciálna energia bude $-mgy(x)$.

Použijeme zákon zachovania energie:

$$E_k + E_p = 0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgy \implies v = \sqrt{2gy}$$

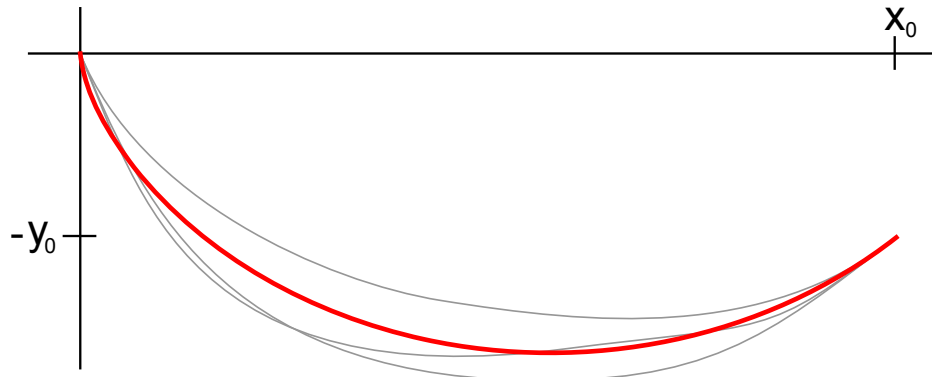
Z toho dostávame výraz je dt :

$$dt = \frac{1}{v} ds = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2gy}} dx$$

Celkový čas, ktorý bude korálka potrebovať na sklúznutie po krivke, bude daný nasledujúcim výrazom:

$$T_0^{x_0}(y) = \int_0^{x_0} dt = \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2gy}} dx; \quad \begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y(x_0) = y_0 > 0 \end{array} \quad (2.28)$$

Znovu sme dostali integrálny výraz, ktorý obsahuje funkciu y a jej deriváciu. Každý takejto funkcii priradíme T (čas), ktoré reprezentuje istú vlastnosť danej krivky.



Obrázok 2.2: Brachistochróna je časť nadol obrátenej cykloidy.

⁵Brachys = krátky, brachistos = najkratší.

Ďalší typický variačný problém je krivka iného druhu, zvaná reťazovka. Predstavme si, že máme v priestore dva body, na ktoré zavesíme tenučký dokonale ohybný drôt s rozložením hustoty λ . Platí teda:

$$dm = \lambda ds = \lambda \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

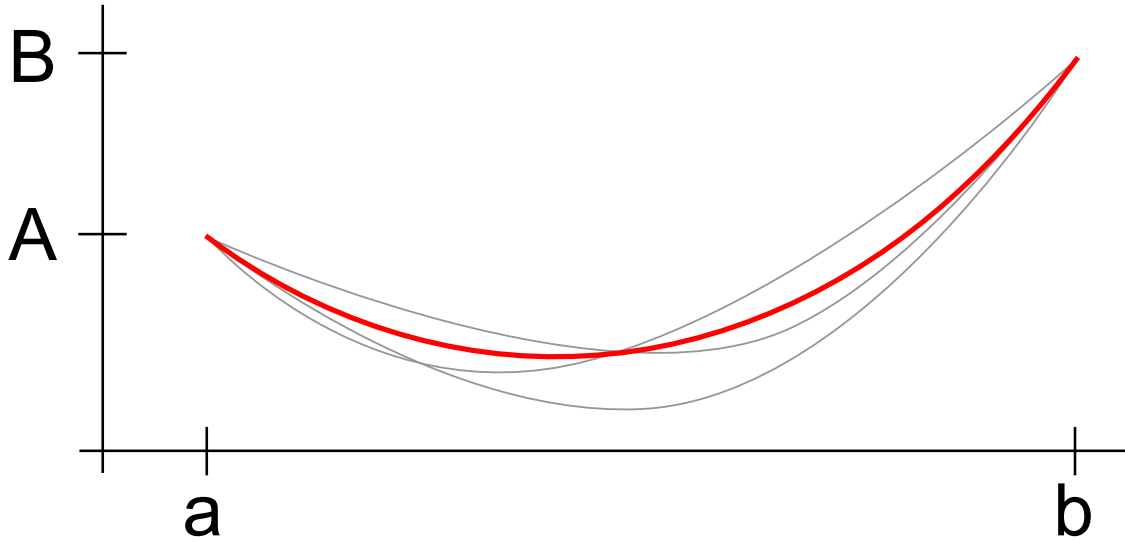
Potenciálna energia daného kúsku drôtu bude:

$$dU = dm g y = \lambda g y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Tentoraz sa poloha (tvar) drôtu zrejme ustáli v stave, kedy má čo najnižšiu celkovú potenciálnu energiu danú v tvare:

$$E_p = \int_a^b dU = \int_a^b \lambda g y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx; \quad \begin{array}{l} f(a) = A \\ f(b) = B \end{array} \quad (2.29)$$

Vidíme, že problém znovu vedie na extremalizáciu takéhoto funkcionálu.



Obrázok 2.3: Riešením tohto problému je krivka zvaná katenoid (catenary).

Doteraz sme zakaždým došli k výrazu typu:

$$\int_a^b \mathcal{L}(y, y', x) dx \quad (2.30)$$

kde $\mathcal{L}$ je nejaká funkcia premennej x , funkcie y a jej derivácie, ktorá nám prirodzene vyšla pri odvodzovaní tohto integrálu. Riešenie pre funkciu y sme mohli dostať minimalizáciou tohto integrálu. Táto úloha vyzerá veľmi obtiažne, hlavne keď nevieme, čím začať (napr. by nám mohlo napadnúť dosadzovať do integrálu rôzne funkcie a skúšať, kedy nám vyjde čo najmenšie číslo pre akékoľvek hranice). Teraz odvodíme metódu, akou sa možno dopracovať k výslednej funkcii, ktorá minimalizuje daný integrál. Zavedme teda označenie:

$$\mathcal{S}[y] = \int_a^b \mathcal{L}(y, y', x) dx \quad (2.31)$$

Predstavme si teraz, že máme nejakú funkciu $y(x)$. Zavedme maličkú odchýlku od tejto funkcie, δy . Pre všelijaké možné výchylky teda dostávame rôzne funkcie $y + \delta y$, ktoré sa od funkcie y líšia len o málo. Všetky však vychádzajú z toho istého bodu v $[a, y(a)]$ a končia v tom istom bode $[b, y(b)]$, preto teda platí $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$.

Skúmame hodnotu $\mathcal{S}$ pre takúto funkciu trošku zmenenú oproti pôvodnej:

$$\mathcal{S}[y + \delta y] = \int_a^b \mathcal{L}(y + \delta y, y' + (\delta y)', x) dx$$

Keďže δy je veľmi *malé* (spomeňme si na virtuálne posunutie v prvej kapitole), podintegrálnu funkciu môžeme rozvinúť do prvého rádu Taylorovho radu:

$$\mathcal{S}[y + \delta y] = \int_a^b \left\{ \mathcal{L}(y, y', x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} (\delta y)' \right\} dx$$

Chceme sa dopátrať k tomu, čo musí platiť, keď sme práve našli tú našu správnu funkciu, ktorá minimalizuje výraz $\mathcal{S}$. To ale znamená, že zmena tohto výrazu $\mathcal{S}$ sa nemení v ráde δy , ak jeho argument (čiže funkciu) zmeníme len o malú hodnotu δy - je to v podstate úplná analógia k extrémnej hladkej funkcii reálnej premennej, ktorá má extrém v tých bodoch, v ktorých je funkcia necitlivá na zmenu premennej do jej prvého rádu - inak povedané, jej prvá derivácia je rovná nule. Tu nemôžeme priveľmi hovoriť o deriváciách (pretože y je funkcia), no stále sa môžeme pozrieť na výraz $\mathcal{S}[y + \delta y] - \mathcal{S}[y]$, ktorý v podstate pripomína diferenciál $\mathcal{S}$, ak y berieme ako premennú:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[y + \delta y] - \mathcal{S}[y] &= \int_a^b \left\{ \mathcal{L}(y, y', x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} (\delta y)' \right\} dx - \int_a^b \mathcal{L}(y, y', x) dx = \\ &= \int_a^b \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} (\delta y)' \right\} dx \end{aligned}$$

Druhý výraz pod integrálom doplníme nasledovne:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} (\delta y)' = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \delta y \right)' - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \right)' \delta y$$

Z rozdielu $\mathcal{S}[y + \delta y] - \mathcal{S}[y]$ tak dostaneme:

$$\mathcal{S}[y + \delta y] - \mathcal{S}[y] = \int_a^b \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \right)' \right] \delta y \right\} dx + \int_a^b \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \delta y \right)' dx$$

V druhom integráli, keďže integrujeme deriváciu funkcie, je primitívna funkcia priamo $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \delta y$. Výsledok tohto integrálu teda bude:

$$\int_a^b \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \delta y \right)' dx = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \delta y \Big|_a^b = 0$$

Samozrejme, využili sme fakt, že $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$.

Prvý integrál napíšeme krajšie:

$$\mathcal{S}[y + \delta y] - \mathcal{S}[y] = \int_a^b \delta y(x) \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \right) dx$$

Musí samozrejme platiť, že pre také y , ktoré minimalizujú číslo $\mathcal{S}$, je tento výraz nulový. No to má platiť pre každé $\delta y(x)$, čo môže byť splnené len ak druhá časť (v zátvorke) pod integrálom je nulová⁶:

$$\forall \delta y(x) \int_a^b \delta y(x) \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \right) dx = 0 \implies \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = 0 \quad (2.32)$$

Túto rovnicu nazývame Eulerova rovnica, ktorá je vo všeobecnosti diferenciálna rovnica druhého rádu. Takéto diferenciálne rovnice na jednoznačné riešenie potrebujú okrajové podmienky, napr.: $y(a) = Y_a$ $y(b) = Y_b$, poprípade počiatočné podmienky, určujúce $y(a)$ a $y'(a)$. V priebehu odvodenia sme predpokladali existenciu y'' v každom bode intervalu $\langle a, b \rangle$, dostávame teda extrémaly triedy C^2 .

Ako príklad môžeme skúsiť vyriešiť problém pre najkratšiu cestu. Funkcia $\mathcal{L}$ definujúca tento problém bola:

$$\mathcal{L} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}$$

Takúto funkciu by sme mali dosadiť do Eulerovej rovnice a riešiť. Ešte kým sa pustíme do bezhlavého derivovania uvedomíme si, že v $\mathcal{L}$ nevystupuje explicitne y , čo ale znamená, že z Eulerovej rovnice ostane:

$$-\frac{d}{dx} \left(\frac{2y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0 \implies \frac{2y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C = \text{konšt.}$$

Túto rovnicu však vieme jednoducho riešiť:

$$\frac{2y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C \implies y'^2 = \frac{C^2}{1 - C^2} \implies y = kx + q$$

Konštanty k a q možno vybrať tak, aby boli splnené okrajové, alebo počiatočné podmienky.

Teraz veľmi sugestívne pod seba napíšeme Eulerovu rovnicu a inú rovnicu, ktorú sme doteraz už veľakrát používali:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} &= 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

⁶Vid' základná léma variačného počtu.

Pozorný čitateľ si všimne istú podobnosť, ktorá je v skutočnosti veľmi významná. Podľa jednoduchej schémy zameníme symboly:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L} & \cdots & L \\ y & \cdots & q \\ y' & \cdots & \dot{q} \\ x & \cdots & t \end{array}$$

V skutočnosti sú tieto dve rovnice úplne totožné po zámene symbolov. Pred chvíľou sme však tvrdili, že Eulerovu rovnicu rieši taká funkcia y , ktorá extremalizuje príslušný funkcionál a opačne, funkcie, ktoré extremalizujú funkcionál zároveň riešia Eulerove rovnice. Presne rovnaký princíp môžeme aplikovať na Lagrangeove rovnice a príslušný funkcionál budeme označovať jeho pravým menom - účinkom.

2.3.2 Účinok, princíp extremálneho účinku

Úplne analogicky definujme funkcionál pre Lagrangián, ktorý budeme nazývať *účinkom* (a označíme ho sugestívne S , ako analógiu ku $\mathcal{S}$):

$$S[\mathbf{q}] = \int_{t_a}^{t_b} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt \quad (2.34)$$

Posledná skladačka do schémy teda bude:

$$\begin{array}{ccc} \int_a^b \mathcal{L}(y, y', x) dx & \cdots & \int_{t_a}^{t_b} L(q, \dot{q}, t) dt \\ \mathcal{S}[y] & \cdots & S[q] \end{array}$$

Teraz môžeme sformulovať princíp extremálneho účinku nasledovne: účinok $S[\mathbf{q}]$ je extrémny na takých trajektóriách $q(t)$, ktoré si príroda sama vybrala. Zároveň platí, že tieto $q(t)$ sú riešeniami Lagrangeových rovníc. Ak do $L(q, \dot{q}, t)$ dosadíme také q , ktoré nám vyjde z riešenia Lagrangeových rovníc, potom účinok $S[\mathbf{q}]$ bude necitlivý na zmenu v prvom ráde δq . Inak povedané, účinok $S[\mathbf{q}]$ má extrém tam, kde je riešenie Lagrangeových rovníc v q .

System extremalizuje účinok $\Leftrightarrow$ System beží podľa Lagrangeových rovníc

Ešte spomenieme, že z hľadiska účinku sa úlohy delia na variačné, teda také, pre ktoré účinok existuje a nevariačné, pre ktoré účinok neexistuje.

2.4 Hamiltonove rovnice

Odvozenie Hamiltonových rovníc bude vychádzať z Lagrangeových rovníc II. druhu, ešte predtým si však dovoľme uviesť matematickú poznámku o Legendrovej transformácii.

2.4.1 Legendreova transformácia

Predstavme si, zatiaľ bez zjavnej motivácie, že by sme chceli istým zvláštnym spôsobom definovať transformáciu súradníc, ktoré máme k dispozícii:

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

Zaveďme funkciu L , závislú od súradníc x_i , na ktorú zatiaľ nenaložíme žiadne predpoklady okrem možnosti diferencovateľnosti tejto funkcie podľa jednotlivých súradníc. Radi by sme teraz získali súradnice $y_1, y_2, \dots, y_n$ podľa nasledovnej definície:

$$y_i = \frac{\partial L}{\partial x_i} \quad (2.35)$$

Symbolicky túto transformáciu naznačíme nasledovným diagramom:

$$\mathbf{x} \xrightarrow{L} \mathbf{y}(\mathbf{x}),$$

ktorý symbolicky značí transformáciu súradníc x_i pomocou funkcie L .

Radi by sme teraz poznali transformáciu, ktorá by previedla súradnice y_i späť na x_i . Ešte radšej by sme boli, ak by bola takáto transformácia realizovateľná za pomoci nejakej funkcie H premenných $y_1, y_2, \dots, y_n$, o ktorej platí:

$$x_i = \frac{\partial H}{\partial y_i} \quad (2.36)$$

Symbolicky:

$$\mathbf{y} \xrightarrow{H} \mathbf{x}(\mathbf{y}),$$

Ukazuje sa, že funkcia, ktorá spĺňa túto podmienku, je nasledujúceho tvaru:

$$H(\mathbf{y}) = x_i(\mathbf{y})y_i - L[\mathbf{x}(\mathbf{y})] \quad (2.37)$$

Zderivovaním takto vybranej funkcie H podľa y_i dostaneme:

$$\frac{\partial H}{\partial y_i} = y_j \frac{\partial x_j}{\partial y_i} + x_i - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_i}}_{=y_j} = y_j \frac{\partial x_j}{\partial y_i} - y_j \frac{\partial x_j}{\partial y_i} + x_i = x_i$$

Vidíme, že funkcia H spĺňa presne to, čo od nej požadujeme.

Majme teraz súradnice $x_1, x_2, \dots, x_n$ a $z_1, z_2, \dots, z_n$ z ktorých chceme transformovať len x_i na y_i . Máme teda funkciu $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, o ktorej platí:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \xrightarrow{L} (\mathbf{y}, \mathbf{z})$$

Teda stále zdanlivo bezo zmeny (až na prítomnosť iných premenných vo funkcii L , okrem $\mathbf{x}$) platí:

$$y_i = \frac{\partial L}{\partial x_i}$$

Aj k takejto transformácii by sme si priali nájsť funkciu H , ktorá analogicky zabezpečí transformáciu opačným smerom, bezo zmeny súradníc $\mathbf{z}$:

$$(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \xrightarrow{H} (\mathbf{x}, \mathbf{z})$$

$$x_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}$$

Funkcia H má kupodivu rovnaký tvar ako predtým a spĺňa rovnakú podmienku:

$$H(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = x_i(\mathbf{y}, \mathbf{z})y_i - L(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{z}) \quad (2.38)$$

Presvedčíme sa o tom úplne rovnako ako v predošlom prípade.

Skúmame teraz diferenciál funkcie H podľa vzťahu (2.38):

$$dH = x_i dy_i + \underbrace{y_i dx_i - \frac{\partial L}{\partial x_i} dx_i}_{=y_i dx_i} - \frac{\partial L}{\partial z_i} dz_i = x_i dy_i - \frac{\partial L}{\partial z_i} dz_i$$

Zároveň ale môžeme nájsť diferenciál H podľa premenných x_i a z_i :

$$dH = \frac{\partial H}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial H}{\partial z_i} dz_i$$

Teraz porovnáme, čo stojí pri jednotlivých diferenciáloch a dostaneme dva dôležité výsledky:

$$x_i = \frac{\partial H}{\partial y_i} \quad - \frac{\partial L}{\partial z_i} = \frac{\partial H}{\partial z_i} \quad (2.39)$$

Ten prvý nás vlastne utvrdil v tom, že funkcia H naozaj robí to, čo má (na to bola skonštruovaná). Druhý výsledok nám zatiaľ nič rozumného nehovorí, no bude dôležitý neskôr.

2.4.2 Hamiltonove rovnice

Vychádzajme z Lagrangeových rovníc. Za funkciu L si⁷ zoberme Lagrangián nejakej sústavy $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$. Ako i -tu zovšeobecnenú hybnosť, p_i , označme parciálnu deriváciu Lagrangiánu L podľa i -tej zovšeobecnenej rýchlosti $\dot{q}_i$:

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.40)$$

$$(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \xrightarrow{L} (\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$$

Vidíme, že úlohu $\mathbf{x}$ tu prebrala vlastne zovšeobecnená rýchlosť $\dot{\mathbf{q}}$, ktorá sa transformuje na zovšeobecnenú hybnosť $\mathbf{p}$, pričom zovšeobecnené súradnice $\mathbf{q}$ a čas t ostávajú nemenné, prebrali teda úlohu $\mathbf{z}$.

Funkciu, ktorá transformuje hybnosť späť na zovšeobecnenú rýchlosť, a ktorú budeme volať Hamiltonián sústavy, bude podľa (2.38) definovaná nasledovne:

$$H \equiv \dot{q}_i p_i - L \quad (2.41)$$

Z (2.39) dostávame:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} \quad \wedge \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i \implies \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Sústava teda spĺňa *Hamiltonove rovnice*:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Príklad: rovinné matematické kyvadlo v Hamiltonových rovniciach. Ako vieme z predošlých príkladov, Lagrangián tejto sústavy je:

$$L(\varphi, \dot{\varphi}, t) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + m g l \cos(\varphi)$$

Pre Hamiltonián z 2.41 dostávame:

$$H = \underbrace{\dot{\varphi} m l^2 \dot{\varphi}}_{p_\varphi} - \left[\frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + m g l \cos(\varphi) \right]$$

$$p_\varphi = m l^2 \dot{\varphi} \implies \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m l^2}$$

$$\implies H = \frac{p_\varphi^2}{2 m l^2} - m g l \cos(\varphi)$$

Hamiltonove rovnice:

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m l^2} \quad \dot{p}_\varphi = -m g l \sin(\varphi)$$

⁷Ako sme už sugestívne v matematickej poznámke naznačili označením funkcie písmenkom L .

Ako vidíme, tieto rovnice sú očividne dve. Obe spolu, ako sústava diferenciálnych rovníc sú ekvivalentné rovnici rovinného matematického kyvadla:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin(\varphi) = 0$$

Zároveň však vidíme, že derivácie, ktoré sa v Hamiltonových rovniciach objavujú, sú nanaajvyš prvého rádu (narozdiel od Lagrangeových rovníc). Ich riešeniami sú okrem zovšeobecných súradníc aj zovšeobecnené hybnosti.

Všeobecne platí, že Hamiltonových rovníc je dvojnásobok oproti Lagrangeovým rovniciam, no ich rád derivácie je zredukovaný na prvý.

V priebehu odvodenia Hamiltoniánu (to je funkcia, v ktorej už nevystupuje žiadna súradnica derivovaná podľa času) sme museli upraviť tvar samotnej funkcie tak, aby sa v ňom neobjavilo $\dot{\varphi}$. Tento postup sa dá vyjadriť všeobecne. O Lagrangiáne vieme, že sa (pre potenciálnu energiu závislú len od zovšeobecnených súradníc) dá zapísať v tvare:

$$L = \frac{1}{2} T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - U(\mathbf{q})$$

Z (2.40) vieme, čomu je rovná i -ta zovšeobecnená hybnosť:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = T_{ij} \dot{q}_j$$

Túto hybnosť dosadíme do (2.41):

$$H = p_j \dot{q}_j - L = T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - L = 2T - (T - U) = T + U = E$$

Dostali sme dôležitý výsledok vyjadrujúci, že Hamiltonián je vlastne rovný celkovej energii sústavy. Vyjadriť si ešte raz Hamiltonián, tentoraz len pomocou zovšeobecnených rýchlostí a súradníc:

$$H = T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - L = T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{1}{2} T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + U = \frac{1}{2} T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + U$$

Budeme hľadať spôsob, ako vyjadriť jednotlivé zovšeobecnené rýchlosti pomocou zovšeobecnených hybností:

$$p_i = T_{ij} \dot{q}_j \implies \dot{q}_i = (T^{-1})_{ij} p_j$$

Hamiltonián tak prejde na tvar:

$$H = \frac{1}{2} T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + U = \frac{1}{2} T_{ij} (T^{-1})_{ik} p_k (T^{-1})_{lj} p_l + U$$

Matica T_{ij} je symetrická. Z toho vyplýva, že aj matica $(T^{-1})_{ij}$ je symetrická, teda platí:

$$T_{ij} = T_{ji} \implies (T^{-1})_{ij} = (T^{-1})_{ji}$$

Vráťme sa teda k Hamiltoniánu, kde túto symetriu využijeme:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} T_{ij} (T^{-1})_{ik} (T^{-1})_{lj} p_k p_l + U = \frac{1}{2} \underbrace{T_{ji} (T^{-1})_{ik}}_{=(T T^{-1})_{jk}} (T^{-1})_{lj} p_k p_l + U = \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{(T T^{-1})_{jk}}_{=\delta_{jk}} (T^{-1})_{lj} p_k p_l + U = \frac{1}{2} (T^{-1})_{kl} p_k p_l + U \end{aligned}$$

Dostávame teda tvar Hamiltoniánu, ktorý vieme vyjadriť ak poznáme maticu kinetickej energie, T :

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} (T^{-1})_{kl} p_k p_l + U(\mathbf{q})$$

2.4.3 Poissonove zátvorky

Majme danú funkciu f zovšeobecnených súradníc, zovšeobecnených hybností a času. Počítajme jej časovú deriváciu (totálnu):

$$\begin{aligned} \dot{f}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \underbrace{\dot{q}_i}_{\frac{\partial H}{\partial p_i}} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \underbrace{\dot{p}_i}_{-\frac{\partial H}{\partial q_i}} = \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \end{aligned}$$

Objekt v guľatej zátvorke nazveme *Poissonovou zátvorkou*:

$$\{f, H\} \equiv \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (2.43)$$

Analogicky Poissonova zátvorka z dvoch ľubovoľných funkcií, f a g , je definovaná nasledovne:

$$\{f, g\} \equiv \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \quad (2.44)$$

Je zrejmé, že ak vo funkcií f nevystupuje explicitne čas t , potom jej časová derivácia je rovná Poissonovej zátvorke Hamiltoniánu s danou funkciou:

$$f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \implies \dot{f} = \{f, H\}$$

Poissonova zátvorka dvoch rovnakých funkcií je nulová:

$$\{f, f\} = \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} = 0$$

Poissonova zátvorka $\{q_i, p_j\}$ je rovná δ_{ij} :

$$\{q_i, p_j\} = \frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} = \delta_{ij}$$

čo je jedna, ak je sústava opísaná len jednou zovšeobecnenou súradnicou a hybnosťou.

Ak Poissonove zátvorky chápeme ako operátor, ktorý z priestoru funkcií vyberie dve a priradí im tretiu funkciu, potom takýto operátor je bilineárny:

$$\begin{aligned} \{f + \lambda g, h\} &= \{f, h\} + \lambda \{g, h\} \\ \{f, g + \lambda h\} &= \{f, g\} + \lambda \{f, h\} \end{aligned}$$

Poissonove zátvorky sú taktiež antisymetrické (zmenia znamienko po výmene argumentov):

$$\{f, g\} = -\{g, f\}$$

V tomto vidieť analógiu s vektorovým súčinom, ktorý po výmene argumentov (vektorov) tiež zmení znamienko. Ďalšiu analógiu uvidíme v takzvanej Jacobiho identite, ktorú poissonove zátvorky, tak ako aj vektorový súčin, spĺňajú:

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$$

Poissonove zátvorky majú svoju analógiu v kvantovej mechanike, kde namiesto nich používame komutátor $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$, kde $\hat{A}$ a $\hat{B}$ sú operátory. Komutátor tiež spĺňa Jacobiho identitu a komutátor operátora polohy a operátora hybnosti je rovný $i\hbar$, $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$.

Ďalšie aplikácie Lagrangeovského a Hamiltonovského prístupu v mechanike

3.1 Potenciálna energia a sila*

3.1.1 Zovšeobecnená potenciálna energia*

Doteraz sme sa zaoberali len aktívnymi silami, ktoré závisia explicitne len od polohy a k nim prislúchajúcimi potenciálmi, ktoré taktiež závisia len od polohy. Ukážeme si, že aj niektoré sily, ktoré závisia od vyššej derivácie polohy, popr. času, je možné opísať potenciálom a to dokonca aj vtedy, ak nie sú potenciálové¹. Najprv však musíme poupraviť výpočet potenciálu, ak má závisieť aj od zovšeobecnených rýchlostí a času, nielen od zovšeobecnených súradníc. Podľa (2.22) pre Q_i závislé aj od času a zovšeobecnených rýchlostí píšeme:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i(q, \dot{q}, t)$$

Nech je teraz dané $Q_i(q, \dot{q}, t)$ opísateľné jedinou funkciou $U(q, \dot{q}, t)$ tak, že stále platí $L = T - U$ a zároveň platí pre toto L pohybová rovnica pre q_i :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_i} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i} \right) &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} &= \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i}}_{=Q_i(q, \dot{q}, t)} \\ Q_i(q, \dot{q}, t) &= -\frac{\partial U(q, \dot{q}, t)}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Vhodným príkladom na takúto silu je Lorentzova elektromagnetická sila, daná predpisom:

$$\vec{F} = \mathcal{Q}(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

¹Nie sú potenciálové v zmysle, že krivkový integrál II. druhu v ich poli závisí od výberu krivky.

To, či je táto sila potenciálová v zmysle, že krivkový integrál II. druhu v poli tejto sily nezávisí od krivky, po ktorej integrujeme, sa dá ľahko preveriť. Tento fakt je totiž ekvivalentný tomu, že krivkový integrál po niektorej *uzavretej* krivke nevýjde nulový. Počítajme teda taký krivkový integrál po niektorej bližšie nešpecifikovanej uzavretej krivke:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \oint_C d\vec{l} \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} + \oint_C d\vec{l} \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

Na integrál $\vec{E} \cdot d\vec{l}$ máme jednoduchý liek, je ním Faradayov zákon elektromagnetickej indukcie. Problém môže robiť druhý integrál, prepíšme si výraz $d\vec{l} \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$ do indexov a upravujeme:

$$d\vec{l} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = dl_i (\vec{v} \times \vec{B})_i = dl_i \varepsilon_{ijk} v_j B_k = B_k \varepsilon_{kij} dl_i v_j = \vec{B} \cdot (d\vec{l} \times \vec{v})$$

Avšak tento výraz je identicky rovný nule, pretože v každom bode krivky je rýchlosť hmotného bodu, ktorý sa po nej pohybuje, dotyčnicou k tejto krivke. No rovnaký smer má aj diferenciál tejto krivky, teda platí:

$$d\vec{l} \parallel \vec{v} \implies d\vec{l} \times \vec{v} = \vec{0}$$

Druhý integrál je týmto vybavený, je identicky rovný nule. Ostáva nám výraz:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Tu využijeme spomínaný Faradayov zákon elektromagnetickej indukcie, ktorý vraví: elektromotorické napätie je dané zápornou časovou zmenou toku magnetického poľa. Zapísané v reči matematiky:

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

V tomto kroku sa zdanlivo vzdialime od práve počítaného výrazu a pozrieme sa na jednu z maxwellových rovníc:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Toto platí vždy, za každých okolností, teda to nás oprávňuje zaviesť vektor $\vec{A}$, magnetický potenciál, ktorý bude spĺňať rovnicu:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{3.2}$$

Je tomu tak preto, lebo divergencia rotácie je vždy identicky rovná nule:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \equiv 0$$

Vráťme sa k počítanému výrazu, kde využijeme (3.2):

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

V tejto chvíli začína byť zrejmé, že časovo premenné magnetické polia už nebudú generovať potenciálové sily. Dokončíme odvodenie - na ľavú stranu použijeme Kelvin-Stokesovu vetu:

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S}$$

Tento výraz dáme do rovnosti s magnetickým indukčným tokom a využijeme vetu o derivovaní parametrického integrálu:

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = -\iint_S \left(\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

Všetko presunieme na ľavú stranu a vložíme pod jeden integrál:

$$\iint_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} + \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\forall S)$$

Toto má ale platiť pre každú plochu S , čo môže byť splnené len vtedy, ak vnútro integrálu je rovné nule:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$$

Ešte výraz upravíme tak, že vložíme $\vec{E}$ aj $\partial_t \vec{A}$ pod operátor rotácie:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (3.3)$$

Okrem faktu, že Lorentzova sila je vo všeobecnom prípade nekonzervatívna, dostávame veľmi zaujímavý výsledok. Pre úplne všeobecné polia $\vec{E}$ a $\vec{B}$ už neplatí, že rotácia $\vec{E}$ je nulová. Platí však rovnaký vzťah, ak k nej pripočítame opravný člen - práve časovú zmenu magnetického potenciálu. Preto teraz môžeme zaviesť potenciál ϕ tak, aby platilo:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \phi \quad (3.4)$$

Potom rovnica (3.3) bude automaticky splnená:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla} \phi) = -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = \vec{0}$$

Podľa (3.2) a (3.4) môžeme napísať potenciál Lorentzovej sily, o ktorého platnosti s využitím (3.4) sa presvedčíme na pár nasledujúcich riadkoch:

$$U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \mathcal{Q}(\phi - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A})$$

Podľa (3.1) má teda pre tento potenciál (v súradniciach $x_i, \dot{x}_i$) platiť:

$$F_i = \mathcal{Q} \left[E_i + \left(\dot{\vec{r}} \times \vec{B} \right)_i \right] \stackrel{?}{=} -\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i}; \quad \text{kde } U = \mathcal{Q}(\phi - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A})$$

Túto rovnosť teraz overíme:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial U}{\partial x_i} &= -\mathcal{Q} \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) = -\mathcal{Q} \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi - \dot{x}_j A_j) = -\mathcal{Q} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \mathcal{Q} \dot{x}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \\
 &\quad -\mathcal{Q} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\mathcal{Q} (\vec{\nabla} \phi)_i = \mathcal{Q} E_i + \mathcal{Q} \frac{\partial A_i}{\partial t} \\
 \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} &= \mathcal{Q} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} (\phi - \vec{v} \cdot \vec{A}) \right] = \mathcal{Q} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} (\phi - \dot{x}_j A_j) \right] = -\mathcal{Q} \frac{d}{dt} (\delta_{ij} A_j) = -\mathcal{Q} \frac{dA_i}{dt} \\
 &\quad -\mathcal{Q} \frac{dA_i}{dt} = -\mathcal{Q} \frac{\partial A_i}{\partial t} - \mathcal{Q} \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \dot{x}_j \\
 -\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} &= \mathcal{Q} \left(E_i + \frac{\partial A_i}{\partial t} + \dot{x}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \dot{x}_j \right) = \mathcal{Q} \left[E_i + \dot{x}_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Ostáva nám jeden nevyjasnený výraz v zátvorke. Počítajme $\dot{\vec{r}} \times \vec{B} = \dot{\vec{r}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$:

$$\begin{aligned}
 B_j &= (\vec{\nabla} \times \vec{A})_j = \varepsilon_{jab} \frac{\partial A_b}{\partial x_a} \\
 (\dot{\vec{r}} \times \vec{B})_i &= \varepsilon_{ikj} \dot{x}_k B_j = \varepsilon_{ikj} \varepsilon_{jab} \dot{x}_k \frac{\partial A_b}{\partial x_a} = (\delta_{ia} \delta_{kb} - \delta_{ib} \delta_{ka}) \dot{x}_k \frac{\partial A_b}{\partial x_a} = \dot{x}_k \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \dot{x}_k \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \\
 \implies (\dot{\vec{r}} \times \vec{B})_i &= [\dot{\vec{r}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})]_i = \dot{x}_k \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right)
 \end{aligned}$$

teda daný nevyjasnený výraz je presne to, čo má na tom mieste stáť, výraz $-\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i}$ dáva i -tu zložku Lorentzovej sily:

$$-\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} = \mathcal{Q} \left[E_i + (\dot{\vec{r}} \times \vec{B})_i \right] = F_i$$

čím je dôkaz zavŕšený.

Ďalšia silu, ktorej sa pokúsime nájsť zovšeobecnenú potenciálnu energiu, bude tretia sila. Jej predpis v kartézskych súradniciach je:

$$\vec{F} = -k\dot{\vec{r}} \implies F_i = -k\dot{x}_i; \quad k > 0 \quad (3.5)$$

Odvodenie spravíme všeobecnejšie, a to pre zovšeobecnené súradnice a rýchlosti. Ukazuje sa, že prepis tretej sily $Q_i(\dot{\mathbf{q}})$ bude o trochu zložitejší:

$$\vec{Q} = - \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix} \implies Q_i = -k_{ij}\dot{q}_j; \quad k_{ij} \text{ je kladne definitná a symetrická matica}^2 \quad (3.6)$$

Vo všeobecnosti nepredpokladáme, že po zavedení parametrizácie konfiguračného priestoru, bude naďalej platiť, že pri pohybe v smere niektorej zo súradníc q_i bude tretia sila pôsobiť presne opačne. Avšak, môžeme si byť istí, že ak platí (3.6), tak najhoršie, čo nás môže z hľadiska odporu stretnúť, je vo všeobecnosti nanajvýš lineárny vzťah medzi zovšeobecnenými rýchlosťami $\dot{\mathbf{q}}$ a trecou silou $\mathbf{Q}$.

Pre takúto silu by sme radi napísali potenciálnu energiu U , ktorá je vo všeobecnosti závislá na zovšeobecnených súradniciach, rýchlostiach a čase a podľa (3.1) preň bude platiť:

$$-\frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = -k_{ij}\dot{q}_j$$

O tomto potenciáli zatiaľ nič nevieme, podľa si teda rozpísať ľavú stranu rovnice:

$$-\frac{\partial U}{\partial q_i} + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_j \frac{\partial}{\partial q_j} + \ddot{q}_j \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \right) = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial \dot{q}_i} + \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial \dot{q}_i} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} \ddot{q}_j \stackrel{!}{=} -k_{ij}\dot{q}_j = Q_i(\dot{\mathbf{q}})$$

Vidíme, že vzhľadom na to, že Q_i má závisieť len od $\dot{\mathbf{q}}$, člen, pri ktorom stojí $\ddot{q}_j$ musí byť nulový:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} \stackrel{!}{=} 0$$

O čom nám vlastne hovorí táto podmienka? Hovorí, že druhá parciálna derivácia potenciálnej energie podľa zovšeobecnených rýchlostí dá nulu. To však znamená, že samotná potenciálna energia musí závisieť od zovšeobecnených rýchlostí nanajvýš lineárne:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} \stackrel{!}{=} 0 \implies U(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \stackrel{!}{=} a_i(\mathbf{q}, t) \dot{q}_i + b(\mathbf{q}, t)$$

Vďaka tejto podmienke vypadne neželaný člen, ktorý obsahoval $\ddot{q}_j$. Ďalšie pozorovanie, ktoré urobíme, sa bude týkať časových závislostí:

$$-\frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial \dot{q}_i} + \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial \dot{q}_i} \dot{q}_j = -\frac{\partial a_j}{\partial q_i} \dot{q}_j - \frac{\partial b}{\partial q_i} + \frac{\partial a_i}{\partial t} + \frac{\partial a_i}{\partial q_j} \dot{q}_j = \left(\frac{\partial a_i}{\partial q_j} - \frac{\partial a_j}{\partial q_i} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial a_i}{\partial t} - \frac{\partial b}{\partial q_i}$$

Q_i má byť funkciou $\dot{\mathbf{q}}$, no dva posledné členy už nemajú šancu byť funkciou $\dot{\mathbf{q}}$ (pretože a_i aj b sú funkciami $\mathbf{q}$ a t). Musí teda platiť, že tieto členy sú nulové:

$$\frac{\partial a_i}{\partial t} = 0 \implies a_i(\mathbf{q}, t) = a_i(\mathbf{q}); \quad -\frac{\partial b}{\partial q_i} = 0 \implies b(\mathbf{q}, t) = b(t)$$

²To, že matica k_{ij} je kladne definitná môžeme intuitívne nahliadnuť z analógie s trecou silou v kartézskych súradniciach. Ak by sa to nepodarilo, ešte existuje argument, ku ktorému dôjdeme neskôr. Jej symetriu tiež poľahky ukážeme neskôr.

V hre ostane jediný člen:

$$\left(\frac{\partial a_i}{\partial q_j} - \frac{\partial a_j}{\partial q_i} \right) \dot{q}_j \stackrel{!}{=} -k_{ij} \dot{q}_j$$

Avšak toto je problém. Výraz na ľavej strane:

$$\tilde{a}_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial q_j} - \frac{\partial a_j}{\partial q_i}$$

je totiž antisymetrická matica, pretože platí:

$$\tilde{a}_{ij} = -\tilde{a}_{ji},$$

čo okrem iného znamená, že $\tilde{a}_{11} = \tilde{a}_{22} = \tilde{a}_{33} = 0$. Avšak pre maticu k_{ij} platí:

$$k_{ij} = k_{ji},$$

čo je v priamom rozpore s $\tilde{a}_{ij}$.³

Presvedčili sme sa, že neexistuje potenciálna energia (ani zovšeobecnená), ktorá by vedela v sebe zahrnúť treciu silu. Tento fakt je nám motiváciou ku ďalšiemu paragrafu, kde si povieme niečo o tom, ako narábať s nepotenciálovými silami v Lagrangeových rovniciach.

³Túto neexistenciu sme ukázali len pre Lagrangian, ktorý má štruktúru $L = T - U = \frac{1}{2} T_{ab} \dot{q}_a \dot{q}_b - U(q, \dot{q}, t)$. Existuje taká štruktúra Lagrangianu, že problém hmotného bodu v odporovom prostredí zapísaný v tomto Lagrangeane bude mať svoju pohybovú rovnicu (ekvivalentnú s Newtonovou) v tvare:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Ľahko sa ukáže, že Lagrangian pre jednu časticu v smere x , ktorý vedie na pohybovú rovnicu s odporovým členom, je v tvare:

$$L = e^{\frac{\gamma t}{m}} (T - U) = e^{\frac{\gamma t}{m}} \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - U(x) \right]$$

Takýto tvar Lagrangianu vedie na pohybovú rovnicu v tvare:

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} - \gamma \dot{x}$$

Tento Lagrangian ale závisí od času explicitne a nie je tvaru $T - U$.

3.1.2 Nepotenciálová zložka sily a jej výkon*

V predošlom paragrafe sme si na príklade o tretej sile ukázali, že neexistuje taká zovšeobecnená potenciálna energia, ktorá by v sebe zahŕňala takúto silu. Na tento problém z hľadiska Lagrangeových rovníc existuje jednoduché riešenie. Predpokladajme, že máme silu, ktorá sa dá napísať ako súčet potenciálovej a nepotenciálovej časti. Môžeme rovno rátať s tým, že potenciálová časť závisí len od zovšeobecnených súradníc a dá sa vyjadriť pomocou gradientu nejakého potenciálu:

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + \tilde{Q}_i$$

Ukážeme si, na aký tvar prejdú pohybové rovnice s takouto silou. Z (2.22) dostávame:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + \tilde{Q}_i$$

Znovu zavedme Lagrangián, tentoraz ako rozdiel kinetickej energie a potenciálnej energie potenciálovej zložky sily, $L = T - U$. Z tejto rovnice teda dostaneme⁴:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}}_{=0} + \frac{\partial U}{\partial q_i} &= \tilde{Q}_i \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_i} &= \tilde{Q}_i \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} &= \tilde{Q}_i \end{aligned} \quad (3.7)$$

Budeme situáciu znovu skúmať za predpokladu, že čas nevstúpi explicitne do Lagrangiánu. Platí:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

Za tejto podmienky skúmame výraz $\tilde{Q}_i \dot{q}_i$:

$$\tilde{Q}_i \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad (3.8)$$

Tento výraz je v platný zmysle Einsteinovej sumačnej konvencie - vezmeme Lagrangeovu rovnicu pre prvú zovšeobecnenú súradnicu, prenášobíme ju prvou zovšeobecnenou rýchlosťou a k nej pripočítame druhú rovnicu prenášobenú druhou zovšeobecnenou rýchlosťou atď.

Urobíme užitočné pozorovanie:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \implies \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i$$

Toto využijeme v (3.8):

$$\tilde{Q}_i \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad (3.9)$$

⁴Pripomíname, že táto štruktúra nie je povinná. Nikto nediktuje, ktorú konkrétnu časť síl musí človek zahrnúť do U - ak je vyjadrovanie potenciálu danej sily príliš zložitá, nič nebráni v presunutí celej sily (teda aj potenciálovej časti) na pravú stranu. Dôvodom, prečo sa tieto rovnice nenechali v tvare (2.22), je úzky súvis medzi Lagrangeovými rovnicami v tvare:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

a účinkovým integrálom z Lagrangiánu.

Teraz počítajme totálnu časovú deriváciu $\dot{L}$:

$$\frac{dL}{dt} = \dot{L} = \cancel{\frac{\partial L}{\partial t}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \ddot{q}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \ddot{q}_i$$

No presne tento výraz sa nachádza so záporným znamienkom v (3.9):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \ddot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i}_{=-\dot{L}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - \dot{L} \quad (3.10)$$

Na výraz $\frac{d}{dt} \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)$ sme narazili už niekoľkokrát:

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{1}{2} T_{ab} \dot{q}_a \dot{q}_b \right) \dot{q}_i \right] = \frac{d}{dt} (T_{ib} \dot{q}_b \dot{q}_i) = \frac{d}{dt} (2T) = 2\dot{T}$$

Teda z rovnice (3.10) dostávame:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_i \dot{q}_i &= \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \dot{L} = 2\dot{T} - (\dot{T} - \dot{U}) = \dot{T} + \dot{U} = \dot{E} \\ \dot{E} &= \tilde{Q}_i \dot{q}_i \end{aligned} \quad (3.11)$$

Vzťah $\dot{E} = \tilde{Q}_i \dot{q}_i$ vlastne udáva výkon nepotenciálovej zložky sily. Ak je sila nepotenciálová, potom sa pri nevstupovaní času do Lagrangiánu nezachováva energia (to je prípad $\dot{E} = 0$), ale dostávame vzťah pre výkon.

Vráťme sa teraz k príkladu o trecích silách. V podstate empiricky sme došli k tvrdeniu, že trecie sily možno reprezentovať lineárnou formou:

$$Q_i = -k_{ij} \dot{q}_j$$

Ak sa pokúsime nájsť výkon trecej sily pre jednu časticu, podľa (3.11) dostaneme (celá sila sa v tomto prípade ukrýje do nepotenciálovej časti, preto $Q_i = \tilde{Q}_i$):

$$P = Q_i \dot{q}_i = -k_{ij} \dot{q}_j \dot{q}_i$$

Lenže tento výkon musí mať logicky vždy zápornú hodnotu až na prípad, keď sú všetky zovšeobecnené rýchlosti nulové (statický prípad). Ak by to tak nebolo, dostali by sme prípad, keď sa systém nejakým spôsobom pohybuje, no výkon je kladný (energia narastá), alebo nulový (ne stráca sa), čo neznie pravdepodobne. Vzhľadom na to, že výkon P je daný kvadratickou formou $-k_{ij} \dot{q}_j \dot{q}_i$ a platí, že je záporný práve vtedy, keď aspoň jedna zo zovšeobecnených rýchlostí $\dot{q}$ nie je nulová, potom táto kvadratická forma je *záporne definitná*. To ale znamená, že matica tejto formy je záporne definitná. Touto maticou je $-k_{ij}$, teda samotná matica k_{ij} musí byť *kladne definitná*.

Samotné odvodenie symetrie matice k_{ij} vyplýva ako priamy dôsledok definície (2.19) zovšeobecnených síl:

$$Q_i = \bar{F}_j^a \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_i}$$

Vieme, že v kartézskych súradniciach je naša trecia sila vyjadrená v tvare (pre nejakých N bodov, vo všeobecnosti s rôznymi koeficientami trenia):

$$\vec{F}_k = -K_k \dot{\vec{r}}_k$$

kde $\vec{F}_k$ je trecia sila k -teho hmotného bodu v sústave, $1 \leq k \leq N$, K_k je jeho trecí koeficient a $\dot{\vec{r}}_k$ jeho rýchlosť.

Potom z (2.19) dostávame:

$$Q_i = \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} = - \sum_{k=1}^N K_k \dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} = - \sum_{k=1}^N K_k \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_m} \dot{q}_m \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} = - \sum_{k=1}^N K_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_m} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_m$$

Označme teraz:

$$\sum_{k=1}^N K_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \equiv k_{ij}$$

Potom trecia sila v zovšeobecnených súradniciach prejde na tvar:

$$Q_i = -k_{ij} \dot{q}_j$$

kde k_{ij} spĺňa symetriu⁵:

$$\sum_{k=1}^N K_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^N K_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \implies k_{ij} = k_{ji}$$

⁵Symetria je splnená pre najjednoduchší prípad, kedy sme predpokladali, že trecia sila pre každý hmotný bod v nejakej sústave hmotných bodov je závislá len lineárne od rýchlosti daného hmotného bodu:

$$F_i = -K_{ij} \dot{x}_j$$

Ďalší predpoklad bol, že $K_{ij} = K \delta_{ij}$, teda trecia sila pôsobí v smere opačnom voči smeru pohybu hmotného bodu $\vec{r}$ ($\vec{F} \parallel \dot{\vec{r}}$). Existujú samozrejme aj zložitejšie koncepty trenia. Napríklad teleso, ktoré sa pohybuje v tekutom prostredí, je brzdené trením, ktoré pre vysoké hodnoty Reynoldsovho čísla závisí od druhej mocniny rýchlosti pohybu telesa voči prostrediu. Pre také trenie však linearita nemôže byť splnená už len z princípu kvadratického odporu.

3.2 Fázový priestor

Pokiaľ sme pracovali s Lagrangeovými rovnicami, mali sme definovaný konfiguračný priestor, v ktorom mali súradnice $\mathbf{q}$ dovolené sa pohybovať. Keď sme prešli ku Hamiltonovým rovniciam, zdvojnásobil sa počet premenných, ktoré vstupujú do týchto rovníc. Pre tieto premenné zavedieme pojem fázového priestoru, čo je priestor, v ktorom majú dovolené hýbať sa práve zovšeobecnené súradnice a zovšeobecnené hybnosti.

3.2.1 Kvalitatívne riešenie Hamiltonových rovníc*

Predstavme si, kvôli jednoduchosti, že náš systém je opísaný práve jednou zovšeobecnenou súradnicou φ . Fázový priestor teda bude rovina, kde na jednej osi bude aktuálna hodnota φ a na druhej hodnota p_φ . Tieto súradnice majú vyhovovať Hamiltonovým rovniciam, samozrejme aj s počiatočnými podmienkami. Do fázového priestoru sa nám počiatočná podmienka premietne existenciou nejakého φ_0 a p_{φ_0} - stav systému v čase $t = 0$ (alebo inom počiatočnom čase t_0). Z tohto bodu môžeme vychádzať ďalej. Hamiltonove rovnice nám totiž jednoznačne hovoria, ktorým smerom (vo fázovom priestore) sa máme pohnúť ďalej, aby sme tým sledovali reálny opis systému. Všeobecne, ak sa v čase t nachádzame v bode $[\varphi(t), p_\varphi(t)]$, potom Hamiltonove rovnice diktujú, kde budeme v čase $t + dt$ (o kúsok neskôr):

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} &\implies d\varphi = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} dt \implies \varphi(t + dt) = \varphi(t) + \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} dt \\ \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} &\implies dp_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} dt \implies p_\varphi(t + dt) = p_\varphi(t) - \frac{\partial H}{\partial \varphi} dt\end{aligned}$$

Rovnakú úvahu môžeme použiť na prípad, kedy by sme sa pýtali, kde bol systém v čase $t - dt$, ak v čase t (teraz) je v bode $[\varphi(t), p_\varphi(t)]$? Odpoveď na túto otázku sa skrýva tiež v Hamiltonových rovniciach a ide vlastne o obrátenie smeru času, teda dt zameníme za $-dt$ a pozrieme sa, kde sme boli o kúsok skôr. To ale znamená, že tvarom Hamiltonových rovníc a zadanými počiatočnými podmienkami je automaticky určená trajektória vo fázovom priestore, po ktorej sa bude pohybovať súradnica φ a jej hybnosť p_φ , pričom táto trajektória je parametrizovaná časom⁶. Pre rôzne počiatočné podmienky tak dostávame rôzne krivky, ktoré sa navzájom nepretínajú⁷. Každá krivka opisuje možné chovanie systému pri nejakej konkrétnej počiatočnej podmienke, čo budeme nazývať *fázový*, alebo *Hamiltonovský tok*⁸. Ak do jedného fázového priestoru zakreslíme veľa kriviek pre veľa rôznych počiatočných podmienok, takýto obrázok sa nazýva *fázový portrét*. Uvedieme si dva nateraz zaujímavé fázové portréty - jeden pre lineárny harmonický oscilátor, druhý pre rovinné matematické kyvadlo.

Lagrangian lineárneho harmonického oscilátora kmitajúceho v smere osi z bez pôsobenia iných síl (napr. gravitácie) má nasledovný tvar:

$$L(z) = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - \frac{1}{2}kz^2$$

Z toho vyplýva, že Hamiltonián tejto sústavy bude:

$$H(z, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kz^2$$

⁶Toto nie je ťažké si uvedomiť - v každom čase t máme totiž jednoznačne z počiatočnej podmienky určenú hodnotu $\varphi(t)$ a $p_\varphi(t)$. To ale znamená, že keď sa pohybujeme v čase t , bod $[\varphi(t), p_\varphi(t)]$ sa vo fázovom priestore pohybuje po istej krivke (určenej práve Hamiltonovými diferenciálnymi rovnicami) - inak povedané, súradnica a jej hybnosť sa pohybujú po krivke parametrizovanej časom.

⁷Pre dve rôzne počiatočné podmienky možno dostať totožné trajektórie vo fázovom priestore. Čo sa nemôže stať, že by sa dve krivky pretínali, spájali, ani rozdeľovali - musela by totiž nastať situácia, kedy sa bod z daného miesta vo fázovom priestore pohne do viacerých smerov naraz, čo však nie je možné (pretože tento smer je jednoznačne určený Hamiltonovými rovnicami v príslušnom čase t).

⁸Hamiltonian flux

Hamiltonove rovnice pre $\dot{z}$ a $\dot{p}$:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -kz\end{aligned}$$

Tieto rovnice sa dajú našťastie vyriešiť analyticky pre $p(z)$, $z(p)$ (poprípade implicitne⁹) nasledovným postupom:

$$\begin{aligned}\dot{z} = \frac{p}{m} &\implies dz = \frac{1}{m} p dt \implies dt = \frac{m dz}{p} \\ \dot{p} = -kz &\implies dp = -kz dt \implies dt = -\frac{dp}{kz} \\ \frac{m dz}{p} &= -\frac{dp}{kz} \quad \bigg/ \frac{kz}{m} \\ kz dz &= -\frac{1}{m} p dp \quad \bigg/ \int \\ \frac{1}{2}kz^2 + \frac{p^2}{2m} &= C\end{aligned}$$

Pokúsme sa interpretovať tento výsledok. Na ľavej strane máme vlastne súčet potenciálnej energie a kinetickej energie (tu má zovšeobecnená hybnosť naozaj zmysel hybnosti $p = m\dot{z}$). No tento súčet sa ale rovná celkovej energii, teda integračná konštanta je vlastne celková energia (a teraz vidíme, že musí byť nezáporná):

$$\frac{1}{2}kz^2 + \frac{p^2}{2m} = E_0 \geq 0$$

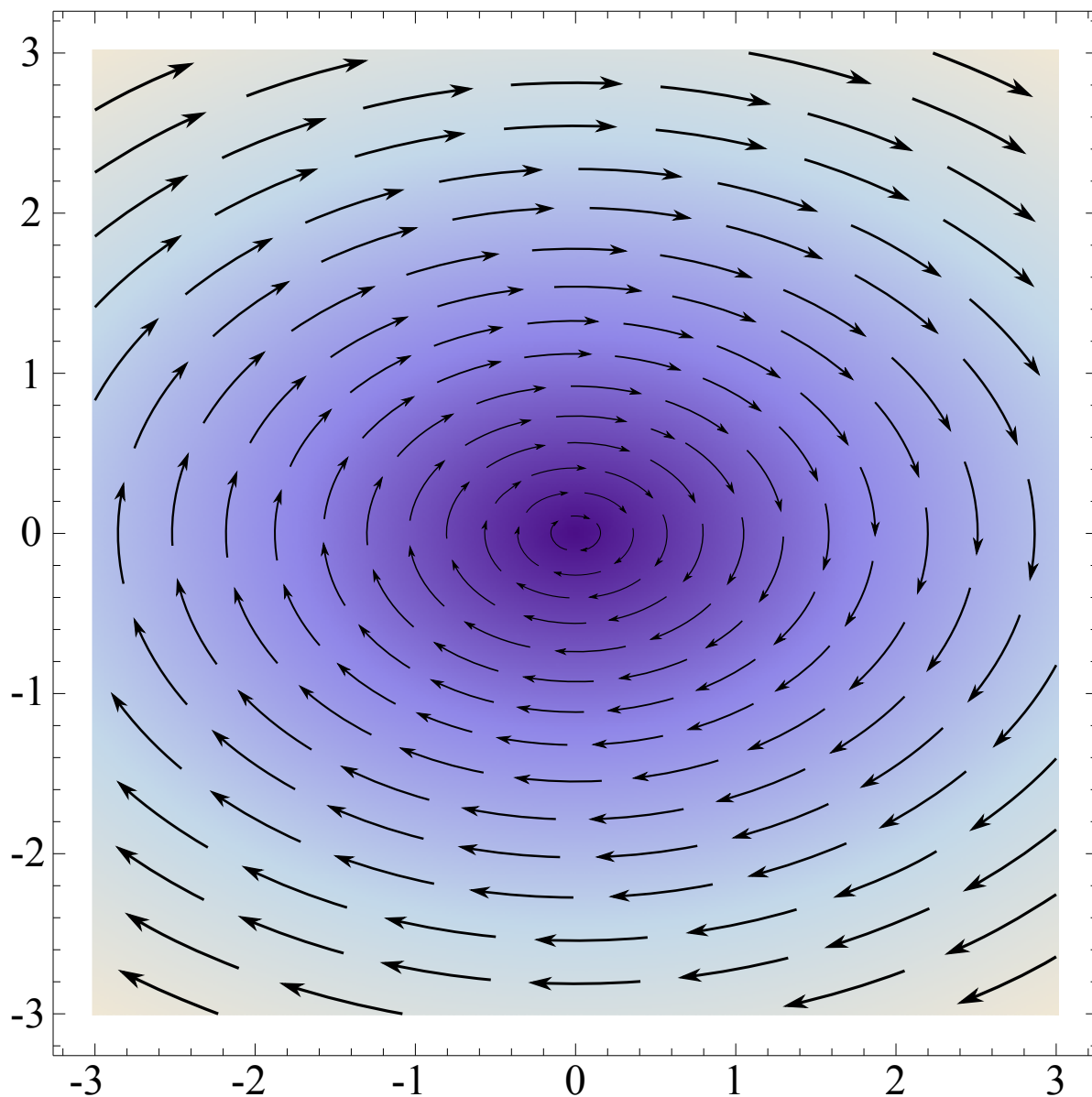
Za týchto podmienok teraz môžeme nakresliť fázový portrét vo fázovom priestore - na horizontálnu os naniesieme hodnoty z , na vertikálnu p . Je jasné, že tento portrét bude tvorený sústrednými elipsami, kde hlavná a vedľajšia os závisia od tuhosti k , hmotnosti m a celkovej energie oscilátora E_0 . Toto E_0 je nakoniec len škálovací parameter (jeho zväčšením/zmenšením sa zväčší/zmenší celá elipsa, bezo zmeny pomeru dĺžok hlavnej a vedľajšej poloosi).

⁹Implicitným riešením nazveme také, v ktorom nemáme k dispozícii priamo funkciu $y = f(x)$, alebo $x = f^{-1}(y)$, no máme k dispozícii implicitnú závislosť x a y určenú nejakou funkciou $F(x, y)$ nasledovne:

$$F(x, y) = 0$$

Ak bod (x_0, y_0) spĺňa funkčnú závislosť $F(x_0, y_0) = 0$, za daných podmienok, o ktorých hovorí veta o implicitne zadanej funkcii, existuje v okolí tohto bodu funkčná závislosť $x(y)$, alebo $y(x)$. Existencia ešte nehovorí nič o tom, že by sme takú funkciu vedeli napísať explicitne.

Nasledujúci graf ilustruje fázový portrét pre lineárny harmonický oscilátor kmitajúci v smere osi z , pričom jeho hmotnosť je 1 kg a jeho tuhosť je 0.5 Nm^{-1} :



Fázový portrét 3.1: Lineárny harmonický oscilátor

Prvý príklad, znázornenie fázového portréту pre lineárny harmonický oscilátor, bol veľmi jednoduchý, pretože sústavu ktorá ho opisuje, je možné riešiť analyticky. Mnohokrát sa stáva, že systém, ktorého správanie by sme radi poznali, nie je riešiteľný analyticky v elementárnych funkciách, v niektorých prípadoch dokonca ani v kvadraturách¹⁰.

Druhý príklad, rovinné matematické kyvadlo, vieme riešiť v kvadraturách. Problém je však v tom, že neexistuje elementárna funkcia, ktorá by tento pohyb opisovala. Pre ilustráciu tejto potiaže sa naozaj pokúsime riešiť diferenciálnu rovnicu rovinného matematického kyvadla. Lagrangián tejto sústavy je:

$$L = T - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl \cos(\varphi)$$

Vidíme, že v ňom explicitne nevystupuje čas, teda platí zákon zachovania energie:

$$E = T + U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl \cos(\varphi) = \text{konšt.}$$

Rovnaký tvar by sme dostali, ak by sme upravovali rovnicu rovinného matematického kyvadla:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin(\varphi) &= 0 \quad \Bigg/ \quad \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} \\ \dot{\varphi} \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} &= 0 \quad \Bigg/ \quad \int \dots dt \end{aligned}$$

Počítame oba integrály:

$$\begin{aligned} \int \dot{\varphi} \ddot{\varphi} dt &\stackrel{P.P.}{=} \dot{\varphi} \dot{\varphi} - \int \ddot{\varphi} \dot{\varphi} dt \implies \int \dot{\varphi} \ddot{\varphi} dt = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \\ \int \sin(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} dt &= \int \sin(\varphi) d\varphi = -\cos(\varphi) \\ \int \dot{\varphi} \ddot{\varphi} dt + \frac{g}{l} \int \sin(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} dt &= C \\ \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{g}{l} \cos(\varphi) &= C \quad \Bigg/ \quad ml^2 \\ \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 - mgl \cos(\varphi) &= C ml^2 = \text{konšt.} \\ \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 - mgl \cos(\varphi) &= E \end{aligned} \tag{3.12}$$

Vidíme, že sme dostali rovnaký tvar, ako zo zákona zachovania energie. Poďme sa pozrieť na riešenie tejto rovnice.

¹⁰Riešiť rovnicu v kvadraturách znamená nájsť integrálne vyjadrenie pre $\varphi(t)$ zadané implicitne:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} f(\varphi') d\varphi' = \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau,$$

kde tento tvar (pri možnom nájdení primitívnej funkcie ku f ako $F(\varphi) = \int f(\varphi) d\varphi$ a ku g $G(t) = \int g(t) dt$) implicitne zadáva tvar $\varphi(t)$. Niekedy je možné nájsť aj explicitný tvar:

$$F(\varphi) - F(\varphi_0) = G(t) - G(0) \implies \varphi(t) = F^{-1} [G(t) + F(\varphi_0) - G(0)]$$

Mnohokrát však rovnicu nevieme riešiť v kvadraturách, čo môže znamenať, že napr. nevieme separovať premenné. Druhý problém sa skrýva v samotnej integrácii, no ak už máme riešenie v kvadraturách, zvyčajne sa to pokladá za úspech. Integrály totiž možno spoľahlivými metódami riešiť numericky, kdežto hľadať riešenie diferenciálnych rovníc (najmä nelineárnych) je ťažšia úloha.

Vo fyzike býva zvykom, že žiadnu rovnicu neriešime v takom tvare, v akom sme ju napísali (aj s fyzikálnymi konštantami a príslušnými rozmermi). Každú rovnicu, ktorú chceme riešiť, je dobré priviesť do bezrozmerného tvaru - jednak samotné premenné, ktoré sú predmetom riešenia, budú mať bezrozmerný tvar a taktiež rôzne konštanty, ktoré v nej vystupovali, sa všelijako šikovne zakryjú. Budeme demonštrovať proces, ktorým privedieme rovnicu (3.12) na jej bezrozmerný tvar. Vychádzame zo zákona zachovania energie pre rovinné matematické kyvadlo - dôvod je ten, že je to obyčajná diferenciálna rovnica prvého rádu, čo je oveľa lepšie, ako mať rovnicu druhého rádu (v skutočnosti človek rieši radšej rovnice s čím menším rádom, čo je aj dôvod, prečo sú zákony zachovania tak obľúbené a hojne využívané). Rovnicu napíšeme tak, aby nulová potenciálna energia bola pre $\varphi = 0$, teda keď voľne visí:

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl[1 - \cos(\varphi)] = E$$

Vidíme, že na pravej strane vystupuje celková energia kyvadla. Prirodzenou snahou pri oddimenzionalizovaní rovnice je prepísať dôležito vyzerajúce konštanty pomocou iných konštánt, ktoré v nej tiež vystupujú. Jeden z nápadov, ktoré môže človek dostať keď sa pozrie na celkovú energiu E , že ju vyjadrí pomocou hmotnosti m , gravitačného zrýchlenia g a dĺžky kyvadla l . Skutočne, výraz mgl má jednotku energie a je to veľmi prirodzená konštanta vzhľadom na situáciu, ktorú riešime. Kvôli tomu, aby neskôr vyšla rovnica v príjemnejšom tvare, použijeme hodnotu $2mgl$. Celá podstata tejto úvahy teda bude tkvieť v nasledujúcom vzťahu:

$$E = 2mgl\varepsilon$$

V tejto rovnici je zachytená myšlienka, že celková energia sústavy (ktorá je pri zadaných počiatočných podmienkach už naveky konštantná) sa dá vyjadriť ako nejaký reálny (bezrozmerný) kladný násobok potenciálového rozdielu medzi spodnou a vrchnou polohou kyvadla. Dosadíme teda takto vyjadrenú energiu do rovnice:

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl[1 - \cos(\varphi)] = 2mgl\varepsilon \quad \bigg/ \quad \frac{1}{2mgl}$$

$$\frac{l}{4g}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}[1 - \cos(\varphi)] = \varepsilon$$

Teraz oceníme, že sme miesto E vzali $2mgl\varepsilon$, platí totiž vzťah:

$$\frac{1}{2}[1 - \cos(\varphi)] = \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Člen $\frac{\varphi}{2}$ prirodzene nájdeme aj v prvom výraze na ľavej strane:

$$\frac{l}{4g}\dot{\varphi}^2 = \frac{l}{g}\left(\frac{\dot{\varphi}}{2}\right)^2$$

Prepíšeme rovnicu pomocou polovičného uhla φ :

$$\frac{l}{g}\left(\frac{\dot{\varphi}}{2}\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \varepsilon$$

Natíska sa samozrejme prirodzená substitúcia daného polovičného uhla:

$$\frac{\varphi}{2} = \Phi \implies \frac{l}{g}\dot{\Phi}^2 + \sin^2(\Phi) = \varepsilon \quad (3.13)$$

V rovnici stále vystupujú konštanty g a l , avšak stále máme k dispozícii ešte jeden šikovne skrytý parameter s rozmerom - čas. Naozaj, prvý člen obsahuje deriváciu podľa času a teda rozmer času musí tiež v prvom člene vyskočiť. Znovu sa ponúka prirodzený argument - môže existovať také T_0 konštantné, že potom akýkoľvek časový interval reálneho času t bude bezrozmerným násobkom tohto T_0 . Inak zapísané:

$$t = T_0 \tau \implies dt = T_0 d\tau$$

Potom sa nám mierne upraví pravidlo pre derivovanie funkcií závislých od t :

$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{T_0} \frac{d\xi}{d\tau} = \frac{1}{T_0} \xi'$$

Toto pravidlo spolu s danou substitúciou použijeme v rovnici (3.13):

$$\frac{l}{g} \frac{1}{T_0^2} \Phi'^2 + \sin^2(\Phi) = \varepsilon$$

Okamžite vidíme celkom vhodný výber konštanty T_0 (čo je takmer perióda malých kmitov kyvadla):

$$T_0 = \sqrt{\frac{l}{g}} \implies \Phi'^2 + \sin^2(\Phi) = \varepsilon \quad (3.14)$$

Táto rovnica (po daných spätných substitúciách) opisuje rovinné matematické kyvadlo, no matematicky sa s ňou pracuje oveľa lepšie - nemusíme totiž rozmýšľať, koľko je g , l , m a E tak, aby sme kreslili pekné obrázky. Substitúcie tento problém vyriešili za nás. Rovnicu ďalej upravujeme:

$$\begin{aligned} \Phi'^2 &= \varepsilon - \sin^2(\Phi) \\ \Phi'^2 &= \varepsilon \left[1 - \frac{1}{\varepsilon} \sin^2(\Phi) \right] \\ \Phi' = \frac{d\Phi}{d\tau} &= \sqrt{\varepsilon} \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon} \sin^2(\Phi)} \quad \bigg/ \quad \frac{d\tau}{\sqrt{\varepsilon} \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon} \sin^2(\Phi)}} \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{d\Phi}{\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon} \sin^2(\Phi)}} &= d\tau \quad \bigg/ \quad \int \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int \frac{d\Phi}{\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon} \sin^2(\Phi)}} &= \int d\tau \end{aligned}$$

Môžeme si gratulovať - práve sa nám podarilo vyriešiť rovnicu v kvadraturách, čo však vôbec neznamená, že si jej riešenie vieme predstaviť (v skutočnosti nám z tohto tvaru nie je známe takmer nič - ku všeobecnému riešeniu je ešte dlhá cesta). Ukážeme však ešte omnoho viac, závislosť $\Phi(\tau)$ vyjadríme *explicitne*, no tiež nám to veľa nepovie. Kvôli explicitnému vyjadreniu budeme musieť siahnuť po nejakej matematickej knihe s eliptickými integrálmi, kde nájdeme nasledovnú definíciu¹¹:

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(t)}} \equiv F(x, k)$$

¹¹<http://mathworld.wolfram.com/JacobiEllipticFunctions.html>

Pravá strana našej rovnice v kvadraturách tak bude rovná τ a ľavá bude vyjadriteľná pomocou tejto funkcie F^{12} :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} &= k^2 \\ \int \frac{d\Phi}{\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon} \sin^2(\Phi)}} &= F\left(\Phi, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) - F\left(\Phi_0, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \\ F\left(\Phi, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) &= \sqrt{\varepsilon}\tau + F\left(\Phi_0, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dostali sme implicitné vyjadrenie $\Phi(t)$. Pre explicitné musíme poznať funkciu F^{-1} , ktorou je Jacobiho amplitúdna funkcia, ktorá spĺňa (celkom logickú podmienku inverznosti funkcie)¹³:

$$u = F(\Phi, k) \implies F^{-1}(u, k) = \Phi = \text{am}(u, k)$$

Naša funkcia $\Phi(t)$ teda bude vyjadriteľná explicitne za pomoci Jacobiho amplitúdnej funkcie v nasledovnom tvare:

$$\begin{aligned} u = F\left(\Phi, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) &\implies \Phi(\tau) = F^{-1}\left(u, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \\ \Phi(\tau) &= \text{am}\left[\sqrt{\varepsilon}\tau + F\left(\Phi_0, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right), \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ako iste vidíme, z tohto tvaru vlastne nič nevidíme. Z daného vyjadrenia (aj keď explicitného) sme v skutočnosti získali veľmi málo. Ak máme poruke dobrý plotter grafov s implementovanými eliptickými integrálmi a ich inverznými funkciami, môžeme si skúsiť dať vykresliť danú rovnicu pre rôzne ε (čo veľmi zásadne mení vývoj pohybu kyvadla v čase) a Φ_0 (vývoj kyvadla mení len okrajovo, v podstate vyjadruje počiatočnú polohu kyvadla). Ak taký plotter poruke nemáme, táto rovnica nám nehovorí vôbec nič. Bolo by teda dobré použiť inú metódu, pomocou ktorej pohodlne nahliadneme do daného systému bez explicitného riešenia jeho rovníc. Tou je práve kreslenie Hamiltonovského toku vo fázovom priestore (čo je teraz celkom dobre možné, vzhľadom na to, že jeho rozmer je 2).

¹²Volanej *eliptický integrál prvého druhu*. Je vhodné poznamenať, že zápisov tejto funkcie existuje viac:

$$F(\varphi, k) = F(\varphi|k^2) = F(\sin \varphi; k) = \int_0^\varphi \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}$$

¹³V tomto okamihu sa nebudeme zaujímať, či je, ako funkcia $F(x, k)$, tak aj funkcia am prostá - postačí nám fakt, že výsledná funkcia am , napriek tomu, že nie je (pre každé k) injektívna (prostá), dáva dobré výsledky o priebehu otáčania kyvadla v čase. Analógiu môžeme vidieť vo funkcii sínus a jej inverznej cyklometrickej funkcii arkus sínus. Sínus nie je prostá funkcia, napriek tomu sme schopní riešiť rovnicu lineárneho harmonického oscilátora implicitne (najprv v kvadraturách a ďalej pomocou výpočtu integrálu) v podobe:

$$\arcsin\left(\frac{x}{x_0}\right) = \omega t \implies x(t) = x_0 \sin(\omega t),$$

teda problémy s tým, že by funkcia am (alebo sínus) nebola prostá, prísne vzaté neberieme do úvahy. Koho by zaujímali definičné obory, ohľadom funkcie $F(x, k)$ rýchlo vidíme, že pre $k > 1$ je výraz nedefinovaný (komplexný) pre niektoré $x \in \mathbb{R}$ (vidíme analógiu s funkciou $\arcsin$, ktorá nie je definovaná pre $|x| > 1$). Naopak, funkcia am (bez dôkazu), je pre $k > 1$ periodická, pre $k = 1$ neperiodická, nepárna, asymptoticky sa blížiaca k hodnote $\frac{\pi}{2}$ a pre $0 < k < 1$ neperiodická, rastúca.

Otázkou teda je: „Ako riešiť pohybové rovnice bez riešenia pohybových rovníc?“. Mohli by sme sa vrátiť ku Hamiltonovým rovniciam pre rovinné matematické kyvadlo a skúsiť z nich pre rôzne parametre zostrojiť fázový portrét, no natíska sa lepšia možnosť. Máme totiž k dispozícii bezrozmernú rovnicu (3.14):

$$\Phi'^2 + \sin^2(\Phi) = \varepsilon$$

Keďže zovšeobecnená hybnosť pre súradnicu φ je úmerná $\dot{\varphi}$, tak je možné povedať, že Φ' rovnako dobre poslúži namiesto zovšeobecnenej hybnosti a Φ namiesto zovšeobecnenej súradnice φ ¹⁴. Na horizontálnu os teda budeme značiť súradnicu Φ , na vertikálnu Φ' . Ešte pripomenieme, že situácia sa v uhle φ opakuje s periódou 2π , v uhle Φ sa teda opakuje s periódou π . Situáciu si teraz rozdelíme na tri prípady, po kvalitatívnom vyšetrení všetkých troch nakoniec nakreslíme aj fázový portrét.

Prvý prípad, $\varepsilon \ll 1$. Čím je vlastne tento prípad taký zaujímavý? Podmienka $\varepsilon \ll 1$ vlastne hovorí o tom, že energia oscilátora je veľmi malá oproti potenciálovému rozdielu medzi najvyšším a najnižším bodom do ktorého sa kyvadlo môže dostať (teraz sa nám škála, ktorú sme zaviedli na začiatku, veľmi hodí). To ale znamená, že samotné kyvadlo sa pohybuje okolo spodnej hodnoty - keďže energie má len toľko, aby sa ledva kývalo okolo $\Phi = 0$. Za týchto podmienok môžeme zanedbať nelineárnosť funkcie $\sin(\Phi)$ a nahradiť ju priamo argumentom. Dostaneme:

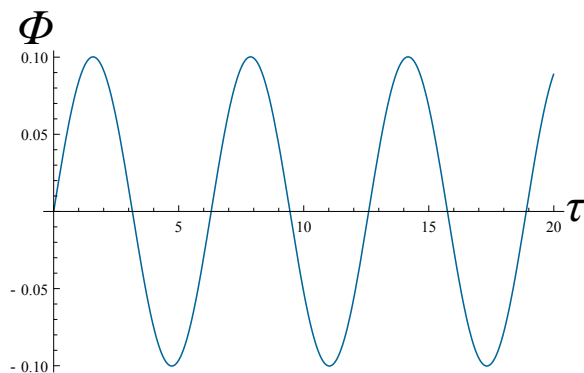
$$\Phi'^2 + \Phi^2 = \varepsilon \quad (\ll 1)$$

Tým sme vlastne dostali rovnicu kružnice s malým polomerom $\sqrt{\varepsilon}$. A presne taký pohyb bude kyvadlo opisovať vo fázovom priestore. Niečo nám to nápadne pripomína - lineárny harmonický oscilátor. Naozaj, v prvom priblížení malých kmitov je kyvadlo lineárny harmonický oscilátor. Tento fakt sa dá ukázať ako z rovnice (3.15), tak aj z (3.16). V rovnici (3.15) použijeme fakt, že $\Phi \ll 1$, tým pádom aj $0 < \alpha < \Phi$ je zanedbateľná oproti 1 a teda $\sin(\alpha)$ môžeme zameniť za α a (z príslušného parametrického integrálu) dostaneme:

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^{\Phi} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon} \sin^2(\alpha)}} \approx \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^{\Phi} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon} \alpha^2}} = \int_0^{\Phi} \frac{d\alpha}{\sqrt{\varepsilon - \alpha^2}} = \arcsin\left(\frac{\Phi}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = \tau$$

$$\Phi(\tau) = \sqrt{\varepsilon} \sin(\tau) \implies \Phi'(\tau) = \sqrt{\varepsilon} \cos(\tau) \implies \Phi'^2 + \Phi^2 = \varepsilon$$

Kto by si dal tú prácu a naozaj vykreslil funkciu $\arcsin(\sqrt{\varepsilon}\tau, \frac{1}{\varepsilon})$, dostal by podobný graf (tvarom naozaj podobný funkcii sínus):



Graf funkcie 3.2: $\Phi(\tau)$ pre $\varepsilon = 0.01$

¹⁴Komu by sa táto argumentácia nevidela, môže skúsiť doviesť Hamiltonove rovnice do bezrozmerného tvaru a zistí, že to, čo sme tvrdili v tejto argumentácii kvalitatívne, bude zodpovedať skutočnosti. Cieľom kreslenia fázového portréту nie je presne aj s jednotkami zaznačiť škály, na ktorých sa premenné pohybujú v oboch osiach, ale kvalitatívne naznačiť charakter pohybu v sústave.

Druhý prípad, $\varepsilon = 1$. Tento prípad už nemá nič spoločné s lineárnym harmonickým oscilátorom, takýto pohyb je totiž neperiodický. Podmienka $\varepsilon = 1$ hovorí o tom, že kyvadlo má mať presne toľko celkovej energie, aby sa akurát vyšplhalo na vrchol kružnice, kde $\varphi = \pi$ a $\Phi = \frac{\pi}{2}$. Nech už tento pohyb začína odkiaľkoľvek (okrem vrcholu), jeho priebeh sa s časom rastúcim do nekonečna asymptoticky blíži ku hodnote $\Phi = \frac{\pi}{2}$. Toto riešenie sa skrýva aj v rovnici (3.14):

$$\begin{aligned}\Phi'^2 + \sin^2(\Phi) &= \varepsilon = 1 \\ \Phi'^2 &= 1 - \sin^2(\Phi) = \cos^2(\Phi) \\ \Phi' &= \pm \cos(\Phi); \quad |\Phi| \leq \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Vo fázovom portréte sa teda bod snaží po takejto čiare dostať až do bodu, kde $\Phi' = 0$ a $\Phi = \frac{\pi}{2}$, no reálne tam dôjde v nekonečnom čase.

Presné riešenie v čase je vyjadriteľné v elementárnych funkciách (bez dôkazu):

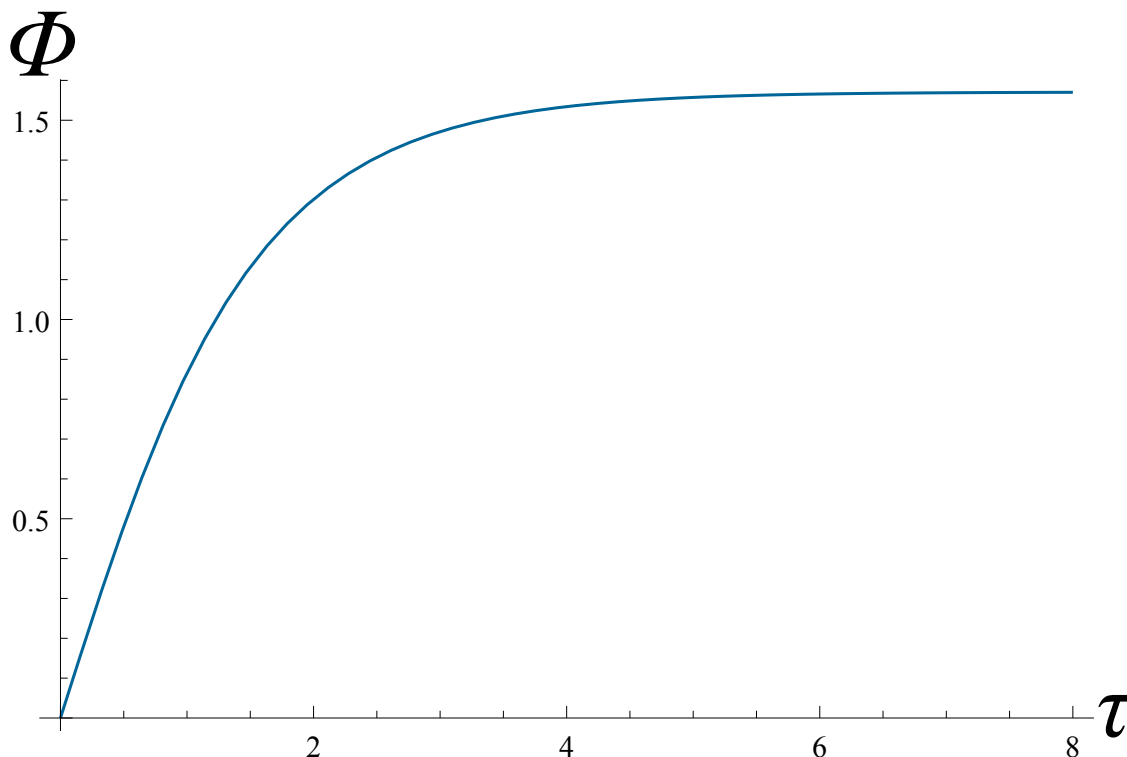
$$\Phi(\tau) = 2 \arctan(e^\tau) - \frac{\pi}{2}$$

Asymptotika tohto riešenia pre $\tau \rightarrow \infty$ je:

$$\Phi(\tau) = 2 \arctan(e^\tau) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 2e^{-\tau} + \mathcal{O}(e^{-2\tau}); \quad \tau \rightarrow \infty$$

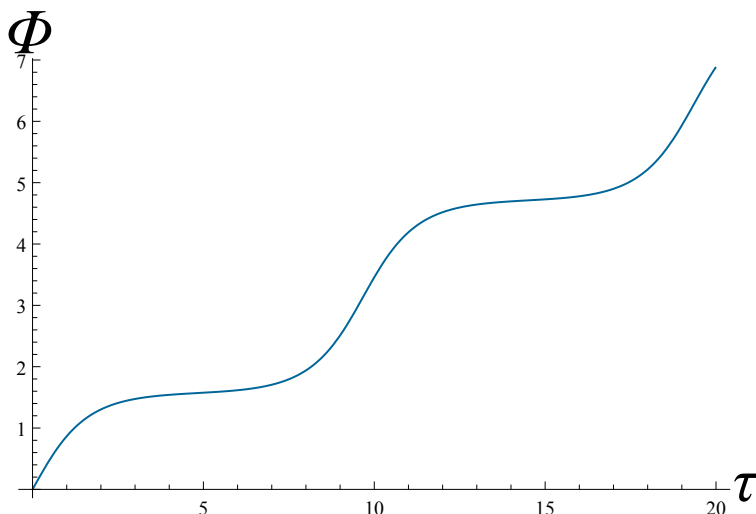
Vidíme teda, že kyvadlo sa naozaj exponenciálne pomaly blíži k vrcholu kružnice (všetky ďalšie členy už klesajú k nule rýchlejšie, ako $e^{-\tau}$).

Grafom tohto časového vývoja je funkcia podobná $\arctan(\tau)$, no jej asymptotika je exponenciálna ($\arctan(\tau)$ má asymptotiku $\pi/2 - 1/\tau$ pre $\tau \rightarrow \infty$):

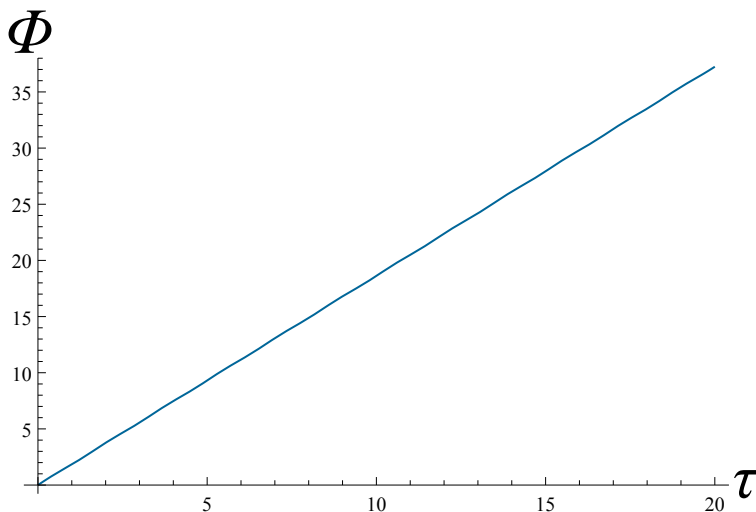


Graf funkcie 3.3: $\Phi(\tau)$ pre $\varepsilon = 1$

Tretí prípad, $\varepsilon > 1$ a $\varepsilon \gg 1$. Situácia je pre $\varepsilon \gg 1$ ľahšie nahliadnuteľná - ak je celková energia kyvadla oveľa väčšia, ako potenciálny rozdiel medzi spodnou a vrchnou polohou, možno povedať, že dominantný člen bude Φ' . Je tomu tak preto, lebo člen $\sin^2(\Phi)$ sa mení len v intervale $\langle 0, 1 \rangle$, ak je teda ε veľké (napr. 1000), druhý člen zaváži naozaj málo. Čím väčšie je teda ε , tým „konštantnejšie“ je Φ' . Fyzikálne sa v tomto prípade deje to, že kyvadlo sa zakaždým pretočí cez vrchol - čím väčšie je ε , tým menej cíti, že sa mu vôbec mení potenciálna energia a tým viac sa tento pohyb podobá na rovnomerný pohyb po kružnici a člen Φ' sa blíži ku konštante $\Phi' \approx \sqrt{\varepsilon}$. Pohyb je v premennej Φ neperiodický. V elementárnych funkciách sa dá opísať len prípad $\varepsilon \gg 1$, vtedy $\Phi(\tau) = \sqrt{\varepsilon}\tau$. Zaujímavý bude zrejme ten, kde ε bude len o trochu viac ako 1 a potom ten, kde $\varepsilon \gg 1$:

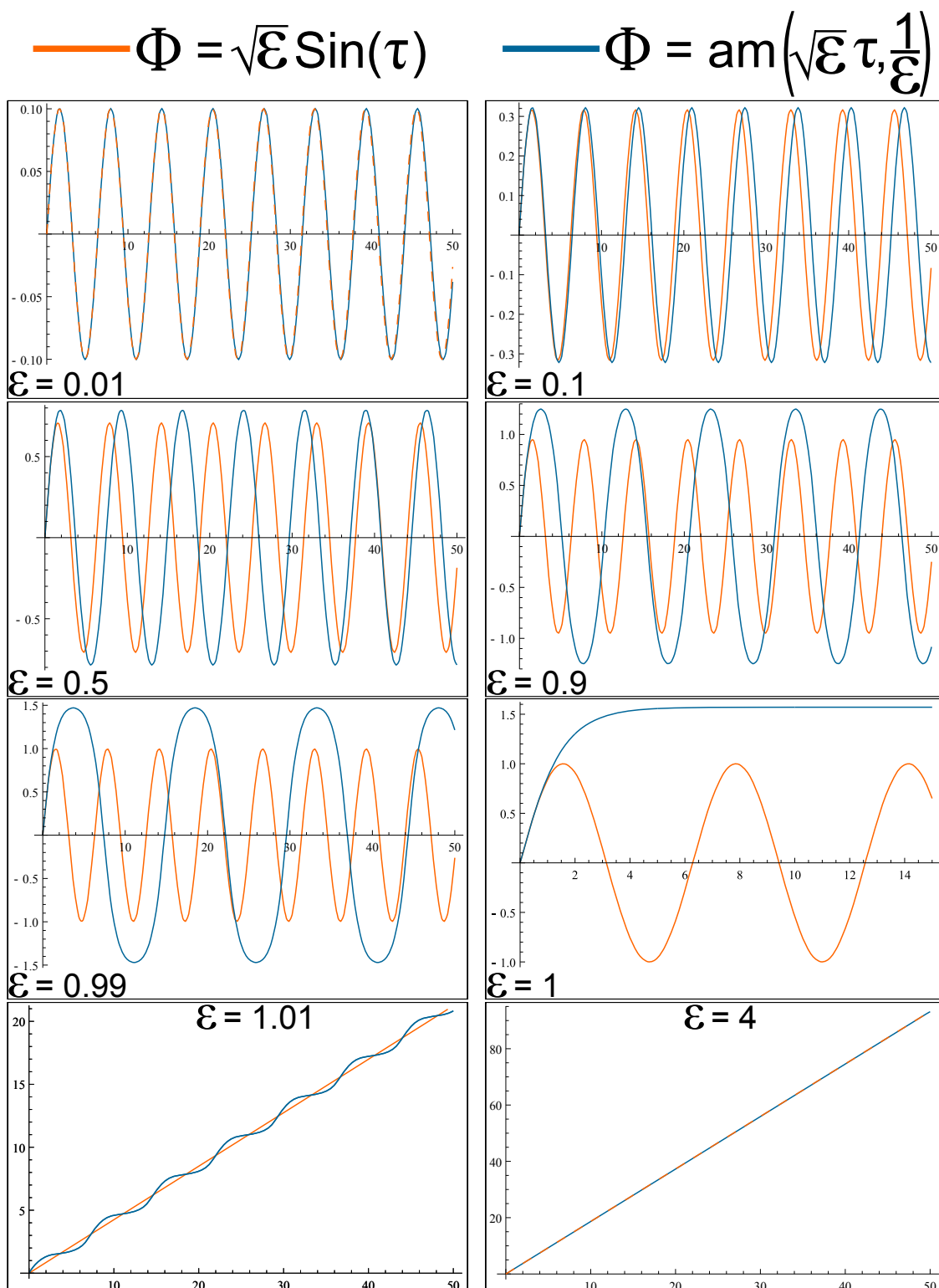


Graf funkcie 3.4: $\Phi(\tau)$ pre $\varepsilon = 1.001$. Môžeme si všimnúť, že energia ledva stačí na pretočenie kyvadla cez vrchol, ktoré v tom momente značne spomalí - len s ťažkosťou sa pretočí.



Graf funkcie 3.5: $\Phi(\tau)$ pre $\varepsilon = 4$. Tentoraz je energia kyvadla o dosť väčšia, ako potenciálny rozdiel medzi spodným a vrchným bodom. Vidíme, že vývoj Φ (a teda aj φ) v čase je takmer lineárna funkcia, kyvadlo si teda ledva „všimne“, či je v spodnej, alebo vrchnej polohe.

Ešte raz ukážeme postupné zvyšovanie ε z veľmi malej hodnoty až po 1. Pre porovnanie dokreslíme aj kmity lineárneho harmonického oscilátora s rovnakou frekvenciou uvažovaných malých kmitov. Uvedieme taktiež prípad $\varepsilon > 1$.



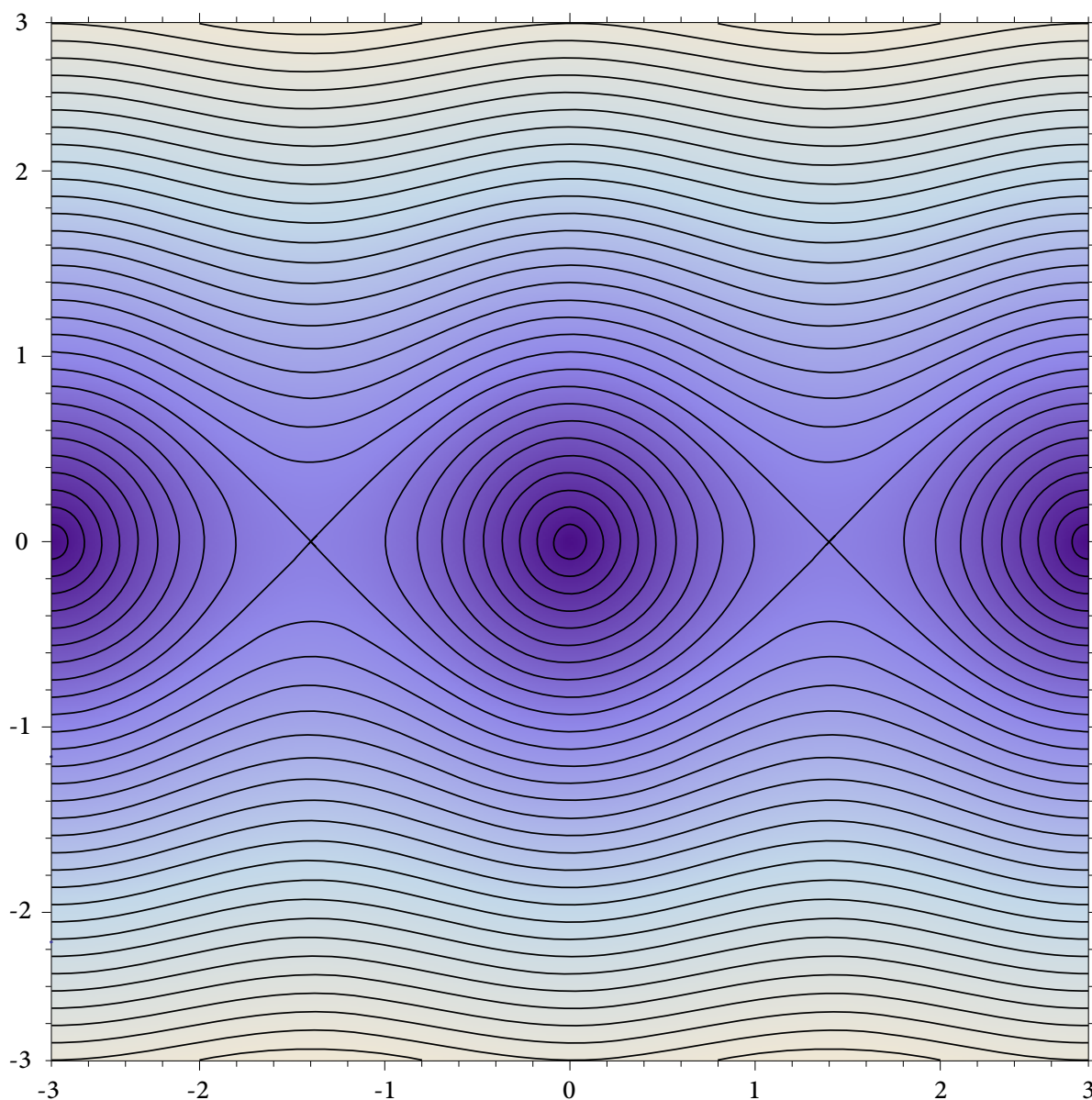
Samotný fázový portrét zostrojíme z čiastkových informácií o jednotlivých limitných prípadoch:

$$\varepsilon \ll 1 \implies \Phi'^2 + \Phi^2 = \varepsilon$$

$$\varepsilon = 1 \implies \Phi' = \pm \cos^2(\Phi)$$

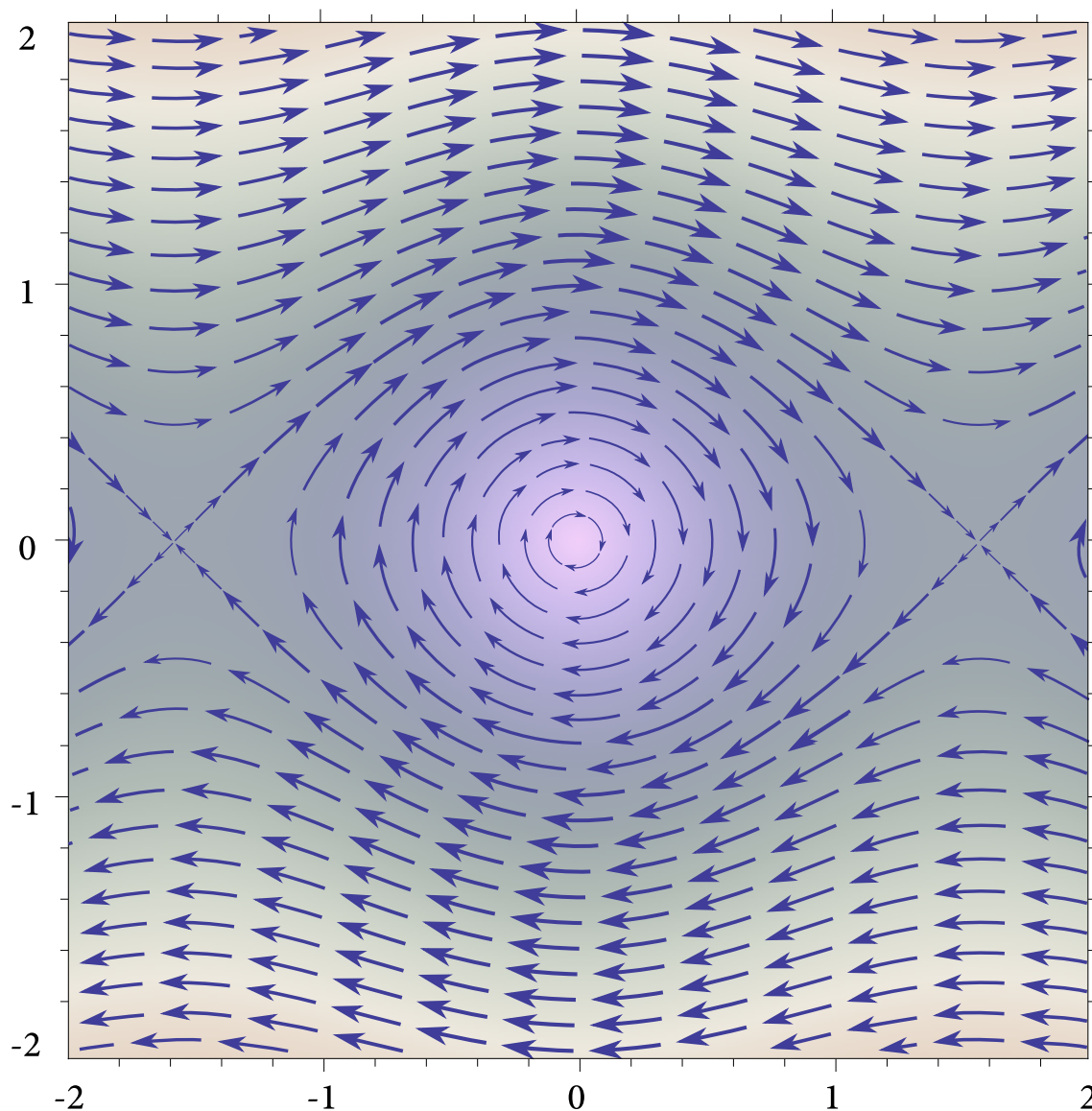
$$\varepsilon \gg 1 \implies \Phi' = \sqrt{\varepsilon}$$

Tam, kde nepoznáme presný tvar, v mysli extrapolujeme medzi známymi tvarmi, alebo si dáme vykresliť tzv. contour map funkcie $\Phi'^2 + \sin^2(\Phi) = \varepsilon$. Táto metóda dáva jednoznačne najlepšiu predstavu o fázovom toku:



Fázový portrét 3.6: Rovinné matematické kyvadlo. Energia ε sa mení od 0 (fialová) po 10 (béžová).

Do takýchto obrázkov sa zvyknú kresliť aj šípky, aby bolo jasné, ktorým smerom sa tok pohne z daného miesta fázového priestoru (tento smer odpovedá skutočnej snahe kyvadla zväčšiť/zmenšiť súradnicu Φ , resp. $\dot{\Phi}$):



Vektorové pole 3.7: Fázový portrét s vektorovým poľom pre rovinné matematické kyvadlo. V rovnovážnej polohe ($\Phi \approx 0, \dot{\Phi} \approx 0$) a v okolí vrchnej polohy ($\Phi \approx \pm \frac{\pi}{2}, \dot{\Phi} \approx 0$) sú šípky malé, pretože v týchto miestach je pohyb pomalší (zaniká v oboch polohách).

3.2.2 Liouvilleova veta*

Majme fázový priestor, ktorý budeme symbolicky značiť v dvoch rozmeroch (no veta platí všeobecne). V tomto priestore sa pohybujú súradnice q a hybnosti p k nim prislúchajúce, ktorých pohyb v čase sa riadi Hamiltoniánom H . Na začiatku ($t = 0$) si vyberieme myslený objem V vo fázovom priestore (teda zapíšeme množinu všetkých počiatočných stavov, ktoré do tohto objemu v čase $t = 0$ patria, čím daný objem definujeme). Tento objem označíme $D(0)$ a počítame ho ako násobný integrál cez tento objem z funkcie 1 (teda ako mieru danej oblasti):

$$D(0) = \int_{D(0)} \underbrace{dq_1 \cdots dq_n}_{=d^n q} \underbrace{dp_1 \cdots dp_n}_{=d^n p} \quad (3.17)$$

Keď sa teraz pohneme v čase do všeobecného momentu t , aj súradnice a hybnosti sa vo všeobecnosti nejako pohnú, no stále budú vo fázovom priestore tvoriť objem (ktorý tentoraz definujeme tak, že súradnice, ktoré si pamätáme už z času $t = 0$, budeme hľadať po celom priestore a keď ich nájdeme, tak priestor, ktorý budú zaplňať budeme považovať za objem, o ktorom je momentálne reč) $D(t)$. Obdobným spôsobom počítame objem $D(t)$:

$$D(t) = \int_{D(t)} d^n q d^n p \quad (3.18)$$

Platí veta (Liouvilleova):

$$D(t) = D(0) \quad (3.19)$$

Dôkaz: v integráloch, ktoré definujú rovnicu (3.19) integrujeme jednotkovú funkciu, teda dôležitá bude zrejme len zmena súradníc v dôsledku posunu v čase. Budeme uvažovať infinitesimálny posun v čase. Súradnice $\mathbf{q}$ a $\mathbf{p}$ sa transformujú z času t do času $t + dt$.

$$\left(q_1(t), \dots, q_n(t), p_1(t), \dots, p_n(t) \right) \rightarrow \left(q_1(t + dt), \dots, q_n(t + dt), p_1(t + dt), \dots, p_n(t + dt) \right) \quad (3.20)$$

Z Hamiltonových rovníc dostávame (pre malé dt):

$$\begin{aligned} q_i &\rightarrow q_i + \dot{q}_i dt = q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dt = q'_i \\ p_i &\rightarrow p_i + \dot{p}_i dt = p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} dt = p'_i \end{aligned} \quad (3.21)$$

Celá veta zrejme bude stáť a padať na transformácii objemového elementu za čas dt . Element sa transformuje podľa vzťahu známeho už z matematickej analýzy:

$$dV(t + dt) = J dV(t) \quad (3.22)$$

J je determinant Jacobiho matice:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial q'_1}{\partial q_1} & \frac{\partial q'_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial q'_1}{\partial q_n} & \frac{\partial q'_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial q'_1}{\partial p_n} \\ \frac{\partial q'_2}{\partial q_1} & \frac{\partial q'_2}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial q'_2}{\partial q_n} & \frac{\partial q'_2}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial q'_2}{\partial p_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q'_n}{\partial q_1} & \frac{\partial q'_n}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial q'_n}{\partial q_n} & \frac{\partial q'_n}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial q'_n}{\partial p_n} \\ \frac{\partial p'_1}{\partial q_1} & \frac{\partial p'_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial p'_1}{\partial q_n} & \frac{\partial p'_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial p'_1}{\partial p_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p'_n}{\partial q_1} & \frac{\partial p'_n}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial p'_n}{\partial q_n} & \frac{\partial p'_n}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial p'_n}{\partial p_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial q'_i}{\partial q_j} & \frac{\partial q'_i}{\partial p_j} \\ \frac{\partial p'_i}{\partial q_j} & \frac{\partial p'_i}{\partial p_j} \end{vmatrix} \quad (3.23)$$

V našom prípade bude J vyzerat' nasledovne:

$$J = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial q_1} dt & \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial q_2} dt & \cdots & \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial q_n} dt & \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^2} dt & \cdots & \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_n} dt \\ \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial q_1} dt & 1 + \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial q_2} dt & \cdots & \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial q_n} dt & \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial p_1} dt & \cdots & \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial p_n} dt \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 H}{\partial p_n \partial q_1} dt & \frac{\partial^2 H}{\partial p_n \partial q_2} dt & \cdots & 1 + \frac{\partial^2 H}{\partial p_n \partial q_n} dt & \frac{\partial^2 H}{\partial p_n \partial p_1} dt & \cdots & \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^2} dt \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial q_1^2} dt & -\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial q_2} dt & \cdots & -\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial q_n} dt & 1 - \frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_1} dt & \cdots & -\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_n} dt \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial q_n \partial q_1} dt & -\frac{\partial^2 H}{\partial q_n \partial q_2} dt & \cdots & -\frac{\partial^2 H}{\partial q_n^2} dt & -\frac{\partial^2 H}{\partial q_n \partial p_1} dt & \cdots & 1 - \frac{\partial^2 H}{\partial q_n \partial p_n} dt \end{vmatrix} \quad (3.24)$$

Vidíme, že Jakobián je možno vyjadriť ako determinant súčtu jednotkovej matice a dt -násobok nejakej inej matice. Keďže je však dt *malé*, tento determinant možno rozvinúť do prvého rádu Taylorovho radu v okolí $\det(\mathcal{I}_{2n}) = 1$, pričom zvyšok radu bude klesať k nule aspoň rovnako rýchlo, ako dt^2 :

$$J = \det(\mathcal{I}_{2n} + dt D) = 1 + \text{tr}(D) dt + \mathcal{O}(dt^2) \quad (3.25)$$

Matica D je vlastne zvyšok po pôvodnej matici, ak z diagonál odoberieme jednotky. Táto matica sa dá vyjadriť po blokoch:

$$D = \left(\begin{array}{cc} \overbrace{\begin{matrix} n \times n & n \times n \\ \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \end{matrix}}^{2n} \\ \underbrace{\begin{matrix} -\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j} & -\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_j} \end{matrix}}_{n \times n} \end{array} \right) \Bigg\} 2n$$

Stopa matice je súčet jej diagonálnych prvkov, v tomto prípade zoberieme len diagonálne bloky a z nich položením $i = j$ a vysumovaním cez príslušný sumačný index dostaneme jej stopu:

$$\text{tr}(D) = \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} \equiv 0 \quad (3.26)$$

Tento výraz je identicky rovný nule, pretože predpokladáme spojitost' druhej zmiešanej parciálnej derivácie Hamiltoniánu podľa zovšeobecnenej súradnice a príslušnej zovšeobecnenej hybnosti (a teda tieto derivácie sa po zámene poradia rovnajú). Pre Jakobián teda dostávame:

$$J = \det(I_{2n} + dt D) = 1 + \text{tr}(D) dt + \mathcal{O}(dt^2) = 1 + \mathcal{O}(dt^2) \quad (3.27)$$

To pre zmenu Jakobiánu znamená:

$$\delta J = \mathcal{O}(dt^2) \quad (3.28)$$

A pre časovú deriváciu jej nulovosť:

$$\dot{J} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{dJ}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \mathcal{O}(dt) = 0 \quad (3.29)$$

Vidíme, že ak sa z času t posunieme do času $t + dt$, Jakobián transformácie súradníc sa zmení *najskôr* až v druhom ráde v dt a to platí v každom čase t . Lenže to znamená, že Jakobián sa v čase nemení ($\dot{J} = 0$), teda sa nemení ani objem $D(t)$.

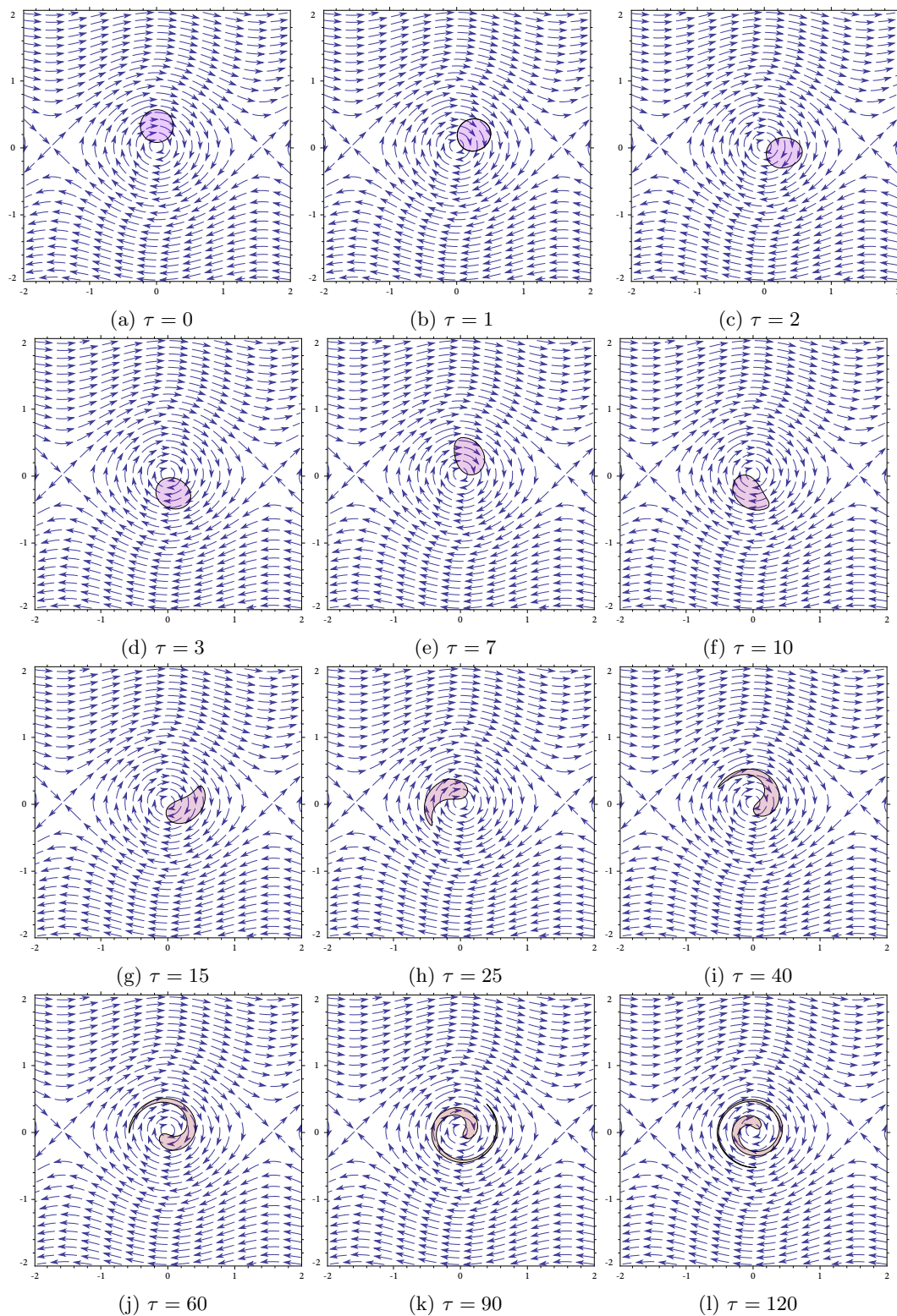
Liouvilleovu vetu budeme demonštrovať na rovinnom matematickom kyvadle. V jeho fázovom priestore si na začiatku vyberieme množinu bodov (začiatkových stavov), ktoré budeme ďalej sledovať v čase. Tvar tejto množiny v každom ďalšom čase určuje výber začiatkových stavov a samozrejme aj tvar potenciálnej energie. Pre kvadratický potenciál, čo je obyčajný lineárny harmonický oscilátor, nenastáva nič zaujímavé. Frekvencia jeho kmitov totižto nezávisí od začiatkových podmienok (až na prípad nulovej energie, čo je oscilátor naveky sediaci v počiatku). Teda nech by sme do jeho fázového priestoru rozhodli akokoľvek súbor oscilátorov, tento súbor bude krúžiť dookola a jeho tvar ostane nezmenený.

V prípade kyvadla je situácia oveľa zaujímavejšia: pre $\varepsilon \ll 1$ (teda všetky oscilátory rozhádzané blízko $\Phi = 0$ a $\Phi' = 0$) by sme očakávali, že bude (aspoň istý čas) ešte dobre splnená lineárnosť kmitov, t.j., že ich frekvencia nezávisí príliš od výchylky. V časovom vývoji súboru oscilátorov sa táto takmer-linearita prejaví nie prílišným rozmazávaním súboru, no isté rozmazanie po dostatočne dlhom čase prísť musí.

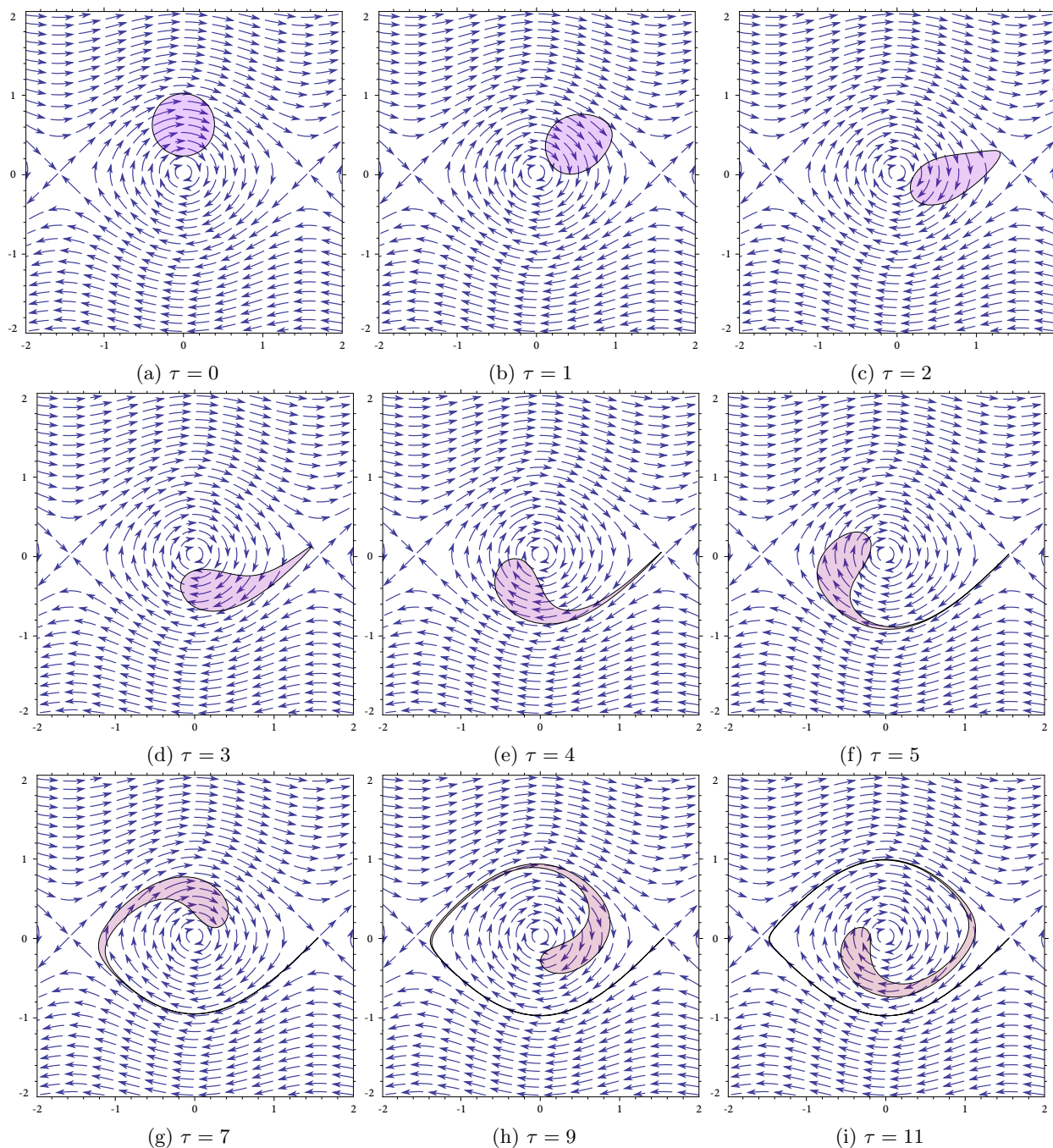
Pokiaľ bude náš počiatkový súbor zahŕňať aj energie blízke, dokonca rovné kritickej energii $\varepsilon = 1$), budeme pozorovať značnú deformáciu tvaru tohto súboru. Períoda kmitu kyvadla totiž rastie do nekonečna s $\varepsilon \rightarrow 1$. Pre $\varepsilon = 1$ dokonca analyticky vieme, že časový vývoj kyvadla sa exponenciálne blíži ku vrchnej polohe, no to znamená, že takýto počiatkový stav skončí limitne v nekonečnom čase v bode $(\pi/2, 0)$. Očakávame teda, že kým energie blízke nule budú poslušne krúžiť dookola, energie blízke 1 budú značne zaostávať, čo už po relatívne krátkom čase spôsobí rozmazanie súboru oscilátorov.

Veľmi zaujímavý prípad je, ak súbor na začiatku obsahuje rôzne energie - aj menšie, aj väčšie ako 1. Vieme, že pre $\varepsilon > 1$ je pohyb neperiodický a vo fázovom priestore uteká donekonečna doprava (popríklad dolava pre $\Phi' < 0$), kým pre $\varepsilon < 1$ ostáva pohyb ohraničený v periodickej oblasti. To ale znamená, že kým časť oscilátorov ostáva krúžiť okolo stredu, ich druhá časť v čase stále uteká preč. Intuitívne by sa zdalo, že sa takýto súbor (aj keď na začiatku tvoriaci spojitú oblasť) musí nutne roztrhnúť, no nie je tomu tak, ako uvidíme.

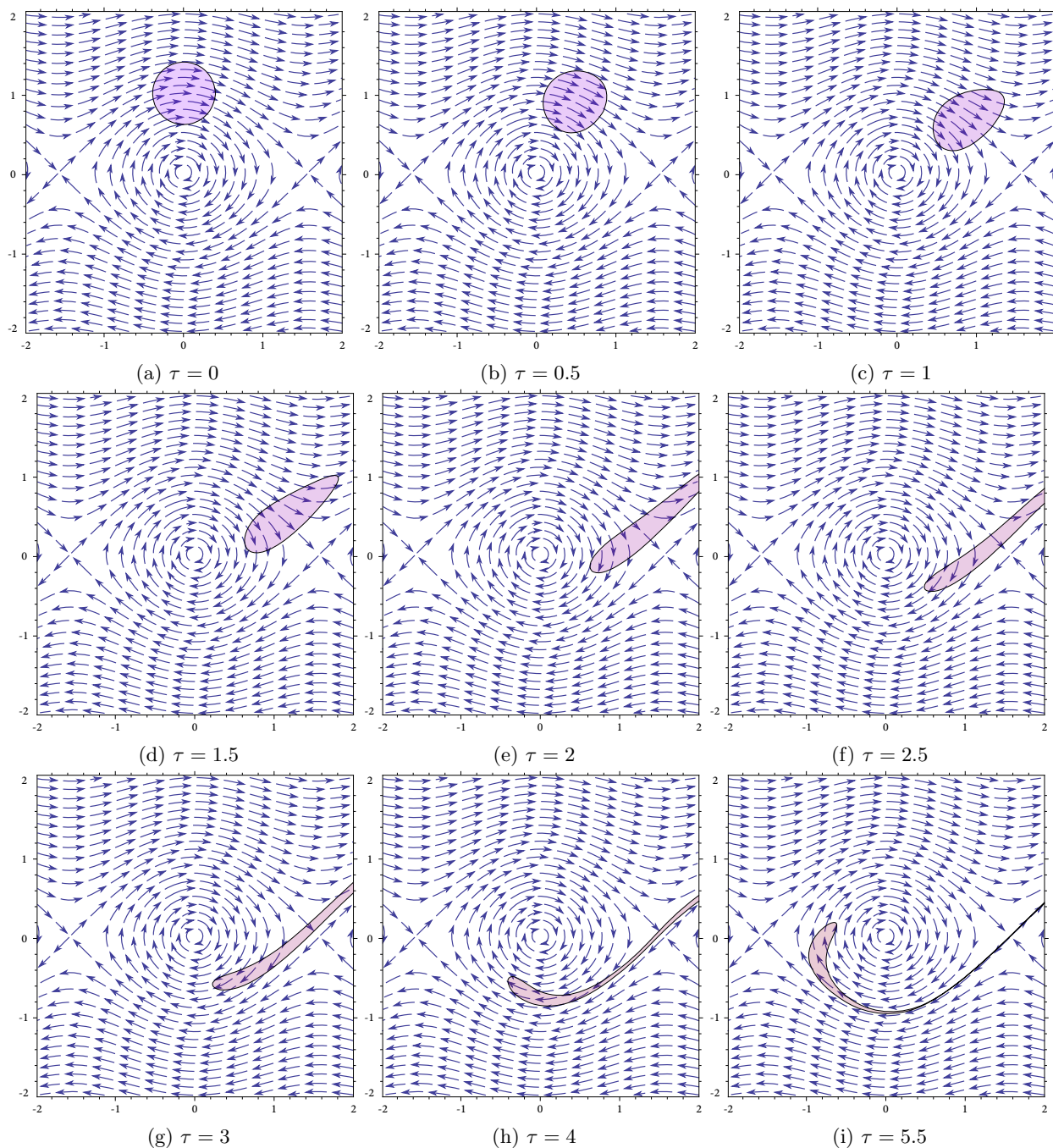
Na nasledujúcich stranách demonštrujeme tieto prípady a pripomíname, že podľa Liouvilleovej vety sú všetky oblasti konštantné čo do plochy (bez ohľadu na exotický vývoj ich tvaru v čase).



Obrázok 3.8: Vývoj súboru oscilátorov s nízkou energiou ($\varepsilon < 0.5$).



Obrázok 3.9: Vývoj súboru oscilátorov s rôznymi energiami ($0.2 < \varepsilon \leq 1$). Všimnime si, že oscilátor, ktorý mal na začiatku energiu $\varepsilon = 1$ sa exponenciálne blíži k bodu $(\pi/2, 0)$.



Obrázok 3.10: Vývoj súboru oscilátorov s energiami menšími aj väčšími ako kritická energia ($0.6 < \varepsilon \leq 1.4$). Tie oscilátory, ktoré mali na začiatku energiu väčšiu ako 1, utekajú nenávratne doprava.

3.3 Škálovanie

Škálovanie veličín je proces, pri ktorom zisťujeme, či a akým spôsobom možno zmeniť škály daného procesu (časové, dĺžkové, ...). K výsledku možno dospieť z pohybových rovníc, z Lagrangiánu a samozrejme, aj z riešenia (no škálovanie častokrát funguje aj bez explicitného vyriešenia daných rovníc). Vezmime si napr. pohybovú rovnicu voľného pádu v gravitačnom poli:

$$\ddot{z}(t) + g = 0 \quad (3.30)$$

Tvárame sa, že stojíme na Mesiaci. Chceme dať do súvisu časové a dĺžkové škály padajúceho telesa v terajšej situácii s tými, ktoré poznáme z podmienok známych na Zemi. Myslíme tým nasledujúce vzťahy medzi fyzikálnymi veličinami na Mesiaci (z, t, g) s tými na Zemi (Z, T, g_0).

$$\begin{aligned} z &= aZ \\ t &= bT \\ g &= cg_0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Naším cieľom bude prepísať rovnicu (3.30) na totožnú rovnicu pre premenné Z a T a parameter g_0 . Označme $aZ(T) \equiv z(t)$. V takom prípade bude pre druhú deriváciu Z podľa t platiť:

$$z(t) = aZ(T) \implies \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = a \frac{d^2 Z(T)}{dT^2} = a \frac{d^2 Z(T)}{dT^2} \frac{dT}{dt} = \frac{a}{b^2} \ddot{Z}(T) \quad (3.32)$$

$$\frac{a}{b^2} \ddot{Z}(T) + cg_0 = 0 \quad (3.33)$$

Pre pád telesa na Zemi musí platiť rovnica rovnakého tvaru ako (3.30), ibaže v premenných Z, T a s konštantou g_0 . Rovnicu (3.33) teda upravujeme dovedy, kým nedostaneme podmienku na konštanty a, b a c :

$$\frac{a}{b^2} \left(\ddot{Z}(T) + \frac{b^2 c}{a} g_0 \right) = 0 \quad (3.34)$$

Kým konštanta pred zátvorkou riešenia rovnice nevadí (pretože ju môžeme vykrátiť z rovnice), konštanta násobiaca g_0 musí byť rovná jednej, z čoho dostaneme podmienku na škálovanie samotného času pádu:

$$\frac{b^2 c}{a} = 1 \implies b = \sqrt{\frac{a}{c}} \quad (3.35)$$

Výsledok zodpovedá intuitívnej predstave: pri pustení telesa z a -krát väčšej výšky v c -krát silnejšom gravitačnom poli bude čas pádu trvať $\sqrt{a/c}$ dlhšie.

Teraz sa pozrime na Newtonov gravitačný zákon:

$$m\ddot{\vec{r}} = -\kappa \frac{mM\vec{r}}{r^3}; \quad \frac{m}{M} \ll 1$$

Vieme, že pre planéty v Slnčnej sústave je riešenie $\vec{r}(t)$ periodické. Podobne ako v predošlom príklade preškáľujeme dĺžky a čas:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &\rightarrow a\vec{r}\left(\frac{t}{b}\right) = \vec{R}(t) \\ \ddot{\vec{r}} &= \frac{a}{b^2} \ddot{\vec{r}} = -\kappa \frac{Ma\vec{r}}{a^3 r^3} \implies \frac{a^3}{b^2} = 1 \implies b = a^{3/2} \end{aligned}$$

To, čo sme dostali vyzerá, ako Keplerov zákon; ak preškalujeme dĺžky obehu planéty okolo slnka a -krát, potom doby (teda aj obežná doba) vystupujúce v pohybe sa preškalujú ako $a^{3/2}$:

$$L \rightarrow aL \implies T \rightarrow a^{3/2}T$$

Keplerov zákon hovorí, že pomer tretích mocnín hlavných poloosí a druhých mocnín obežných dôb planét je konštanta. Z tejto analýzy by sa mohlo zdať, že sme práve veľmi lacno odvodili Keplerov zákon. Nie je však tomu tak. Keplerov zákon v skutočnosti hovorí viac. Vo svojom zákone sa vyjadruje ku všetkým planétam Slnčnej sústavy, kdežto naša analýza sa vyjadřila len k takým tvarom trajektórií, ktoré sú si podobné (tj zoberiem lupu a na celý prípad sa pozriem zväčšene). Keplerovo pozorovanie sa týkalo aj planét, ktoré nemajú podobné dráhy (v zmysle rovnakej výstrednosti), teda je všeobecnejšie ako to, čo sme práve ukázali.

Teraz si ukážeme, že aj škálovanie Lagrangiánu sa niekedy ukáže byť užitočné. Najprv si uvedomíme, že ak nejakým postupom spôsobíme, že Lagrangián dostaneme prenášobený nenulovou konštantou, vlastne sme nič hrozné neurobili - Lagrangeove rovnice sa tým nezmenia (pretože v nich môžeme túto konštantu vykrátiť). Táto poznámka platí len pre potenciálové sily):

$$L \rightarrow \lambda L \implies \text{Lagrangeove rovnice sa nezmenia}$$

Tento princíp si demonštrujeme na rovnakom príklade voľného pádu, ktorého Lagrangián vyzerá nasledovne:

$$\begin{aligned} L(z, \dot{z}) &= \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz \\ z(t) &= aZ(T) \quad , \quad t = bT \\ \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz &= \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} \dot{Z} \right)^2 - mg(aZ) \\ T = U - L &\rightarrow \underbrace{\left(\frac{a}{b} \right)^2 T}_{\text{nevadí}} - aU = \underbrace{\left(\frac{a}{b} \right)^2}_{\text{nevadí}} \left(T - \underbrace{\frac{b^2}{a}}_{\text{vadí}} U \right) = \lambda(T - U) \Leftrightarrow \frac{b^2}{a} = 1 \end{aligned}$$

Vidíme, že sme sa dopracovali k tomu istému výsledku, ako predtým (pre jednoduchosť sme už gravitačné zrýchlenie neškálovali).

Príklad: predpokladajme, že doba obehu Mesiaca okolo Zeme je presne jeden mesiac. Ako ďaleko od Zeme musí obiehať družica s dobou obehu 1 deň, ak Mesiac obieha vo vzdialenosti l_m ? Podľa príkladu zo škálovania Newtonovho gravitačného zákona vieme:

$$\frac{l_m^3}{(30dn)^2} = \frac{l_d^3}{(1dn)^2} \implies l_d^3 = l_m^3 \frac{1}{900} \approx l_m^3 \frac{1}{1000} = \left(\frac{l_m}{10} \right)^3$$

Príklad: škálovanie kyvadla. Pracujme s Lagrangiánom kyvadla a pozrime sa, či vieme niečo zistiť ak budeme škálovať veľké kmity kyvadla (napr. ako sa zmení doba kyvu, keď počiatočná výchylka sa zdvojnásobí?):

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin(\varphi) = 0 \rightarrow \frac{1}{b^2} f \ddot{\varphi} + \frac{g}{al} \sin(f\varphi) = \frac{f}{b^2} \left[\ddot{\varphi} + \frac{b^2}{af} \frac{g}{l} \sin\left(\underbrace{f\varphi}_{?}\right) \right] = 0$$

Vidíme, že ak f -krát preškalujeme výchylky kyvadla, nič sa o jeho správaní nedozvedáme - neexistuje totiž možnosť, ako z tejto rovnice dostať pôvodnú rovnicu nejakými úpravami pre všeobecné f (pôvodný tvar nedosiahneme žiadnou netriviálnou voľbou a a b). Je tomu tak, pretože správanie kyvadla, ako sme už videli v predošlých častiach, je veľmi exotické - pokiaľ je počiatočná výchylka 90 stupňov, jej zdvojnásobením dostaneme nekonečnú dobu kyvu, ak sú však výchylky malé (tak malé, že budeme so zanedbaním $\sin(x) = x$ spokojní), doba kyvu nezávisí od počiatočnej výchylky (malej).

3.4 Problém dvoch telies

Problém dvoch telies je populárny a zároveň analyticky riešiteľný v uzavretom tvare, čo ho predurčuje ako učebnicový príklad rozmanitého využitia predností Lagrangeovskej mechaniky.

Majme nekonečný, prázdny priestor a v ňom dve bodové telesá hmotností m_1 a m_2 , ktoré majú polohu (voči nejakému nepodstatnému počiatku) $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$. Predpokladajme, že sila medzi týmito dvoma telesami sa dá opísať jedinou funkciou potenciálnej energie $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$. Skúsenosť ukazuje, že v takomto nekonečnom vesmíre nie je žiaden smer ani bod preferovaný - preto by mohlo platiť, že pri posunutí oboch telies o rovnaký vektor $\vec{a}$, sa pôsobenie medzi nimi nijako nezmení:

$$U(\vec{r}_1 + \vec{a}, \vec{r}_2 + \vec{a}) = U(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

Je možné, že týmto obmedzením sa nejakou zúži počet potencionálne prípustných funkcií, ktoré by mohli opisovať interakciu týchto dvoch telies. Podme nájsť takú funkciu (najvšeobecnejšiu možnú), ktorá toto spĺňa. Zavedme nové súradnice $\vec{u}$ a $\vec{v}$ nasledovne:

$$\vec{u} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 \quad \vec{v} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

Dostaneme novú funkciu týchto nových súradníc:

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V(\vec{u}, \vec{v})$$

Pozrime sa, čo sa stane s novými súradnicami a s novou funkciou, keď spravíme posunutie o vektor $\vec{a}$:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_1 + \vec{a} \quad \vec{r}_2 \rightarrow \vec{r}_2 + \vec{a} &\implies \vec{u} \rightarrow \vec{u} + 2\vec{a} \quad \vec{v} \rightarrow \vec{v} \\ U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V(\vec{u}, \vec{v}) &\rightarrow U(\vec{r}_1 + \vec{a}, \vec{r}_2 + \vec{a}) = V(\vec{u} + 2\vec{a}, \vec{v}) \end{aligned}$$

Ale musí platiť:

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = U(\vec{r}_1 + \vec{a}, \vec{r}_2 + \vec{a}) \implies V(\vec{u}, \vec{v}) = V(\vec{u} + 2\vec{a}, \vec{v})$$

To ale znamená, že funkcia V môže závisieť len od druhého okienka, premennej $\vec{v}$, no nie od prvého okienka, premennej $\vec{u}$. Pre pôvodnú funkciu U to znamená zúženie zo všetkých možných kombinácií vektorov $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$ na také, kde daná funkcia závisí len od kombinácie $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$:

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (3.36)$$

Rovnaká podmienka by mala platiť pre otočenia - ak obe telesá otočím okolo toho istého bodu rovnakým spôsobom, vzájomné pôsobenie telies sa nemôže zmeniť. Rotácie sa dejú pomocou rotačnej matice A :

$$\vec{r}_1 \rightarrow A\vec{r}_1 \quad \vec{r}_2 \rightarrow A\vec{r}_2$$

Pre funkciu U to má zásadný dôsledok:

$$\begin{aligned} U(A\vec{r}_1 - A\vec{r}_2) &= U[A(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)] = U(\underbrace{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}_{\vec{r}}) \\ \implies U(A\vec{r}) &= U(\vec{r}) \implies U(\vec{r}) = U(|\vec{r}|) \end{aligned} \quad (3.37)$$

To je vskutku očakávaný výsledok - potenciálna energia U musí byť konštantná na guli s polomerom r , teda zo všetkých možných kombinácií nakoniec potenciálna energia závisí len od $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$:

$$\implies U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = U(r) \quad (3.38)$$

Keď už sme si ujasnili, od čoho potenciálna energia môže a od čoho nemôže závisieť, pustíme sa do riešenia samotného problému s nejakou všeobecnou potenciálnou energiou. Lagrangián tejto sústavy bude:

$$L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, t) = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^2 - U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \times)$$

Lagrangeove rovnice budú bohužiaľ zret'azené (ani jednu nemožno riešiť bez tej druhej). Zavedieme teda nové súradnice $\vec{R}$ a $\vec{r}$, ktorých výhodu spoznáme veľmi skoro:

$$(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \rightarrow (\vec{R}, \vec{r}) \quad \vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (3.39)$$

Prvá súradnica opisuje polohu hmotného stredy sústavy, druhá súradnica je vlastne spojnice medzi dvoma telesami. Inverzné transformácie získame ľahko:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \quad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \quad (3.40)$$

Lagrangián prejde na tvar:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^2 - U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) &= \frac{1}{2}m_1\left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\dot{\vec{r}}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\dot{\vec{r}}\right)^2 - U(r) = \\ &= \frac{1}{2}(\underbrace{m_1 + m_2}_M)\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\left[m_1\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 + m_2\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2\right]\dot{\vec{r}}^2 - U(r) = \\ &= \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2^2 + m_1^2m_2}{(m_1 + m_2)^2}\dot{\vec{r}}^2 - U(r) = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2(m_2 + m_1)}{(m_1 + m_2)^2}\dot{\vec{r}}^2 - U(r) = \\ &= \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}}_{\mu}\dot{\vec{r}}^2 - U(r) \\ \implies L(\vec{R}, \vec{r}) &= \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - U(r); \quad M = m_1 + m_2 \quad \mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Po ceste sme získali dve hmotnostné konštanty, prvá vyjadruje celkovú hmotnosť systému M , druhá je redukovaná hmotnosť systému μ ¹⁵. Príjemným faktom je, že Lagrangián je odseparovaný - rovnice pre $\vec{R}$ sú samostatné, nezávislé na rovniciach pre $\vec{r}$:

$$M\ddot{\vec{R}} = 0 \quad \text{--hotovo} \quad (3.42)$$

$$\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_r \quad \text{--treba riešiť} \quad (3.43)$$

Prvá rovnica jednoznačne vyjadruje, že hmotný stred sústavy nesmie robiť žiadne psie kusy - maximálne sa môže pohybovať rovnomerne priamočiari. Druhá rovnica je podstata problému dvoch telies a pri zadanej sile (potenciáli) a počiatočných podmienkach vieme vypočítať trajektóriu v čase. Druhú rovnicu môžeme ešte viac zjednodušiť. Vieme, že silové pole je centrálné:

$$\vec{F}_r = -\vec{\nabla}U = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\vec{r} = \alpha(\vec{r})\vec{r}$$

¹⁵Mimochodom, jedná sa o polovicu harmonického priemeru hmotností m_1 a m_2 .

Ak je silové pole centrálné¹⁶, potom nutne moment sily je nulový:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \left(-\frac{1}{r} U' \vec{r} \right) = \vec{0}$$

To ale znamená, že moment hybnosti je konštanta:

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M} = 0 \implies \vec{L} = \text{konšt.} \quad (3.44)$$

Na druhej strane platí:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \implies \vec{r} \cdot \vec{L} = \vec{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = 0 \quad (3.45)$$

Z tejto rovnice vyplýva, že celý pohyb sa deje v rovine, ktorá prechádza počiatkom¹⁷. To nás oprávňuje zahodiť jednu z troch súradníc a zaviesť na opis len dve súradnice, x a y , ktoré sa budú pohybovať v niektorej rovine (určenej už počiatočnými podmienkami). Lagrangián prejde na tvar:

$$L(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = \frac{1}{2} \mu (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(\sqrt{x^2 + y^2})$$

Ukazuje sa, že vhodnejší opis by bol v polárnych súradniciach (napr. z argumentu funkcie U zmizne škaredá odmocnina a jej obsahom bude zase len jedna súradnica, r):

$$(x, y) \rightarrow (r, \varphi) \implies L(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r)$$

Sústava má podľa Lagrangiánu dve zachovávané sa veličiny:

$$\text{I.} \implies E = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + U(r) = \text{konšt.} \quad (3.46)$$

$$\text{II.} \implies \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2 \dot{\varphi} \equiv w = \text{konšt.} \quad (3.47)$$

(3.47 I.) je zákon zachovania energie, (3.47 II.) je zákon zachovania z -zložky momentu hybnosti (čo sme zistili už trochu vyššie). Z druhého zákona zachovania vyplýva druhý Keplerov zákon:

$$\mu r^2 \dot{\varphi} = \mu \frac{dS}{dt} = w \implies \dot{S} = \text{konšt.} \implies S = S_0 + \frac{w}{\mu} t \quad (3.48)$$

Ďalej by sme mohli pokračovať zákonom zachovania energie:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + U(r) &= E \\ \mu r^2 \dot{\varphi} &= w \\ \frac{1}{2} \mu \left(\dot{r}^2 + r^2 \frac{w^2}{\mu^2 r^4} \right) + U(r) &= E \\ \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{w^2}{2\mu r^2} + U(r) &= E \end{aligned}$$

¹⁶Centrálné znamená, že v každom bode priestoru je jeho smer totožný so smerom vektora $\vec{r}$. Jeho veľkosť sme vypočítali ako U' .

¹⁷Jediná možnosť, ako urobiť skalárny súčin nulovým je nulovosť aspoň jedného z vektorov, alebo ich kolmosť. Tým dostávame priamo aj odpoveď, v akej rovine sa bude diať pohyb - takej, ktorej normála je $\frac{1}{L} \vec{L}$.

Pre zadané $U(r)$ postupujeme nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{aligned}\frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{w^2}{2\mu r^2} + U(r) &= E \\ \dot{r}^2 + \frac{w^2}{\mu^2 r^2} &= \frac{2}{\mu} [E - U(r)] \\ \dot{r}^2 &= \frac{2}{\mu} E - \frac{2}{\mu} U_{ef.}(r)\end{aligned}$$

kde $U_{ef.}(r)$ je efektívny potenciál sústavy:

$$U_{ef.}(r) \equiv \left[U(r) + \frac{w^2}{2\mu r^2} \right] \quad (3.49)$$

V rovniciach sa prirodzene objavila akási efektívna potenciálna energia, ktorá v sebe samozrejme skrýva aj skutočnú potenciálnu energiu dvoch telies. Sme v stave, že ak nám niekto dá konkrétnu potenciálnu energiu, problém máme vyriešený v kvadraturách¹⁸:

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= \sqrt{\frac{2}{\mu}} \sqrt{E - U_{ef.}(r)} \\ \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}} \sqrt{E - U_{ef.}(r)}} &= \int dt = t - t_0\end{aligned} \quad (3.50)$$

Vidíme, že ak by sme poznali $U(r)$ (a vedeli vypočítať daný integrál v elementárnych funkciách), dostali by sme riešenie $t(r)$. To je takmer to isté, ako $r(t)$, teda úloha je momentálne vyriešená najviac, ako len môže byť vzhľadom na parametre, ktoré v úlohe poznáme. Pre uhol φ by sme riešenie našli už z $r(t)$ znovu zo zákona zachovania z -zložky momentu hybnosti:

$$\mu r^2(t) \dot{\varphi} = w \implies d\varphi = \frac{w}{\mu r^2(t)} dt \implies \varphi = \int \frac{w}{\mu r^2(t)} dt \quad (3.51)$$

Už zo zákona zachovania z -zložky momentu hybnosti vidno, že pohyb v uhle φ je monotónny - výraz $w/(\mu r^2)$ totiž nemení znamienko.

Doteraz sa úloha volala všeobecne - problém dvoch telies. Keďže sme v štádiu, že veľa toho už pre všeobecnú potenciálnu energiu nezistíme, zavedieme gravitačnú (popríklad elektrickú príťažlivú) potenciálnu energiu:

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}; \quad \alpha > 0 \quad (3.52)$$

a problém premenujeme na Keplerovu úlohu¹⁹.

¹⁸Riešenie v kvadraturách je riešenie, ktoré je vyjadrené ako:

$$\int R(r) dr = \int T(t) dt,$$

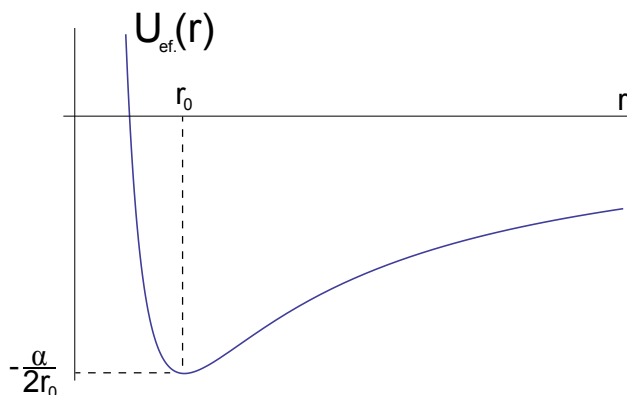
teda ku skutočnému explicitnému riešeniu niečo ešte chýba, čo však nie je až tak podstatné (rozhodne je problém v lepšom štádiu, ako keď je vyjadrený pomocou diferenciálnej rovnice, no v horšom štádiu, akoby sme mali explicitne $r(t)$).

¹⁹Všimneme si absolútne nepodstatnú vec a to že predtým sme riešili úlohu, ktorá mala v názve 'problém' a teraz riešime problém, ktorý má v názve 'úlohu'.

Pre náš problém je potrebný tvar efektívneho potenciálu:

$$U_{ef.}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{w^2}{2\mu r^2}; \quad r_0 = \frac{w^2}{\mu\alpha} \quad (3.53)$$

Po zavedení r_0 môžeme v škále tejto dĺžky naznačiť graf takéhoto potenciálu. Jeho minimum bude v r_0 a hodnota tohto minima bude $-\alpha/(2r_0)$:



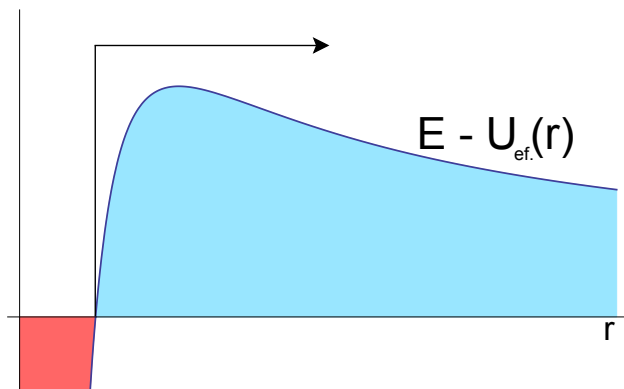
Obrázok 3.11: Efektívna potenciálna energia Keplerovej úlohy.

$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{ef.} = E \quad (3.54)$$

V závislosti od celkovej energie E sa život systému rozdeľuje na tri prípady, ktoré spolu nekolidujú (bez vonkajšieho podnetu sa nedá docieľiť, aby jeden prípad prešiel na druhý, pretože celková energia je konštantná):

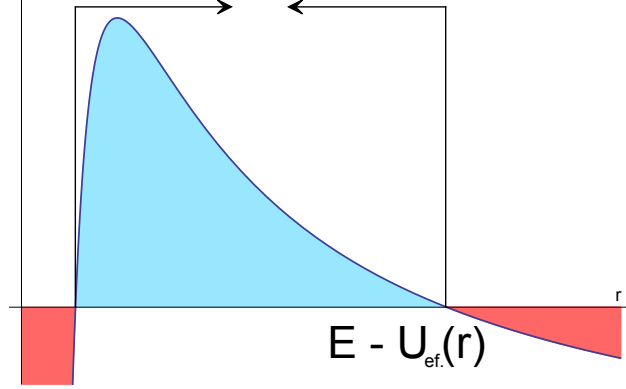
1. Ak je celková energia nulová ($E = 0$), potom sa jedno oproti druhému pohybuje po parabole (čo uvidíme neskôr), alebo sú od seba nekonečne ďaleko a nehýbu sa (to je prípad paraboly, keď $t \rightarrow \pm\infty$). Niekomu by sa mohlo podľa grafu vyššie zdať, že riešenie $r = r_0/2$ (t.j. koreň $U_{ef.}(r) = 0$ je tiež prípustné, no nie je to tak. Nižšie vo vzorci pre $\varphi(r)$ je vidno, že pre $r = r_0/2$ je $\varphi(r)$ *nedefinované*.

2. Ak je celková energia kladná ($E > 0$), telesá môžu od seba utiecť do nekonečna. Rovnako riešenie $r = \hat{r}$, kde $\hat{r}$ je koreňom rovnice $E - U_{ef.}(r) = 0$, *nie je* riešením pre takúto energiu z rovnakého dôvodu (nedefinované $\varphi(r)$). V skutočnosti sa systém s touto energiou pohybuje po hyperbole.



Obrázok 3.12: Celková energia systému je väčšia ako efektívna potenciálna energia.

3. Ak je celková energia záporná ($E < 0$), telesá sú od seba v istom intervale vzdialené a obiehajú okolo seba (nemôžu sa oslobodiť):



Obrázok 3.13: Celková energia systému je menšia ako efektívna potenciálna energia.

Na kompletne pochopenie problému netreba vedieť vyriešiť časové závislosti $r(t)$ a $\varphi(t)$, stačí nám závislosť $r(\varphi)$, respektíve $\varphi(r)$, keďže práve v týchto závislostiach sa skrýva tvar trajektórie. Z rovníc 3.47 a 3.4 dostávame:

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{w}{\mu r^2} dt & dr &= \sqrt{\frac{2}{\mu}} \sqrt{E - U_{ef}(r)} dt \implies \frac{d\varphi}{dr} = \frac{w}{\sqrt{2\mu}} \frac{1}{r^2 \sqrt{E - U_{ef}(r)}} \\ \varphi(r) &= \int \frac{w r^{-2}}{\sqrt{2\mu E + 2\mu\alpha r^{-1} - w^2 r^{-2}}} dr \end{aligned} \quad (3.55)$$

Tu už celkom jasne vidno, prečo v prípade $E > 0$ a $E = 0$ nie je riešením $r = \text{konšt.}$, hoci aj také, pre ktoré platí $U_{ef}(r) = 0$, rovnica (3.54) by tým síce bola splnená, no $\varphi(r)$ by bolo nedefinované.

Integrál vyriešime. Prvou substitúciou prevedieme škaredý integrál na trochu krajší:

$$\int \frac{w r^{-2} dr}{\sqrt{2\mu E + 2\mu\alpha r^{-1} - w^2 r^{-2}}} = \left[\begin{array}{l} w r^{-1} = p \\ w r^{-2} dr = -dp \end{array} \right] = - \int \frac{dp}{\sqrt{2\mu E + \frac{2\mu\alpha}{w} p - p^2}}$$

Výraz pod odmocninou prevedieme na štvorec a následne spravíme druhú substitúciu, ktorá integrál prevedie na cyklometrickú funkciu:

$$2\mu E + \frac{2\mu\alpha}{w} p - p^2 = 2\mu E + \left(\frac{\mu\alpha}{w}\right)^2 - \left(p - \frac{\mu\alpha}{w}\right)^2 = \left(2\mu E + \left(\frac{\mu\alpha}{w}\right)^2\right) (1 - u^2) ; \quad u = \frac{p - \frac{\mu\alpha}{w}}{\sqrt{2\mu E + \left(\frac{\mu\alpha}{w}\right)^2}}$$

$$\varphi(r) = \left[\begin{array}{l} u = \frac{p - \frac{\mu\alpha}{w}}{\sqrt{2\mu E + \left(\frac{\mu\alpha}{w}\right)^2}} \\ dp = \sqrt{2\mu E + \left(\frac{\mu\alpha}{w}\right)^2} du \end{array} \right] = - \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \arccos [u[p(r)]] + C$$

Dostávame implicitné vyjadrenie:

$$\varphi(r) = \arccos \left(\frac{\frac{w}{r} - \frac{\mu\alpha}{w}}{\sqrt{2\mu E + \left(\frac{\mu\alpha}{w}\right)^2}} \right) + C$$

Konštantu C identifikujeme ako počiatočný uhol φ_0 a rovnicu upravujeme až do výsledného tvaru:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{w}{r} - \frac{\mu\alpha}{w}}{\sqrt{2\mu E + \left(\frac{\mu\alpha}{w}\right)^2}} &= \cos(\varphi - \varphi_0) \\ \frac{w}{r} &= \frac{\mu\alpha}{w} + \sqrt{2\mu E + \left(\frac{\mu\alpha}{w}\right)^2} \cos(\varphi - \varphi_0) \\ \frac{r_0}{r} &= 1 + e \cos(\varphi - \varphi_0) ; \quad r_0 = \frac{w^2}{\mu\alpha}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2Ew^2}{\mu\alpha^2}} \end{aligned} \quad (3.56)$$

kde e je excentricita elipsy a φ_0 je nejaký počiatočný uhol (obe sú v podstate reprezentácie nejakých počiatočných podmienok).

Toto je rovnica kužeľosečiek²⁰, ktorej parameter výstrednosť je priamo e . Výraz r_0 (ktorý je koreňom $U_{ef.}$) je len škálovací parameter.

Tri prípady, ktoré sme rozobrali predtým vidíme aj teraz:

1. Ak je celková energia nulová ($E = 0$), potom sa jedno oproti druhému pohybuje po parabole, čo predstavuje výstrednosť $e = 1$.

$$E = 0 \implies r = \frac{r_0}{1 + \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad (3.57)$$

Tento prípad hovorí o tom, že v čase $t \rightarrow \pm\infty$ sú telesá od seba nekonečne vzdialené a stoja, pretože keď $r \rightarrow \infty$, potom $U_{ef.}(r) = 0$ a teda aj $\dot{r} = -2U_{ef.}/\mu = 0$.

2. Ak je celková energia kladná ($E > 0$), výstrednosť kužeľosečky e je väčšia ako 1 a trajektória je hyperbola. V tomto prípade tiež platí, že v čase $t \rightarrow \pm\infty$ sú od seba telesá nekonečne vzdialené, no ich vzdialovanie pokračuje limitne konštantnou vzájomnou rýchlosťou.

3. Ak je celková energia záporná ($E < 0$), výstrednosť e je v intervale $0 \leq e < 1$, čo predstavuje elipsu alebo kružnicu. V tomto prípade telesá od seba nemôžu utiecť a riešenie je periodické v čase. Špeciálnym prípadom je kružnica, keď $e = 0$:

$$E = -\frac{\alpha^2\mu}{2w^2} \implies e = 0 \quad (3.58)$$

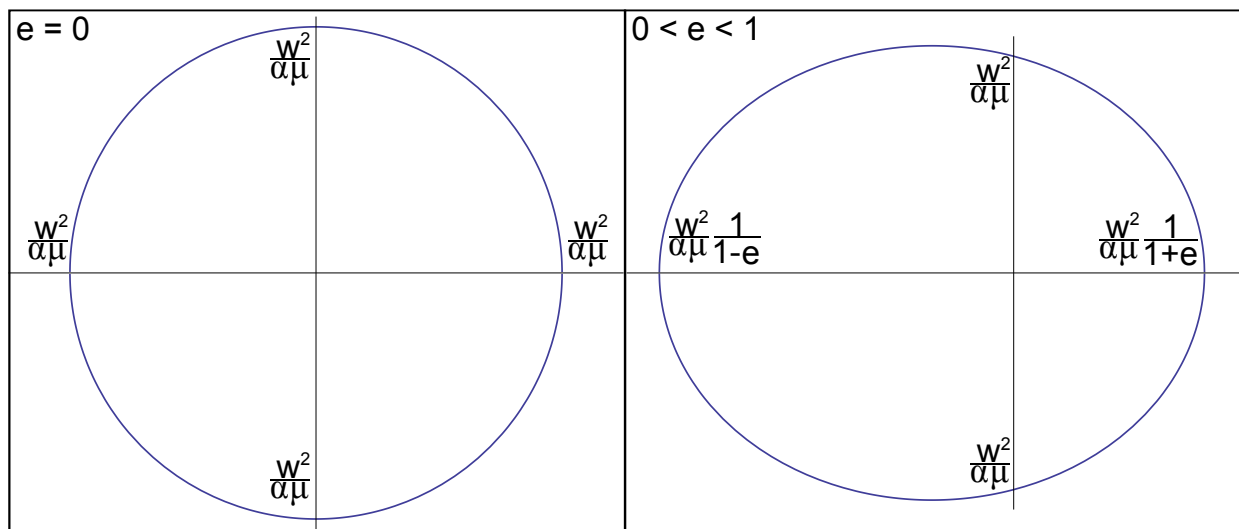
t.j. rovnica $E - U_{ef.}(r) = 0$ má jediné riešenie - trajektória pohybu s takouto energiou bude kružnica. V (3.56) to vidno tiež, pre ľubovoľný uhol φ totiž dostávame:

$$e = 0 \implies \frac{r}{r_0} = 1 \implies r \equiv r_0 \quad (3.59)$$

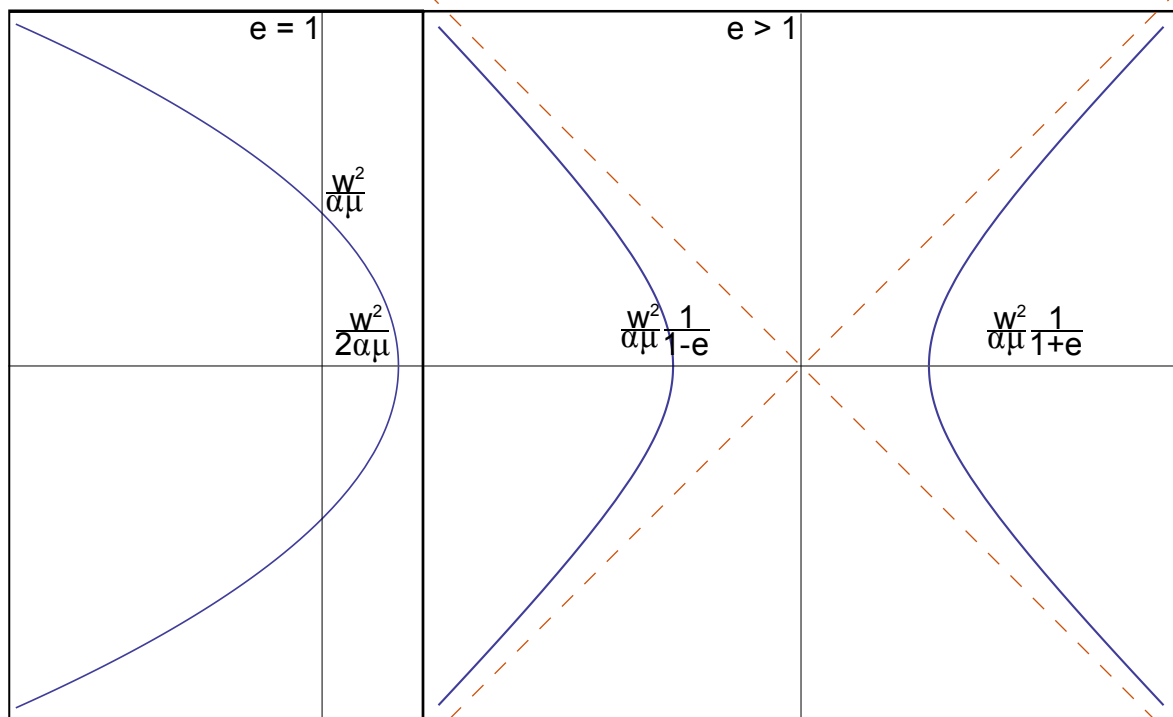
²⁰Conic section, alebo len conic. V literatúre možno nájsť rovnicu kužeľosečky v tvare:

$$\frac{r_0}{r} = 1 - e \cos(\varphi - \varphi_0)$$

Tento tvar sa od nášho líši nenápadným znamienkom mínus pred e . Riešenie to nijako dramaticky nemení, jedná sa len o otočenie celej situácie o 180° v rovine pohybu. Ak chceme mať aj my v rovnici silou-mocou mínus, stačí urobiť zámenu: $\varphi_0 \mapsto \pi + \varphi_0$.



Obrázok 3.14: Trajektória je kružnica, ak $E = -\frac{\alpha^2\mu}{2w^2} \Rightarrow e = 0$ a elipsa, ak $-\frac{\alpha^2\mu}{2w^2} < E < 0 \Rightarrow 0 < e < 1$.



Obrázok 3.15: Trajektória je parabola, ak $E = 0 \Rightarrow e = 1$ a hyperbola, ak $E > 0 \Rightarrow e > 1$.

3.5 Malé kmity

Malé kmity sa ukazujú byť užitočným nástrojom vo všetkých prípadoch, kedy má systém očividne minimum potenciálnej energie, no jej funkcia nie je kvadratickou formou v danom bode, teda vratná sila prislúchajúca okoliu tohto rovnovážneho bodu je nelineárna. Rovnice s takouto nelineárnou vratnou silou sú v drvivej väčšine neriešiteľné v elementárnych funkciách, no nás poväčšinou zaujímajú tzv. módy kmitania, teda akési separované elementárne kmity rôznych častí systému práve v úzkom okolí tohto minima (alebo rôznych miním, o ktorých vieme) - módy malých kmitov. Ukazuje sa, že pre potenciálne energie spĺňajúce isté podmienky sa malé kmity dajú riešiť úplne algoritmicky.

Ako príklad môže posloužiť rovinné matematické kyvadlo, ktorého pohybová rovnica je:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin(\varphi) = 0 \quad (3.60)$$

Typická rozprávka o tejto rovnici je, že ak sú výchylky v uhle φ malé (kde malé znamená také, že sme s malosťou rozdielu medzi φ a $\sin(\varphi)$ spokojní), potom $\sin(\varphi) \approx \varphi$ a rovnica prejde na tvar:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0; \quad \omega^2 = \frac{g}{l} \quad (3.61)$$

Skryto sa vlastne pri tomto procese odvolávame na malé kmity. Potenciálna energia má tvar:

$$U = -mgl \cos(\varphi) \quad (3.62)$$

Vieme, že táto potenciálna energia má v okolí $\varphi = 0$ svoje lokálne minimum, teda je možné, aby systém kmital v tomto okolí, ak sa jeho celková energia priveľmi nelíši od energie v tomto minime:

$$U(\varphi) = -mgl + \frac{1}{2}mgl\varphi^2 + \mathcal{O}(\varphi^4) \implies U(\varphi) \approx -mgl + \frac{1}{2}mgl\varphi^2 \quad (3.63)$$

Dosaďme túto energiu do Lagrangiánu a vyjadriť pohybovú rovnicu pre súradnicu φ :

$$\begin{aligned} L = T - U &= \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl\left(\frac{1}{2}\varphi^2 - 1\right) \\ ml^2\ddot{\varphi} + mgl\varphi &= 0 \\ \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi &= 0 \end{aligned} \quad (3.64)$$

Vidíme, že dostávame rovnicu totožnú s malými kmitmi rovinného matematického kyvadla. Po ceste sme sa naučili užitočnú vec - pri rozvíjaní potenciálnej energie do Taylorovho radu v okolí lokálneho minima stačí zobrať členy do druhej mocniny (vrátane), pričom na konštantnom člene nezáleží (pri derivácii Lagrangiánu v pohybovej rovnici aj tak zmizne). Uvažovať situáciu v blízkom okolí minima potenciálnej energie, kde sa môžeme obmedziť na prvý člen Taylorovho rozvoja, vedie na lineárne diferenciálne rovnice. Takéto rovnice majú ľudia (berúc ohľad na zložitosť ich riešenia) väčšinou radšej ako tie nelineárne. Ak by sa stalo, že v danej súradnici v danom lokálnom minime je koeficient pri druhej mocnine súradnice nulový, je to problém. Predstavme si napr. potenciálnu energiu:

$$U(x) = \frac{1}{4}kx^4$$

Tento tvar je sám sebe priamo Taylorovým polynómom (pretože je to polynóm a Taylorov rozvoj polynómu je...polynóm), no nevidíme v ňom žiaden člen, pri ktorom by stálo x^2 , to je však problém. Pohybová rovnica s takýmto potenciálom totiž bude nelineárna:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x^3 = 0$$

Časový vývoj takéhoto oscilátora potrebuje Jacobiho eliptickú funkciu sn (s Eliptickými funkciami sme sa už stretli pri veľkých kmitoch kyvadla), periódu kyvu možno za predpokladu poznania maximálnej výchylky vyjadriť ako β -funkciu. Vráťme sa však k priblíženiu malých kmitov.

Všeobecný postup predpokladá, že potenciálna energia systému:

$$U(q_1, q_2, \dots, q_n) = U(\mathbf{q}) \quad (3.65)$$

má v nejakom bode $(\mathbf{Q}_0)$ lokálne minimum, teda platí:

$$\exists \mathcal{U}(\mathbf{Q}_0) \forall \mathbf{q} \in \mathcal{U}(\mathbf{Q}_0) \setminus \{\mathbf{Q}_0\} : E = T + U(\mathbf{q}) > T + U(\mathbf{Q}_0) \quad (3.66)$$

Potenciálnu energiu potom možno rozvinúť do Taylorovho radu v tomto okolí:

$$U(\mathbf{q}) = U(\mathbf{Q}_0) + \underbrace{\frac{\partial U}{\partial q_i} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{Q}_0}}_{=0} (q_i - Q_{0i}) + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{Q}_0}}_{=K_{ij}} \overbrace{(q_i - Q_{0i})}^{=x_i} \overbrace{(q_j - Q_{0j})}^{=x_j} + \mathcal{O}[(\mathbf{q} - \mathbf{Q}_0)^3]$$

Uvažujme potenciálnu energiu v nových súradniciach x_i , ktoré sú ako šité na mieru tomuto problému. Ich stred sa totiž nachádza priamo v minime starej potenciálnej energie. Nová potenciálna energia nebude obsahovať ani konštantný člen $U(\mathbf{Q}_0)$, pretože tento aj tak vypadne pri derivácii:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} K_{ij} x_i x_j \quad (3.67)$$

Matica K_{ij} musí byť *kladne definitná* ak sa jedná o ostré lokálne minimum²¹.

Systém ešte obsahuje kinetickú energiu:

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} T_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} T_{ij}(\mathbf{q}) \dot{x}_i \dot{x}_j \quad (3.68)$$

Posledná rovnosť platí vďaka definícii x_i (lineárne posunutie) a tomu, že premenné vystupujú v kinetickej energii len v derivovanej podobe. Aj T_{ij} možno rozvinúť do radu v okolí $\mathbf{Q}_0$:

$$T_{ij}(\mathbf{q}) = \underbrace{T_{ij}(\mathbf{Q}_0)}_{M_{ij}} + \cancel{\frac{\partial T_{ij}}{\partial q_k} (q_k - Q_{0k})} + \mathcal{O}[(\mathbf{q} - \mathbf{Q}_0)^2]$$

Prvý člen je vlastne konštantná matica v danom minime, ktorú sme označili ako M_{ij} . Ukazuje sa, že v priblížení malých kmitov stačí brať len prvý člen v rozvoji kinetickej energie. Príjemný bonus tejto aproximácie je, že výsledné pohybové rovnice, ktoré získame, sú lineárne. Získali sme teda približné tvary kinetickej a potenciálnej energie v okolí daného lokálneho minima potenciálnej energie, z ktorých zostavíme Lagrangián:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) &= \frac{1}{2} M_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j \\ U(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} K_{ij} x_i x_j \\ L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) &= \frac{1}{2} M_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - \frac{1}{2} K_{ij} x_i x_j \end{aligned} \quad (3.69)$$

Pohybová rovnica pre i -tu súradnicu bude:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} &= 0 \\ M_{ij} \ddot{x}_j + K_{ij} x_j &= 0 \end{aligned} \quad (3.70)$$

²¹ Algebra 2

Vidíme, že táto rovnica obsahuje pre všeobecné M_{ij} a K_{ij} naraz rôzne súradnice x , čiže stupne voľnosti v tomto prípade interagujú. Dobrá správa je, že vhodnou transformáciou súradníc možno docieľiť, aby bola jedna z matíc jednotková a druhá diagonálna, čo si ukážeme čoskoro. Robíme teda vo všeobecnosti lineárnu transformáciu súradníc x :

$$x_i = A_{ij}\xi_j \implies \xi_j = (A^{-1})_{ij} x_i$$

Skúmame Lagrangián po tejto transformácii:

$$\begin{aligned} L(\xi, \dot{\xi}) &= \frac{1}{2} M_{ij} A_{ik} \dot{\xi}_k A_{jl} \dot{\xi}_l - \frac{1}{2} K_{ij} A_{ik} \xi_k A_{jl} \xi_l = \frac{1}{2} \underbrace{(A^T)_{ki} M_{ij} A_{jl}}_{=(A^T M A)_{kl}} \dot{\xi}_k \dot{\xi}_l - \frac{1}{2} \underbrace{(A^T)_{ki} K_{ij} A_{jl}}_{=(A^T K A)_{kl}} \xi_k \xi_l = \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{M}_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j - \frac{1}{2} \mathcal{K}_{ij} \xi_i \xi_j \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\mathcal{M} = A^T M A \quad \mathcal{K} = A^T K A \quad (3.72)$$

Skúsme docieľiť, aby $\mathcal{M} = A^T M A$ bola jednotková matica. Ďalšie odvodenie bude skôr úvaha. Prejdime pomocou matice B ku ďalším súradniciam, pre ktoré tentoraz platí:

$$\mathbf{x} \xrightarrow{A} \xi \xrightarrow{B} \eta; \quad x_i = B_{ij} \eta_j \quad (3.73)$$

Aj pre tieto súradnice požadujeme, aby v nich bola matica $\mathcal{M}$ jednotková (v ξ aj v η):

$$\mathcal{M} \rightarrow B^T \mathcal{M} B = B^T B = \mathbf{I}_n \quad (3.74)$$

Maticu $\mathcal{K}$ to postihne nasledujúcim spôsobom:

$$\mathcal{K} \rightarrow B^T \mathcal{K} B \quad (3.75)$$

Vieme, že $\mathcal{K}$ je kladne definitná (pretože už pôvodná matica K bola kladne definitná). Potom ak pre B platí $B^T B = \mathbf{I}_n$, tak $B^T \mathcal{K} B$ je diagonálna a kladne definitná. Dostávame teda záver, že existuje taká súradnicová sústava, v ktorej bude matica M jednotková a matica K diagonálna, kladne definitná - čo znamená, že všetky jej prvky budú kladné. Označme ich teda druhými mocninami:

$$K = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \omega_n^2 \end{pmatrix}$$

Potom Lagrangián sústavy bude:

$$L = \frac{1}{2} \delta_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - \frac{1}{2} K_{ij} x_i x_j = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 - \frac{1}{2} \omega_i^2 x_i^2 \quad (3.76)$$

Vidíme, že Lagrangián je separovaný na n častí, tak ako aj pohybové rovnice. Pre i -tu súradnicu ξ (vo vhodnej báze, v ktorej je systém separovaný) dostávame:

$$\ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i = 0$$

Rovnicu chápeme bez sumačnej konvencie

Pre každú súradnicu v danej vhodnej báze sme dostali rovnicu lineárneho harmonického oscilátora. Pohyb jednotlivých súradníc ξ sú vlastne módy kmitania celého systému a jednotlivé ω sú frekvencie týchto módov.

K súradniciam $\mathbf{x}$ sa dostaneme spätnou transformáciou:

$$x_i = A_{ij}\xi_j(t)$$

Kmitanie k -teho módu sa vyznačuje tým, že súradnica ξ_k kmitá a ostatné stoja:

$$k - \text{ty mód} : \xi_1(t) = 0, \quad \xi_2(t) = 0, \quad \dots \quad \xi_k(t) = S_k \cos(\omega_k t), \quad \dots \quad \xi_n(t) = 0$$

Pozrime sa, ako vyzerá i -ta súradnica $\mathbf{x}$ v k -tom móde kmitania:

$$\begin{aligned} x_i(t) &= \sum_{j=1}^n A_{ij}\xi_j(t) = A_{i1}\overbrace{\xi_1(t)}^{=0} + \dots + A_{ik}\xi_k(t) + \dots + A_{in}\overbrace{\xi_n(t)}^{=0} = \\ &= \cancel{\sum} A_{ik}S_k \cos(\omega_k t) = \cancel{\sum} C_{ik} \cos(\omega_k t) \end{aligned}$$

Vidíme, že v danom k -tom móde kmitania všetky súradnice x_i kmitajú s frekvenciou k -teho módu (alebo nekmítajú vôbec, pokiaľ $A_{ik} = 0$).

Ak chceme zistiť frekvencie módov kmitania v pôvodných súradniciach $\mathbf{x}$, o danom móde platí, že celý kmitá s jednou frekvenciou:

$$k - \text{ty mód} : \mathbf{x} = \mathbf{c} \cos(\omega t) \implies \ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{c} \omega^2 \cos(\omega t)$$

Tento poznatok dosadíme do pôvodnej pohybovej rovnice (3.70) pre súradnice $\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned} M_{ij}\ddot{x}_j + K_{ij}x_j &= 0 \\ M[-\mathbf{c} \omega^2 \cos(\omega t)] + K \mathbf{c} \cos(\omega t) &= 0 \\ (K - \omega^2 M) \mathbf{c} \cos(\omega t) &= 0 \end{aligned}$$

Pre nenulový vektor $\mathbf{c}$ platí, že ak má byť táto rovnica splnená, potom nutne:

$$\det(K - \omega^2 M) = 0 \quad (3.77)$$

$$\begin{vmatrix} K_{11} - \omega^2 M_{11} & K_{12} - \omega^2 M_{12} & \dots & K_{1n} - \omega^2 M_{1n} \\ K_{21} - \omega^2 M_{21} & K_{22} - \omega^2 M_{22} & \dots & K_{2n} - \omega^2 M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} - \omega^2 M_{n1} & K_{n2} - \omega^2 M_{n2} & \dots & K_{nn} - \omega^2 M_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.78)$$

Práve zostavenú rovnicu voláme sekulárna, alebo aj charakteristická rovnica. Vo všeobecnosti je to vlastne polynóm n -tého stupňa v premennej ω^2 . To ale znamená, že rovnica $\det(K - \omega^2 M) = 0$ vedie vo všeobecnosti na n riešení v premennej ω^2 a na $2n$ riešení v premennej ω (pričom tieto dve súvisia spolu cez opačné znamienko, no fyzikálne má zmysel len kladná frekvencia). Keď už máme pre každý mód zistenú jeho frekvenciu, ostáva vyriešiť, ako budú kmitať pôvodné súradnice $\mathbf{x}$. K tomu nám pomôže rovnica:

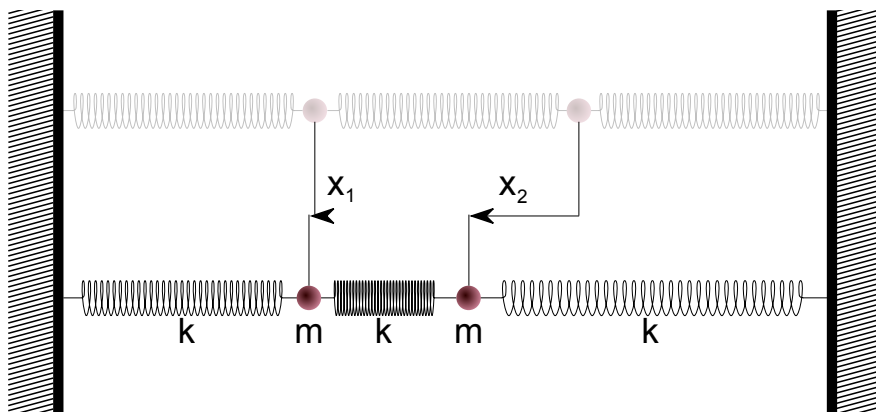
$$(K - \omega^2 M) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0 \quad (3.79)$$

čo je vlastne sústava lineárnych rovníc.

3.5.1 Príklady z kmitov

Malé kmity spriahnutých pružín

Majme spriahnuté pružinky, ako na obrázku:



Obrázok 3.16: Spriahnuté pružinky.

Predpokladáme, že tuhosti pružín sú rovnaké a hmotnosti teliesok tiež. Súradnicu teliesok budeme merať od ich pokojových hodnôt (t.j. keď sa systém nehýbe a všetci sú spokojní a pokojní tam, kde sú). Napíšeme si potenciálnu energiu:

$$U(x_1, x_2) = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow K = \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix}$$

Vidíme, že tvar potenciálnej energie už je v tvare malých kmitov. Kinetickú energiu:

$$T(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix},$$

už nemusíme upravovať. Riešením sekulárnej rovnice získame vlastné frekvencie módov kmitania systému:

$$\begin{aligned} (K - \omega^2 M) &= \begin{pmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & 2k - \omega^2 m \end{pmatrix} \\ \det(K - \omega^2 M) = 0 &\Rightarrow \begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & 2k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2k - \omega^2 m)^2 - k^2 = 0 \\ (2k - \omega^2 m)^2 &= k^2 \Rightarrow 2k - \omega^2 m = \pm k \Rightarrow \omega^2 = \frac{2k \mp k}{m} \\ \omega_1 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \end{aligned}$$

Riešením sústavy (3.79) pre vlastné vektory (x_1, x_2) sa presvedčíme o tom, že jednotlivé módy zodpovedajú kmitaniu guľičiek vo fáze a v protifáze:

1. mód : $x_1(t) = A \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ $x_2(t) = A \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$
2. mód : $x_1(t) = A \cos(\omega_2 t + \varphi_1)$ $x_2(t) = -A \cos(\omega_2 t + \varphi_1)$

Malé kmity sférického matematického kyvadla

Majme jeho Lagrangian vo sférických súradniciach, dĺžka kyvadla nech je $l_0 = \text{konšt.}$:

$$L(\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \theta, \varphi, t) = \frac{1}{2} m l_0^2 [\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta)] + m g l_0 \cos(\theta)$$

Rozviňme potenciálnu energiu do mocninného radu v okolí jej minima, ktoré je určité v $\theta = 0$. Keďže sa táto potenciálna energia skladá len z jedného člena (v jednej premennej), bude vyzerat' jednoducho:

$$U(\theta, \varphi, t) = -m g l_0 + \frac{1}{2} m g l_0 \theta^2$$

A tu narážame na problém. Problémom je, že aj keď má potenciálna energia v $\theta = 0$ minimum (pre ľubovoľné φ), nemôžeme položiť φ rovné nule (ani inej konštante), pretože toto minimum platí pre všetky φ (čo vidno aj z toho, že φ sa explicitne v potenciálnej energii nenachádza). No ak chceme robiť malé kmity tejto sústavy len v premennej θ (pretože φ v žiadnom prípade nemá prečo byť len malé), musíme sa pozrieť na kinetickú energiu a hneď zbadáme problém. Premenné θ a φ sú zret'azené, čo znamená, že buď obe naraz vykonávajú malé kmity, alebo malé kmity nevykonáva ani jedna. Obe naraz nemôžu konať malé kmity, lebo takáto podmienka je pre náš systém nefyzikálna²². Keď ani jedna súradnica nekoná malé kmity, sme nútení riešiť pôvodnú sústavu, čo nie je cieľom tejto úlohy²³.

Nastáva čas na zamyslenie, či je tento problém spôsobený súradnicami, alebo systémom ako takým. Skúsme sa na systém pozrieť v kartézskych súradniciach. V takýchto súradniciach (x, y, z) máme pre z v okolí rovnovážnej polohy:

$$z = -\sqrt{l_0^2 - x^2 - y^2} \quad (3.80)$$

Potenciálna energia bude:

$$U = m g z = -m g \sqrt{l_0^2 - x^2 - y^2}$$

Rozviňme túto potenciálnu energiu do Taylorovho radu so stredom v $(x, y) = (0, 0)$:

$$U = -m g l_0 + \frac{m g}{2 l_0} (x^2 + y^2)$$

Kinetická energia:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$\dot{z}^2$ bude:

$$\begin{aligned} \dot{z}^2 &= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial z}{\partial y} \dot{y} \right)^2 = \left(\frac{x \dot{x} + y \dot{y}}{\sqrt{l_0^2 - x^2 - y^2}} \right)^2 = \frac{x^2 \dot{x}^2 + 2xy \dot{x} \dot{y} + y^2 \dot{y}^2}{l_0^2 - x^2 - y^2} \\ \Rightarrow T &= \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{x^2 \dot{x}^2 + 2xy \dot{x} \dot{y} + y^2 \dot{y}^2}{l_0^2 - x^2 - y^2} \right) \end{aligned}$$

V maticovom tvare:

$$T = \frac{1}{2} m \begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \frac{x^2}{l_0^2 - x^2 - y^2} & \frac{xy}{l_0^2 - x^2 - y^2} \\ \frac{xy}{l_0^2 - x^2 - y^2} & 1 + \frac{y^2}{l_0^2 - x^2 - y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

²²Predstava sférického kyvadla nás vedie k záveru, že φ nemá prečo byť ohraňčené v malom okolí nejakého φ_0 .

²³A celkom by sme si aj fandili, keby sme sa o to pokúšali vo všeobecnosti.

Zvoľme teraz v kinetickej energii $x = 0$ a $y = 0$ (lebo v okolí týchto bodov sa konajú malé kmity) a napíšme výsledný Lagrangián (bez konštantných členov):

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{mg}{2l_0}(x^2 + y^2)$$

Vidíme, že Lagrangián sa nám rozdelil na dva Lagrangiány, pričom každý z nich opisuje len jednu súradnicu, buď x , alebo y . Potom nečudo, že výsledné Lagrangeove rovnice malých kmitov sférického kyvadla v minime opisujú izotrópny dvojrozmerný lineárny harmonický oscilátor:

$$\ddot{x} + \frac{g}{l_0}x = 0 \quad \ddot{y} + \frac{g}{l_0}y = 0$$

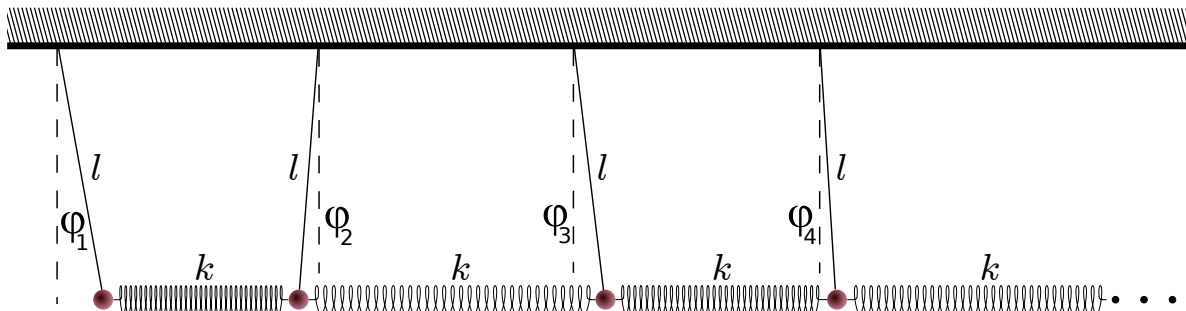
Tieto rovnice opisujú dvojrozmerný izotrópny oscilátor – to je taký, ktorý nerozpozná, do ktorého smeru kmitá²⁴. V oboch osiach na neho pôsobí rovnaká sila úmerná výchylke, tento systém má teda jednu frekvenciu jednoznačne určenú výrazom:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l_0}$$

Ak kyvadlo koná malé kmity v okolí $x = 0$, $y = 0$, pohybuje sa v priemete do roviny x , y po elipse. Súradnicu z dopočítame zo vzťahu (3.80).

Vráťme sa k pôvodnej otázke: je problém v samotnom systéme, alebo v sférických súradniciach? Očividne sa nám práve podarilo vyriešiť malé kmity uvažovaného systému v kartézskych súradniciach, problém teda nebude v systéme, ale v sférických súradniciach. Zobrazenie (x, y) do (θ, φ) spôsobilo, že to čo bolo v (x, y) v malých kmitoch separované, je v (θ, φ) zretážené. Kým pre súradnice x a y znamenajú malé kmity naozaj malý pohyb v ohraničenom priestore, pre súradnicu φ nič také neexistuje. Malé kmity môže sférické kyvadlo vykonávať aj tak, že sa točí dookola blízko pri rovnovážnej polohe.

²⁴Ak sa nepozrie na cenovku súradnej osi kúpenej v Tesco, na ktorej stojí „kartézska os x (resp. y), drevená, dĺžka: nekonečno, cena: 5 eur”.

Malé kmity sústavy n rovinných kyvadiel spriahnutých pružinami**

Obrázok 3.17: Spriahnuté kyvadlá.

Ukazuje sa, že tentoraz budú na opis kinematiky tohto systému uhly $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Budeme predpokladať také rozostupy kyvadiel v rovnovážnych polohách, v ktorých všetky kyvadlá visia zvislo nadol. V malých kmitoch budeme zanedbávať prejavy kyvadlovitosti (a to že s uhlom φ sa trochu (alebo aj veľmi) zmení výška, v ktorej je kyvadlo) na deformáciu pružín (že vo všeobecnom stave je pružina nie vždy vodorovne).

Prepočítajme súradnice i -teho kyvadla v premennej φ_i , ako aj ich derivácie a kvadráty derivácií. Definičný vzťah²⁵ pre mapovanie (x, z) do (l, φ) je:

$$\begin{aligned} x_i &= l \sin(\varphi_i) & \implies \dot{x}_i &= l \cos(\varphi_i) \dot{\varphi}_i & \implies \dot{x}_i^2 &= l^2 \cos^2(\varphi_i) \dot{\varphi}_i^2 \\ z_i &= -l \cos(\varphi_i) & \implies \dot{z}_i &= l \sin(\varphi_i) \dot{\varphi}_i & \implies \dot{z}_i^2 &= l^2 \sin^2(\varphi_i) \dot{\varphi}_i^2 \end{aligned} \quad (3.81)$$

Dôležitý detail je, že polohy x_i sú brané ako zvislý priemet *výchylky* kyvadla do súradnej osi x . Absolútna pozícia kyvadla v priestore je irelevantná. Kinetická energia sústavy bude:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m (\dot{x}_i^2 + \dot{z}_i^2) = \frac{1}{2} l^2 \sum_{i=1}^n m \dot{\varphi}_i^2 \quad (3.82)$$

Zápis v podobe kvadratickej formy:

$$T = \frac{1}{2} (\dot{\varphi}_1 \ \dots \ \dot{\varphi}_n) \begin{pmatrix} m l^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m l^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m l^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{\varphi}_n \end{pmatrix} \quad (3.83)$$

Maticu tejto kvadratickej formy označme M .

Zapíšme teraz potenciálnu energiu sústavy. Tá sa bude skladať jednak z potenciálnej energie v gravitačnom poli a aj potenciálnej energie stlačených, respektíve natiahnutých pružín:

$$U = U_{grav.} + U_{pruž.} = \sum_{i=1}^n (m g z_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} [k (x_i - x_{i+1})^2]$$

V súradniciach uhlov φ_i prejde potenciálna energia na tvar:

$$U = -mgl \sum_{i=1}^n \cos(\varphi_i) + \frac{1}{2} k l^2 \sum_{i=1}^{n-1} [\sin(\varphi_i) - \sin(\varphi_{i+1})]^2$$

²⁵Po krátkom rozmyslení je zrejmé, že je to n úplne rovnakých definičných vzťahov.

Spravme teraz rozvoj potenciálnej energie v okolí nulových súradníc φ_i (čo je zaujímavé minimum potenciálnej energie celej sústavy):

$$U = -nmg l + \frac{1}{2} mgl \sum_{i=1}^n \varphi_i^2 + \frac{1}{2} k l^2 \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n \frac{\partial \left[\sum_{i=1}^{n-1} [\sin(\varphi_i) - \sin(\varphi_{i+1})]^2 \right]}{\partial \varphi_a \partial \varphi_b} \varphi_a \varphi_b$$

Konštantný člen z potenciálnej energie odstránime, aditívna konštanta sa totiž nijako neprejaví v pohybových rovniciach. Samotný výpočet derivácií robiť nebudeme, uveďme radšej rovno maticový zápis potenciálnej energie v okolí minima. Označme K maticu kvadratickej formy potenciálnej energie:

$$K = \begin{pmatrix} m l^2 \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} \right) & -k l^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k l^2 & m l^2 \left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m} \right) & -k l^2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -k l^2 & m l^2 \left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m} \right) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m l^2 \left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m} \right) & -k l^2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -k l^2 & m l^2 \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} \right) \end{pmatrix} \quad (3.84)$$

Potom potenciálnu energiu v okolí jej minima možno zapísať ako kvadratickú formu:

$$U = \frac{1}{2} \varphi K \varphi^T \quad (3.85)$$

Riešime sekulárnu rovnicu v nasledujúcom tvare:

$$0 = \det(K - \omega^2 T) = m l^2 \begin{vmatrix} \frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m} & \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k}{m} & \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m} - \omega^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{k}{m} & \frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2 \end{vmatrix} \quad (3.86)$$

Budeme veriť tvrdeniu, že táto rovnica má pre premennú ω^2 a n oscilátorov naozaj n riešení - koreňov. Ďalej budeme veriť, že všetky riešenia sa dajú napísať v nasledovnom tvare:

$$\omega_i^2 = \alpha_i \frac{k}{m} + \frac{g}{l} \quad (3.87)$$

kde α_i sú bezrozmerné konštanty. Tomuto tak celkom nemusíme iba veriť. Člen g/l totiž po dosadení tohto ansatzu spôsobí vyhubenie akejkoľvek zmienky o tiažovom zrýchlení alebo dĺžky kyvadla v sekulárnej rovnici. Následne v rovnici ostanú len členy, ktoré obsahujú konštanty k a m a žiadne iné, čiže aj výsledok sa musí skladať len z týchto členov. To, že to bude práve kombinácia k/m určíme rozmerovou analýzou. Toto nie je tak celkom košér argumentácia, no ukludní nás inžinierska indukcia²⁶. Zistíme, že pre $n = 2$ máme práve dva korene, α_1 a α_2 . Pre $n = 3$ nám vyjdú tri korene, pre $n = 4$ vyjdú štyri korene atď. Celá podstata frekvencií vlastných kmitov sa odteraz teda skrýva v konštantách α_i . Voľba $\omega_i^2 = -(\alpha_i - 2)k/m + g/l$ by bola azda logickejšia, no terazšia voľba je názornejšia (a lepšie čitateľná voči výsledku).

²⁶Ktorej matematická rigoróznosť pokrívka (a ani nechodí).

Dosaďme tvar zvolenej ω do sekulárnej rovnice (3.86):

$$\begin{vmatrix} (1-\alpha)k & -k & \cdots & 0 & 0 \\ -k & (2-\alpha)k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & (2-\alpha)k & -k \\ 0 & 0 & 0 & -k & (1-\alpha)k \end{vmatrix} = 0$$

Tu vidíme, že všetky konštanty až na k vypadli. Aj to k môže vypadnúť (za predpokladu, že $k \neq 0$):

$$\begin{vmatrix} (1-\alpha)k & -k & \cdots & 0 & 0 \\ -k & (2-\alpha)k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & (2-\alpha)k & -k \\ 0 & 0 & 0 & -k & (1-\alpha)k \end{vmatrix} = (-k)^n \begin{vmatrix} \alpha-1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha-2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha-2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \alpha-1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha-2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha-1 \end{vmatrix} \equiv |E| = 0 \quad (3.88)$$

Tu jasne vidno, že argumentácia vyššie sa opiera o (nedokázaný) fakt, ktorý od tohto determinantu požadujeme: pre každé n má rovnica (3.88) n rôznych reálnych koreňov.

Toto je najviac, čo sa dá *vo všeobecnosti* povedať o n spriahnutých kyvadlách. Táto rovnica ani pre konkrétne vyššie n nemá „pekne korene“. Nasledujú príklady pre konkrétne $n \geq 2$ (pre $n = 1$ máme jediné kyvadlo s vlastnou frekvenciou $\sqrt{g/l}$).

$n = 2$: Matica E má tvar:

$$\begin{pmatrix} \alpha-1 & 1 \\ 1 & \alpha-1 \end{pmatrix}$$

Jej determinant je polynóm druhého stupňa:

$$(\alpha-1)^2 - 1 = 0$$

ktorého korene sú:

$$\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = 2 \quad (3.89)$$

$n = 3$: E :

$$\begin{pmatrix} \alpha-1 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha-2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha-1 \end{pmatrix}$$

Jej determinant je polynóm tretieho stupňa:

$$(\alpha-1)[(\alpha-1)(\alpha-2) - 2] = 0$$

ktorého korene sú:

$$\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = 1 \quad \alpha_3 = 3 \quad (3.90)$$

$n = 4$: E :

$$\begin{pmatrix} \alpha - 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha - 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha - 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha - 1 \end{pmatrix}$$

Jej determinant je polynóm štvrtého stupňa:

$$(\alpha - 1) [(\alpha - 2)^2 (\alpha - 1) - (\alpha - 1) - (\alpha - 2)] - 1 [(\alpha - 1)(\alpha - 2) - 1] = 0$$

ktorého korene sú:

$$\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = 2 - \sqrt{2} \quad \alpha_3 = 2 \quad \alpha_4 = 2 + \sqrt{2} \quad (3.91)$$

Všimneme si isté pravidlo. Riešenie $\alpha = 0$ sa nám doteraz zakaždým objavilo ako koreň. Platí to naozaj všeobecne? Vskutku áno, predsa sa jedná o základný mód kmitania akéhokoľvek počtu spriahnutých kyvadiel. Stačí, ak sa kývajú spolu (ich výchylky sú rovnaké v čase), potom sa pružiny do tohto pohybu neangažujú a dostaneme tak vlastnú frekvenciu, ktorá sa rovná vlastnej frekvencii jedného kyvadla.

Ďalšie menej zrejme pravidlo je, že riešenie $\alpha = 2$ sa objavuje pri každom párnom počte kyvadiel. Prečo to tak je? Tento fakt sa dá ukázať, keď si predstavíme párny počet kyvadiel a spárujeme ich po dvojiciach, vždy susedné k sebe. Potom mód odpovedajúci tejto vlastnej frekvencii je taký, kedy sa každý takýto pár kyvadiel kýve k sebe a od seba. Každá pružina v sústave je tak súčasne sprava aj zľava stláčaná symetricky. Keby sa takýto pohyb dial bez angažovania gravitačného poľa, potom vlastná frekvencia by z $\sqrt{k/m}$ narástla na $\sqrt{2k/m}$. Pružiny sa však do vlastnej frekvencie pri spriahnutých kyvadlách angažujú úplne samostatne, rovnaká dvojka teda pred člen k/m príde aj v tomto prípade. Toto pravidlo sa dá dokázať aj priamo z úprav determinantu po dosadení za $\alpha = 2$. Keďže determinant matice nemení svoju hodnotu pri pričítaní a -násobku ľubovoľného riadku, alebo stĺpca k inému riadku, alebo stĺpcu, potom môžeme prvý riadok odčítať od druhého a prvý stĺpec odčítať od druhého a na mieste (2,2) dostaneme -1 . Teraz pripočítame druhý riadok ku tretiemu a druhý stĺpec k tretiemu a na mieste (3,3) dostaneme 1. Tento postup opakujeme až ku poslednému riadku a stĺpcu - hodnota na mieste (n, n) bude 0, ak n je párne, no zároveň nikde inde už nenulové číslo v tomto riadku alebo stĺpci nebude - máme nulový determinant. V prípade, že n je nepárne, táto hodnota bude 2 a vieme, že determinant sa bude počítať ako súčin prvkov na diagonále (vzhľadom na to, že prvky mimo diagonály budú nuly), čo je isto nenulové číslo.

Teoreticky sa dá bez problémov pokračovať až do $n = 6$, pretože pre $n = 5$ bezpečne poznáme jeden koreň a to $\alpha = 0$, ktorým keď rovnicu vydělíme tak dostaneme polynóm štvrtého stupňa. Tento, ak sa aj nedá upraviť na jednoduchší tvar, určite je riešiteľný pomocou radikálov. Pre $n = 6$ bezpečne poznáme dva korene a to $\alpha = 0$ a $\alpha = 2$, ktorými podelíme rovnicu a dostaneme znovu polynóm štvrtého stupňa.

Prakticky je možné ísť ďalej, aj pre vyššie n , jednak numericky, no stále existuje šanca, že polynómy, ktoré dostaneme, sa budú dať rozumne upraviť na tvar, z ktorých budeme vidieť ďalšie korene pre α .

Ako čerešničku na torte, bez rozmazávania zložitých technických detailov (kľúčový pojem je *Laplaceov* rozvoj a veľa papiera) máme pre $n = 5$:

$$\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} (3 - \sqrt{5}) \quad \alpha_3 = \frac{1}{2} (5 - \sqrt{5}) \quad \alpha_4 = \frac{1}{2} (3 + \sqrt{5}) \quad \alpha_5 = \frac{1}{2} (5 + \sqrt{5}) \quad (3.92)$$

A pre $n = 6$:

$$\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = 2 - \sqrt{3} \quad \alpha_3 = 1 \quad \alpha_4 = 2 \quad \alpha_5 = 3 \quad \alpha_6 = 2 + \sqrt{3} \quad (3.93)$$

Periódá kmitov anharmonického oscilátora**

Je daná potenciálna energia anharmonického oscilátora:

$$U(x) = \frac{1}{2}k|x|^\alpha \quad (3.94)$$

Periódú budeme vyjadrovať samozrejme z konštánt, ktoré vystupujú v potenciálnej energii, hmotnosti a maximálnej výchylky X_m , ktorú máme zadanú. Vychádzame zo zákona zachovania energie, kde celková energia je rovná energii, ktorá je uložená vo väzbe anharmonického oscilátora, ak sa nachádza v maximálnej výchylke:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k|x|^\alpha = E = \frac{1}{2}k|X_m|^\alpha$$

Nájdeme diferenciál dt :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k|x|^\alpha &= \frac{1}{2}k|X_m|^\alpha \\ \dot{x}^2 &= \frac{k}{m}(|X_m|^\alpha - |x|^\alpha) \\ dt &= \frac{dx}{\sqrt{\frac{k}{m}(|X_m|^\alpha - |x|^\alpha)}} \end{aligned}$$

Vďaka symetrii potenciálnej energie môžeme písať, že pre periódú platí:

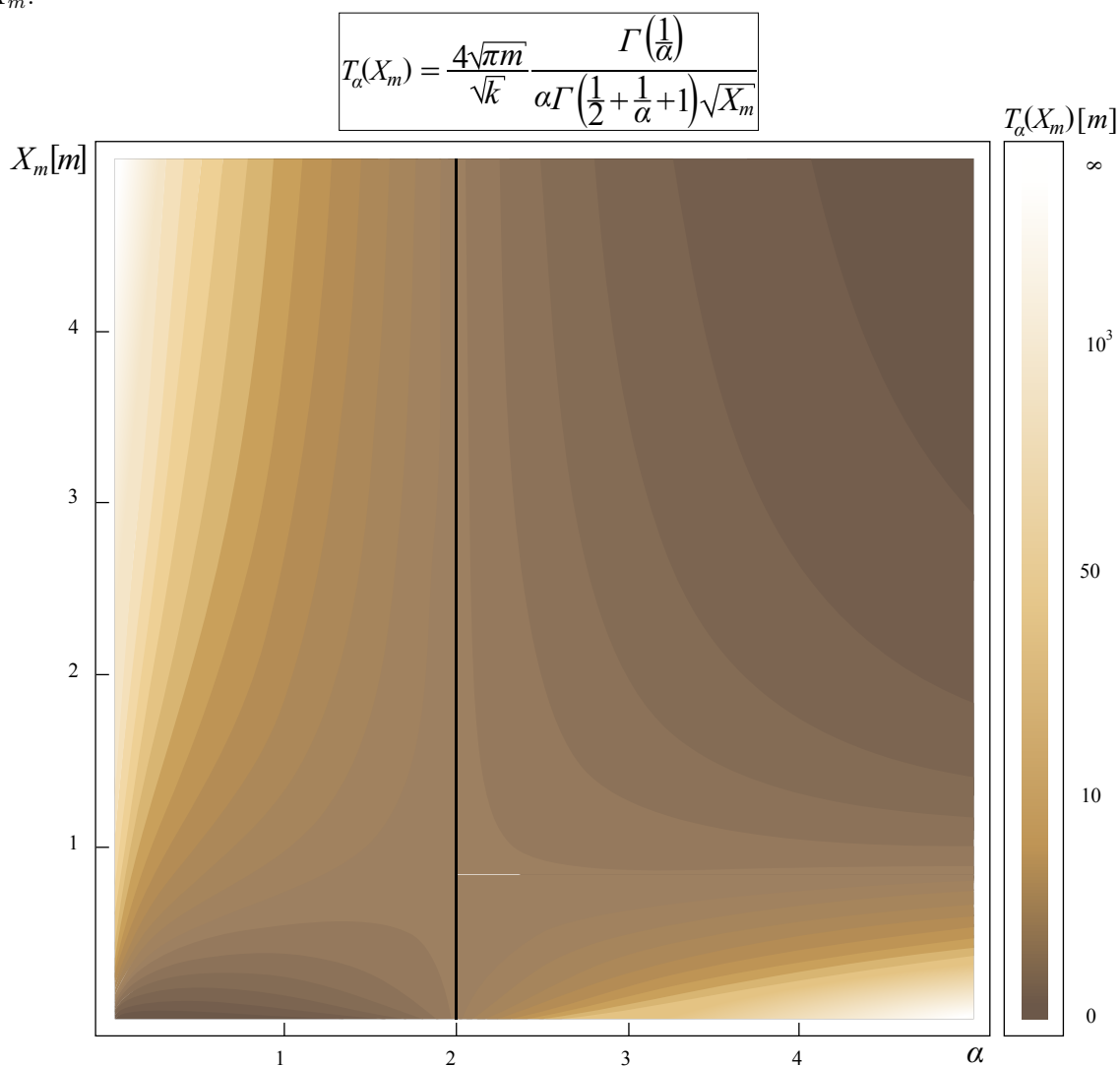
$$\begin{aligned} T_\alpha(X_m) &= 4 \int_0^{X_m} \frac{dx}{\sqrt{\frac{k}{m}(|X_m|^\alpha - |x|^\alpha)}} = 4\sqrt{\frac{m}{k}} \int_0^{X_m} \frac{dx}{\sqrt{|X_m|^\alpha - |x|^\alpha}} \frac{\frac{1}{X_m^{\alpha/2}}}{\frac{1}{X_m^{\alpha/2}}} = 4\sqrt{\frac{m}{X_m^\alpha k}} \int_0^{X_m} \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{X_m}\right)^\alpha}} = \\ &= \left[\frac{\frac{x}{X_m} = \xi}{dx = X_m d\xi} \right]_{\xi=0}^{\xi=1} = 4\sqrt{\frac{m}{X_m^\alpha k}} \int_0^1 \frac{X_m d\xi}{\sqrt{1 - \xi^\alpha}} = 4\sqrt{\frac{m}{X_m^{\alpha-2} k}} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^\alpha}} = \\ &= \left[d\xi = -\frac{1}{\alpha} (1 - \eta)^{1/\alpha-1} d\eta \right]_{\eta=1}^{\eta=0} = 4\sqrt{\frac{m}{X_m^{\alpha-2} k}} \int_1^0 \frac{-(1 - \eta)^{1/\alpha-1} d\eta}{\alpha \sqrt{\eta}} = \frac{4}{\alpha} \sqrt{\frac{m}{X_m^{\alpha-2} k}} \int_0^1 (\eta)^{1/2-1} (1 - \eta)^{1/\alpha-1} d\eta = \\ &= \frac{4}{\alpha \sqrt{X_m^{\alpha-2}}} \sqrt{\frac{m}{k}} \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{4}{\alpha \sqrt{X_m^{\alpha-2}}} \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{\overbrace{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}^{\sqrt{\pi}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha} + 1\right)} \\ T_\alpha(X_m) &= \frac{4\sqrt{\pi}}{\alpha \sqrt{X_m^{\alpha-2}}} \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha} + 1\right)} \quad (3.95) \end{aligned}$$

Vidíme zaujímavý fenomén: pre $\alpha > 2$ vidno, že s rastúcou maximálnou výchylkou saperióda skracuje. Toto korešponduje s našou predstavou. Ak $\alpha > 2$, tak vratná sila odpovedajúca tejto potenciálnej energii je nelineárna a s narastajúcou výchylkou tvrdne, teda ťahá viac. Keďže ťahá viac, teleso viac urýchľuje a teleso rýchlejšie prejde celý cyklus. Takisto vidno, že jedine kvadratický potenciál má tú výsadu, že perióda kmitov v takomto potenciáli nezávisí od výchylky. Ak dosadíme za $\alpha = 2$, dostaneme:

$$T_2(X_m) = \frac{4}{2\sqrt{X_m^{2-2}}} \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1)} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad (3.96)$$

čo je štandardná perióda kmitov lineárneho harmonického oscilátora s tuhosťou k a hmotnosťou m .

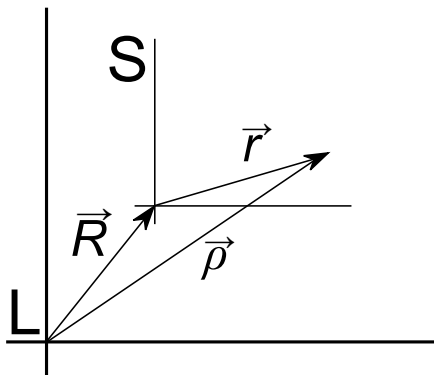
Na nasledujúcom obrázku vidíme závislosť doby kmitu (hnedá farba - malá doba kmitu, biela farba - veľká doba kmitu) od koeficientu α (os x) a maximálnej výchylky X_m (os y). Pre $\alpha = 2$ doba kmitu *nezávisí* od X_m .



Obrázok 3.18: Perióda kmitu anharmonického oscilátora v závislosti od α a X_m , $k = \text{konšt.}$, $m = \text{konšt.}$ Všimnime si, že keď $\alpha = 2$, tak perióda kmitu nezávisí od maximálnej výchylky.

3.6 Pohyb v neinerciálnej vzťažnej sústave

Na obrázku je naznačená laboratórna sústava L, ktorá je inerciálna. V tejto sústave sa nachádza iná sústava S, ktorej počiatok $\vec{R}$ sa vzhľadom k laboratórnej sústave pohybuje. Označme vektor $\vec{r}$ ako polohu telesa v neinerciálnej sústave:



Obrázok 3.19: Laboratórna a neinerciálna sústava.

V inerciálnej vzťažnej sústave pôsobí na teleso sila podľa Newtonovho zákona sily:

$$m\ddot{\vec{\rho}} = \vec{F} \quad (3.97)$$

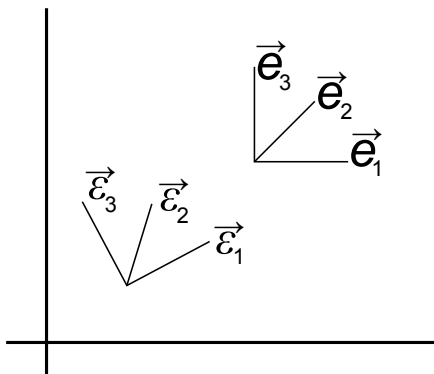
Keďže $\vec{\rho} = \vec{R} + \vec{r}$, v sústave S platí iný zákon sily:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}} \quad (3.98)$$

Veličinu $\ddot{\vec{R}}$ označíme ako $\vec{A}$ - jedná sa o zrýchlenie počiatku neinerciálnej sústavy. Vzorček, ktorý sme odvodili, platí len pre takú sústavu S, ktorá sa neotáča. Pre sústavu otáčajúcu sa uhlovou rýchlosťou $\vec{\omega}$ odvodíme zložitejší vzťah.

Na to, aby sme tak urobili, potrebujeme problém uchopiť za správny koniec (cez lepší aparát ako len vektory $\vec{r}$, $\vec{R}$, $\vec{\rho}$ a $\vec{\omega}$).

Zavedieme pojem *repér* - bude to báza niekde v priestore, ktorá bude ortonormálna. Rôzne repéry môžu byť rôzne natočené.



Obrázok 3.20: Rôzne *repéry*. Niekedy je možné vytvoriť si k nim citovú väzbu ich pomenúvaním - repér Jano, repér Fero, repér e, repér ε .

Majme teraz dva repéry e a ε , ktoré budú sedieť na tom istom mieste, líšiť sa budú len natočením.

Keďže každý repér tvorí bázu v trojrozmernom priestore, každý vektor z tohto priestoru možno do takého repéra rozložiť. Nech vektor $\vec{r}$ má zložky X_i vzhľadom na repér (čiže bázu) e a zložky x_i vzhľadom na repér ε . Potom platí:

$$\vec{r} = X_i \vec{e}_i = x_i \vec{\varepsilon}_i \quad (3.99)$$

Nech teraz repér e stojí a jeho osi sú zároveň s laboratórnymi osami. Repér ε sa nejako točí (pričom stále sedí na rovnakom mieste, ako e). Rovnica (3.99) ostáva v platnosti ²⁷, ale vyjadrenie $\dot{\vec{r}}$ sa zmení:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{X}_i \vec{e}_i = \dot{x}_i \vec{\varepsilon}_i + x_i \dot{\vec{\varepsilon}}_i \quad (3.100)$$

Vyvstáva otázka, čo je to vlastne $\dot{\vec{\varepsilon}}_i$. Než ju zodpovieme, odbočíme k iným rovniciam, zdanlivo bez súvisu.

Skúmame takúto rovnicu:

$$\dot{\vec{b}} = \vec{\omega} \times \vec{b}, \quad (3.101)$$

kde $\omega(t)$ je dané. Pozrime sa najprv na prípad, keď $\omega_i(t) = \text{konšt.}$ Táto diferenciálna rovnica má tvar:

$$\dot{\vec{b}} = A\vec{b},$$

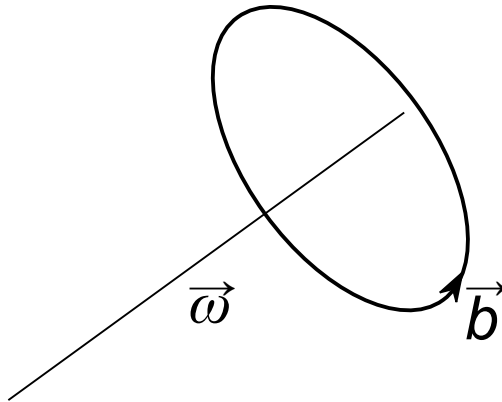
kde maticu A získame z:

$$\left[\omega \times \vec{b} \right]_i = \varepsilon_{ijk} \omega_j b_k \stackrel{!}{=} A_{ik} b_k \implies A_{ik} = \varepsilon_{ijk} \omega_j ; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Situáciu skúmame v báze, kde $\vec{\omega}$ má smer b_3 . Rovnice (3.101) potom prejdú na tvar:

$$\begin{aligned} \dot{b}_1 &= -\omega b_2 \\ \dot{b}_2 &= \omega b_1 \end{aligned} \quad (3.102)$$

Toto je sústava, ktorá opisuje pohyb po kružnici s uhlovou frekvenciou $|\vec{\omega}|$. V priestore sa bude vektor $\vec{b}$ točiť okolo vektora $\vec{\omega}$ uhlovou rýchlosťou $|\vec{\omega}|$. Obrázok:



Obrázok 3.21: Rotácia vektora $\vec{b}$ okolo vektora $\vec{\omega}$.

²⁷jediná zmena by spočívala v pridaní časovej závislosti ku $\vec{\varepsilon}_i$ do zátvorky

Prípád pre naozajstnú časovú závislosť $\vec{\omega}(t)$ už nie je taký ľahký, no možno nahliadnuť podobné správanie v krátkom čase dt :

$$\vec{b}(t + dt) = \vec{b}(t) + dt \dot{\vec{b}}(t) = \vec{b}(t) + dt \vec{\omega}(t) \times \vec{b}(t)$$

Tentoraz sa stihne vektor za čas dt otočiť o kúsok, ako by to urobil v prípade konštantnej $\vec{\omega}$. Keďže sa však $\vec{\omega}(t)$ s časom mení, teda aj vektor a rýchlosť, s akou sa bude $\vec{b}(t)$ točiť okolo $\vec{\omega}(t)$ sa bude meniť. Spočítame časovú deriváciu kvadrátu veľkosti $\vec{b}$:

$$\frac{d}{dt} (\vec{b} \cdot \vec{b}) = 2\vec{b} \cdot \dot{\vec{b}} = 2\vec{b} \cdot (\vec{\omega}(t) \times \vec{b}) = 0$$

Z toho však plynie, že veľkosť $\vec{b}$ sa v čase nemení (pretože sa v čase nemení ani jej kvadrát), teda vektor $\vec{b}$ sa pre ľubovoľnú $\vec{\omega}(t)$ pohybuje na sfére. Rovnicu $\dot{\vec{b}} = \vec{\omega} \times \vec{b}$ teda možno chápať ako opis vektora $\vec{b}$, ktorý rotuje okolo iného vektora, $\vec{\omega}$, ktorého koniec sa v priestore pohybuje. Rýchlosť rotácie $\vec{b}$ je určená veľkosťou $\vec{\omega}$ a jeho okamžitú os rotácie určuje okamžitý smer $\vec{\omega}$.

Toto môžeme priamo zužitkovať pri repéroch. Menovite repér ε vraj v čase rotuje, teda určite existuje $\vec{\omega}(t)$, ktorý spĺňa:

$$\dot{\vec{\varepsilon}}_i = \vec{\omega} \times \vec{\varepsilon}_i \quad (3.103)$$

Zároveň je veľmi užitočné pozorovanie, že podľa tejto rovnice sa veľkosť $\vec{\varepsilon}_i$ nemení. Také čosi od repéru požadujeme, je to totiž *ortonormálna* báza (jej báзовé vektory sú jednotkové).

Vráťme sa k rovnici (3.100):

$$\dot{\vec{r}} = \dot{X}_i \vec{e}_i = \dot{x}_i \vec{\varepsilon}_i + x_i \dot{\vec{\varepsilon}}_i \quad (3.104)$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}_i \vec{\varepsilon}_i + x_i \vec{\omega} \times \vec{\varepsilon}_i = \dot{x}_i \vec{\varepsilon}_i + \vec{\omega} \times (x_i \vec{\varepsilon}_i) = \dot{x}_i \vec{\varepsilon}_i + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (3.105)$$

Vyjadríme zrýchlenie telesa v sústave S, teda druhú časovú deriváciu $\vec{r}$:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= \frac{d}{dt} (\dot{x}_i \vec{\varepsilon}_i + \vec{\omega} \times \vec{r}) = \ddot{x}_i \vec{\varepsilon}_i + \dot{x}_i \dot{\vec{\varepsilon}}_i + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = \\ &= \ddot{x}_i \vec{\varepsilon}_i + \dot{x}_i \vec{\omega} \times \vec{\varepsilon}_i + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\dot{x}_i \vec{\varepsilon}_i + \vec{\omega} \times \vec{r}) = \\ &= \ddot{x}_i \vec{\varepsilon}_i + 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \end{aligned} \quad (3.106)$$

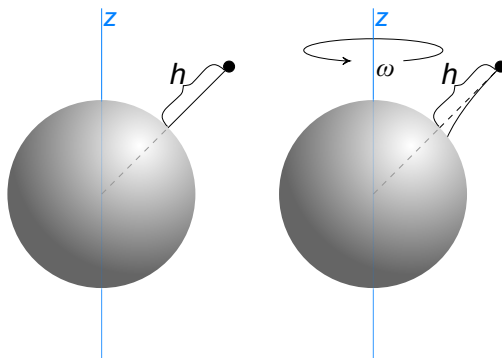
Dostávame zákon sily v neinerciálnej vzťažnej sústave:

$$m\vec{a} = \vec{F} - m\vec{A} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v} - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (3.107)$$

kde $\vec{a}$ je zrýchlenie telesa v sústave S, $\vec{F}$ je reálna sila, ktorá naň pôsobí, $\vec{A}$ je zrýchlenie sústavy S oproti inerciálnej sústave L. Druhý člen predstavuje zotrvačnú silu, tretí člen je Coriolisova sila, štvrtý Eulerova a piaty Huyghensova (odstredivá) sila.

3.6.1 Voľný pád telesa na rotujúcu zem

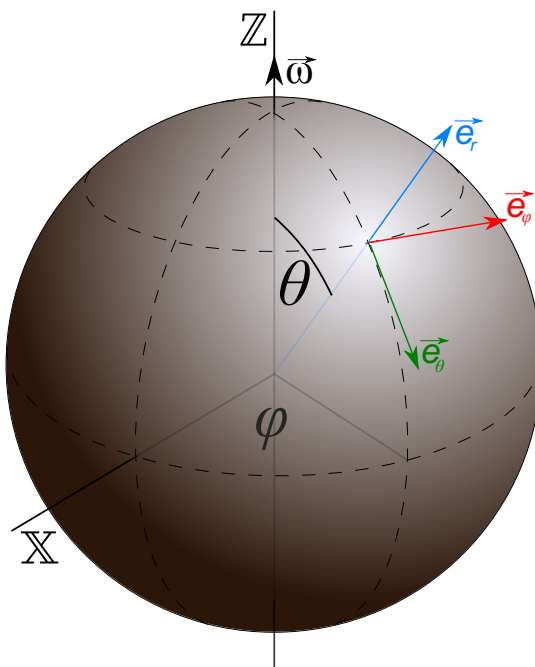
Majme Zem ako ideálnu guľu s polomerom R , ktorá rotuje okolo osi z (os rotácie prechádza jej stredom) uhlovou rýchlosťou $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$. Predpokladajme, že vlastné zrýchlenie Zeme v dôsledku obehu okolo Slnka môžeme zanedbať, tak ako aj veličinu $\dot{\vec{\omega}}$ (uhlová rýchlosť sa nemení *príliš*). Z výšky h nad povrchom padá teleso k povrchu Zeme. Vieme, že ak uvažujeme Zem ako statické teleso, potom táto dráha bude podmnožinou priamky a bod dopadu bude ležať na spojnici stredy gule a pôvodného miesta, odkiaľ teleso padalo:



Obrázok 3.22: Voľný pád telesa na stojatú Zem vs. pád na roztocenu Zem.

Do obrázku, na ktorom sa Zem točí (3.22), sme naznačili myšlenú trajektóriu, po ktorej by malo teleso padať - odstredivé zrýchlenie stáča trajektóriu k rovníku, Coriolisova sila v smere rovnobežky.

Problém budeme najprv skúmať vo sférických súradniciach (r, θ, φ) . Uhol θ budeme merať od osi Z , čo je os, okolo ktorej Zem rotuje:



Obrázok 3.23: Sférická súradnicová sústava. Uhol $\theta \in (0, \pi)$ je meraný od (význačnej) osi Z , okolo ktorej sa točí celá Zem. Uhol φ je zavedený od nejakej nie veľmi význačnej osi X .

K dispozícii máme pohybovú rovnicu, ktorá vo vektorovom tvare platí v akejkoľvek sústave:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (3.108)$$

Cieľom je postupne vyjadriť všetky vektory a vektorové operácie vo sférických súradniciach. Poloha hmotného bodu je daná len vektorom $\vec{e}_r$:

$$\vec{r} = r \vec{e}_r \quad (3.109)$$

Veľkosť uhlovej rýchlosti je ω a smeruje v $\mathbb{Z}$, čo je os, od ktorej sme zaviedli sférický uhol θ . Jej súradnice teda budú:

$$\vec{\omega} = \omega \cos(\theta) \vec{e}_r - \omega \sin(\theta) \vec{e}_\theta \quad (3.110)$$

Gravitačné zrýchlenie pôsobí v smere do stredu Zeme, jeho jediná zložka teda bude v smere $\vec{e}_r$:

$$\vec{g} = -g \vec{e}_r \quad (3.111)$$

Taktiež budeme potrebovať vyjadrenie $\dot{\vec{r}}$ a $\ddot{\vec{r}}$:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\vec{e}}_r = \dot{r} \vec{e}_r + r \left(\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \right) = \\ &= \dot{r} \vec{e}_r + r \left(\dot{\theta} \vec{e}_\theta + \sin(\theta) \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \right) = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \sin(\theta) \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \end{aligned} \quad (3.112)$$

Podobne by sme získali aj $\ddot{\vec{r}}$, pre skrátenie výrazov len napíšeme výsledok:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= \left(\ddot{r} - \dot{r} \dot{\theta}^2 - r \dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta) \right) \vec{e}_r + \left(r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\varphi}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \right) \vec{e}_\theta + \\ &+ \left(r \ddot{\varphi} \sin(\theta) + 2\dot{r} \dot{\varphi} \sin(\theta) + 2r \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos(\theta) \right) \vec{e}_\varphi \end{aligned} \quad (3.113)$$

Kvôli ďalším odvodeniam je dobré vedieť, ako sa vektorovo násobia jednotlivé jednotkové vektory:

$$\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta = \vec{e}_\varphi \quad \vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = -\vec{e}_\theta \quad \vec{e}_\theta \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_r \quad (3.114)$$

Ostatné násobenia sú buď nulové, ak sa jedná o dva rovnaké jednotkové vektory, alebo s opačným znamienkom, ak dva vektory vymeníme. Odvodíme vyjadrenie Coriolisovej sily:

$$\begin{aligned} -2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} &= \\ &= 2m\omega r \dot{\varphi} \sin^2(\theta) \vec{e}_r + 2m\omega r \dot{\varphi} \sin(\theta) \cos(\theta) \vec{e}_\theta - 2m \left(\omega r \dot{\theta} \cos(\theta) + \omega \dot{r} \sin(\theta) \right) \vec{e}_\varphi \end{aligned} \quad (3.115)$$

Na rade je vyjadrenie nepríjemného člena, dvojitého vektorového súčinu, ktorý budeme potrebovať kvôli odstredivej sile:

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \omega r \sin(\theta) \vec{e}_\varphi \quad (3.116)$$

$$-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = m\omega^2 r \sin^2(\theta) \vec{e}_r + m\omega^2 r \sin(\theta) \cos(\theta) \vec{e}_\theta = m\omega^2 r \sin(\theta) (\sin(\theta) \vec{e}_r + \cos(\theta) \vec{e}_\theta) \quad (3.117)$$

Takýto výsledok by sme aj očakávali - takáto odstredivá sila smeruje kolmo na os otáčania a „ťahá“ objekty ďalej od osi. Jej veľkosť je:

$$|-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})| = m\omega^2 r \sin(\theta) \quad (3.118)$$

teda naozaj platí, že čím bližšie je objekt ku pólom (teda θ sa blíži 0 alebo π), alebo čím bližšie je ku stredu Zeme, tým menej naň pôsobí odstredivá sila.

Teraz môžeme po zložkách napísať pohybové rovnice hmotného bodu:

$$\begin{aligned} \ddot{r} - \dot{r}\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta) &= -g + 2\omega r\dot{\varphi} \sin^2(\theta) + \omega^2 r \sin^2(\theta) \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) &= 2\omega r\dot{\varphi} \sin(\theta) \cos(\theta) + \omega^2 r \sin(\theta) \cos(\theta) \\ r\ddot{\varphi} \sin(\theta) + 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin(\theta) + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos(\theta) &= -2\omega (r\dot{\theta} \cos(\theta) + \dot{r} \sin(\theta)) \end{aligned} \quad (3.119)$$

Táto sústava je samozrejme príserne zložitá, nelineárna a pravdepodobne neriešiteľná vo všeobecnosti analyticky. Na nasledujúcich riadkoch sa budeme venovať tomu, čo možno zanedbať, čo za zanedbaniami zvykne byť, čo je malé, čo je veľké a čo tieto pojmy vlastne znamenajú. Keď sa logicky a z nadhľadu pozrieme na problém, ktorý riešime, zistíme, že oproti pôvodnému problému, teda voľnému pádu, očakávame len malé korekcie. Napríklad typické rýchlosti, ktoré dosahuje objekt pri voľnom páde z rozumnej výšky (rádovo do 100m) sú $\sqrt{2gh} \approx 50m/s$. Typické doby pádu bývajú $\sqrt{2h/g} \approx 5s$. Keď sa pozrieme na rovnicu (3.108), vidíme v nej oproti členu, ktorý celé padanie zapríčiňuje aj členy, o ktorých predpokladáme, že ich efekt nebude príliš veľký. Tak napríklad Coriolisova sila nejako závisí od súčinu rýchlosti a uhlovej rýchlosti objektu, teda ak sa zameriavame na rádový odhad tohto efektu, stačí nám zobrať dopadovú rýchlosť prenášobení uhlovou rýchlosťou rotácie Zeme, $\sqrt{2gh}\omega$. Zem rotuje s uhlovou rýchlosťou približne $6 \cdot 10^{-5}m$, z čoho dostávame typické zrýchlenia zapríčinené Coriolisovou silou $3 \cdot 10^{-3}m/s^2$. Typické zrýchlenia od odstredivej sily zase zistíme z výrazu $\omega^2 R$, kde R je rádovo polomer Zeme (pretože to je typická vzdialenosť od osi rotácie, ak nie sme blízko pólom). Vyjde nám $2 \cdot 10^{-2}m/s^2$. Z týchto charakteristických zrýchlení by nám malo byť jasné, že riešenie sa nebude príliš odchyľovať od voľného pádu na statickú Zem. Do toho nahliadneme napr. tak, že prenášobíme typické zrýchlenia typickým časom (a časom na druhú) a porovnáme ich s typickými rýchlosťami (a dĺžkami). Typické rýchlosti pádu sme už zistili, typické rýchlosti v dôsledku neinerciálnych síl sú na úrovni $10^{-3} - 10^{-2}m/s$, typické vzdialenosti, do ktorých by tieto sily mohli teleso zaniest sú rádovo $10^{-2} - 10^{-1}m$. Aj za takejto idealizácie vidíme, že to je stále zanedbateľné oproti rýchlostiam pádu resp. výšok, z ktorých teleso padá. Keď máme podozrenie tohto typu, ktoré je navyše podporené nechutou riešiť nelineárnu sústavu, ktorá nám vyšla, je načase uchýliť sa ku procesu, ktorý nazývame *linearizácia*. Linearizácia je proces, pri ktorom sa riešené rovnice linearizujú. Čo to presne znamená? Ako už bolo spomenuté, skúmame voľné pády z výšok, ktoré sú zanedbateľné oproti polomeru Zeme. To znamená, že v súradnici r si vieme reálne predstaviť, že hlavnú úlohu hrá polomer Zeme, výška, z ktorej púšťame teleso, bude malá oproti tomuto polomeru. Ak na začiatku teleso spúšťame z výšky h , potom tvrdenie, že $h \ll R$, inak povedané, $h/R \ll 1$. Veličinu h/R teda môžeme brať ako bezrozmerný parameter ε , ktorý charakterizuje, ako dobrá je aproximácia $R \approx r$. Ako prvé teda zavedieme súradnicu z , ktorá meria polohu hmotného bodu vzhľadom na Zemský povrch. Nech platí:

$$r = R + z \implies \dot{r} = \dot{z}, \quad \ddot{r} = \ddot{z} \quad (3.120)$$

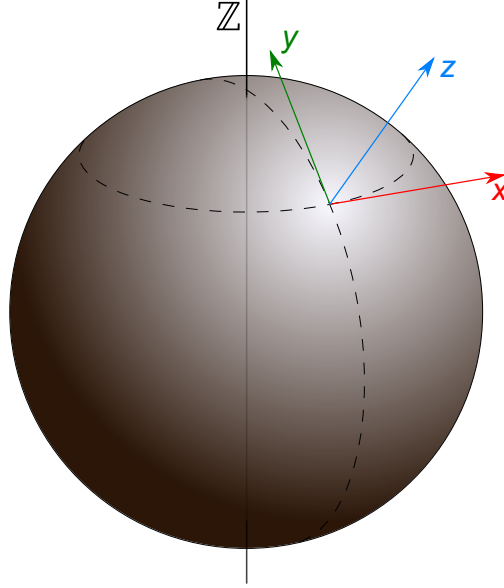
Lokálne teraz zavedme v mieste ($r = R, \theta, \varphi$) súradnicovú sústavu, ktorej z -zložka je už definovaná vyššie. Zložku x definujeme tak, že bude v smere rovnobežky na východ. Zložka y už nemá na výber, aby toto bola pravotočivá báza, musí smerovať v smere poludníka na sever.

Pre prvú rovnicu ukážeme, ako vyzerá linearizácia v praxi. Najprv predpokladáme, že x a y sú korekcie ku statickosti pohybu v uhloch θ a φ ²⁸. To, že očakávame malý pohyb v θ a φ naznačíme priradením:

$$\theta \rightarrow \theta - \frac{1}{R}y \implies d\theta = -\frac{1}{R}dy \implies \dot{\theta} = -\frac{1}{R}\dot{y}, \quad \ddot{\theta} = -\frac{1}{R}\ddot{y} \quad (3.121)$$

$$\varphi \rightarrow \varphi + \frac{1}{R \sin(\theta)}x \implies d\varphi = \frac{1}{R \sin(\theta)}dx \implies \dot{\varphi} = \frac{1}{R \sin(\theta)}\dot{x}, \quad \ddot{\varphi} = \frac{1}{R \sin(\theta)}\ddot{x} \quad (3.122)$$

²⁸Vidno, že pri takto zavedených súradniciach x a y je pohyb vlastne lokálne lineárny, no globálne by sa mala príslušne meniť súradnica θ a φ .



Obrázok 3.24: Súradná sústava e šitá na mieru pádu na Zem. Os x mieri v smere rovnobežky, os y v smere poludníka a os z je kolmá na povrch Zeme. Zemská os je $\mathbb{Z}$, uhol, ktorý zvierá z a $\mathbb{Z}$ je $\Theta \in \langle 0, \pi \rangle$.

Nasleduje proces linearizácie rovníc. Otázkou je, ktorý efekt považujeme za malý a ktorý za podstatný. Ak sa dohodneme, že ε je ten rád, ktorého presnosť nás zaujíma, nedá sa vo všeobecnosti povedať, či $\varepsilon/10$ je už malé, vieme sa baviť len v termínoch mocnín ε . Ak sa v rovniciach objaví čokoľvek, pri čom bude stáť člen ε^2 , ε^3 a vyššie, vieme, že tieto môžeme s kľudným svedomím vyhodíť. Ak je totiž ε rádu 10^{-5} a toto je presnosť, ktorá nás zaujíma, potom ε^2 je oproti nemu desne malé, resp. nemerateľné. S touto myšlienkou dosadíme výrazy pre r , θ a φ do prvej rovnice a upravujeme ju:

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta) &= -g + 2\omega r\dot{\varphi} \sin^2(\theta) + \omega^2 r \sin^2(\theta) \\ \ddot{z} - \dot{z} \left(\frac{1}{R} \dot{\varphi} \right)^2 - (R+z) \left(\frac{1}{R \sin(\theta)} \dot{x} \right)^2 \sin^2(\theta) &= \\ &= -g + 2\omega (R+z) \frac{1}{R \sin(\theta)} \dot{x} \sin^2(\theta) + \omega^2 (R+z) \sin^2(\theta) \\ \ddot{z} - \frac{1}{h} \dot{x}^2 \varepsilon - \frac{1}{h^2} (\dot{y}^2 \dot{z} + \dot{x}^2 z) \varepsilon^2 &= -g + 2\omega \sin \dot{x}(\theta) + \omega^2 (R+z) \sin^2(\theta) + \frac{2\omega \dot{x} z \sin(\theta)}{h} \varepsilon \\ \ddot{z} &= -g + 2\omega \sin \dot{x}(\theta) + \omega^2 (R+z) \sin^2(\theta) + \cancel{\frac{1}{h} (2\omega \dot{x} z \sin(\theta) + \dot{x}^2)} \varepsilon + \cancel{\frac{1}{h^2} (\dot{y}^2 \dot{z} + \dot{x}^2 z)} \varepsilon^2 \end{aligned}$$

Dostávame tak linearizovanú prvú rovnicu:

$$\ddot{z} = -g + 2\omega \sin \dot{x}(\theta) + \omega^2 (R+z) \sin^2(\theta) \quad (3.123)$$

Táto rovnica, aj keď už v lineárnej podobe, podstúpi ešte posledné zanedbanie. Všimneme si, že ak ω je rádu 10^{-5} s a R rádu 10^6 m , potom člen $\omega^2 R$ je veľmi malého rádu. Trochu to zachraňuje rozmer Zeme, no druhý člen v zátvorke, z , je rádu 10^2 m , čo je zanedbateľné oproti R . Aj keď je táto rovnica lineárna, člen z z pravej strany zahodíme, čím si podstatne zjednodušíme riešenie²⁹.

²⁹Výsledná sústava s prítomným z na pravej strane je tvaru:

$$\ddot{\vec{r}} = A\dot{\vec{r}} + B\vec{r} + \vec{P} \quad (3.124)$$

kde A a B sú matice a $\vec{P}$ je konštantný vektor. Riešenie takejto sústavy zahŕňa simultánnu diagonalizáciu matíc A a B , čo je proces, ktorému je lepšie sa vyhnúť. Ak však zahodíme člen $B\vec{r}$, stačilo by diagonalizovať len jednu maticu (ako uvidíme, aj tomuto sa možno vyhnúť), čo značne zjednodušuje riešenie.

Napíšeme celú linearizovanú sústavu aj s počiatočnou podmienkou - na začiatku objekt „stojí“ vo výške h nad Zemou:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega \dot{y} \cos(\theta) - 2\omega \dot{z} \sin(\theta) \\ \ddot{y} &= -2\omega \dot{x} \cos(\theta) - \omega^2 R \sin(\theta) \cos(\theta) \\ \ddot{z} &= -g + 2\omega \dot{x} \sin(\theta) + \omega^2 R \sin^2(\theta) \end{aligned} \quad \begin{aligned} \vec{r}(0) &= (0, 0, h) \\ \dot{\vec{r}}(0) &= \vec{0} \end{aligned} \quad (3.125)$$

Všimnime si, že druhá a tretia rovnica obsahuje na pravej strane z riešených funkcií len x , ľavé strany sú druhé derivácie funkcií, ktoré sa objavujú na pravej strane prvej rovnice. Zintegrujeme teda s ohľadom na počiatočné podmienky druhú a tretiu rovnicu v čase:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -2\omega x \cos(\theta) - \omega^2 R \sin(\theta) \cos(\theta) t \\ \dot{z} &= -gt + 2\omega x \sin(\theta) + \omega^2 R \sin^2(\theta) t \end{aligned} \quad (3.126)$$

Tieto výrazy dosadíme do (3.125) (I):

$$\ddot{x} + 4\omega^2 x = 2\omega (g - \omega^2 R) \sin(\theta) t \quad (3.127)$$

Riešenie tejto rovnice aj s ohľadom na počiatočné podmienky bude:

$$x(t) = \frac{g - \omega^2 R}{2\omega} \sin(\theta) \left[t - \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t) \right] \quad (3.128)$$

Použitím (3.126) a okrajových podmienok (3.125) získame y a z :

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{4} \sin(2\theta) \left[\left(\frac{g}{\omega^2} - R \right) \sin^2(\omega t) - g t^2 \right] \\ z(t) &= h - \frac{1}{2} g \cos^2(\theta) t^2 - \frac{g - \omega^2 R}{2\omega^2} \sin^2(\theta) \sin^2(\omega t) \end{aligned}$$

Dostali sme teda kompletne riešenie pádu na rotujúcu zem:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{g - \omega^2 R}{2\omega} \sin(\theta) \left[t - \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t) \right] \\ y(t) &= \frac{1}{4} \sin(2\theta) \left[\left(\frac{g}{\omega^2} - R \right) \sin^2(\omega t) - g t^2 \right] \\ z(t) &= h - \frac{1}{2} g \cos^2(\theta) t^2 - \frac{g - \omega^2 R}{2\omega^2} \sin^2(\theta) \sin^2(\omega t) \end{aligned} \quad (3.129)$$

Pod'me si rozobrať jednotlivé zložky. V zložke x vidíme, že v prvom ráde ωt sa nič nedeje:

$$t - \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t) = t - \frac{1}{2\omega} \left(2\omega t - \frac{(2\omega t)^2}{2!} + \dots \right) = \frac{1}{\omega} \left\{ (\omega t)^2 + \mathcal{O}[(\omega t)^3] \right\} \quad (3.130)$$

$$x(t) = \frac{g - \omega^2 R}{2\omega^2} \sin(\theta) (\omega t)^2 + \mathcal{O}[(\omega t)^3] \quad (3.131)$$

Prvotný pohyb v súradnici x v čase teda bude parabolický, členy vyššieho rádu predstavujú takmer nepostrehnuteľnú odchýlku. Ako vidíme, člen $\sin(\theta)$ obmedzí pohyb v súradnici x na póloch. Treba však podotknúť, že odvodené rovnice sú dostatočne presné až v istej vzdialenosti od pólů, pretože nami zvolené súradnice majú na póloch singularitu³⁰.

³⁰Nedá sa napr. povedať, kam mieri súradnica y na póloch.

V súradnici y nastáva podobná situácia:

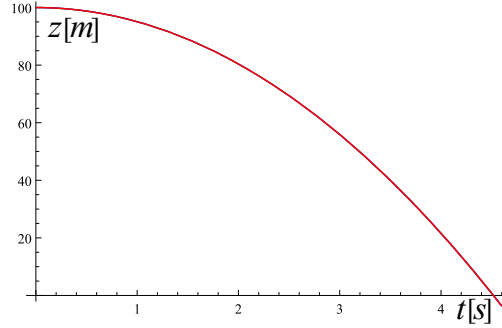
$$y(t) = \frac{1}{4} \sin(2\theta) \left[\left(\frac{g}{\omega^2} - R \right) \sin^2(\omega t) - g t^2 \right] = -\frac{1}{4} R \sin(2\theta) (\omega t)^2 + \mathcal{O}[(\omega t)^4] \quad (3.132)$$

V tejto súradnici vidíme, že na póloch ani na rovníku sa pád neodchyľuje od voľného pádu na statickú Zem, čo je spôsobené členom $\sin(2\theta)$. Treba poznamenať, že práve odstredivá sila má za následok takéto charakteristiky pádu, čo možno koniec-koncov dokladovať aj typickým stáčaním vetrov k rovníku.

Napokon sa pozrieme na pohyb v súradnici z a hneď zbadáme istú zradu. Čakali by sme v rovnici člen $-g/2 t^2$, no pri tomto člene ešte nachádzame $\cos^2(\theta)$, teda akoby teleso prestalo padať na rovníku, kde $\theta = \pi/2$ a $\cos(\theta) = 0$. V skutočnosti pre malé ωt je v poslednom člene prítomný výraz, ktorý vykompenzuje toto správanie:

$$z(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 + \frac{1}{2} R \sin^2(\theta) (\omega t)^2 + \mathcal{O}[(\omega t)^4] \quad (3.133)$$

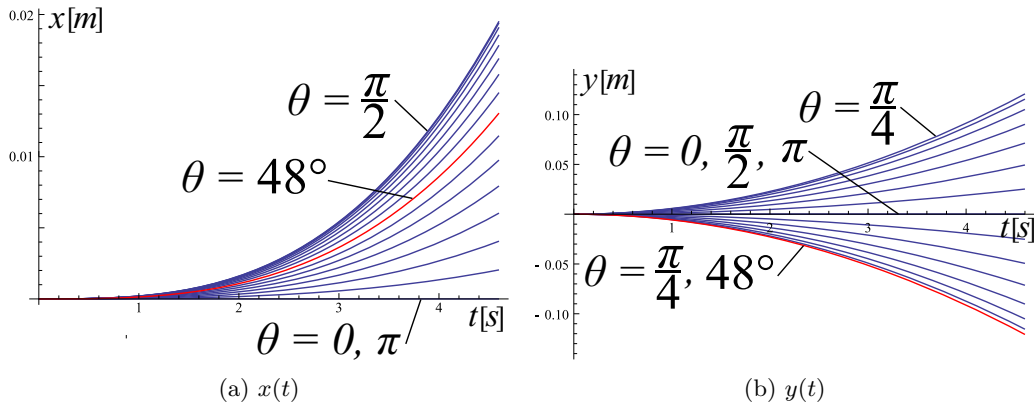
Slovensko je približne na 48° zemepisnej šírky, čo znamená $\theta = 7\pi/30$. Púšťajme kameň zo 100 metrovej jedličky ($h = 100m$) na rotujúcu zem, $\omega = 6 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$. Uvedieme tri grafy; prvý je závislosť $z(t)$:



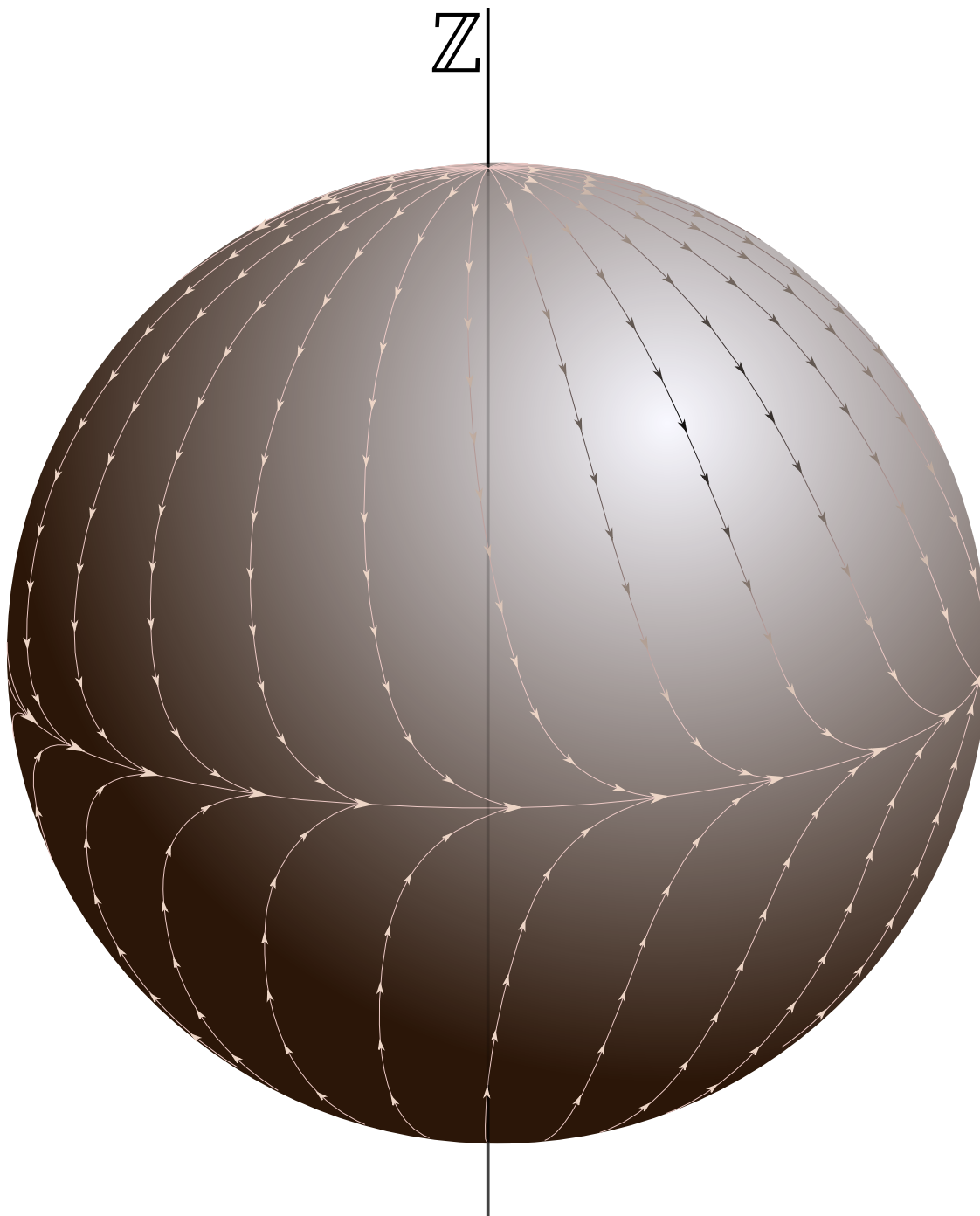
Obrázok 3.25: Vývoj výšky $z(t)$ s časom. Nakreslených je viac závislostí pre rôzne zemepisné šírky, od severného pólu až k južnému. Červenou farbou je vyznačená závislosť výšky v čase pre $\theta = 48^\circ$.

Takto od pohľadu nie je badať rozdiel medzi parabolou $h - 1/2 g t^2$ a funkciou $z(t)$. Pre čas približne 4.5s teleso dopadne na zem, pre voľný pád by sme dostali čas 4.515s.

Nasledujú grafy $x(t)$ a $y(t)$:



Obrázok 3.26: Vidíme, že v dôsledku neinerciálnosti Zeme ako vzťažnej sústavy pozorujeme odchýlku v smere x (na východ) aj v smere $-y$ (na juh). Naša zemepisná šírka je blízka 45° , čo znamená, že červená závislosť je takmer na okraji.



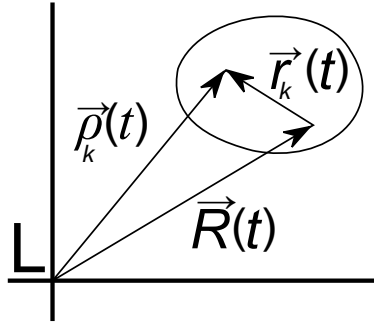
Obrázok 3.27: V každom mieste na Zemi môžeme zaznačiť, ktorým smerom by sa odchyľlil objekt padajúci z istej výšky na rotujúcu Zem oproti miestu dopadu na statickú Zem.

3.7 Tuhé teleso

Pod tuhým telesom rozumieme dokonale pevné teleso, ktoré nepodlieha deformáciám pri silovom pôsobení. Dôsledok tejto definície je, že vzdialenosť medzi akýmikol'vek dvoma bodmi telesa sa zachováva aj pri pôsobení vonkajších síl.

3.7.1 Kinetická energia, rotačná energia a moment zotrvačnosti tuhého telesa

V tuhom telese je vždy rozumné zvoliť si nejaký referenčný bod. Majme teda tuhé teleso a v ňom referenčný bod, ktorý má polohu $\vec{R}(t)$ (teleso sa môže všelijako hýbať, táto poloha je teda závislá od času). Od tohto bodu môžeme určovať polohy iných bodov v telese.



Obrázok 3.28: Tuhé teleso.

Kinetickú energiu tohto telesa v laboratórnej sústave určíme ako:

$$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k \dot{\vec{\rho}}_k^2 \quad (3.134)$$

Z obrázku (3.28) vidíme, čomu je rovný vektor $\vec{\rho}$:

$$\vec{\rho}_k = \vec{R} + \vec{r}_k \implies \dot{\vec{\rho}}_k^2 = \left(\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_k \right)^2 = \dot{\vec{R}}^2 + 2\dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}}_k + \dot{\vec{r}}_k^2 \quad (3.135)$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k \dot{\vec{R}}^2 + \underbrace{\frac{1}{M} \sum_k m_k \dot{\vec{r}}_k}_{\vec{\dot{r}}_T} \cdot \dot{\vec{R}} + \frac{1}{2} \sum_k m_k \dot{\vec{r}}_k^2 \quad (3.136)$$

Vidíme, že druhý člen obsahuje zmenu polohy ťažiska voči referenčnému bodu. Ak však referenčný bod $\vec{R}$ stotožníme s ťažiskom, potom stredný člen v kinetickej energii vypadne:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \sum_k m_k \dot{\vec{r}}_k^2 \quad (3.137)$$

Teraz už platí, že $\vec{R}$ je poloha ťažiska a jednotlivé polohy $\vec{r}_k$ sú vzhľadom na toto ťažisko. No keďže rozoberáme tuhé teleso, polohy $\vec{r}_k$ nemôžu robiť nič viac, ako pohybovať sa po sfére okolo $\vec{R}$. Ak by menili svoju vzdialenosť od ťažiska, už by sa nejednalo o tuhé teleso. Z predošlej časti o neinerciálnych vzťažných sústavách vieme, že ak sa nejaký vektor pohybuje po sfére, jeho pohyb možno opísať nasledujúcou rovnicou pre $\vec{\omega}(t)$:

$$\dot{\vec{r}}_k = \vec{\omega} \times \vec{r}_k \quad (3.138)$$

V súlade s touto rovnicou prejde kinetická energia telesa na tvar:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{R}^2 + \frac{1}{2} \sum_k m_k (\vec{\omega} \times \vec{r}_k)^2 \quad (3.139)$$

Prvý člen je kinetická energia hmotného bodu s hmotnosťou celého telesa sústredenej v ťažisku. Druhý člen musí predstavovať rotačnú energiu tuhého telesa:

$$\begin{aligned} T_{rot.} &= \frac{1}{2} \sum_k m_k (\vec{\omega} \times \vec{r}_k)^2 \stackrel{\text{Davis cup identity}}{=} \frac{1}{2} \sum_k m_k \left(\vec{\omega}^2 \vec{r}_k^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_k)^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \omega_i \omega_j \sum_k m_k \left[\delta_{ij} \vec{r}_k^2 - (\vec{r}_k)_i (\vec{r}_k)_j \right] \end{aligned}$$

Zistili sme, že rotačná energia telesa je rovná:

$$T_{rot.} = \frac{1}{2} \omega_i \omega_j J_{ij} ; \quad J_{ij} = \sum_k m_k \left[\delta_{ij} \vec{r}_k^2 - (\vec{r}_k)_i (\vec{r}_k)_j \right] \quad (3.140)$$

Tenzor J_{ij} budeme volať *tenzor momentu zotrvačnosti*. Jeho vyjadrenie v integrálnom tvare bude:

$$J_{ij} = \iiint_V [\delta_{ij} \vec{r}^2 - x_i x_j] dm = \iiint_V \rho(\vec{r}) [\delta_{ij} \vec{r}^2 - x_i x_j] dV \quad (3.141)$$

kde V je objem, ktorý zaberá teleso. Je zjavné, že tenzor momentu zotrvačnosti je symetrický.

Moment hybnosti $\vec{L}$ počítame ako:

$$L_i = \sum_k (\vec{r}_k \times \vec{p}_k)_i = \sum_k m_k [\vec{r}_k \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_k)]_i = \dots = \omega_j \sum_k m_k \left[\delta_{ij} \vec{r}_k^2 - (\vec{r}_k)_i (\vec{r}_k)_j \right] = J_{ij} \omega_j \quad (3.142)$$

Všimnime si istú analógiu medzi hybnosťou a momentom hybnosti. Hybnosť je daná súčinom hmotnosti a rýchlosti telesa, kde hmotnosť je skalár. Moment hybnosti je daný ako súčin momentu zotrvačnosti a uhlovej rýchlosti, kde moment zotrvačnosti je tenzor. Teda vo všeobecnosti, kým hybnosť a rýchlosť majú rovnaký smer a orientáciu (pretože hmotnosť je kladná konštanta), moment hybnosti má vo všeobecnosti iný smer, ako uhlová rýchlosť. Stále však platí, že vzťah medzi momentom hybnosti a uhlovou rýchlosťou je *lineárny*. Moment zotrvačnosti teda môžeme chápať ako lineárny operátor operujúci na uhlových rýchlostiach, ktorého výsledkom sú momenty hybnosti. M-násobok rýchlosti sa tiež istým spôsobom dá chápať ako lineárny operátor, ak tento násobok vhodne zapíšeme:

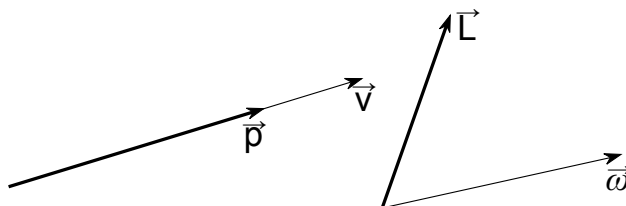
$$\begin{aligned} \vec{p}(\vec{v}) &= m \vec{v} & \vec{L}(\vec{\omega}) &= J \vec{\omega} \\ p_i &= m v_i = m \delta_{ij} v_j & L_i &= J_{ij} \omega_j \end{aligned} \quad (3.143)$$

Vidíme, že v prípade hybnosti hrá úlohu lineárneho operátora tenzor $m \delta_{ij}$, v prípade momentu hybnosti je ním tenzor J_{ij} .

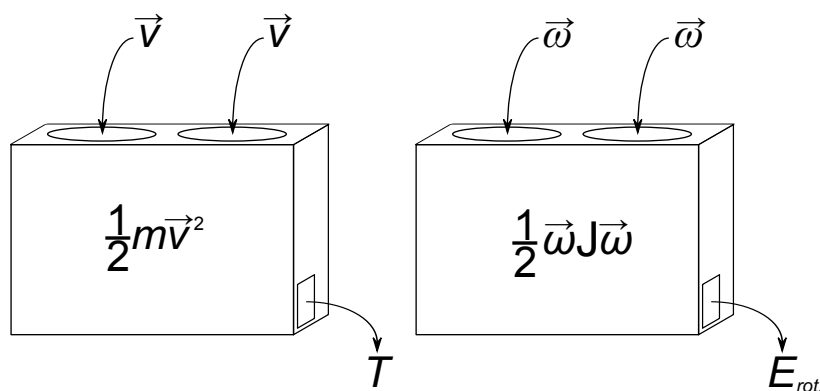
Podobnú analógiu vieme nájsť medzi kinetickou a rotačnou energiou. Kým kinetická energia je $(1/2) m \vec{v}^2$, rotačná energia je $(1/2) J_{ij} \omega_i \omega_j$, teda má tvar kvadratickej formy. Kinetická energia je tiež kvadratická forma, môžeme to nahliadnuť znovu správnym (trochu zbytočným) rozpísaním:

$$\begin{aligned} T(\vec{v}) &= \frac{1}{2} m \vec{v}^2 & E_{rot.}(\vec{\omega}) &= \frac{1}{2} \vec{\omega} J \vec{\omega} \\ T(\vec{v}) &= \frac{1}{2} v_i m \delta_{ij} v_j & E_{rot.}(\vec{\omega}) &= \frac{1}{2} \omega_i J_{ij} \omega_j \end{aligned} \quad (3.144)$$

V prípade kinetickej a rotačnej energie sú príslušné matice kvadratických foriem rovnaké, ako v prípade hybnosti a momentu hybnosti.

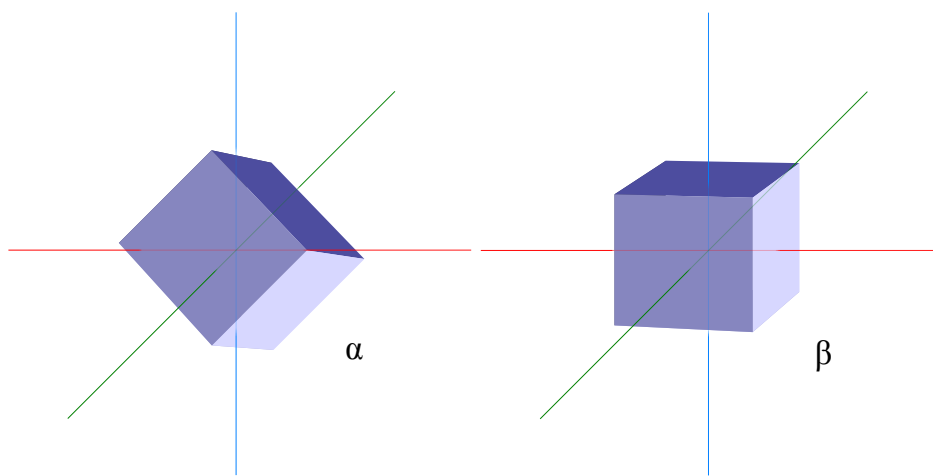


Obrázok 3.29: Kým hybnosť a rýchlosť majú rovnaký smer aj orientáciu, pri momente hybnosti a uhlovej rýchlosti to už tak nemusí byť.



Obrázok 3.30: Všeobecný vzťah medzi kinetickou energiou a rýchlosťou je jednoducho $(1/2) m \vec{v}^2$, kdežto rotačná energia je kvadratická forma, ktorej matica je moment zotrvačnosti.

Tenzor momentu zotrvačnosti, o ktorom bola doteraz reč, je matica, ktorej každá zložka je počítaná vzhľadom na nejakú bázu v telese. Ak už taký tenzor momentu zotrvačnosti máme vypočítaný, potom operácie, ktoré sme doteraz opisovali, ako napr. výpočet momentu hybnosti, alebo uhlovej rýchlosti, tiež robíme v tejto báze. Tento fakt nám dáva možnosť výberu bázy. Ak sa nám zdajú byť integrály, ktoré treba počítať na získanie momentu zotrvačnosti v danej báze ťažké, máme možnosť si vybrať lepšiu bázu. Navyše *vždy* (pre každé teleso *akéhokoľvek* tvaru) *existuje* báza, v ktorej je moment zotrvačnosti *diagonálna matica*, čo zužuje počet nutných výpočtov na najviac tri.



Obrázok 3.31: Obtiažnosť výpočtu momentu zotrvačnosti závisí od výberu bázy. V báze β sa bude moment zotrvačnosti očividne počítať lepšie, ako v báze α .

Teraz si ukážeme dôkaz tvrdenia, že vo vhodnej báze má moment zotrvačnosti diagonálny tvar. Najprv dokážeme, že pri štandardnom otočení bázy e (t.j. otočení každého jeho prvku $\vec{e}_i$) pomocou *ortogonálnej* matice A sa matica J_{ij} transformuje podľa klasického vzťahu: $J \rightarrow A J A^{-1}$. Ortogonálna matica A musí spĺňať vzťah:

$$\begin{aligned} A^T A &= A A^T = \mathbb{I}_3 &\implies A^T &= A^{-1} \\ A_{ik} A_{kj}^T &= A_{ik}^T A_{kj} = \delta_{ij} &\implies A_{ij}^T &= A_{ij}^{-1} \end{aligned} \quad (3.145)$$

kde transpozícia v indexoch zamieňa poradie indexov:

$$A_{ij}^T = A_{ji} \quad (3.146)$$

Vychádzame z definície J_{ij} v báze e :

$$J_{ij} = \iiint_V (\delta_{ij} \vec{r}^2 - x_i x_j) d^3x \quad (3.147)$$

Rozmyslíme si, že po otočení bázy e do novej bázy: $\vec{e}_i \rightarrow A \vec{e}_i$ sa aj každý vektor $\vec{r}$ otočí podľa rovnakého vzťahu: $\vec{r} \rightarrow A \vec{r}$. Tento fakt teda využijeme v definícii J_{ij} (3.147):

$$\vec{r} \rightarrow A \vec{r} \quad \dots \quad x_i \rightarrow A_{ij} x_j \implies J_{ij} \rightarrow \iiint_V (\delta_{ij} A_{ab} x_b A_{ac} x_c - A_{im} x_m A_{jn} x_n) d^3x \quad (3.148)$$

Výraz pod integrálom postupne upravujeme za využitia (3.145) a (3.146):

$$\delta_{ij} A_{ab} x_b A_{ac} x_c - A_{im} x_m A_{jn} x_n = \delta_{ij} \underbrace{A_{ba}^T A_{ac}}_{=\delta_{bc}} x_b x_c - A_{im} x_m x_n \underbrace{A_{nj}^T}_{=A_{nj}^{-1}} = \delta_{ij} \vec{r}^2 - A_{im} x_m x_n A_{nj}^{-1} \quad (3.149)$$

V druhom člene už vidíme žiadaný jav, maticu A zľava a inverznú maticu A^{-1} sprava. Dané matice však chýbajú v prvom člene. Ako sme mali možnosť si overiť, na skalár $\vec{r}^2$ transformácia nemá žiaden efekt³¹, teda ani pripisovanie matíc nemá žiaden efekt. Inú vec, ktorú sme diskretné preskočili, je fakt, že aj tenzory treba pri zmene bázy obložiť. Vo vyjadrení J_{ij} je prítomný tenzor δ_{ij} , na ktorý sme zabudli. No po obložení tenzora δ_{ij} maticou transformácie by sme rýchlo zistili, že ani s týmto tenzorom transformácia nič neurobí, môžeme teda podľa ľubovôle pripisovať transformačné matice zľava (a príslušnú inverznú sprava) bez zmeny výrazov. Akokoľvek sa na to teda pozrieme, teda buď ako transformácia δ_{ij} do inej bázy, alebo umelé pripísanie A zľava a A^{-1} sprava³², dostaneme:

$$\delta_{ij} \vec{r}^2 - A_{im} x_m x_n A_{nj}^{-1} = A_{im} \delta_{mn} A_{nj}^{-1} \vec{r}^2 - A_{im} x_m x_n A_{nj}^{-1} = A_{im} (\delta_{mn} \vec{r}^2 - x_m x_n) A_{nj}^{-1} \quad (3.150)$$

$$\vec{r} \rightarrow A \vec{r} \implies J_{ij} \rightarrow A_{im} \iiint_V (\delta_{mn} \vec{r}^2 - x_m x_n) d^3x A_{nj}^{-1} = A_{im} J_{mn} A_{nj}^{-1} \quad (3.151)$$

³¹V teórii relativity by sme povedali, že $\vec{r}^2$ sa transformuje ako skalár, čo znie trochu paradoxne vzhľadom na to, že $\vec{r}^2$ už je skalár (v zmysle že ho tak voláme).

³²Schematický názov tejto metódy je *znásilnenie jednotkou* (v tomto prípade jednotkovou maticou). Nemenej obľúbená metóda v analýze a algebre je *znásilnenie nulou*, pretože ako všetci vieme, nulu môžeme beztrešne hocikde pričítať a odčítať, tak ako môžeme jednotkou beztrešne násobiť a deliť.

Už sme dokázali, že pri otočení súradnicovej sústavy maticou A sa tenzor momentu zotrvačnosti transformuje žiadaným³³ spôsobom:

$$\vec{r} \rightarrow A \implies J \rightarrow A J A^{-1} \quad (3.152)$$

Teraz však máme návod priamo na to, ako hľadať príslušnú „dobrú“ telesovú bázu, v ktorej bude tenzor momentu zotrvačnosti diagonálny. V lineárnej algebre totiž platí veta: ku štvorcovej matici J existuje matica A taká, že:

$$J = A D A^{-1} \quad (3.153)$$

kde A je matica prechodu pozostávajúca z vlastných vektorov J a D je diagonálna matica s vlastnými hodnotami J na diagonále. V našej situácii platí, že J je diagonalizovateľná *ortogonálnou* maticou³⁴, čo sú presne tie matice, ktorými sprostredkujeme otáčanie bázy.

Výsledok tejto analýzy je cenný aj v nasledujúcom zmysle: keď sa rozhodneme prepočítať tenzor momentu zotrvačnosti do inej bázy, nemusíme znovu počítať príslušné integrály, stačí poznať maticu prechodu medzi bázami³⁵.

Pozrime sa teraz na to, aké rôzne tvary telies z hľadiska ich momentu zotrvačnosti môžeme dostať. Moment zotrvačnosti je už vypočítaný vzhľadom na dobrú telesovú bázu, v ktorej má diagonálny tvar, $J = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$. V skutočnosti teda môžu nastať len 4 možnosti:

1. $J_1 = J_2 = J_3$: ide o telesá napohľad pravidelného tvaru, kde pohľad z rôznych osí sa nedá rozoznať, napr. guľa, ale aj kocka, pravidelný štvorsten, osemsten, dvanásťsten, ... Tieto telesá voláme sférický zotrvačník.
2. $J_1 = J_2 \gg J_3$: je to teleso tvaru veľmi tenkej paličky, ktoré je uložené na osi z . Voláme ho rotátor.
3. $J_1 = J_2, J_3 > 0$: ide o telesá, ktoré majú nezanedbatelné rozloženie hmoty aj mimo osi z (narozdiel od rotátora), no ich tvar je tiež odolný voči zámene prvých dvoch osí. Jedná sa napr. o kužeľ postavený v smere osi z , hranol s podstavou tvaru štvorca, valec, ... Tieto telesá voláme symetrický zotrvačník.
4. $J_1 \neq J_2 \neq J_3 \neq J_1$ je to tak nepravidelné teleso, aby jeho zložky momentu zotrvačnosti neboli rovnaké, teda napr. stolička, posteľ, bicykel, ... Teleso s takýmto momentom zotrvačnosti voláme asymetrický zotrvačník.

Tieto 4 možnosti pokrývajú všetky možné tvary telies, čokoľvek iné (napr. $J_1 \ll 0, J_2 = J_3$, teda tenká palička na osi x) možno dostať rotáciou niektorého z už opísaných telies (teda takú tenkú paličku uloženú na osi x tiež budeme volať rotátor a je to teleso, ktoré spadá do kategórie 2.).

³³Lepšie povedané, očakávaným spôsobom. Ono to nie je tak, že by si tenzory mohli vyberať, ako sa budú transformovať, my to od nich čakáme. Ak to nerobia, sú neslušné, je to niečo ako keď človek nepozdraví, keď príde na návštevu. Našťastie sa zdá, že v tomto prípade nám spadol do lona slušný tenzor (ináč by bolo veľmi bolestivé každé jeho prepočítanie do inej bázy).

³⁴Tento fakt vyplýva z toho, že J je reálna a symetrická matica.

³⁵Násobenie matíc sa vo všeobecnosti považuje za jednoduchšiu úlohu ako počítanie integrálov. Ospravedlňujeme sa extrémistom, ktorí obľubujú víkendový masochizmus v podobe konzumovania Demidoviča.

3.7.2 Steinerova veta a veta o kolmých osiach*

Platí nasledujúca veta (Steinerova) o rovnobežných osiach³⁶: Moment zotrvačnosti tuhého telesa podľa osi O prechádzajúcej jeho ťažiskom označíme J , viď obrázok (3.32). Pre danú os o rovnobežnú s osou O je moment zotrvačnosti rovný:

$$j = J + M\vec{R}^2 \quad (3.154)$$

kde R je vzdialenosť medzi osami o a O a M je hmotnosť uvažovaného telesa.

Dôkaz:

Moment zotrvačnosti podľa osi o počítame podľa vzťahu:

$$j = \iiint_V \vec{r}'^2 dm$$

kde r' je vzdialenosť elementu hmoty tuhého telesa od osi o a platí preň kosínusová veta:

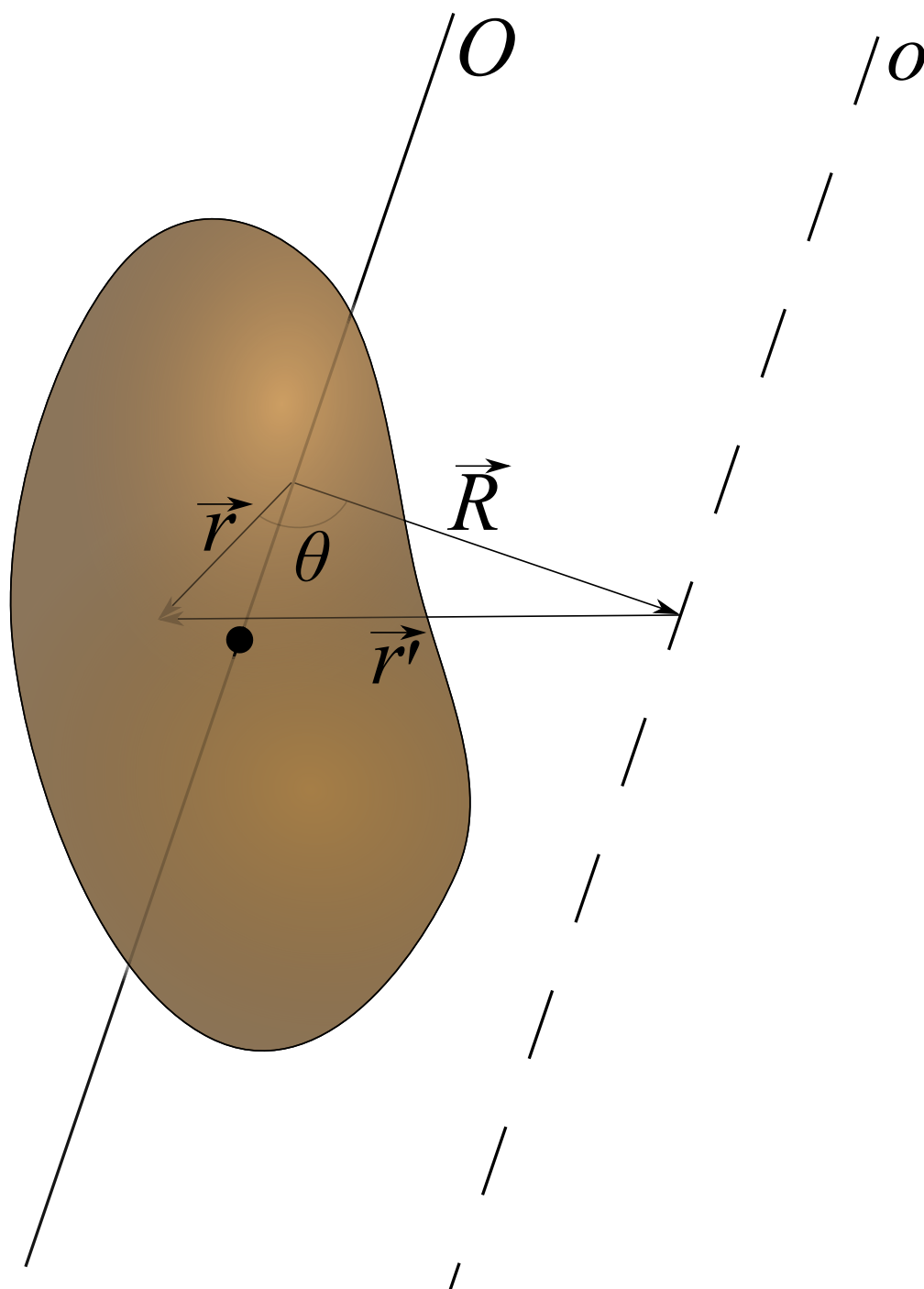
$$\begin{aligned} \vec{r}'^2 &= \vec{r}^2 + \vec{R}^2 - 2\vec{R} \cdot \vec{r} = \vec{r}^2 + \vec{R}^2 - 2|\vec{R}||\vec{r}|\cos(\theta) \\ j &= \iiint_V (\vec{r} + \vec{R})^2 dm = \iiint_V \vec{r}^2 dm + \vec{R}^2 \iiint_V dm - 2|\vec{R}| \iiint_V |\vec{r}|\cos(\theta) dm \end{aligned}$$

V prvom člene spoznáваме pôvodný moment zotrvačnosti, stredný člen udáva $\vec{R}^2$ - násobok hmotnosti telesa. V poslednom si všimneme, že výraz $|\vec{r}|\cos(\theta)$ vlastne udáva priemet vektora $\vec{r}$ do osi spájajúcej O s o . Tento integrál teda udáva M - násobok priemetu (do osi spájajúcej O a o) vzdialenosti ťažiska telesa od osi O , čo je však nula, pretože os O prechádza ťažiskom.

$$j = J + M\vec{R}^2$$

Ako vidíme, Steinerova veta vlastne hovorí o tom, že moment zotrvačnosti okolo osi rovnobežnej s osou prechádzajúcou ťažiskom, je rovný pôvodnému momentu zotrvačnosti zväčšenému o hodnotu momentu zotrvačnosti hmotného bodu hmotnosti M vzdialenému R od osi otáčania (akoby sme celé teleso skoncentrovali na jednu os, alebo do jedného bodu).

³⁶Parallel axis theorem.



Obrázok 3.32

Platí nasledujúca veta o kolmých osiach³⁷: ťažiskom daného planárneho telesa prechádzajú dve navzájom kolmé osi x a y ležiace v jeho rovine, Príslušné momenty zotrvačností vzhľadom na tieto osi označíme J_x a J_y . Moment zotrvačnosti J_z podľa osi z kolmej na x aj y , taktiež prechádzajúcej ťažiskom telesa je rovný súčtu momentov zotrvačností J_x a J_y :

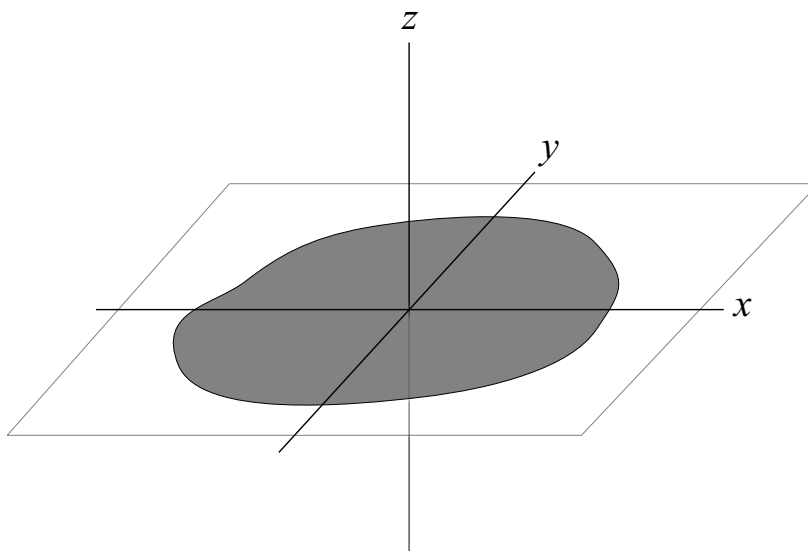
$$J_z = J_x + J_y \quad (3.155)$$

Dôkaz: počítajme výraz $J_x + J_y$ v báze tvorenej osami x , y a z :

$$J_x + J_y = \iiint_V (y^2 + z^2) dm + \iiint_V (x^2 + z^2) dm$$

Keďže hmota telesa je rozložená len v rovine xy , objem V je množina bodov, pre ktoré určite platí $z = 0$. Z oboch integrálov teda tento člen vymažeme (pretože integrujeme len cez podmnožinu roviny $z = 0$) a dostaneme tak výraz:

$$J_x + J_y = \iiint_V y^2 dm + \iiint_V x^2 dm = \iiint_V (x^2 + y^2) dm = J_z$$



Obrázok 3.33

Vetu o kolmých osiach možno jednoducho rozšíriť aj na telesá, ktorých hmotnosť nie je rozložená v jednej rovine. V takom prípade sa vrátime ku výrazu $J_x + J_y$:

$$J_x + J_y = \iiint_V (y^2 + z^2) dm + \iiint_V (x^2 + z^2) dm = \iiint_V (x^2 + y^2) dm + \iiint_V 2z^2 dm \quad (3.156)$$

Prvý integrál udáva moment zotrvačnosti okolo osi z , druhý integrál má nezápornú podintegrálnu funkciu v celej oblasti integrovania. Pre teleso, ktoré je rozložené v priestore dokonca platí, že podintegrálna funkcia je kladná. Z toho dostávame trojuholníkovú nerovnosť pre momenty zotrvačnosti okolo navzájom kolmých osí:

$$J_x + J_y \geq J_z \quad (3.157)$$

Rovnosť nastáva, ak je hmotnosť telesa rozložená v jednej rovine.

³⁷Perpendicular axis theorem

3.7.3 Kinematika voľného sférického zotrvačníka

Ako už bolo spomenuté, jedná sa o telesá pravidelného tvaru vo všetkých osiach, napr. guľu, kocku, ... Tieto telesá majú zaujímavú vlastnosť a to, že ich moment zotrvačnosti je rovnaký v každej báze, ktorú by sme si v telese vybrali. Podľa obrázku (3.31) by sa zdalo, že kocka má iný moment zotrvačnosti v iných bázach, no nie je tomu tak. Táto vlastnosť sa dá jednoducho ukázať aj všeobecne. Majme tenzor momentu zotrvačnosti nejakého telesa v niektorej báze, v ktorej má tento tenzor diagonálny tvar. Môžeme pre neho písať:

$$J_{ij} = J\delta_{ij} \quad (3.158)$$

Prechod do inej bázy (napr. z bázy ϵ do bázy e) sa deje pomocou matice rotácie A :

$$\vec{e}_i = A_{ij}\vec{\epsilon}_j \quad (3.159)$$

Rovnakým spôsobom sa transformuje moment zotrvačnosti J na moment zotrvačnosti J' v novej báze:

$$J'_{ij} = \underbrace{A_{ai}}_{=(A^T)_{ia}} A_{bj} J\delta_{ab} = (A^T)_{ia} J\delta_{ab} A_{bj} = J (A^T)_{ia} A_{aj} = J\delta_{ij}$$

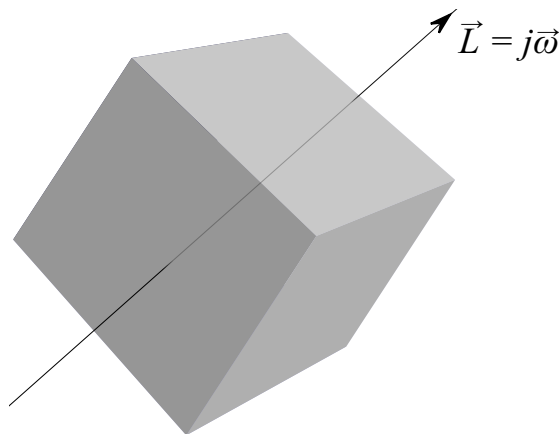
$$J' = J \quad (3.160)$$

Pre takéto telesá má moment hybnosti vždy rovnaký smer, ako uhlová rýchlosť:

$$L_i = J_{ij}\omega_j = J\delta_{ij}\omega_j = J\omega_i$$

$$\vec{L} = J\vec{\omega} \quad \vec{L} \parallel \vec{\omega} \quad (3.161)$$

Nudnosť sférického zotrvačníka demonštruje príklad o voľnom sférickom zotrvačníku. Keďže je voľný, nepôsobia naň žiadne momenty síl a jeho moment hybnosti je konštantný. V laboratórnej báze je moment zotrvačnosti rovnaký, ako v telesovej a moment hybnosti má rovnaký smer, ako uhlová rýchlosť. Tým pádom zvonku pozorujeme, že teleso sa maximálne ako celok pohybuje niektorým smerom rovnomerne priamočiaro a vykonáva pritom rovnomerný otáčavý pohyb okolo niektorej pevnej osi. Ako uvidíme, voľný symetrický zotrvačník bude vykonávať precesiu, na jej popis však potrebujeme zaviesť ďalšie pojmy na opis rotácie telesa (Eulerovy uhly) a odvodiť príslušné rovnice (Eulerove rovnice).



Obrázok 3.34: Rotácia voľného sférického zotrvačníka. Moment hybnosti $\vec{L}$ má rovnaký smer aj orientáciu, ako uhlová rýchlosť $\vec{\omega}$.

3.7.4 Eulerove rovnice pre rotáciu tuhého telesa, Eulerove uhly

Eulerove dynamické rovnice

Vieme, že vzťah medzi momentom hybnosti a momentom sily v laboratórnej sústave e je:

$$\vec{L} = L_i \vec{e}_i \implies \dot{\vec{L}} = \dot{M} \quad (3.162)$$

V telesovej sústave ε (dobře zvolenej a pevne spojenej s rotujúcim telesom) dostávame podľa už raz zistených skutočností:

$$\vec{L} = L_i \vec{e}_i \implies \dot{\vec{L}} = \dot{L}_i \vec{e}_i + L_i \underbrace{\dot{\vec{e}}_i}_{\vec{\omega} \times \vec{e}_i} = \dot{L}_i \vec{e}_i + \varepsilon_{ijk} L_j \omega_k \vec{e}_i = \dot{L}_i \vec{e}_i + \varepsilon_{ibj} \vec{e}_i L_b \omega_j = \left(\dot{L}_i + \varepsilon_{ibj} L_b \omega_j \right) \vec{e}_i \quad (3.163)$$

Z toho pre moment sily vyplýva

$$M_i = \dot{L}_i + \varepsilon_{ijk} \omega_j L_k \quad (3.164)$$

Keďže poznáme vzťah medzi momentom hybnosti a momentom zotrvačnosti, $L_i = J_{ij} \omega_j$, môžeme moment sily písať ako:

$$M_i = J_{ij} \dot{\omega}_j + \varepsilon_{ijk} \omega_j J_{km} \omega_m \quad (3.165)$$

Keďže J_{ij} je vo vhodnej telesovej báze, je to diagonálna matica, $J = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$, a pre jednotlivé zložky momentu sily dostávame jednoduché vzťahy:

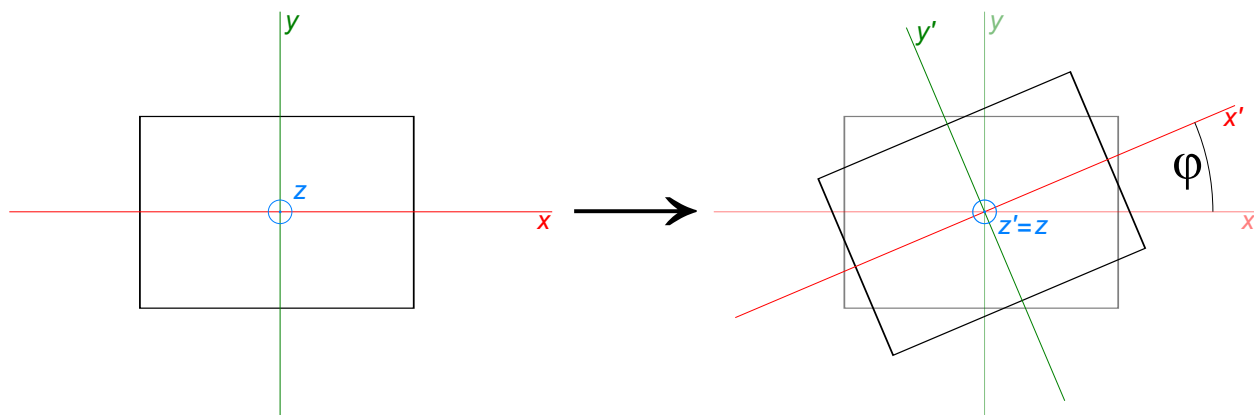
$$\begin{aligned} M_1 &= J_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3 (J_3 - J_2) \\ M_2 &= J_2 \dot{\omega}_2 + \omega_1 \omega_3 (J_1 - J_3) \\ M_3 &= J_3 \dot{\omega}_3 + \omega_1 \omega_2 (J_2 - J_1) \end{aligned} \quad (3.166)$$

Tieto vzťahy voláme *Eulerove dynamické rovnice* pre rotačný pohyb. Ľavé strany sú známe veličiny, zložky momentu sily (tak ako v Newtonovej rovnici poznáme samotnú silu) určené vzhľadom na dané telesové osi, pravé strany obsahujú neznáme zložky uhlovej rýchlosti, pre ktoré sa tieto rovnice riešia. Tieto uhlové rýchlosti nie sú veľmi názorné na predstavu, pretože sú to priemety uhlovej rýchlosti do telesových osí. Preto sa ešte dodatočne vymysleli Eulerove uhly, ktorých znalosť dáva lepšiu predstavu, ako je teleso v priestore natočené.

Eulerove uhly

Tuhé teleso má vo všeobecnosti 6 zovšeobecnených súradníc: tri sa viažu na jeho pohyb v priestore, ďalšie tri slúžia na opis jeho natočenia. Práve na opis natočenia telesa v priestore sa používajú Eulerove uhly - φ , θ , ψ .

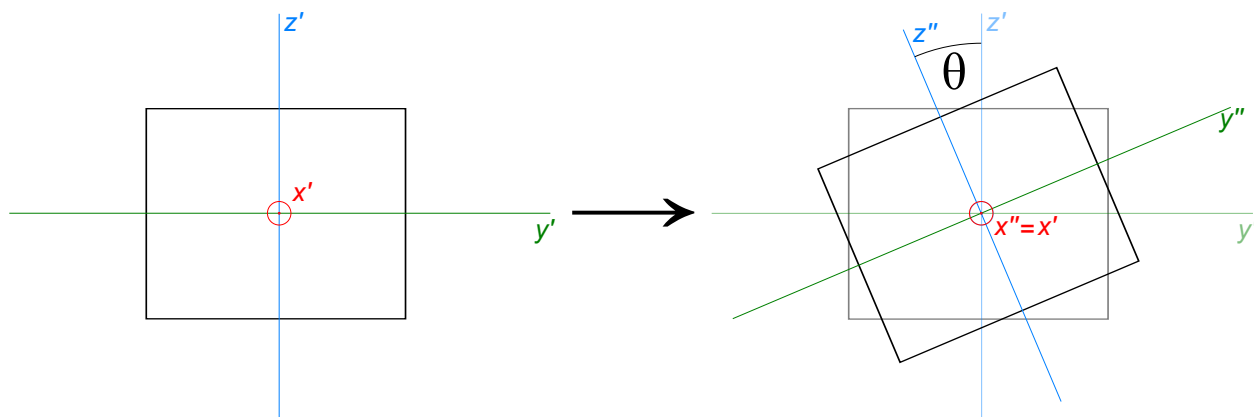
Predstavme si v priestore hranol (s nerovnakou dĺžkou strán), ktorý je zatiaľ postavený v smere laboratórnej osi z . Pred akýmkoľvek otáčaním sa jeho telesové osi zhodujú s laboratórnymi osami. Prvý Eulerov uhol, φ , určuje, o koľko pootočíme tento hranol podľa osi z proti smeru hodinových ručičiek. Natočením hranola sa otáčajú aj jeho telesové osi:



Obrázok 3.35: Prvý Eulerov uhol φ .

Týmto natočením sa telesové osi otočia, teraz ich máme označené jednou čiarkou. Os z' je zatiaľ totožná s osou z .

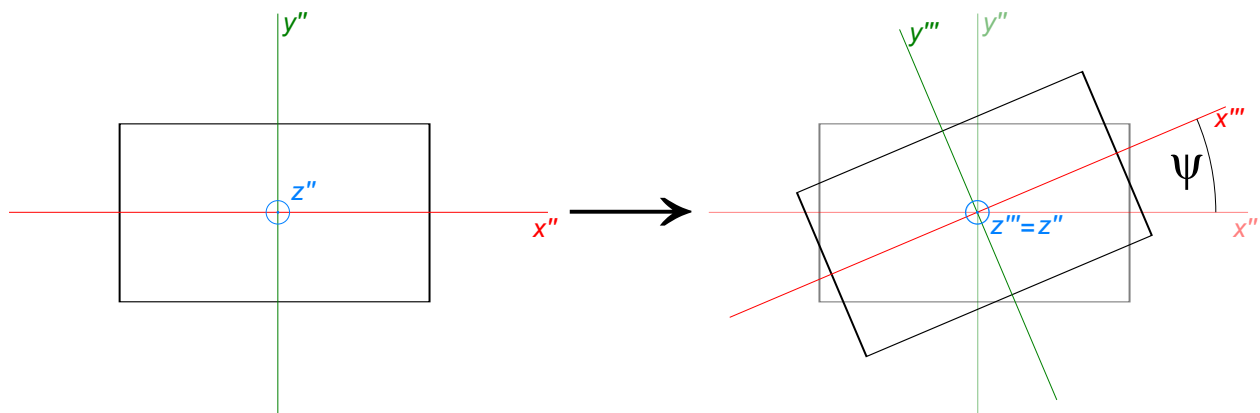
Eulerov uhol θ je uhol, o ktorý teraz otočíme teleso podľa osi x' proti smeru hodinových ručičiek:



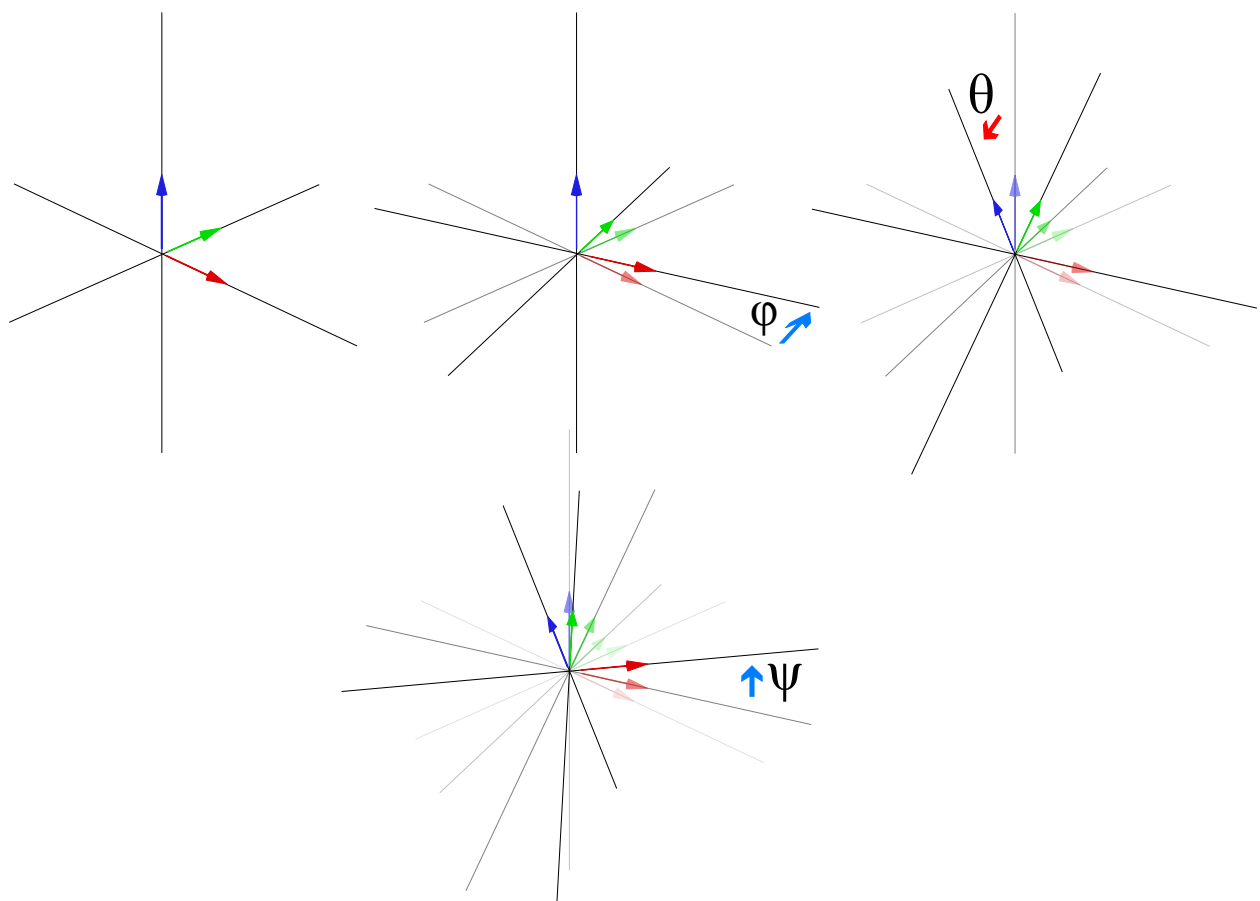
Obrázok 3.36: Druhý Eulerov uhol θ .

Môžeme si všimnúť, že ak doterajšie uhly φ a θ sú tie isté uhly φ a θ zo sférických súradníc, teda os z'' mieri v smere φ a θ vo sférických súradniciach, spojených s laboratórnou sústavou (teda uhol φ sa meria od osi x a uhol θ od osi z).

Tretí Eulerov uhol ψ je uhol, o ktorý otočíme teleso podľa osi z'' proti smeru hodinových ručičiek:



Obrázok 3.37: Tretí Eulerov uhol ψ .



Obrázok 3.38: Eulerove uhly spolu.

Eulerove kinematické rovnice

Našou úlohou je teraz vyjadriť vzťah medzi Eulerovými uhlami (φ, θ, ψ) a priemetmi uhlovej rýchlosti do telesových osí $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Najprv nahliadneme štruktúru tohto vzťahu. Eulerove uhly chápeme, prísne vzaté, ako zovšeobecnené súradnice α_i . Pozrieme sa, čo s nimi spraví infinitesimálna rotácia v smere, ktorý určuje vektor $\vec{\omega}$ (tento smer je daný jednotkovým vektorom $\vec{n}$). Táto rotácia zrejme docieľi, že z pôvodného Eulerovho uhlu α_i urobí nový uhol, $\alpha_i + d\alpha_i$. Podstatou bude rozvinúť zmenu v Eulerovom uhle do prvého rádu zmeny uhlu (a teda aj času):

$$\vec{n}\varphi \rightarrow \vec{n}\varphi + \vec{n}d\varphi \implies \alpha_i \rightarrow \alpha_i + d\alpha_i(\alpha, \vec{\omega}dt) \quad (3.167)$$

$$\omega_i dt \equiv d\varphi_i \quad (3.168)$$

$$d\alpha_i(\alpha, \vec{\omega}dt) = \underbrace{d\alpha_i(\alpha, \vec{0})}_{=0} + d\varphi_j \underbrace{\left. \frac{\partial \alpha_i}{\partial \varphi_j} \right|_{d\vec{\varphi}=\vec{0}}}_{=A_{ij}} \quad (3.169)$$

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{A_{ij}d\varphi_j}{dt} = \frac{A_{ij}\omega_j dt}{dt} = A_{ij}\omega_j \quad (3.170)$$

$$\dot{\alpha}_i = A_{ij}(\theta, \varphi, \psi)\omega_j \quad (3.171)$$

Zovšeobecnené súradnice α_i sú derivácie Eulerových uhlov a práve sme zistili, že vzťah medzi týmito deriváciami a uhlovou rýchlosťou je lineárny - matica, ktorá tento vzťah sprostredkúva v skutočnosti závisí len od samotných Eulerových uhlov, nie od ich derivácií, ani od $\vec{\omega}$ (pretože matica A_{ij} vznikla dosadením v deriváciách za $\vec{\omega}dt = 0$):

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\theta, \varphi, \psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad (3.172)$$

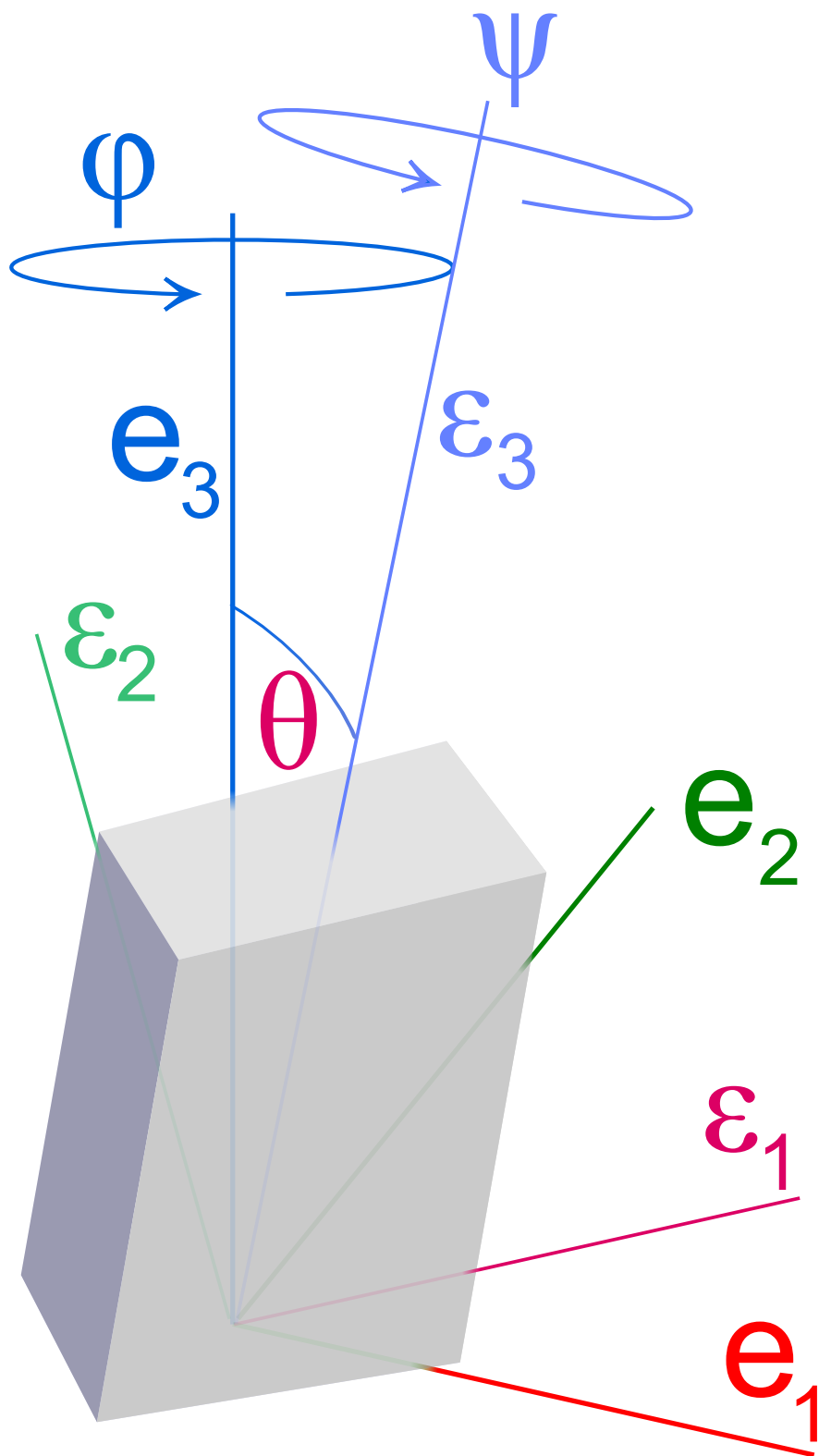
Ak sú ale Eulerove uhly dané správne (čo sú, pretože ku každej trojici φ, θ, ψ existuje $\vec{\omega}$ a ku každej $\vec{\omega}$ existuje φ, θ, ψ), potom sa tento vzťah dá obrátiť a dostaneme:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A^{-1}(\theta, \varphi, \psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \\ (A^{-1})_{ij} &\equiv B_{ij} \\ \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} B(\theta, \varphi, \psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.173)$$

Na riešenie príkladov s rotáciou telies je nutné poznať maticu, ktorá sprostredkúva vzťah medzi uhlovou rýchlosťou a deriváciami Eulerových uhlov. Uhlovú rýchlosť $\vec{\omega}$ môžeme rozložiť jednak do telesových osí $\vec{e}$, jednak do inej, presne definovanej bázy. V prvom prípade budú koeficienty pri daných smerových vektorech priamo zložky $\vec{\omega}$, v druhom prípade to budú Eulerove uhly φ, θ, ψ :

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3 = \dot{\varphi} \vec{e}_3 + \dot{\theta} \vec{N} + \dot{\psi} \vec{e}_3 \quad (3.174)$$

Je jasné, že ak teleso rotuje v uhle ψ , rotuje vlastne podľa tretej telesovej osi (teda $\vec{e}_3$), kdežto keď rotuje v uhle θ , rotuje podľa zvlášnej osi, ktorá v laboratórnej sústave závisí od uhlu φ a v telesovej sústave podľa ψ . Ak rotuje v uhle φ , otáča sa vlastne okolo tretej laboratórnej osi. Plán je teraz odvodiť vzťahy medzi $\vec{e}_3, \vec{N}, \vec{e}_3$ a $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.



Obrázok 3.39: Osi $\vec{e}_3$ a $\vec{\epsilon}_3$. Os $\vec{N}$ smeruje v smere $\vec{e}_3 \times \vec{\epsilon}_3$.

Najjednoduchší vzťah je medzi $\dot{\vec{\psi}}$ a $\vec{\omega}$, pretože tento Eulerov uhol je okolo $\vec{\varepsilon}_3$. Pretože θ je uhol odklonu medzi $\vec{\varepsilon}_3$ a $\vec{\varepsilon}_3$, os $\vec{N}$ smeruje v smere $\vec{\varepsilon}_3 \times \vec{\varepsilon}_3$. Tým pádom stačí poznať rozklad $\vec{\varepsilon}_3$ do bázy ε a budeme mať všetko, čo potrebujeme:

$$\vec{\varepsilon}_3 = a\vec{\varepsilon}_1 + b\vec{\varepsilon}_2 + c\vec{\varepsilon}_3 \quad (3.175)$$

Keďže ε je ortonormálna báza, pre koeficienty a , b a c rozkladu $\vec{\varepsilon}_3$ do tejto bázy platí:

$$a = \vec{\varepsilon}_3 \cdot \vec{\varepsilon}_1 \quad b = \vec{\varepsilon}_3 \cdot \vec{\varepsilon}_2 \quad c = \vec{\varepsilon}_3 \cdot \vec{\varepsilon}_3 \quad (3.176)$$

Najjednoduchšie bude určiť koeficient c , pretože priamo uhol θ určuje odklon tretej telesovej osi od tretej kartézskej osi. Koeficient c zodpovedá priemetu $\vec{\varepsilon}_3$ na vektor $\vec{\varepsilon}_3$, čo je z definície $\cos(\theta)$.

Vieme, že koeficient a , ani b sa nemení s uhlom φ , pretože uhol φ otáča telesom okolo samotnej osi $\vec{\varepsilon}_3$. Vezmime v rovine určenej vektormi $\vec{\varepsilon}_3$ a $\vec{\varepsilon}_3$ vektor, ktorý bude kolmý na $\vec{\varepsilon}_3$. Definujme ho tak, že pre uhol θ z intervalu $(0, \pi)$ bude zložka vektora $\vec{\varepsilon}_3$ v smere tohto vektora rovná $\sin(\theta)$. Označme ho $\vec{\varepsilon}_3'$. Keďže je kolmý na $\vec{\varepsilon}_3$, je možné ho úplne rozložiť do bázy $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2$, pretože jeho zložka v smere $\vec{\varepsilon}_3$ je nulová.

Zmenou uhla ψ sa mení poloha telesových osí $\vec{\varepsilon}_1$ a $\vec{\varepsilon}_2$ voči laboratórnej sústave, no osi $\vec{\varepsilon}_3$ a $\vec{\varepsilon}_3$ pritom stoja, teda aj vektor $\vec{\varepsilon}_3'$ stojí. Pred akýmkoľvek otáčaním v uhle ψ mieri vektor $\vec{\varepsilon}_3'$ presne v opačnom smere, ako $\vec{\varepsilon}_1$ (až na prípad, keď $\theta = 0$, pretože v tomto prípade je $\vec{\varepsilon}_3'$ nedefinovaný). Rozklad $\vec{\varepsilon}_3'$ do vektorov $\vec{\varepsilon}_1$ a $\vec{\varepsilon}_2$ začne byť zaujímavý, až po otáčaní v uhle ψ , pretože nezávisí na θ ani φ . Otočme teda teleso do polohy $(0, \pi/2, \psi)$ a skúmame, aký to má dopad na vektor $\vec{\varepsilon}_3'$. Keď $\psi = 0$, tak os $\vec{\varepsilon}_2$ mieri v smere $\vec{\varepsilon}_3'$ a zväčšovaním ψ sa tento priemet znižuje až do uhlu $\psi = \pi/2$, kedy je $\vec{\varepsilon}_3'$ v smere $\vec{\varepsilon}_2$ nula. Naopak, keď $\psi = 0$, priemet $\vec{\varepsilon}_3'$ do $\vec{\varepsilon}_1$ je nulový a zväčšovaním ψ sa tiež zväčšuje. Platí teda:

$$\vec{\varepsilon}_3' = \sin(\psi) \vec{\varepsilon}_1 + \cos(\psi) \vec{\varepsilon}_2 \quad (3.177)$$

Z toho pre $\vec{\varepsilon}_3$ dostávame:

$$\vec{\varepsilon}_3 = \sin(\theta) \vec{\varepsilon}_3' + \cos(\theta) \vec{\varepsilon}_3 = \sin(\psi) \sin(\theta) \vec{\varepsilon}_1 + \cos(\psi) \sin(\theta) \vec{\varepsilon}_2 + \cos(\theta) \vec{\varepsilon}_3 \quad (3.178)$$

Vektor $\vec{N}$ dostaneme ako súčin $\vec{\varepsilon}_3 \times \vec{\varepsilon}_3$:

$$\vec{N} \propto \vec{\varepsilon}_3 \times \vec{\varepsilon}_3 = [\sin(\psi) \sin(\theta) \vec{\varepsilon}_1 + \cos(\psi) \sin(\theta) \vec{\varepsilon}_2] \times \vec{\varepsilon}_3 = -\sin(\psi) \sin(\theta) \vec{\varepsilon}_2 + \cos(\psi) \sin(\theta) \vec{\varepsilon}_1 \quad (3.179)$$

$$\vec{\varepsilon}_3 \times \vec{\varepsilon}_3 = |\vec{\varepsilon}_3| |\vec{\varepsilon}_3| \sin(\theta) \vec{N} \implies \vec{N} = \cos(\psi) \vec{\varepsilon}_1 - \sin(\psi) \vec{\varepsilon}_2 \quad (3.180)$$

Z tohto celého môžeme určiť vzťah medzi $\vec{\omega}$ a Eulerovými uhlami:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \dot{\varphi} \vec{\varepsilon}_3 + \dot{\theta} \vec{N} + \dot{\psi} \vec{\varepsilon}_3 = \\ &= [\sin(\psi) \sin(\theta) \vec{\varepsilon}_1 + \cos(\psi) \sin(\theta) \vec{\varepsilon}_2 + \cos(\theta) \vec{\varepsilon}_3] \dot{\varphi} + [\cos(\psi) \vec{\varepsilon}_1 - \sin(\psi) \vec{\varepsilon}_2] \dot{\theta} + \vec{\varepsilon}_3 \dot{\psi} = \\ &= \left[\sin(\psi) \sin(\theta) \dot{\varphi} + \cos(\psi) \dot{\theta} \right] \vec{\varepsilon}_1 + \left[\cos(\psi) \sin(\theta) \dot{\varphi} - \sin(\psi) \dot{\theta} \right] \vec{\varepsilon}_2 + \left[\cos(\theta) \dot{\varphi} + \dot{\psi} \right] \vec{\varepsilon}_3 \end{aligned} \quad (3.181)$$

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\psi) \sin(\theta) & \cos(\psi) & 0 \\ \cos(\psi) \sin(\theta) & -\sin(\psi) & 0 \\ \cos(\theta) & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (3.182)$$

Práve sme odvodili *Eulerove kinematické rovnice*:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sin(\theta) \sin(\psi) \dot{\varphi} + \cos(\psi) \dot{\theta} \\ \omega_2 &= \sin(\theta) \cos(\psi) \dot{\varphi} - \sin(\psi) \dot{\theta} \\ \omega_3 &= \cos(\theta) \dot{\varphi} + \dot{\psi} \end{aligned} \quad (3.183)$$

Eulerove dynamické a kinematické rovnice sa v jednoduchých prípadoch, kedy momenty síl nezávisia od Eulerových uhlov, dajú riešiť oddelene. Najskôr riešime dynamické rovnice, ktorých neznáme sú priemety uhlového zrýchlenia na telesové osi, ω_i . Ich riešenie dosadíme do Eulerových kinematických rovníc, ktoré následne riešime pre Eulerove uhly φ, θ, ψ .

Keďže sme odvodili obe sady rovníc, môžeme sa vrátiť ku voľnému symetrickému zotrvačníku.

3.7.5 Ďalšie príklady*

Dynamika a kinematika voľného symetrického zotrvačníka*

Pre takéto teleso máme $J = \text{diag}(j, j, J)$, keďže dve zložky jeho momentu zotrvačnosti v telesovej báze sa rovnajú. Označme $J - j = k > 0$. Keďže teleso má byť voľné, moment sily, ktorý na neho pôsobí je nulový. Eulerove dynamické rovnice sú:

$$\begin{aligned} j\dot{\omega}_1 + k\omega_2\omega_3 &= 0 \\ j\dot{\omega}_2 - k\omega_1\omega_3 &= 0 \\ J\dot{\omega}_3 &= 0 \implies \omega_3 = \text{konšt.} \end{aligned} \quad (3.184)$$

Z prvej rovnice vyplýva:

$$k\omega_3 = -\frac{j\dot{\omega}_1}{\omega_2}$$

Dosadíme to do druhej rovnice:

$$j\dot{\omega}_2 + \frac{j\dot{\omega}_1\omega_1}{\omega_2} = 0 \implies \dot{\omega}_1\omega_1 + \dot{\omega}_2\omega_2 = 0$$

Aby sme si uvedomili, čo sme práve napísali, spočítame:

$$\frac{d}{dt}f^2(t) = \frac{df}{dt}f + f\frac{df}{dt} = 2f\dot{f}$$

Napísali sme teda:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1\omega_1 + \dot{\omega}_2\omega_2 = 0 &\implies \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\omega_1^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\omega_2^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\omega_1^2 + \omega_2^2) = 0 \\ &\implies \omega_1^2 + \omega_2^2 = \text{konšt.} \end{aligned} \quad (3.185)$$

No keďže aj tretia zložka uhlovej rýchlosti je konštantná, spolu dostávame:

$$\vec{\omega}^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = \text{konšt.} \quad (3.186)$$

Keďže $\vec{M} = 0$, tak $\vec{L}$ je konštantný vektor. Užitočné bude teda nechať úplne rovnaké definície Eulerových uhlov vzhľadom na laboratórne osi, aké sme podali už skôr, nech teda tento konštantný vektor mierí v smere tretej laboratórnej osi. Ako sme už predtým odvodili, priemet $\vec{e}_3$ do $\vec{e}_3$ je $\cos(\theta)$, teda priemet $\vec{L}$ do $\vec{e}_3$ bude $L \cos(\theta)$. Avšak vzhľadom na to, že ω_3 je priemet $\vec{\omega}$ do $\vec{e}_3$, tak platí:

$$L \cos(\theta) = J\omega_3 \implies \cos(\theta) = \frac{J\omega_3}{L} = \text{konšt.} \implies \theta = \theta_0 = \text{konšt.} \quad (3.187)$$

To je asi tak všetko, čo sme mali a chceli vymlátiť z dynamických rovníc, pokračujeme teda kinematickými:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \sin(\theta) \sin(\psi) \dot{\varphi} + \cos(\psi) \dot{\theta} \\ \omega_2 &= \sin(\theta) \cos(\psi) \dot{\varphi} - \sin(\psi) \dot{\theta} \\ \omega_3 &= \cos(\theta) \dot{\varphi} + \dot{\psi}\end{aligned}$$

Ľavé strany zatiaľ ponecháme na pokoji, do pravých dosadíme hlavné zjednodušenie $\theta = \text{konšt.} \implies \dot{\theta} = 0$:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \sin(\theta_0) \sin(\psi) \dot{\varphi} \\ \omega_2 &= \sin(\theta_0) \cos(\psi) \dot{\varphi} \\ \omega_3 &= \cos(\theta_0) \dot{\varphi} + \dot{\psi}\end{aligned} \tag{3.188}$$

Vzhľadom na konštantnosť výrazu $\omega_1^2 + \omega_2^2$ môžeme umocniť prvé dve rovnice a sčítať ich - dostaneme znovu konštantu:

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \sin^2(\theta_0) \dot{\varphi}^2$$

Jediná zaujímavá neznáma v tejto rovnici je φ , pre ktorú teda platí:

$$\dot{\varphi} = \frac{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}{\sin(\theta_0)} = \text{konšt.} \implies \varphi(t) = \Omega_\varphi t + \varphi_0 \tag{3.189}$$

Toto zistenie veselo dosadíme do poslednej rovnice (3.188):

$$\omega_3 = \cos(\theta_0) \Omega_\varphi + \dot{\psi}$$

Z čoho pre ψ vyplýva:

$$\dot{\psi} = \omega_3 - \cos(\theta_0) \Omega_\varphi = \text{konšt.} \implies \psi(t) = \Omega_\psi t + \psi_0 \tag{3.190}$$

Keďže pri zotrvačníku nám ide hlavne o vzťah medzi Ω_φ , Ω_ψ a θ_0 , využijeme (3.189), (3.188) v spojení s konštantnosťou momentu hybnosti:

$$\begin{aligned}\Omega_\varphi &= \frac{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}{\sin(\theta_0)} \\ \vec{L} = j\omega_1\vec{e}_1 + j\omega_2\vec{e}_2 + J\omega_3\vec{e}_3 &\implies L^2 = j^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) + J^2\omega_3^2 \implies \omega_1^2 + \omega_2^2 = \frac{1}{j^2}L^2 - \left(\frac{J}{j}\right)^2\omega_3^2 \\ \cos(\theta_0) = \frac{J\omega_3}{L} &\implies \sin(\theta_0) = \sqrt{1 - \left(\frac{J\omega_3}{L}\right)^2} \\ \implies \Omega_\varphi &= \frac{1}{j} \sqrt{\frac{L^2 - J^2\omega_3^2}{1 - \left(\frac{J\omega_3}{L}\right)^2}} = \frac{L}{j}\end{aligned} \tag{3.191}$$

Z tretej rovnice máme (3.188):

$$\begin{aligned}\omega_3 &= \cos(\theta_0) \Omega_\varphi + \Omega_\psi \implies \Omega_\psi = \omega_3 - \cos(\theta_0) \Omega_\varphi \stackrel{(3.187)}{=} \frac{L}{J} \cos(\theta_0) - \frac{L}{j} \cos(\theta_0) = \\ &= \left(\frac{1}{J} - \frac{1}{j}\right) L \cos(\theta_0)\end{aligned} \tag{3.192}$$

Využitím (3.191) dostávame finálny vzťah precesnú rýchlosť Ω_φ v závislosti od Ω_ψ a θ_0 :

$$\Omega_\varphi = \frac{\Omega_\psi}{\left(\frac{j}{J} - 1\right) \cos(\theta_0)} \quad (3.193)$$

Zopár (dôležitých) poznámok ku Eulerovým uhľom a precesii:

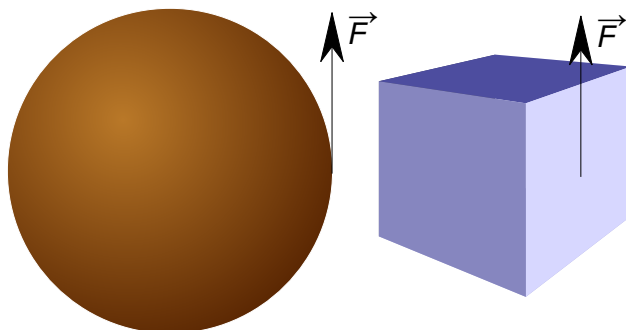
Poznámka č. 1: v priebehu riešenia sme využili, že moment hybnosti voľného telesa je konštantný a preto sme ho zvolili v smere osi z laboratórnej sústavy. Uvedomíme si, že tým sme priamo zvolili $\theta = \text{konšt.}$ Ak by sme to neurobili, neskutočne by sme si sťažili riešenie kinematických rovníc a vo všeobecnosti by nám vyšli nepekne funkcie $\theta(t)$, $\varphi(t)$ a $\psi(t)$. Mnohokrát je treba takýmto spôsobom vyberať vhodné natočenie, bázu, ale ako sme už predtým videli, tak aj zovšeobecnené súradnice. Nemusí totiž platiť že to, čo je pekné v jednej báze, je pekné aj v inej báze.

Poznámka č. 2: Po vyriešení dynamických rovníc vidno, že pre symetrický zotrvačník už neplatí $\vec{\omega} \parallel \vec{L}$. Miesto toho vidno, že vektor uhlovej rýchlosti $\vec{\omega}$ sa sám otáča okolo vektora momentu hybnosti. Mnohí ľudia tento vzťah prezentujú ako precesiu, pričom kinematické rovnice v podstate odignorujú a výsledok pre θ_0 , Ω_φ a Ω_ψ nepovažujú za dôležitý. Pre mňa osobne je precesia (aspoň čo sa týka zotrvačníkov) to, čo môžem pozorovať voľným okom, teda to, čo je zapísané v Eulerových uhloch.

Poznámka č. 3: V niektorých knižkách sa Eulerove uhly pomenujú veľmi sugestívne - uhol θ nazývame nutačný uhol, φ precesný uhol a ψ rotačný uhol. Toto názvoslovie je šité na mieru precesii ťažkého symetrického zotrvačníka, čo je vlastne zotrvačník, ktorý sa točí na stole. Zotrvačník je teda podopretý - jedna sila na neho pôsobí v mieste podopretia priamo nahor, druhá sila pôsobí v ťažisku smerom nadol a ich veľkosti sú rovnaké. Tento zotrvačník vykonáva v uhloch φ a ψ podobný pohyb, no v uhle θ pozorujeme ešte kmitanie, ktoré dostalo názov nutácia. Všetko je absolútne v poriadku, pretože to, čo pozorujeme sa dá pekne od seba oddeliť - vidíme, že zotrvačník sa točí okolo vlastnej osi (nazvali by sme to rotáciou), ďalej sa tento pohyb stáča okolo inej osi (toto nazveme precesiou) a ešte odklon týchto dvoch osí kmitá v čase (nutácia). Vezmime si ale znovu symetrický voľný zotrvačník a skúmame, čo sa deje, keď jeho tvar je stále sféricky symetrickejší (napr. brali by sme elipsoidy, ktoré sa tvarom blížia ku guli). Je zjavné, že pre tieto telesá musí postupne ustať precesia, očakávame teda, že precesný uhol pôjde do nuly a rotačný uhol ostane v čase lineárne rastúci (ostane určený v podstate počiatočnými podmienkami, ktoré mu udelíme). Na naše obrovské prekvapenie sa tak nestane. Ako vidno z (3.193), keď sa j blíži ku J , teda výraz $(j/J - 1)$ sa blíži k nule, aj Ω_ψ sa musí blížiť k nule, ináč by výraz na ľavej strane divergoval. Toto je zrejme ťažká rana pre všetkých, ktorí považovali Eulerove uhly za nádherne opisné a jasné v každej situácii - nie je tomu tak. Sféricke symetrické voľné teleso naozaj rotuje iba v uhle φ , musíme sa teda zmieriť s tým, že názvoslovie šité na mieru precesii jednoducho nebude inde fungovať.

Poznámka č. 4: v skutočnosti sa Eulerove uhly nepovažujú za veľmi vhodný nástroj pri riešení dynamických problémov (to sú tie, kde na sústavu pôsobia sily a my zisťujeme, ako sústava reaguje), zato sú veľmi názorné pri určovaní polohy telesa (ak máme dané Eulerove uhly, veľmi rýchlo si vieme predstaviť, ako je teleso v priestore natočené). Používajú sa rôzne uhly, podľa rôznych schém natáčania, ktoré označujú poradie osí, podľa ktorých sme teleso natáčali. Eulerove uhly definované v tomto texte sú zavedené podľa schémy $z - x - z$, pretože v takom poradí sme otáčali teleso podľa osí. Je možné použiť takmer ľubovoľnú schému, jediné obmedzenie je, že dve po sebe nasledujúce rotácie sa musia konať podľa rôznych osí. Iné, analogické uhly ku Eulerovým sú Tait-Bryanove uhly. V letectve sa používajú iné názvy a to heading (smer, teda v princípe uhol φ), elevation (zdvih, teda uhol θ meraní od vodorovnej polohy), bank (otočenie lietadla podľa pozdĺžnej osi, ψ), poprípade yaw, pitch, roll (analogicky). V praxi vzniká často problém s tzv. gimbal lock, teda strata stupňa voľnosti. Ak dve osi, podľa ktorých sme vykonali rotácie o Eulerove uhly splývajú (napr. ak $\theta = 0$), potom takúto rotáciu možno reprezentovať ako pohybom v jednom uhle, tak aj pohybom v druhom uhle, respektíve kombináciou týchto pohybov. My, ako „žadávači“ Eulerových uhlov vždy vieme, čo sme spravili, no pri spätnom odčítaní uhlov takto vzniká istá mnohoznačnosť. V praxi sa teda využívajú na opis rotácie quaternióny, čo je ale ďaleko za rámcom tohto textu.

Namiesto riešenia ťažkého symetrického zotrvačníka (možno nájsť v Landau - Lifšic) budeme riešiť tiež veľmi zaujímavý problém: predstavme si guľu s polomerom r a momentom zotrvačnosti J , na ktorej povrchu je pripevnený reaktívny motor. Výsledkom je konštantný vektor sily, ktorý je permanentne prilepený k povrchu gule. Zaujíma nás natočenie telesa v čase a poloha jeho ťažiska v čase. Keďže guľa je málo názorná (ťažko rozoznať ako je natočená), budeme používať kocku s hranou dĺžky $2a$ (je to rovnako sféricky symetrický zotrvačník, na riešení sa teda nič nezmení):



Obrázok 3.40: Guľa resp. kocka s reaktívnym pohonom.

Príklad si značne zjednodušíme predpokladom, že počiatočný vektor momentu hybnosti je nulový (t.j. na začiatku teleso stojí): $\vec{L}(t=0) = \vec{0}$.

Táto sila $\vec{F}$ je samozrejme konštantná v telesových osiach, pretože reaktívny motor je napevno pripevnený ku telesu. $\vec{F}$ však nie je konštantná v inerciálnej (laboratórnej) sústave! Je tomu tak preto, lebo pôsobením sily sa teleso v čase natáča, čo však natočí aj daný vektor $\vec{F}$. Na vyriešenie pohybu ťažiska budeme musieť najprv vyriešiť rotáciu telesa. Následne pohyb ťažiska bude daný Newtonovou rovnicou.

Nech telesové osi mieria nasledovne: pri polohe kocky ako na obrázku nech os x mieri doľava, os y smerom z obrázku a os z v smere sily $\vec{F}$. Nech táto sila má veľkosť F , potom jej zložky v telesových osiach budú: $\vec{F} = (0, 0, F)$. Každá zložka momentu sily sa určuje vzhľadom na príslušnú telesovú os a my vidíme, že nenulová bude jedine zložka y . Môžeme teda písať dynamické rovnice:

$$\begin{aligned} 0 &= J\dot{\omega}_1 \implies \omega_1 = C_1 \\ aF &= J\dot{\omega}_2 \implies \omega_2 = \frac{aF}{J}t + C_2 \\ 0 &= J\dot{\omega}_3 \implies \omega_3 = C_3 \end{aligned} \tag{3.194}$$

Keďže však $\vec{L}(t=0) = \vec{0}$, potom $C_1 = C_2 = C_3 = 0$. Znovu si zjednodušíme situáciu, tentoraz tak, že postavíme laboratórnu os z do smeru, v ktorom je (konštantný) vektor momentu sily (teda telesová os y bude zhodná s laboratórnou osou z). Ako vieme, že je konštantný? No pretože počiatočný moment hybnosti je nulový a teda sila $\vec{F}$ spôsobuje len rotáciu v jedinej rovine (rovine určenej vektorom $\vec{F}$ a ťažiskom kocky). Pri takto zvolenej situácii však platí, že $\theta = 0$. Musíme si dať pozor, tentoraz budú platiť Eulerove kinematické rovnice, no ω_2 bude prislúchať tretej rovnici (pretože sme na začiatku určili osi laboratórnu z a telesovú y ako zhodné). Napíšeme rovnice:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \\ \frac{aF}{J}t &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \\ 0 &= 0 \end{aligned} \tag{3.195}$$

Máme gimbal lock v praxi - realizácia rotácie tuhého telesa je určená len súčtom dvoch eulerových uhlov. Dohodnime sa teda, že $\psi = 0$. Oстане nám tak rovnica:

$$\dot{\varphi} = \frac{aF}{J}t \implies \varphi(t) = \frac{aF}{2J}t^2 \quad (3.196)$$

Vyšlo nám to, čo sme aj očakávali - pri pôsobení konštantného momentu sily (napr. roztáčam koleso, na ktoré je namotané lano so závažím) sa objekt otáča tak, že jeho uhol kvadraticky rastie v čase. Samozrejme využili sme pri tom všetky počiatočné podmienky - keby napr. teleso na začiatku rotovalo v inej osi, pohyb by bol veľmi škaredý a nekonal by sa v jedinej rovine, ako v tomto prípade.

Týmto máme vyriešenú rotáciu telesa v čase, ostáva vyriešiť pohyb ťažiska v priestore (v čase). Na to využijeme Newtonovu rovnicu:

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad (3.197)$$

Smer vektora sily vzhľadom na laboratórne osi je jasný, ak máme k dispozícii uhol φ :

$$\vec{F} = [0, \cos(\varphi), \sin(\varphi)] \quad (3.198)$$

Takto môžeme získať trajektóriu telesa v rovine yz nasledovne:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 0 \implies x = \text{nezaujímavé} \\ \ddot{y} &= \frac{F}{m} \cos\left(\frac{aF}{2J}t^2\right) \\ \ddot{z} &= \frac{F}{m} \sin\left(\frac{aF}{2J}t^2\right) \end{aligned} \quad (3.199)$$

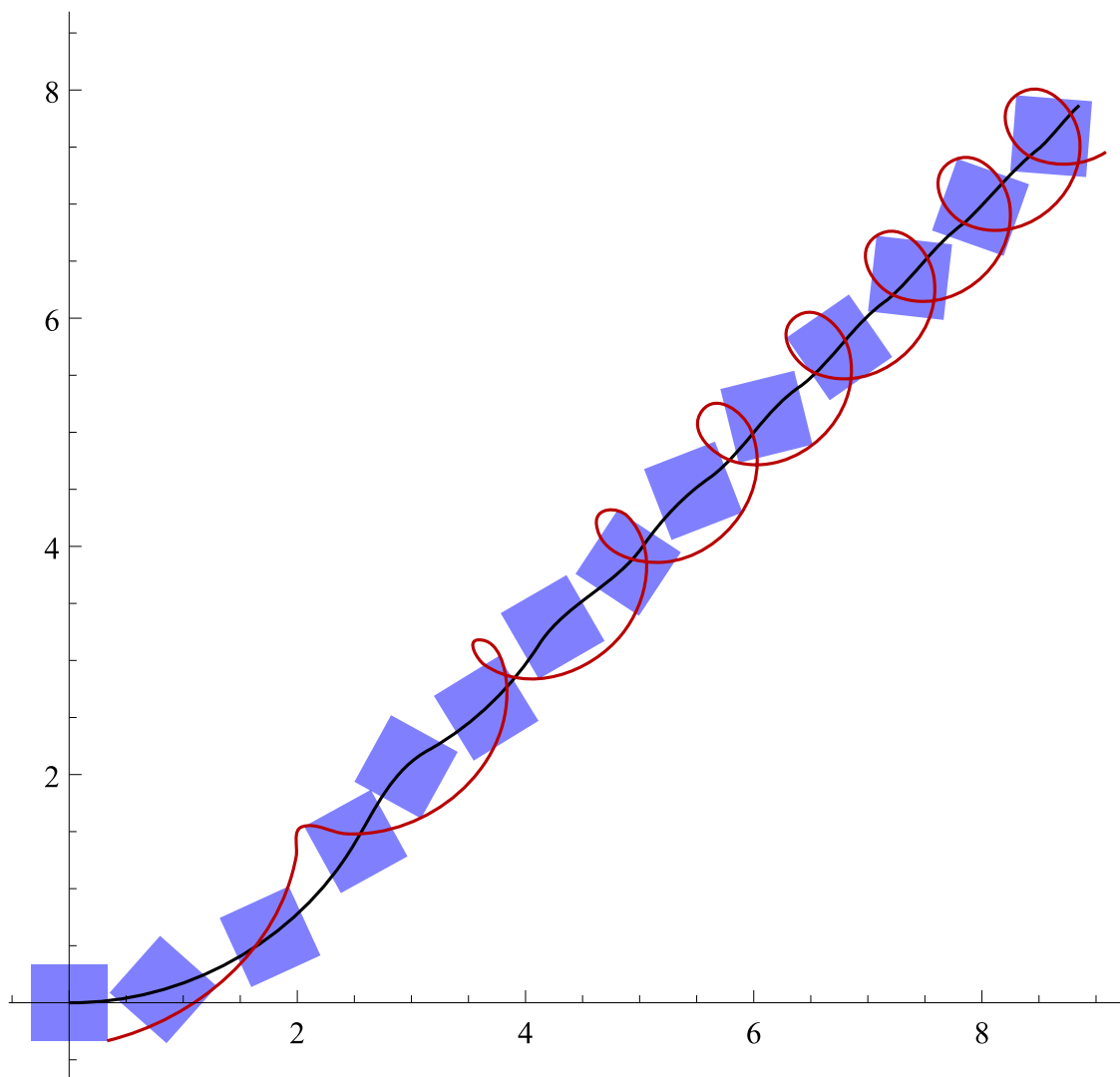
Pri takejto sile samotná rýchlosť ($\dot{y}$ a $\dot{z}$) vedie na Fresnelove integrály, teda $\int \cos(u^2)du$ a $\int \sin(u^2)du$. Zdalo by sa, že ďalší integrál z takej škaredej funkcie už nebude žiadna známa funkcia, no nie je tomu tak (a keby aj bolo, stále sa dá problém vyriešiť numericky). Zaujímavé je, že v čase idúcom k nekonečnu sa obe zložky rýchlosti blížia ku rovnakej konštante. Tento fakt vyplýva z hodnoty Fresnelových integrálov v hraniciach od 0 do nekonečna:

$$\int_0^\infty \cos(u^2) du = \int_0^\infty \sin(u^2) du = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (3.200)$$

$$\begin{aligned} v_y(t \rightarrow \infty) = v_z(t \rightarrow \infty) &= \frac{F}{m} \int_0^\infty \cos\left(\frac{aF}{2J}t^2\right) dt = \frac{F}{m} \sqrt{\frac{2J}{aF}} \int_0^\infty \cos\left(\frac{aF}{2J}t^2\right) d\left(\sqrt{\frac{aF}{2J}}t\right) = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\frac{FJ}{a}} \frac{1}{m} \end{aligned} \quad (3.201)$$

Vidíme teda, že v tomto prípade sa rýchlosť vo veľkom čase akoby „vystreduje“ do konkrétneho smeru (ktorý závisí od počiatočných podmienok). Na teleso v jeho báze síce pôsobí konštantná sila, no vďaka rotácii, ktorú táto sila spôsobí, bude sila striedavo pôsobiť všetkými smermi, čo má za následok ustálenie rýchlosti v jednom smere (akoby sila prestala pôsobiť vo veľkých časoch).

Za pomoci plottera si môžeme nakresliť graf trajektórie v čase aj s postupným natáčaním kocky. Na obrázku vidno pohyb ťažiska (čierna trajektória) a pohyb jedného vybraného vrcholu kocky (červená trajektória):



Obrázok 3.41: Pohyb kocky v rovine yz .

4

Úvod do mechaniky kontinua a hydrodynamiky

Kým doteraz sme skúmali hmotné body, respektíve sústavy hmotných bodov, v tejto kapitole budeme vyšetrovať pohyb hmotných telies, ktoré vyplňajú istý objem spojito. Narozdiel od tuhých telies, ktoré nemenia svoj tvar pri pôsobení vonkajších síl, v kvapalnom a pružnom kontinuu môžu jednotlivé body meniť svoju vzájomnú vzdialenosť. Postupovať budeme spočiatku tak všeobecne, ako sa len dá. Neskôr sa budeme konkretizovať na pohyb pružného kontinua a kvapaliny, spolu s riešením jednoduchších úloh, ktoré k týmto kategóriám patria.

Pri vytváraní modelu spojitého prostredia musíme v istom zmysle vychádzať zo skutočnosti, no v niečom sa musíme dopustiť nutnej abstrakcie. Ako už bolo spomenuté, jednotlivé body kontinua sa môžu vzájomne pohybovať tak, že pritom menia vzdialenosti medzi sebou, no nekonkretizovali sme, čo sú to vlastne tie body kontinua. Nemyslia sa tým ani atómy, ani molekuly, vždy sa tým myslí kúsok kontinua (s malými rozmermi), ktorý má spojite rozloženú hmotnosť (je možné ju opisovať spojitou funkciou hustoty). Vychádza otázka, ako veľmi malé rozmery sú tu prípustné. Odpoveď, ktorá sa ponúka je: len tak malé, aby sme boli spokojní s rozdielom medzi skutočnosťou a týmto modelom, ktorý vytvárame zanedbaním atomárnej a molekulárnej štruktúry a nahradením spojitou hmotou. Opis spojitými veličinami je veľmi príjemný z hľadiska používania aparátu diferenciálneho a integrálneho počtu. V odvodeniach budeme predpokladať, že čas je absolútny a môže slúžiť ako nezávislá premenná na opis akýchkoľvek spomínaných dejov. To je samozrejme dostatočne pravdivý opis, ak efekty, ktoré opisujeme sú dostatočne nerelativistické.

4.1 Všeobecná pohybová rovnica kontinua

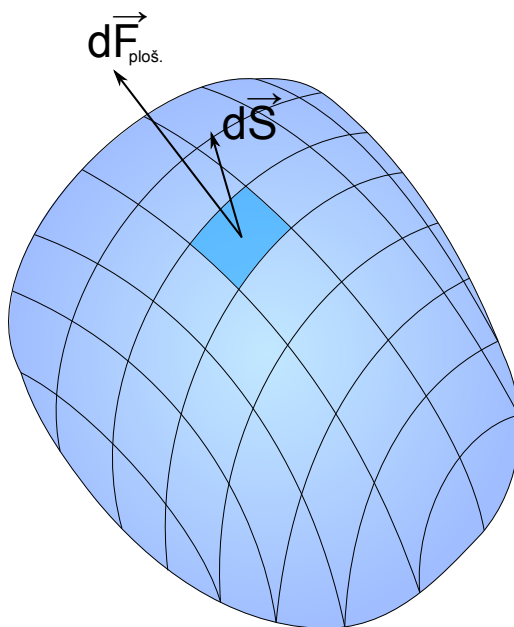
Pri opise kontinua budeme rozoznávať dva druhy síl a to sily objemové a plošné. Objemové sily si predstavujeme pomocou objemovej hustoty síl, $\vec{f}$. Potom pre objemovú silu $d\vec{F}_{obj.}$ (maličkú), ktorá pôsobí na malý objemček dV platí:

$$d\vec{F}_{obj.} = \vec{f} dV \quad (4.1)$$

Objemovú silu pôsobiacu na väčšiu časť kontinua, ako infinitezimálne malú, vypočítame pomocou objemového integrálu:

$$\vec{F}_{obj.} = \iiint_V d\vec{F}_{obj.} = \iiint_V \vec{f} dV \quad (4.2)$$

O prítomnosti plošných síl sa môžeme presvedčiť jednoducho. Napriek odstráneniu objemových síl sa kúsky kontinua môžu pohybovať so zrýchlením, čo môže znamenať jedine ďalšie silové pôsobenie. Koncept plošnej sily zavádzame, aby sme mohli skúmať, ako pôsobí jedna časť kontinua na inú. Toto pôsobenie sa realizuje cez vybranú plošku, spoločnú pre obe časti kontinua. Nech teda táto plocha má veľkosť dS a smer $\vec{n}$, ktorý je kolmý na plošku a jeho orientácia smeruje z objemu (ktorého hranica obsahuje túto plošku). Silové pôsobenie teda skúmame smerom do objemu (ktorého hranica tiež obsahuje danú plošku, je pre nich teda spoločná), na ktorého pôsobenie sa pýtame. Jej vektor teda bude $d\vec{S} = \vec{n}dS$. Koncept plošnej sily teraz predpokladá, že každej takejto ploške zodpovedá príslušná malá plošná sila, $d\vec{F}_{ploš.}$, ktorá vo všeobecnosti závisí od výberu danej plošky, ale aj od polohy v kontinuu a od času.



Obrázok 4.1: Vybraný objem dV v kontinuu, ktorý pôsobí cez kúsok svojej hranice $d\vec{S}$ na susedný objem malou plošnou silou $d\vec{F}_{ploš.}$.

Plošná sila cez väčšiu plochu sa bude počítat plošným integrálom I. druhu (po zložkách):

$$\vec{F}_{ploš.} = \iint_S d\vec{F}_{ploš.} \quad (4.3)$$

Tento vzťah môže byť vo všeobecnosti dosť zložitý, no výraz plôšky v argumente $d\vec{F}_{ploš}(\vec{r}, t, d\vec{S})$ je čo do absolútnej hodnoty malý. Fyzik, čo vidí v argumente funkcie malú vec, okamžite rozvíja funkciu do Taylorovho rozvoja v tejto malej veci. Presuňme sa teda do indexov a urobme tak pre i -tu zložku $d\vec{F}_{ploš}$:

$$dF_i(\vec{r}, t, d\vec{S}) = \underbrace{dF_i(\vec{r}, t, \vec{0})}_{=0} + \underbrace{\left. \frac{\partial F_i}{\partial S_j} \right|_{d\vec{S}=\vec{0}}}_{=\sigma_{ij}} d\vec{S}_j + \underbrace{\mathcal{O}(|d\vec{S}|^2)}_{\text{malé}}$$

Prvý výraz na pravej strane je nulový, pretože cez nulovú plochu kontinuum pôsobí nulovou silou. Druhý člen má v sebe akúsi dvojindexovú vec, ktorej presnejší tvar nevieme, tak si ju aspoň označíme úspornejšie, ako σ_{ij} . Napokon tretí člen v sebe skrýva zvyšných nekonečne veľa členov Taylorovho radu, ktoré sme sa kvôli ich malosti rozhodli zanedbať. Ostalo nám:

$$dF_i = \sigma_{ij} dS_j \quad (4.4)$$

Výraz σ_{ij} nazývame tenzor napätia. Je to vlastne tenzorové pole, pretože je definované v každom bode $\vec{r}$ a každom čase t a nezávisí už od $d\vec{S}$, pretože toho sme sa vzdali dosadením $d\vec{S} = \vec{0}$ v derivácii.

Keď už máme definované, čo všetko na koho/čo kde akým spôsobom pôsobí, vyjadríme celkovú silu, aká pôsobí na daný objem:

$$F_i = (\vec{F}_{obj})_i + (\vec{F}_{ploš})_i = \iiint_V f_i dV + \oint_{\partial V} \sigma_{ij} dS_j \quad (4.5)$$

Výraz ∂V určuje hranicu daného objemu V . Využitie Gauss-Ostrogradského vety (1.25)¹ spomenutej v kapitole 1 (matematický úvod) vedie na:

$$F_i = \iiint_V f_i dV + \iiint_V \partial_j \sigma_{ij} dV = \iiint_V (f_i + \partial_j \sigma_{ij}) dV \quad (4.6)$$

Vyberme teraz infinitezimálny objem dV , cez ktorý budeme integrovať:

$$\iiint_{dV} (f_i + \partial_j \sigma_{ij}) dV = (f_i + \partial_j \sigma_{ij}) dV \quad (4.7)$$

kde dV je práve miera oblasti dV . Toto tvrdenie si môžeme zdôvodniť rôzne. Napríklad tak, že vo veľmi malej oblasti (čo do rozmerov v každom smere) sa každá slušná funkcia chová tak, že sa mení len máličko. Pri integrovaní cez takúto malú oblasť si môžeme dovoliť nahradiť integrál prenásobením podintegrálnej funkcie mierou tejto oblasti, čo je samotné dV . Ak dV pošleme do nuly, tento vzťah platí stále presnejšie a do prvého rádu dV sa výrazy oproti skutočnému výpočtu nelíšia.

Vieme teraz, že výraz dV v sebe akosi skrýva hustotu a hmotnosť. Aby sme do toho nahliadli bližšie, skúsime deriváciu hybnosti kúsku objemu:

$$dp_i = \frac{d}{dt} (dm v_i) = dm \dot{v}_i \quad (4.8)$$

¹Gaussova-Ostrogradského veta má samozrejme aj (otravné) predpoklady, spomenuté už v matematickom úvode. Ich splnenie predpokladané automaticky; diskutovaný objem V musí byť jednoducho súvislá množina, jeho hranica musí byť po častiach hladká a $\vec{F}$ musí byť spojitely diferencovateľné vektorové pole na okolí V .

Prečo sme aplikovali deriváciu len na rýchlosť? Pretože vo všeobecnosti sa mení hustota, mení sa aj objemček dV , no sú v takom vzťahu, že ρdV sa nemení, no $\rho dV = dm$. Zároveň platí, že časová derivácia hybnosti p_i je sila F_i , čo je obsahom prvej vety impulzovej. Finálne teda píšeme:

$$F_i = dm \dot{v}_i = \rho dV \dot{v}_i = (f_i + \partial_j \sigma_{ij}) dV \quad (4.9)$$

Ak si teraz uvedomíme, že časová derivácia rýchlosti je vlastne zrýchlenie a vykrátime dV z oboch strán, dostaneme konečne všeobecnú pohybovú rovnicu kontinua:

$$\rho a_i = \partial_j \sigma_{ij} + f_i \quad (4.10)$$

O tenzore σ_{ij} si odvodíme jednu dôležitú vlastnosť. Počítajme moment sily (vzhľadom na počiatok súradnicovej sústavy), ktorý pôsobí na nejaký vybraný objem kontinua V . Moment sily sa počíta ako $\vec{r} \times \vec{F}$, pre daný kúsok bude tento moment daný:

$$\begin{aligned} M_i &= \left(\iiint_V \vec{r} \times \vec{f} dV \right)_i + \left(\oint_{\partial V} \vec{r} \times d\vec{F}_{\text{ploš.}} \right)_i = \iiint_V \varepsilon_{ijk} x_j f_k dV + \oint_{\partial V} \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} dS_l = \\ &= \iiint_V \varepsilon_{ijk} x_j f_k dV + \iiint_V \partial_l (\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl}) dV = \iiint_V \varepsilon_{ijk} (x_j f_k + \sigma_{kj} + x_j \partial_l \sigma_{kl}) dV = \\ &= \iiint_V \varepsilon_{ijk} [x_j (f_k + \partial_l \sigma_{kl}) + \sigma_{kj}] dV \end{aligned} \quad (4.11)$$

Toto bol priamy výpočet M_i . Zároveň vieme, že $\vec{M} = \dot{\vec{L}}$, kde $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Pre M_i teda zároveň platí:

$$M_i = \frac{d}{dt} \left(\iiint_V \vec{r} \times d\vec{p} \right)_i = \frac{d}{dt} \iiint_V \varepsilon_{ijk} x_j v_k dm = \varepsilon_{ijk} \iiint_V \rho (\dot{x}_j v_k + x_j \dot{v}_k) dV$$

Tu sme zase použili, že $\frac{d}{dt} (dm) = 0$. Pokračujeme:

$$M_i = \iiint_V \rho \underbrace{\varepsilon_{ijk} \dot{x}_j v_k}_{=(\vec{v} \times \vec{v})_i = 0} + \underbrace{\varepsilon_{ijk} x_j \dot{v}_k}_{=(\vec{r} \times \vec{a})_i} dV = \varepsilon_{ijk} \int_V \rho x_j a_k dV \quad (4.12)$$

Teraz spojíme výsledky (4.11) a (4.12):

$$\begin{aligned} M_i &= M_i \\ \iiint_V \varepsilon_{ijk} [x_j (f_k + \partial_l \sigma_{kl}) + \sigma_{kj}] dV &= \iiint_V \varepsilon_{ijk} \rho x_j a_k dV \\ \iiint_V \varepsilon_{ijk} [x_j (f_k + \partial_l \sigma_{kl}) + \sigma_{kj} - \rho x_j a_k] dV &= 0 \end{aligned}$$

Nulovosť integrálu pre každý objem V je možné splniť len vtedy, ak je podintegrálna funkcia nulová:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} x_j \underbrace{(f_k + \partial_l \sigma_{kl})}_{\rho a_k} + \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} - \varepsilon_{ijk} \rho x_j a_k &= 0 \\ \varepsilon_{ijk} x_j \rho a_k + \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} &= \varepsilon_{ijk} \rho x_j a_k \\ \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} = 0 &\implies \sigma_{kj} = \sigma_{jk} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Dostali sme užitočný výsledok - tenzor σ_{ij} je symetrický.

4.2 Kvapaliny

4.2.1 Tok ideálnej kvapaliny, Eulerova rovnica

Na odvodenie nejakých rovníc potrebujeme vyriešiť všetky členy nachádzajúce sa vo všeobecnej rovnici kontinua:

$$\rho a_i = \partial_j \sigma_{ij} + f_i \quad (4.14)$$

Člen a_i závisí od opisu samotného kontinua. Na opis kvapalín je výhodné používať Eulerove rýchlostné pole. Nebudeme tak sledovať život každej častice individuálne, skôr budeme v každom mieste priestoru sledovať, ako cez neho kvapalina preteká. Tento formalizmus však nebráni ani sledovaniu jednej častice po jej dráhe. Člen $\vec{a}$ v dôsledku toho dostane netriviálny tvar. Skúmame teda zmenu rýchlosti v čase. Na to potrebujeme rýchlosť v čase t a mieste $\vec{r}$: $v_i(\vec{r}, t)$.

Ak sa presunieme v čase o dt dopredu, dostaneme:

$$t \rightarrow t + dt \quad \dots \quad \vec{r} \rightarrow \vec{r} + \vec{v}(\vec{r}, t) dt, \quad v_i(\vec{r}, t) \rightarrow v_i(\vec{r} + \vec{v}(\vec{r}, t) dt, t + dt) \quad (4.15)$$

Zmenu rýchlosti dostaneme ich odčítaním:

$$dv_i(\vec{r}, t) = v_i(\vec{r} + dt \vec{v}(\vec{r}, t), t + dt) - v_i(\vec{r}, t) \quad (4.16)$$

Zmena v čase je malá, teda prvý člen na ľavej strane si môžeme dovoliť rozvinúť do prvého rádu Taylora so zanedbaním ostatných členov:

$$v_i(\vec{r} + dt \vec{v}(\vec{r}, t), t + dt) = v_i(\vec{r}, t) + \left. \frac{\partial v_i}{\partial t} \right|_{(\vec{r}, t)} dt + \left. \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_{(\vec{r}, t)} dt v_j \quad (4.17)$$

Pre dv_i tak dostaneme:

$$dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} dt + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dt \quad (4.18)$$

Člen a_i bude daný podielom dv_i a dt :

$$a_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (4.19)$$

Prvý člen je štandardná časová derivácia vektorového poľa, druhý člen pribudol práve v dôsledku Eulerovského opisu. Tento sa zvykne písať v tvare:

$$v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \left[(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right]_i \implies \vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \quad (4.20)$$

Aby sme boli naozaj na čistom, čo to je za výraz, jediný krát to rozpíšeme (lebo je to naozaj veľký výraz):

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) (\vec{v}) = \begin{pmatrix} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

Druhý problém, ktorý treba vyriešiť, je tenzor σ_{ij} . Pripomenieme, že tento tenzor vystupuje v definícii plošnej sily súvisiacej s malou plôškou v kontinuu, $d\vec{S}$:

$$dF_i = \sigma_{ij} dS_j \quad (4.22)$$

Pre ideálnu kvapalinu je zložka sily, ktorá je rovnobežná s plôškou nulová. Je to tak, pretože v ideálnej kvapaline sa jednotlivé vrstvy o seba nešúchajú, necítia sa navzájom, no iba na seba tlačia. Táto zložka sily je však kolmá na vektor plochy, teda pre ideálnu kvapalinu ostáva len zložka sily, ktorá je rovnobežná s vektorom plôšky. Táto zložka sa aj celkom rozumne ponúka, ak si premyslíme, ako je definovaný tlak. Tlak je definovaný, ako sila pôsobiaca kolmo na danú plochu. Lepší zápis by bol práve:

$$dF_{\perp} = p dS \quad (4.23)$$

Teda tlak je tá veličina, ktorá dáva úmernosť medzi veľkosťou plochy a veľkosťou sily, akou jednotlivé kúsky cez túto plochu na seba pôsobia. Zaveďme dS_+ ako stranu prislúchajúcu kúsku kontinua do ktorého mieri $d\vec{S}$ a dS_- ako plochu z opačnej strany². Z hľadiska tejto konvencie bude vektorová forma vzťahu (4.23):

$$d\vec{F} = -p d\vec{S} \quad (4.24)$$

V indexoch získavame vzťah pre σ_{ij} :

$$dF_i = -p dS_i = -p \delta_{ij} dS_j \quad (4.25)$$

Vidíme, že tenzor σ_{ij} bude:

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} \quad (4.26)$$

Práve sme odvodili tenzor napätia pre ideálnu kvapalinu.

Ako zaujímavá objemová sila môže byť všeličo, no tentoraz do rovnice zahrnieme gravitačnú silu zodpovedajúcu homogénemu gravitačnému poľu. Má platiť:

$$\iiint_V \vec{f} dV \stackrel{!}{=} \vec{F}_g = m \vec{g} = \iiint_V \rho \vec{g} dV \implies \iiint_V (\vec{f} - \rho \vec{g}) dV = 0 \quad (4.27)$$

Znovu platí, že nulovosť integrálu pre každý objem implikuje nulovosť podintegrálnej funkcie:

$$\vec{f} - \rho \vec{g} = 0 \implies \vec{f} = \rho \vec{g} \quad (4.28)$$

Našli sme teda všetky členy vo všeobecnej rovnici kontinua pre ideálnu kvapalinu:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \\ \sigma_{ij} &= -p \delta_{ij} \\ \vec{f} &= \rho \vec{g} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Po dosadení do všeobecnej rovnice kontinua (4.10) dostávame *Eulerovu rovnicu*:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g} \quad (4.30)$$

²Táto zvláštna konvencia je motivovaná orientáciou uzavretej plochy pri počítaní integrálov. V matematike je zvykom značiť ako prirodzenú (kladnú) orientáciu vektora $d\vec{S}$ takú, aby $d\vec{S}$ smeroval von z objemu uzavretého danou plochou.

4.2.2 Rovnica kontinuity

Samotná Eulerova rovnica má jeden problém, sú to vlastne zabalené len tri rovnice. Ale pri správnom rátaní je počet premenných až 5. Tri za rýchlostné pole, jedna za tlak a jedna za hustotu. Ku každej pohybovej rovnici kontinua patrí aj rovnica kontinuity. Tá je mikroskopickým analógom zákona zachovania hmotnosti³. Ten vraví, že hmotnosť kvapaliny daného objemu V sa síce môže meniť, ale len tak, že nejaká časť kvapaliny doň pritečie, alebo z neho odtečie. Zapísané matematicky:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = - \oint_{\partial V} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (4.31)$$

Ľavá strana hovorí o tom, koľko hmotnosti pribudlo (ubudlo) v danom objeme V . Pravá strana vyjadruje, koľko jej prítieklo (odtieklo) hranicou objemu. Keďže plošný integrál II. druhu predpokladá, že diferenciál plochy mieri smerom von z objemu, znamienko mínus pred integrálom tento smer obracia dovnútra objemu. Ak je ľavá strana kladná, to znamená nárast hmoty v objeme, musí byť aj pravá strana kladná, teda musí platiť, že hranicou niečo priteká dnu .

Na ľavú stranu použijeme vetu o derivovaní parametrického integrálu a na pravú Gaussovu-Ostrogradského vetu podľa (1.25):

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV &= - \iiint_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) dV \\ \iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \right) dV &= 0 \end{aligned}$$

Ak má táto rovnosť platiť pre každý objem V , potom podintegrálna funkcia má byť nulová. Tým dostávame *rovniciu kontinuity*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (4.32)$$

Zistili sme teda, že rýchlosť a hustota sa nemôžu meniť úplne ľubovoľne, ale tak, aby spĺňali rovnicu kontinuity.

4.2.3 Tok ideálnej nestlačiteľnej kvapaliny

Napriek tomu, že sme odvodili ďalšiu rovnicu, počet neznámych funkcií stále prevyšuje počet rovníc. Miesto odvádzania ďalších rovníc skúsime jednu funkciu zredukovať na konštantu⁴. Bude ňou hustota, požadujeme, aby platilo:

$$\rho = \text{konšt.} \quad (4.33)$$

Za tohto predpokladu hovorí rovnica kontinuity:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (4.34)$$

³Zákon zachovania hmotnosti v kontinuu platí len ak látka s ničím chemicky nereaguje.

⁴Koho by priveľmi trápilo, že umelo redukuje počet neznámych funkcií, dá sa to aj bez toho. Pre plyny je nestlačiteľnosť zlý predpoklad no máme niečo ako stavovú rovnicu. Tým nám do sústavy prišla ďalšia rovnica, bohužiaľ spolu s ňou prišla nová neznáma - teplota. Ale pre teplotu ešte platí rovnica vedenia tepla. Lenže toto je príšerne zložitá sústava diferenciálnych rovníc, ktorá sa horko-ťažko dá riešiť numericky.

Spolu dostávame 4 rovnice pre *tok ideálnej nestlačiteľnej kvapaliny*:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} &= -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= 0\end{aligned}\tag{4.35}$$

pre 4 neznáme - tri zložky rýchlosti v_1, v_2, v_3 a tlak p .

4.2.4 Hydrostatika

V hydrostatike predpokladáme, že rýchlostné pole je statické - celá kvapalina má byť v pokoji:

$$\vec{v} = \vec{0}\tag{4.36}$$

Dostávame rovnicu opisujúcu statické rozloženie tlaku $p(\vec{r})$ pre nejakú zaujímavú objemovú silu:

$$\vec{\nabla} p = \vec{f}\tag{4.37}$$

Príklad: akvárium tvaru kvádra v homogénnom gravitačnom poli. Také pole je zadane objemovou silou:

$$\vec{f} = \rho(0, 0, -g)\tag{4.38}$$

Z (4.37) dostaneme 3 rovnice:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -g\rho\end{aligned}\tag{4.39}$$

Prvé dve hovoria, že tlak p je konštanta vzhľadom na premenné x a y , tretia hovorí:

$$p(x, y, z) = p_0 - \rho g z\tag{4.40}$$

4.2.5 Stacionárne tečenie nevírového poľa, Bernoulliho rovnica

Stacionárne tečenie je také tečenie, ktoré sa v čase nemení, teda platí:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} \quad (4.41)$$

Definujeme teraz vektorové pole víru ⁵:

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v} \quad (4.42)$$

Motiváciu k tejto voľbe uvedieme nižšie. Nevírové pole bude pole s nulovou vírivosťou:

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{0} \quad (4.43)$$

Aké dôsledky budú mať (4.41) a (4.43) pre Eulerovu rovnicu? Prvý je zjavný - na ľavej strane zmizne člen $\frac{d\vec{v}}{dt}$. Dôsledok (4.43) je trochu skrytý. Zdanlivo bez súvisu spočítajme:

$$\begin{aligned} (\vec{v} \times \vec{\omega})_i &= \left[\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \right]_i = \varepsilon_{ijk} v_j (\vec{\nabla} \times \vec{v})_k = \varepsilon_{ijk} v_j \varepsilon_{klm} \partial_l v_m = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} v_j \partial_l v_m = \\ &\stackrel{\text{DC}}{=} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) v_j \partial_l v_m = v_j \partial_i v_j - v_j \partial_j v_i = \frac{1}{2} \partial_i (v_j v_j) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_i = \\ &= \left[\vec{\nabla} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} \right) \right]_i - [(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}]_i \implies \vec{v} \times \vec{\omega} = \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} \right) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Druhý člen na pravej strane sa zhodou okolností nachádza v Eulerovej rovnici, vyjadríme ho:

$$\begin{aligned} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} &= \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} \right) - \underbrace{\vec{v} \times \vec{\omega}}_{=\vec{0}} = \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} \right) \\ (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} &= \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.45)$$

Prepíšme Eulerovu rovnicu za predpokladu stacionárnosti (4.41) a nevírovosti (4.43):

$$\vec{\nabla} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g}$$

Rovnicu môžeme prenásobiť konštantou ρ , ktorú môžeme zahrnúť do gradientu:

$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 \right) = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g}$$

Ak by sme ešte vedeli vyjadriť člen $\vec{g}$ ako gradient nejakej funkcie, celá rovnica by prešla na tvar $\vec{\nabla}(\text{niečo}) = 0$. Tento člen tak naozaj môžeme napísať, pretože platí:

$$\vec{\nabla}(\vec{g} \cdot \vec{r}) = \vec{g} \quad (4.46)$$

Píšeme teda:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 \right) &= -\vec{\nabla} p + \rho \vec{\nabla}(\vec{g} \cdot \vec{r}) \\ \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 + p - \rho \vec{g} \cdot \vec{r} \right) &= \vec{0} \end{aligned}$$

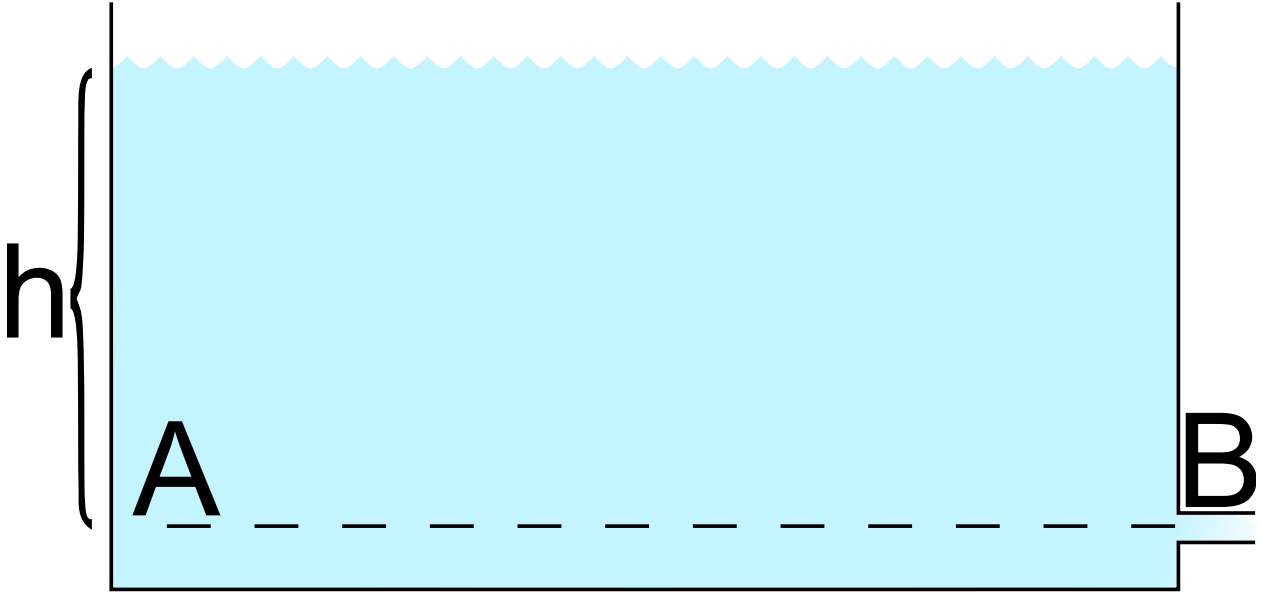
⁵Vorticity

Ak však platí, že $\vec{\nabla}f(x, y, z) = 0$, potom nutne funkcia f je konštantou vzhľadom na x , y , aj z , teda $f = \text{konšt.}$ Ešte platí $\vec{g} = (0, 0, -g)$, teda $\vec{g} \cdot \vec{r} = -gz$:

$$\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 + p + \rho g z = \text{konšt.} \quad (4.47)$$

To, čo sme práve odvodili, sa nazýva *Bernoulliho rovnica* - rovnica *stacionárneho* tečenia *ideálnej nestlačiteľnej* kvapaliny.

Typický príklad na stacionárne tečenie ideálnej nestlačiteľnej kvapaliny je kvapalina v nádobe výšky h , ktorá má naboku dole dierku, ktorou môže kvapalina vytekať. Zaujímalo by nás, akou rýchlosťou bude vytekať:



Obrázok 4.2: Voda v akváriu s malou dierkou.

Na obrázku sú vyznačené dva body - A a B . Bod A je niekde pri dne nádoby, bod B je priamo za dierkou (oba body sú v rovnakej výške), z ktorej vyteká voda. Príslušné tlaky a rýchlosti označíme p_A , p_B , v_A a v . Rýchlosť kvapaliny v bode A bude s istým priblížením nulová, pretože dierka je malá oproti ploche hladiny - odtok vody je zanedbateľný pri hladine, teda $v_A \approx 0$, v je neznáma, ktorú hľadáme. Platí Bernoulliho rovnica:

$$\frac{1}{2}\rho v_A^2 + p_A + \rho g h = \frac{1}{2}\rho v^2 + p_B + \rho g h$$

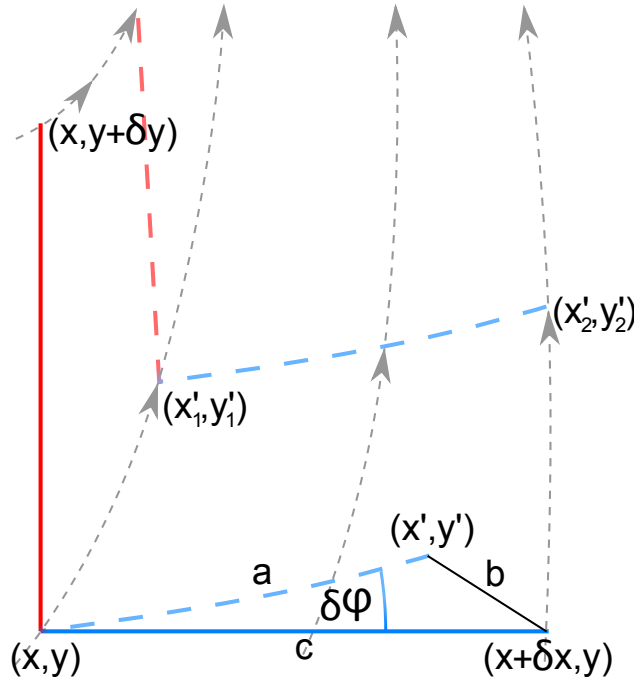
Tlak v bode B bude atmosferický, $p_B = p_a$, pretože bod B sa nachádza už v mieste mimo nádoby. Tlak v bode A bude mať hodnotu $\rho g h + p_a$. Potom dostaneme:

$$\begin{aligned} 0 + \rho g h + p_a &= \frac{1}{2}\rho v^2 + p_a \\ v &= \sqrt{2gh} \end{aligned} \quad (4.48)$$

4.2.6 Fyzikálna interpretácia vírivosti

V čitateľovi s veľkou pravdepodobnosťou skrsla podozrievavá otázka, k čomu je veličina $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$ užitočná a z akého titulu dostala meno *vírivosť*. V tomto odseku čitateľovi s radosťou odpovieme a motivujeme zavedenú fyzikálnu veličinu.

Ako už samotný názov veličiny napovedá, jej význam tkvie v lokálnej rotácii kvapalných elementov. Experimentálne by sme mohli tento jav pozorovať umiestnením ľahkej lopatky na oske do samotnej kvapaliny, z matematického hľadiska môžeme postupovať nasledovne. Situáciu budeme skúmať v 2D toku, zovšeobecnenie na 3D tok je priamočiare. V kvapaline si vyberieme dva navzájom kolmé čiarové kvapalné elementy s jedným spoločným bodom. Ich polohy sú naznačené na obrázku:



Obrázok 4.3: Dva kolmé čiarové kvapalné elementy.

Preskúmame pohyb kvapalných elementov vplyvom rýchlostného poľa. Zaujímá nás prvotný pohyb oboch elementov v bezprostrednej chvíli po momente, v ktorom dané elementy v poli zvýrazníme. Modrý element je vystavený rýchlostnému poľu na oboch svojich koncoch, v dôsledku čoho môže potenciálne vykonávať rotačný pohyb, ktorý označíme ω_m .

Najprv sa však pozrime, o aký uhol $\delta\varphi$ sa element otočí v dôsledku rýchlostného poľa za čas δt . Element je samozrejme rýchlostným poľom unášaný z pôvodnej polohy do novej, no my si pomôžeme a bez otočenia ho presunieme tak, aby jeho jeden bod bol zhodný s jeho pôvodnou polohou (viď obrázok). Predovšetkým musíme vyjadriť súradnice (x', y') :

$$\begin{aligned} x' &= x'_2 - (x'_1 - x) \\ y' &= y'_2 - (y'_1 - y) \end{aligned} \quad (4.49)$$

Tieto súradnice závisia na rýchlostnom poli:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x + v_x(x, y) \delta t, & x'_2 &= x + \delta x + v_x(x + \delta x, y) \delta t \\ y'_1 &= y + v_y(x, y) \delta t, & y'_2 &= y + v_y(x + \delta x, y) \delta t \\ x' &= x + \delta x + v_x(x + \delta x, y) \delta t - v_x(x, y) \delta t \approx x + \delta x + \partial_x v_x \delta x \delta t \\ y' &= y + v_y(x + \delta x, y) \delta t - v_y(x, y) \delta t \approx y + \partial_x v_y \delta x \delta t \end{aligned} \quad (4.50)$$

Naším cieľom je vyjadrenie $\delta\varphi$, na čo budeme potrebovať kosínusovú vetu. K tomu potrebujeme vyjadriť dĺžky a , b a c . Je zjavné, že $c = \delta x$. Ďalšie dve vyjadríme:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} = \sqrt{(1 + \partial_x v_x \delta t)^2 + (\partial_x v_y \delta t)^2} \delta x \\ b &= \sqrt{(x' - (x + \delta x))^2 + (y' - y)^2} = \sqrt{(\partial_x v_x \delta t)^2 + (\partial_x v_y \delta t)^2} \delta x \\ c &= \delta x \end{aligned} \quad (4.51)$$

Platí kosínusová veta:

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos(\delta\varphi) \\ (\partial_x v_x \delta t)^2 + (\partial_x v_y \delta t)^2 &= (1 + \partial_x v_x \delta t)^2 + (\partial_x v_y \delta t)^2 + 1 - 2\sqrt{(1 + \partial_x v_x \delta t)^2 + (\partial_x v_y \delta t)^2} \cos(\delta\varphi) \\ 0 &= 2 + 2\partial_x v_x \delta t - 2\sqrt{(1 + \partial_x v_x \delta t)^2 + (\partial_x v_y \delta t)^2} \cos(\delta\varphi) \\ \cos(\delta\varphi) &= \frac{1 + \partial_x v_x \delta t}{\sqrt{(1 + \partial_x v_x \delta t)^2 + (\partial_x v_y \delta t)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial_x v_y \delta t}{1 + \partial_x v_x \delta t}\right)^2}} \\ 1 - \frac{1}{2}\delta\varphi^2 &= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial_x v_y \delta t}{1 + \partial_x v_x \delta t}\right)^2 \\ \delta\varphi &= \partial_x v_y \delta t + \mathcal{O}(\delta t^2) \end{aligned} \quad (4.52)$$

Vo výraze identifikujeme uhlovú rýchlosť modrého kvapalného elementu:

$$\delta\varphi = \omega_m \delta t + \mathcal{O}(\delta t^2) \quad \dots \quad \omega_m = \frac{\partial v_y}{\partial x} \quad (4.53)$$

Obdobnou analýzou by nám vyšlo, že uhlová rýchlosť (v tom istom smere!)⁶ je daná výrazom:

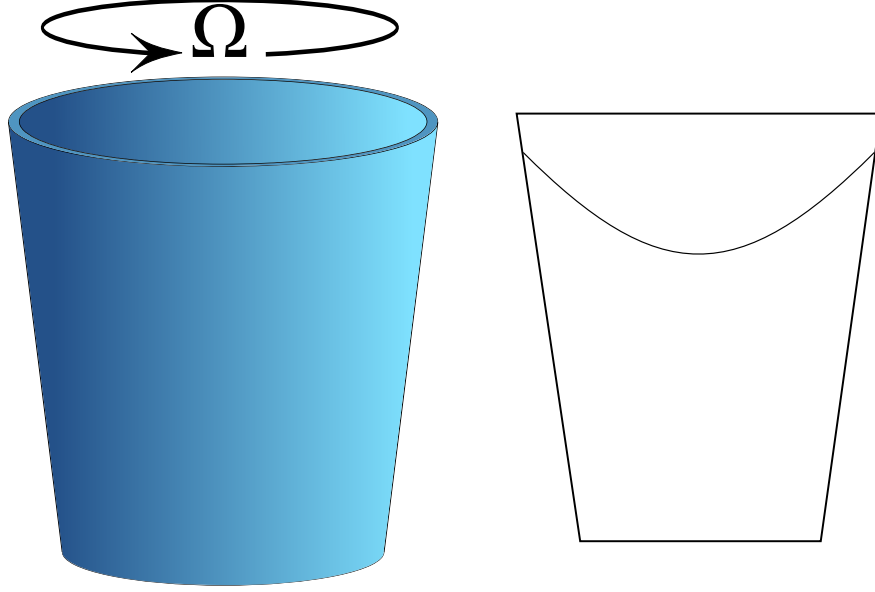
$$\omega_{\tilde{c}} = -\frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (4.54)$$

Sčítaním týchto dvoch veličín dostaneme dvojnásobok *priemernej uhlovej rýchlosti* kvapalných elementov v danom geometrickom bode rýchlostného poľa:

$$\omega_z = \omega_m + \omega_{\tilde{c}} = 2\frac{\omega_m + \omega_{\tilde{c}}}{2} = 2\bar{\omega} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \varepsilon_{3ij}\partial_i v_j \quad \dots \quad \vec{\omega} = \vec{e}_k \varepsilon_{kij}\partial_i v_j = \vec{\nabla} \times \vec{v} \quad (4.55)$$

⁶Kladná uhlová rýchlosť značí otáčania *proti* smeru hodinových ručičiek.

Príklad na Eulerovu rovnicu; Newtonovo vedro. Je to valcová nádoba naplnená vodou, ktorá sa točí okolo osi symetrie konštantnou uhlovou rýchlosťou Ω . Našou úlohou je zistiť čo najviac o tvare vody, ak je situácia ustálená, t.j. vedro sa takto točí už dlho a voda sa točí spolu s ním a nemení tvar. Potom je možné tento problém riešiť Eulerovou rovnicou.



Obrázok 4.4: Newtonovo vedro.

Vieme, že rýchlosť v tomto prípade bude závisieť od $\vec{r}$ nasledovne:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (4.56)$$

kde $\vec{\Omega} = (0, 0, \Omega)$. Zložky rýchlosti teda budú:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -\Omega y \\ \Omega x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

Keďže rýchlostné pole je už známe, rovnicu budeme riešiť pre tlak $p(\vec{r})$. Vieme, že hladina vody bude určená miestami, kde $p = p_a$, teda tlak bude rovný atmosferickému. Člen $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$ bude:

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} = -\Omega y \frac{\partial}{\partial x} + \Omega x \frac{\partial}{\partial y} \implies (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \begin{pmatrix} -\Omega^2 x \\ -\Omega^2 y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

Môžeme písať Eulerovu rovnicu po zložkách:

$$\begin{aligned} -\rho \Omega^2 x &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\ -\rho \Omega^2 y &= -\frac{\partial p}{\partial y} \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \implies p(x, y, z) = -\rho g z + C_z(x, y) \end{aligned} \quad (4.59)$$

Už vieme závislosť p na súradnici z , túto dosadíme do prvej rovnice:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial C_z}{\partial x} = \rho \Omega^2 x \implies C_z(x, y) = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 x^2 + C_{xz}(y) \quad (4.60)$$

Teda máme:

$$p(x, y, z) = -\rho g z + C_z(x, y) = -\rho g z + \frac{1}{2} \rho \Omega^2 x^2 + C_{xz}(y) \quad (4.61)$$

Dosadíme to do druhej rovnice:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial C_{xz}}{\partial y} = \rho \Omega^2 y \implies C_{xz}(y) = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 y^2 + \text{konšt.} \quad (4.62)$$

$$p(x, y, z) = -\rho g z + C_z(x, y) = -\rho g z + \frac{1}{2} \rho \Omega^2 x^2 + C_{xz}(y) = -\rho g z + \frac{1}{2} \rho \Omega^2 x^2 + \frac{1}{2} \rho \Omega^2 y^2 + \text{konšt.} \quad (4.63)$$

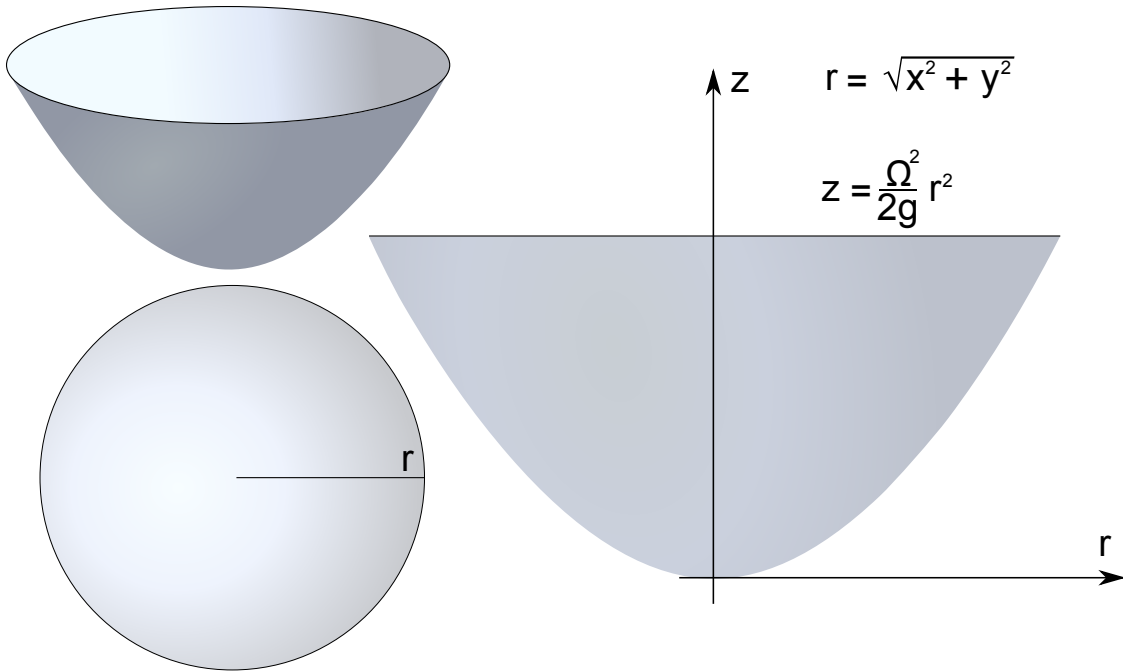
Vidíme, že konštanta bude $p(0, 0, 0) = p_0$:

$$p(x, y, z) = -\rho g z + \frac{1}{2} \rho \Omega^2 (x^2 + y^2) + p_0 \quad (4.64)$$

Môžeme požadovať, aby $p_0 = p_a$. Potom riešme rovnicu:

$$p_a = p(x, y, z) \implies p_a = -\rho g z + \frac{1}{2} \rho \Omega^2 (x^2 + y^2) + p_a \implies z = \frac{\Omega^2}{2g} (x^2 + y^2) \quad (4.65)$$

Vyšiel nám rotačný paraboloid. V skutočnosti voľba p_0 nebola nijako dôležitá - pre rotačný paraboloid by iba znamenala posunutie jeho začiatku o nejakú konštantu nahor, alebo nadol, tvar paraboloidu by sa tak nezmenil, len by sa zmenila jeho poloha voči počiatku súradnej sústavy.



Obrázok 4.5: Tvar vodnej hladiny v roztočenom Newtonovom vedre.

4.2.7 Tok viskózne kvapaliny, Navier-Stokesova rovnica

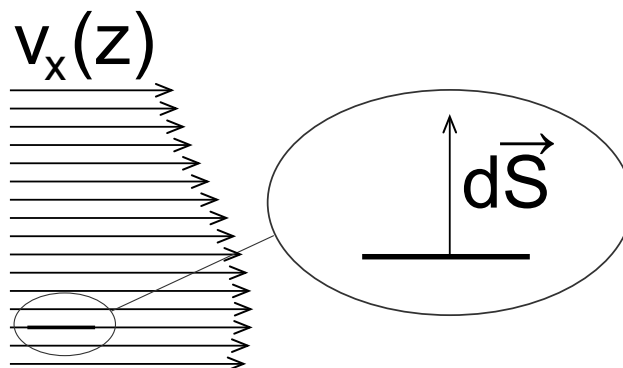
Našou ambíciou je odvodiť rovnicu pre tečenie viskózne kvapaliny. Vychádzame z (4.10), všeobecnej rovnice kontinua:

$$\rho a_i = \partial_j \sigma_{ij} + f_i \quad (4.66)$$

Zmena kvapaliny z ideálnej na viskóznú sa prejaví jedine v tenzore napätia, σ_{ij} , všetky ostatné veličiny останú nezmenené. Pripomeňme, aký tvar mal tenzor napätia v ideálnej kvapaline:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (4.67)$$

Priamy dôsledok tohto tvaru zaručuje, že ku každej ploške bude prislúchať len kolmá zložka plošnej sily, teda takéto sily identifikujeme len ako tlakové. Keďže sa nevieme nikam ďalej pohnúť, zabudnime chvíľu na tlak a vezmime si takýto primitívny prípad tečenia kvapaliny:



Obrázok 4.6: Tok kvapaliny s ploškou rovnobežnou so smerom rýchlosti.

Zvoľme si plošku v kontinuu tak, aby jej normála bola kolmá na tok kvapaliny (ako na obrázku). Ak by sme zistili, kam bude smerovať plošná sila $d\vec{F}$ v tomto prípade, možno sa posunieme o kúsok ďalej. Keďže neuvažujeme tlak, ostáva nám iba už len smer kolmý na normálu $d\vec{S}$ (v smere rovnobežnom v ideálnej kvapaline pôsobil tlak). Je intuitívne jasné, že vrstvy kvapaliny sa o seba budú šúchať jedine v prípade, keď v kvapaline nastane nejaký spád rýchlosti. Je šanca, že takéto správanie vyvolá plošnú silu, ktorá bude mať nenulovú zložku kolmú na normálu plochy. Označme si smery v našom prípade; smer $d\vec{S}$ bude $\vec{e}_3$, smer do obrázka bude $\vec{e}_2$, smer rýchlosti bude $\vec{e}_1$. Keďže horná vrstva kvapaliny sa podľa obrázka hýbe trochu rýchlejšie ako spodná, má platiť, že táto horná vrstva pôsobí na spodnú silou, ktorá smeruje doprava:

$$dF_1 = \sigma_{13}dS_3 \quad (4.68)$$

kde sa už predpokladá, že σ_{13} je nenulové číslo. Naše úvahy šli tým smerom, že veľkosť tejto sily bude úmerná práve spádu rýchlosti v smere rovnobežnom s $d\vec{S}$ (teda v smere, v ktorom sa mení rýchlosť s polohou). Nech teda platí zúfalý predpoklad, že táto závislosť bude priamo úmerná:

$$dF_1 \propto \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \quad (4.69)$$

Táto úmera vyjadruje presne to, čo sme chceli – nech zložka plošnej sily v smere $\vec{e}_1$ je priamo úmerná spádu rýchlosti v smere $\vec{e}_3$, no jediná zložka, ktorú rýchlosť v našom prípade má, je práve zložka $\vec{v}_1$. Pre σ_{13} by táto úvaha mohla mať nasledujúci dôsledok:

$$(dF_1 \propto \partial_3 v_1) \wedge (df_1 \propto \sigma_{13}) \quad \cdots \quad \sigma_{13} \stackrel{!}{=} \eta \partial_3 v_1 \quad (4.70)$$

Táto voľba má taktiež výhodu v indexoch – dF_1 požaduje od pravej strany, aby jej nechala voľný index 1, čo naozaj platí, ak σ_{13} zvolíme práve tak, ako sme ju zvolili:

$$dF_1 = \sigma_{13}dS_3 = \eta\partial_3v_1dS_3 \quad (4.71)$$

Zatiaľ sme vyriešili tenzor σ_{ij} pre naozaj veľmi jednoduchý a konkrétny prípad tečenia kvapaliny. Teraz príde isté veľmi trúfalé zovšeobecnenie pre ľubovoľný smer a spôsob toku kvapaliny. Čo keby to analogicky platilo pre ľubovoľné dva indexy a dokonca v zmysle Einsteinovej sumačnej konvencie? Nech teda platí zovšeobecnenie:

$$\sigma_{13} = \eta\partial_3v_1 \quad \dots \quad \sigma_{ij} = \eta\partial_jv_i \quad (4.72)$$

Teda pre $d\vec{F}$ by (bez tlaku) platilo:

$$dF_i = \sigma_{ij}dS_j = \eta\partial_jv_idS_j \quad (4.73)$$

Zdržme sa zatiaľ ovácii a otvárania šampusu, zabudli sme totiž, že tenzor napätia má byť symetrický, teda má platiť $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, ako sme ukázali už v úvode. Bohužiaľ, tento výraz pre σ_{ij} nie je symetrický, no to sa dá ľahko napraviť. Tenzor σ_{ij} môžeme zosymetrizovať:

$$\sigma_{ij} = \eta(\partial_jv_i + \partial_iv_j) \quad (4.74)$$

Otázne je, či sme si týmto nepokazili to jednoduché tečenie, bude ešte stále platiť, že $dF_1 = \eta\partial_3v_1dS_3$? Ukazuje sa, že bude, pretože $\partial_1v_3 = 0$ (vzhľadom na fakt, že tečenie sa koná iba v smere $\vec{e}_1$).

Finálny a správny tenzor σ_{ij} je daný práve odvodeným tenzorom po zahrnutí tlaku:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta(\partial_jv_i + \partial_iv_j) \quad (4.75)$$

O tomto vyjadrení si myslíme, že by mohlo byť správne, ak prejde prudké zovšeobecnenie (13) $\rightarrow (ij)^7$. Dosadíme takýto tenzor napätia do všeobecnej rovnice kontinua. Dôležité bude vedieť, čo je za výraz $\partial_j\sigma_{ij}$ pri takomto tvare σ_{ij} :

$$\partial_j\sigma_{ij} = -\partial_ip + \eta\left(\partial_j\partial_jv_i + \underbrace{\partial_j\partial_iv_j}_{\partial_i(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})}\right) = -(\vec{\nabla}p)_i + \eta\left[\Delta\vec{v} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})\right]_i \quad (4.76)$$

Výsledná rovnica teda bude mať tvar:

$$\underbrace{\rho\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right]}_{\text{Eulerova rovnica}} = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{g} + \eta\Delta\vec{v} + \eta\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) \quad (4.77)$$

Práve sme odvodili *Navier-Stokesovu rovnicu*. Za povšimnutie stojí, že až do členov, ktoré obsahujú konštantu η , je rovnica totožná s Eulerovou. Taktiež vidno, že keď pribudla viskozita, rovnica je až druhého rádu (menovite v člene $\Delta\vec{v}$, kde sú až druhé derivácie rýchlostného poľa).

Pre nestlačiteľné kvapaliny zanedbávame člen $\eta\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})$, divergencia nestlačiteľnej kvapaliny totiž musí byť nulová.

Okrajové podmienky pri Eulerovej a Navier-Stokesovej rovnici určujú správanie rýchlostného poľa na okraji uvažovaného objemu (napr. v prípade s Newtonovým vedrom to boli body, kde sa kvapalina stýkala s vedrom). Pri neviskózne kvapaline uvažujeme, že rýchlosť kvapaliny pri pevnej hranici bude rovnobežná s touto hranicou, pri viskózne kvapaline dokonca nulová.

⁷O jeho správnosti sa presvedčíme po napísaní rovníc, ktoré z tohto zovšeobecnenia vyplývajú, ich riešením pre veľa rôznych problémov a overením, či tieto riešenia dobre opisujú skutočnosť. Ak nie, celé to treba premyslieť znova, ak áno, môžeme konečne otvoriť tú fľašu šampusu. Ukazuje sa, že takéto zovšeobecnenie bolo správne, no tú fľašu šampusu by sme radšej nemali otvárať – alkohol ničí mozgové bunky.

4.2.8 Ďalšie príklady z hydrodynamiky riešiteľné analyticky*

Tečenie v potrubí*

Toto je klasický príklad pre Navier-Stokesovu rovnicu. Jedná sa o stacionárne, laminárne tečenie viskózne kvapaliny vo zvislej, nekonečne dlhej rúre s polomerom R v gravitačnom poli.

Riadiaca rovnica pre stacionárny tok nestlačiteľnej kvapaliny vychádza z Navier-Stokesovej rovnice so zanedbaním člena $\eta \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$ v dôsledku nestlačiteľnosti a zanedbaním člena $\partial_t \vec{v}$ v dôsledku stacionárnosti toku:

$$\rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v}$$

Nech os súmernosti valca, v ktorom kvapalina tečie je totožná s osou z . Gravitačné pole bude mieriť v smere $-z$: $\vec{g} = (0, 0, -g)$.

Okrajová podmienka diktuje, že kedykoľvek $x^2 + y^2 = R^2$, tak $\vec{v}(x, y, z) = \vec{0}$ (nezávisle na z). Z rovnice kontinuity a nestlačiteľnosti kvapaliny dostávame:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0; \quad \rho(x, y, z, t) = \text{konšt.} \implies \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \implies \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

t.j. najvšeobecnejší tvar, aký dokážeme dosiahnuť pre rýchlosť $\vec{v}$ je taký, že táto sa dá napísať ako rotácia iného vektorového poľa, $\vec{A}$.

Dosadíme do riadiacej rovnice:

$$\rho \left[(\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{\nabla} \right] (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} + \eta \Delta (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

Po zložkách:

$$\begin{aligned} \rho \varepsilon_{abc} \partial_b A_c \partial_a (\varepsilon_{ijk} \partial_j A_k) &= -\partial_i p + \rho g_i + \eta \partial_l \partial_l (\varepsilon_{ijk} \partial_j A_k) \\ \rho \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{abc} \frac{\partial A_c}{\partial x_b} \frac{\partial A_k}{\partial x_a \partial x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \eta \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_l \partial x_l \partial x_j} \end{aligned}$$

Toto je zjavne slepá ulička pre akékoľvek ambície vypočítať niečo analyticky - rovnica, ktorú sme dostali je nelineárna a škaredá⁸.

Navier-Stokesova rovnica, aj v takomto zdecimovanom tvare (nestlačiteľná kvapalina, stacionárne riešenie) je bohužiaľ stále *nelineárna* parciálna diferenciálna rovnica druhého rádu, teda takmer hocičo, čo vieme z riešení *lineárnych* parciálnych diferenciálnych rovníc (napr. Poissonova rovnica, vlnová rovnica, rovnica vedenia tepla, ...), môžeme zahodiť spolu aj s nejakou vetou o jednoznačnosti riešenia. Jediná zbraň, čo nám ostala, je zdravý rozum a ten nám našepkáva, aké tečenie by táto rovnica logicky podľa situácie *mohla* spĺňať. Je ním tečenie, ktoré má len tretiu zložku rýchlosti nenulovú (v smere osi z). K tomuto úsudku nás viedla myšlienka, že predsa voda v zvislej rúre tečie smerom dole⁹ (teda v smere osi z), prečo teda takýto nápad neskúsiť na rovnicu? Našu predstavu by spĺňalo takéto rýchlostné pole:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v(x, y, z) \end{pmatrix}$$

Z rovnice kontinuity dostávame:

$$\partial_z v(x, y, z) = 0 \implies v(x, y, z) = v(x, y)$$

⁸Škaredá - skúste si napr. vypísať prvú zložku, t.j. $i = 1$.

⁹To nie je celkom pravda - pomocou perturbácií sa dá nazrieť do tohto problému aj inak a zistili by sme, že aj taká zdanlivo jednoduchá vec ako tok v zvislej rúre je v skutočnosti zložitý. No my hľadáme jednoduché a nie zložené riešenie.

Teda rýchlostné pole závisí už len od x a y . Ľavá strana Navier-Stokesovej rovnice bude nulová (časovú deriváciu sme vylúčili už na začiatku - stacionárnosť toku), pretože pre jedinú nemulovú tretiu zložku $\vec{v}$ dostávame:

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v = v \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

Prepíšeme si, čo z Navier-Stokesovej rovnice ostalo pre prvé dve zložky:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \implies p(x, y, z) = p(z)$$

Pre tretiu zložku dostávame:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p(z)}{\partial z} + \eta \Delta v(x, y) - \rho g &= 0 \\ \frac{\partial p(z)}{\partial z} + \rho g &= \eta \Delta v(x, y) \\ F(z) &= G(x, y) \end{aligned}$$

Dospeli sme ku celkom príjemnému faktu, rovnica sa sama odseparovala. Vidíme, že ľavá strana je závislá len od premennej z a pravá strana len od premenných x a y . To však znamená, že ak by ľavá strana nebola konštantná v premennej z , potom by sa menila s touto premennou, no na pravej strane by nemalo čo udržať túto rovnosť, keďže sa v nej premenná z nenachádza. Z toho jednoducho vyplýva, že obe strany sú konštantné a rovné tej istej konštante K :

$$\frac{\partial p(z)}{\partial z} + \rho g = K = \eta \Delta v(x, y)$$

Skúmame prvú rovnosť - jednoduchú diferenciálnu rovnicu s jednoduchým riešením:

$$\frac{\partial p(z)}{\partial z} + \rho g = K \implies p(z) = p_0 + (K - \rho g) z$$

Druhá rovnosť predstavuje o trochu väčší problém:

$$\Delta v = \frac{K}{\eta}$$

Jedná sa o Poissonovu rovnicu, čo je parciálna lineárna diferenciálna rovnica, ktorá má jednoznačné riešenie pre jednoznačne zadané okrajové podmienky v . Tu vstupuje do úlohy ako okrajová podmienka nulovosť rýchlosti kvapaliny tam, kde sa kvapalina styka s rúrou, teda kedykoľvek $x^2 + y^2 = R^2$. Je namieste začať uvažovať polárne súradnice. Laplace v týchto súradniciach je možné nájsť napr. na wikipédii (alebo si ho odvodiť):

$$\begin{aligned} v(x, y) &\rightarrow v(r, \varphi) \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \rightarrow \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} &= \frac{K}{\eta} \end{aligned}$$

V týchto súradniciach je možné oveľa pohodlnejšie sformulovať okrajovú podmienku, a to práve vďaka tomu, že sme sa presunuli do súradnej sústavy šitej na mieru tvaru rúry:

$$v(r = R, \varphi) = 0$$

Takto definovaný problém (Poissonova rovnica + okrajová podmienka) sa nazýva Dirichletova úloha a je dokázané¹⁰, že pre Dirichletovu úlohu existuje jednoznačné riešenie. Ak toto riešenie teraz akýmkoľvek spôsobom uhádneme, bude to ONO hľadané riešenie. Inak povedané, veta o jednoznačnosti riešenia Dirichletovej úlohy povyšuje hádanie na úplne rigoróznou metódu hľadania riešenia tejto úlohy. Keďže hádanie riešenia je úplne košér spôsob riešenia tejto rovnice, skúsme si tipnúť, čo ak riešenie $v(r, \varphi)$ v skutočnosti bude závisieť len od r (teda v uhle φ sa nebude diať nič zaujímavé):

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = \frac{K}{\eta}$$

Keďže rýchlosť závisí už iba od r , budeme derivácie značiť čiarkou. Rovnicu riešime štandardne, je to totiž už len obyčajná diferenciálna rovnica:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} (rv')' &= \frac{K}{\eta} \\ (rv')' &= \frac{K}{\eta} r \\ rv' &= \frac{K}{2\eta} r^2 + C_1 \\ v' &= \frac{K}{2\eta} r + C_1 \frac{1}{r} \\ v(r) &= \frac{K}{4\eta} r^2 + C_1 \ln(r) + C_2 \end{aligned}$$

Ďalej sa riadime sedliackym rozumom a okrajovou podmienkou. Vidíme, že ak konštanta C_1 je rôzna od 0, potom pre $r \rightarrow 0$ platí $v(r) \rightarrow -\infty$ (alebo $+\infty$). Toto zrejme nebude úplne najfyzikálnejšie chovanie rýchlostného toku (minimálne by to porušovalo princípy teórie relativity, ktorá však v Navier-Stokesových rovniciach nie je prítomná, no hlavne by to vyrušovalo zdravý rozum). Z tohto chovania súdime, že $C_1 = 0$. Zároveň musí platiť okrajová podmienka, z ktorej dostávame výslednú hodnotu konštanty C_2 :

$$v(R) = \frac{K}{4\eta} R^2 + C_2 = 0 \implies C_2 = -\frac{K}{4\eta} R^2 \implies v(r) = \frac{K}{4\eta} (r^2 - R^2)$$

Jediná vec, ktorá ostala nedoriešená, je konštanta K . Znovu sa pozrieme, kde daná konštanta vystupovala. Vystupovala v rozložení tlaku v kvapaline:

$$p(z) = (K - \rho g) z + p_0$$

Predstavme si, že by koeficient pri z nebol nulový. To ale znamená, že v takej nekonečne vysokej rúre by po chvíli tlak začal narastať nad všetky medze a niekde by musel byť aj záporný. To tiež neznie bohvieako realisticky, preto požadujeme:

$$p(z) = p_0 = p_0 \implies K = \rho g$$

Dostávame výsledný tvar rýchlostného profilu:

$$v(r) = \frac{\rho g}{4\eta} (r^2 - R^2) \quad (4.78)$$

Tento výsledok očividne sedí s našou intuitívnou predstavou, ako také jednoduché laminárne tečenie v rúre môže vyzerieť. Jednak vidíme, že pre vnútro rúry dostávame zápornú zložku rýchlosti, čo je v poriadku, pretože kvapalina tečie smerom dole (v zápornom smere osi z). Zároveň dostávame parabolický profil tohto tečenia, čo sa určite ako klebeta spomínalo už všelikde, no názorný náhľad dáva tento jednoduchý príklad. Samozrejme, veľké zanedbanie prišlo už na začiatku, kedy sme predpokladali len zvislú zložku rýchlostného poľa. Také jednoduché to vo všeobecnosti nie je.

¹⁰Dôkaz bude na Teorii elektromagnetického poľa

Maximálnu rýchlosť dostávame po dosadení $r = 0$:

$$v_{max} = \frac{\rho g R^2}{4\eta} \quad (4.79)$$

Celkový prietok daným miestom (metre kubické za jednotku času) spočítame nasledovným integrálom:

$$J = \iint_{r < R} |v| dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr \frac{\rho g}{4\eta} (R^2 - r^2) = -\frac{\pi \rho g}{\eta} \int_{R^2}^0 u du = \frac{\pi \rho g R^4}{2\eta} \quad (4.80)$$

Pokusne by sme mohli vyhľadať nejaké hodnoty dynamických viskozít η pre rôzne kvapaliny a skúšať rôzne polomery, napríklad:

$$\begin{array}{ll} v_{max} \approx 10^1 m \cdot s^{-1} & \text{voda v slamke} \\ v_{max} \approx 10^{-2} m \cdot s^{-1} & \text{olej v slamke} \\ v_{max} \approx 10^{-3} m \cdot s^{-1} & \text{med v slamke} \\ v_{max} \approx 10^5 m \cdot s^{-1} & \text{voda v odpadovej rúre} \end{array} \quad (4.81)$$

Ako slamku sme brali rúrku s priemerom $6mm$, odpadová rúra má priemer $15cm$.

Oba výsledky pre vodu vyzerajú podozrivo (prvý prinaajmenšom podozrivo, druhý priam smiešne), pre vodu v odpadovej rúre sme dostali rýchlosť takmer $100\,000\ km/h$. Problém je v našom prístupe k príkladu. Už na začiatku sme predpokladali laminárne prúdenie, ktoré zabezpečuje pekný stacionárny profil prúdenia vody v rúre. Do hry však vstupuje oveľa smutnejšia skutočnosť a to turbulencia, ktorá je v Navier-Stokesových rovniciach ticho skrytá. Jedna značne zložitá oblasť v matematike sa snaží k tomuto problému pristupovať pomocou perturbácií - na začiatku zavedieme do toku kvapaliny malú poruchu (ktorá tam aj reálne takmer vždy je) a sledujeme, ako sa porucha vyvíja priestorovo a s časom. Pri vode, ktorá má veľmi malý koeficient dynamickej viskozity a pri laminárnom (to je ten pekný, usporiadaný) toku očakávame nereálny prietok $2000\ km/h$, dostaneme veľmi veľké Reynoldsovo číslo, ktoré vypovedá o dominancii zotrvačných síl nad viskóznymi silami, teda očakávame veľmi silnú turbulenciu. V praxi to znamená, že ak do kvapaliny zavedieme malú poruchu, táto sa skôr či neskôr rozvinie do šialeného toku, ktorý, okrem iného, celkový prietok kvapaliny potrubím, značne brzdi. Čo ale značí to, že napriek týmto jednak myšlienkam a jednak experimentom, ktoré potvrdzujú, že voda v potrubí málokedy prúdi rýchlosťou $100\,000\ km/h$, sme dané riešenie dostali z Navier-Stokesovej rovnice? Nič, okrem toho, že za istých zidealizovaných podmienok (dokonale čistá voda bez odpadu, dokonale rovné a hladké potrubie, aby sa nemali o čo čiastočky vody zachytiť, dokonalý zdroj, ktorý bude zhora vodu hnať v presnom valci s presným rýchlostným profilom) je teoreticky možné dosiahnuť laminárne prúdenie, ktoré bude mať peak velocity $100\,000\ km/h$. Znie to asi rovnako pravdepodobne, ako to, že sa guľa udrží na hrote pera, napriek tomu, že podľa newtonovej rovnice existuje poloha, v ktorej je výslednica síl na ňu pôsobiaca nulová.

Na druhej strane, rýchlosť medu v slamke je dosť pomalá. Ako by sa dala zvýšiť? Mohli by sme skúsiť pustiť stredom slámky prúd medu s polomerom R_1 v okolí ktorého by tiekla voda. Tentoraz vstupom a výstupom budú dva rýchlostné profily, $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$. Každý z nich bude musieť spĺňať vlastnú Navier-Stokesovu rovnicu a navyše budú musieť spĺňať okrajové podmienky jednak na rozhraní med-voda a aj na rozhraní voda-potrubie.

Použijeme rovnaký ansatz pre každú rovnicu a dostaneme dve sady rovníc, ktorých úpravy sú vzhľadom na predchádzajúcu časť zjavné (pretože sú analogické):

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial p_1}{\partial y} = 0 \implies p_1(x, y, z) = p_1(z)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial p_1(z)}{\partial z} + \eta_1 \Delta v_1(x, y) - g = 0 \\
& \frac{\partial p_1(z)}{\partial z} + \rho_1 g = \eta_1 \Delta v_1(x, y) \\
& F_1(z) = G_1(x, y) \implies \frac{\partial p_1(z)}{\partial z} + \rho_1 g = K_1 = \eta_1 \Delta v_1(x, y) \\
& \frac{\partial p_2}{\partial x} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial p_2}{\partial y} = 0 \implies p_2(x, y, z) = p_2(z) \\
& -\frac{\partial p_2(z)}{\partial z} + \eta_2 \Delta v_2(x, y) - g = 0 \\
& \frac{\partial p_2(z)}{\partial z} + \rho_2 g = \eta_2 \Delta v_2(x, y) \\
& F_2(z) = G_2(x, y) \implies \frac{\partial p_2(z)}{\partial z} + \rho_2 g = K_2 = \eta_2 \Delta v_2(x, y)
\end{aligned}$$

Každá z rovníc vedie k nasledujúcim výsledkom:

$$\begin{aligned}
p_1(z) &= p_{10} + (K_1 - \rho_1 g) z \\
p_2(z) &= p_{20} + (K_2 - \rho_2 g) z \\
v_1(r) &= \frac{K_1}{4\eta_1} r^2 + C_{11} \ln(r) + C_{12} \\
v_2(r) &= \frac{K_2}{4\eta_1} r^2 + C_{21} \ln(r) + C_{22}
\end{aligned}$$

++

Pre konštantu C_{11} platí rovnaký argument ako v predošlom prípade - tok v_1 sa koná vo vnútornej časti trubice (okolo stredu), teda aby rýchlosť nedivergovala, $C_{11} = 0$. Ďalej musí platiť:

$$v_1(R_1) = v_2(R_1) \implies \frac{K_1}{4\eta_1} R_1^2 + C_{12} = \frac{K_2}{4\eta_2} R_1^2 + C_{21} \ln(R_1) + C_{22}$$

t.j. spojitost' rýchlostného poľa na rozhraní med-voda a ďalej:

$$v_2(R) = 0 \implies \frac{K_2}{4\eta_2} R^2 + C_{21} \ln(R) + C_{22} = 0$$

Toto je očividný a dosť nepríjemný problém. Pre tri neznáme konštanty C máme len dve rovnice, ktoré sa ich pokúšajú určiť, čo znie tak trochu ako problém. Poďme sa pozrieť na to, ako vyzerá rozloženie síl viskozity v kvapaline. Je zjavné, že pri toku, ktorý sme jej ansatzom nanútili, sa sily rozložia v smere toku kvapaliny, resp. proti nemu tak, že ak si vezmeme jedno infinitezimálne medzivalcie, teda kúsok kvapaliny uzavretý medzi r a $r + dr$, vieme nahliadnuť, že z vonkajšej strany na neho pôsobí iný takýto kúsok a rovnako tak aj z vnútornej strany. To ako presne naň pôsobia vlastne určuje podrobnejšie rýchlostný profil. Je intuitívne jasné, že aj sila musí byť v kvapaline spojitá, a teda aj tenzor napätia by mal byť spojitý (ak by na naše medzivalcie pôsobila z jednej strany sila značne iná, ako na druhej strane, bolo by to zvláštne a trochu by to odporovalo tomu, aby bolo rýchlostné pole spojité). To vieme zaručiť dodatočnou okrajovou podmienkou:

$$\eta_1 \frac{\partial v_1(r)}{\partial r} \Big|_{r=R_1} = \eta_2 \frac{\partial v_2(r)}{\partial r} \Big|_{r=R_1}$$

A teda dostávame sústavu rovníc:

$$\begin{aligned}\frac{K_1}{4\eta_1}R_1^2 + C_{12} &= \frac{K_2}{4\eta_2}R_1^2 + C_{21}\ln(R_1) + C_{22} \\ \frac{K_2}{4\eta_2}R^2 + C_{21}\ln(R) + C_{22} &= 0 \\ \frac{1}{2}K_1R_1 &= \frac{1}{2}K_2R_1 + \eta_2C_{21}\frac{1}{R_1}\end{aligned}$$

Z tejto vyjadríme konštanty C_{12} , C_{21} a C_{22} :

$$\begin{aligned}C_{21} &= \frac{R_1^2}{2\eta_2}(K_1 - K_2) \\ C_{22} &= -\frac{K_2}{4\eta_2}R^2 - \frac{R_1^2}{2\eta_2}(K_1 - K_2)\ln(R) \\ C_{12} &= \frac{R_1^2}{4}\left(\frac{K_2}{\eta_2} - \frac{K_1}{\eta_1}\right) - \frac{K_2}{4\eta_2}R^2 + \frac{R_1^2}{2\eta_2}(K_1 - K_2)\ln\left(\frac{R_1}{R}\right)\end{aligned}$$

Analogicky ku postupu predtým určíme konštanty K_1 a K_2 :

$$\begin{aligned}K_1 &= \rho_1 g \\ K_2 &= \rho_2 g\end{aligned}$$

Výsledný profil rýchlosti medu bude:

$$v_1(r) = \frac{\rho_1 g}{4\eta_1}(r^2 - R_1^2) - \frac{\rho_2 g}{4\eta_2}(R^2 - R_1^2) + \frac{R_1^2 g}{2\eta_2}(\rho_1 - \rho_2)\ln\left(\frac{R_1}{R}\right) \quad (4.82)$$

Určíme jeho prietok:

$$J = \iint_{r < R} |v| dS = \frac{\pi \rho_1 g R_1^4}{2\eta_1} - \frac{\pi \rho_2 g R_1^2}{4\eta_2}(R^2 - R_1^2) + \frac{\pi R_1^4 g}{2\eta_2}(\rho_1 - \rho_2)\ln\left(\frac{R_1}{R}\right)$$

Zmaximalizovať prietok možno posúvaním R_1 - ak bude R_1 dostatočne blízko stredu, bude prúžok medu dosť rýchly, no veľa nepotečie, pretože jeho rozmer bude malý. Ak budeme posúvať R_1 ku R , prúžok medu bude širší, no bude pomalší. Preto deriváciou J podľa R_1 získame funkciu, ktorej nulové body budú určovať extrémny prietoku medu:

$$\frac{\partial J}{\partial R_1} = \pi g R_1^3 \left(\frac{2\rho_1}{\eta_1} + \frac{\rho_2}{2\eta_2} \right) - \frac{\pi \rho_2 g R_1}{2\eta_2}(R^2 - R_1^2) + \frac{2\pi g R_1^3}{\eta_2}(\rho_1 - \rho_2)\ln\left(\frac{R_1}{R}\right) + \frac{\pi R_1^3 g}{2\eta_2}(\rho_1 - \rho_2) \quad (4.83)$$

Rovnica $\frac{\partial J}{\partial R_1} = 0$ nie je riešiteľná analyticky explicitne, no je možné si dať vykresliť tento prietok pre konkrétne hodnoty g , ρ_1 , η_1 , ρ_2 , η_2 a R , ktoré sme už používali. Graf nie je nijako zaujímavý, jeden koreň sa nachádza v $R_1 = 0$, i keď no funkcia v tomto bode nie je spojitá, no dá sa spojiť dodefinovať. Podľa grafu by sme však odhadli, že sa jedná len o inflexný bod (navyše vieme, že pre $R_1 = 0$ je prietok medu identicky nulový). Jediný kladný reálny koreň je v tomto prípade približne $1.25 \cdot 10^{-3} m$ a to je práve hodnota medzi 0 a polomerom celej slamky.

$$R_1 \approx 1.25 \text{ mm} \quad \text{Ideálny vnútorný polomer stĺpčeku medu pre maximalizáciu jeho prietoku} \quad (4.84)$$

Nestacionárne tečenie v potrubí**

V predošlom príklade sme v istom bode došli ku rovnici:

$$-\frac{\partial p(z)}{\partial z} + \eta \Delta v(x, y) - \rho g = 0 \quad (4.85)$$

Uvažujme teraz, že prúdenie nebude stacionárne, ale bude závisieť aj od času. Rovnica prejde na tvar:

$$\frac{\partial v(x, y, t)}{\partial t} = -\frac{\partial p(z, t)}{\partial z} + \eta \Delta v(x, y, t) - \rho g \quad (4.86)$$

Hneď vidíme, že tak ako aj v predošlom prípade, p môže byť nanajvýš lineárnou funkciou z :

$$\frac{\partial v(x, y, t)}{\partial t} - \eta \Delta v(x, y, t) + \rho g = -\frac{\partial p(z, t)}{\partial z} \implies p(z, t) = a(t)z + b(t) \quad (4.87)$$

S odvolávkou na predošlý príklad znovu položíme $a(t)$ rovné nule¹¹ a dostávame:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \eta \Delta v = -\rho g \quad (4.90)$$

Jedná sa o nehomogénnu rovnicu difúzie pre veličinu $v(x, y, t)$ s konštantnou pravou stranou. Znovu prejdeme do polárnej sústavy:

$$v(x, y, t) \rightarrow (r, \varphi, t) \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (4.91)$$

Rovnica difúzie na svoje úspešné vyriešenie konzumuje nasledovné okrajové a počiatočné podmienky:

$$\begin{aligned} v(R, \varphi, t) &= V_o(\varphi, t) \equiv 0 \\ v(r, \varphi, 0) &= v_0(r, \varphi) \end{aligned} \quad (4.92)$$

kde na okraji sme identicky zadali nulový tok, keďže tak diktuje podmienka nulového sklzu viskózne kvapaliny na pevnej hranici.

Máme teda parciálnu diferenciálnu rovnicu¹², spolu s okrajovou a počiatočnou podmienkou:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - \eta \Delta v &= -\rho g & v(R, \varphi, t) &= 0 \\ v(r, \varphi, 0) &= v_0(r, \varphi) \end{aligned} \quad (4.93)$$

Toto je lineárna diferenciálna rovnica a dá sa dokázať existencia a jednoznačnosť jej riešenia, čo sa nám hodí, pretože to riešenie v skutočnosti (rafinovane) uhádneme. V skutočnosti sa jedná o nehomogénnu rovnicu difúzie, respektíve rovnicu vedenia tepla, kde nehomogenitu spôsobuje nenulová pravá strana. Pozitívum je, že jej nehomogenita je najnevinnejšia aká len môže byť a to konštantná.

¹¹Stačí si rozmyslieť niečo takéto:

$$a(t) \neq 0 \Leftrightarrow \forall a(t) \forall P_0 > 0 \exists z, t_0: a(t_0)z + b(t) > P_0 \quad - \quad \text{neohraničenosť tlaku} \quad (4.88)$$

Popríklad nasledovné:

$$a(t) \neq 0 \Leftrightarrow \forall a(t) \neq 0 \exists z, t_0: a(t_0)z + b(t) < 0 \quad - \quad \text{nutná zápornosť tlaku niekde pozdĺž potrubia} \quad (4.89)$$

¹²Druhého rádu v priestorovej časti a prvého rádu v časovej. Potrebujeme teda jednu okrajovú podmienku a jednu počiatočnú podmienku.

Riešenie hľadáme v tvare:

$$v(r, \varphi, t) = \sum_{n,k} T_{nk}(t) \Psi_{nk}(r, \varphi) \quad (4.94)$$

kde T_{nk} je nejaká časová zložka, ktorej tvar zistíme v priebehu riešenia a $\Psi_{nk}(r, \varphi)$ je n, k -ta¹³ vlastná funkcia Laplaciánu v kruhu s polomerom R , ktorej prislúchajúca vlastná hodnota je $-\lambda_{nk}$. Motiváciu k tomuto kroku uvidíme o pár riadkov nižšie. Predpokladáme, že aj pravá strana je vo všeobecnosti funkciou času a polohy, teda vo všeobecnosti platí:

$$-\rho g = \sum_{n,k} F_{nk}(t) \Psi_{nk}(r, \varphi) \quad (4.95)$$

To je možné len ak $\Psi_{nk}(r, \varphi)$ tvoria úplný ortogonálny systém funkcií na intervale $\langle 0, R \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle$. Potom takýto rozklad existuje a koeficienty rozkladu, $F_{nk}(t)$ budú dané vzťahom:

$$F_{nk}(t) = A_{nk}^2 \iint_{r \leq R} r (-\rho g) \Psi_{nk}(r, \varphi) dr d\varphi, \quad A_{nk} \equiv \left[\iint_{r \leq R} r |\Psi_{nk}(r, \varphi)|^2 dr d\varphi \right]^{-1/2} \quad (4.96)$$

Toto je všeobecný vzťah pre akýkoľvek systém ortogonálnych funkcií. Integrál obsahujúci ρg predstavuje samotný rozklad do vlastných funkcií, konštanta A_{nk} zabezpečuje normalizáciu¹⁴. Podintegrálny člen r prichádza z Jakobianu $dS = r dr d\varphi$. Vidíme, že funkcie $F_{nk}(t)$ sú vďaka konštantnosti pravej strany tiež len konštanty F_{nk} . Samotná okrajová podmienka má tiež svoj rozklad:

$$v_0(r, \varphi) = \sum_{n,k} C_{nk} \Psi_{nk}(r, \varphi) \quad (4.97)$$

$$C_{nk} = A_{nk}^2 \iint_{r \leq R} r v_0(r, \varphi) \Psi_{nk}(r, \varphi) dr d\varphi \quad (4.98)$$

Dosaďme teraz (4.94) a (4.95) do (4.93):

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - \eta \Delta v &= -\rho g \\ \sum_{n,k} \dot{T}_{nk} \Psi_{nk} - \eta \sum_{n,k} T_{nk} \Delta \Psi_{nk} &= \sum_{n,k} F_{nk} \Psi_{nk} \end{aligned}$$

V tomto kroku by nám veľmi vyhovovalo, aby sme všetky výrazy mohli obriaďiť jednou sumou, v ktorej by sa navyše dala odseparovať časová závislosť. To však môžeme, pretože sme sa dohodli, že Ψ_{nk} sú vlastné funkcie Laplaciánu s vlastnými hodnotami $-\lambda_{nk}$. Platí teda:

$$\Delta \Psi_{nk} = -\lambda_{nk} \Psi_{nk} \quad ^{15} \quad (4.99)$$

Vieme teda odseparovať časovú závislosť:

$$\sum_{n,k} \left(\dot{T}_{nk}(t) + \eta \lambda_{nk} T_{nk}(t) - F_{nk} \right) \Psi_{nk} = 0 \quad (4.100)$$

¹³To, že na výsledný rad treba 2 indexy, nahliadneme v priebehu riešenia. Počet indexov priamo súvisí s rozmerom oblasti, na ktorej rovnicu riešime.

¹⁴Ak by systém bol ortonormálny a nielen ortogonálny, konštanty A_{nk} by sme nemuseli písať, pretože integrál, ktorým ich počítame by bol identicky rovný jednej.

¹⁵Bez sumačnej konvencie.

Znovu prekvapivo využijeme ortogonalitu systému funkcií Ψ_{nk} , z ktorej vyplýva, že táto rovnosť môže byť splnená jedine ak:

$$\begin{aligned}\forall n, k : \dot{T}_{nk}(t) + \eta\lambda_{nk}T_{nk}(t) - F_{nk} &= 0 \\ \dot{T}_{nk}(t) + \eta\lambda_{nk}T_{nk}(t) &= F_{nk}\end{aligned}\quad (4.101)$$

Rovnica (4.101) je obyčajná lineárna diferenciálna rovnica, pre ktorú máme dokonca aj počiatočnú podmienku. Vskutku, z (4.94) a (4.97) vyplýva, že:

$$T_{nk}(0) = C_{nk} \quad (4.102)$$

Navyše vieme, že F_{nk} sú konštanty (pretože pravá strana je konštantná v čase). Rovnicu (4.101) s počiatočnou podmienkou (4.102) tak môžeme riešiť aj s tým, čo už vieme:

$$\begin{aligned}\dot{T}_{nk}(t) + \eta\lambda_{nk}T_{nk}(t) &= F_{nk} \Big/ \cdot e^{\eta\lambda_{nk}t}, \quad t \rightarrow \tau \\ \underbrace{\dot{T}_{nk}(\tau)e^{\eta\lambda_{nk}\tau} + \eta\lambda_{nk}T_{nk}(\tau)e^{\eta\lambda_{nk}\tau}}_{= \frac{d}{d\tau}(T_{nk}(\tau)e^{\eta\lambda_{nk}\tau})} &= F_{nk}e^{\eta\lambda_{nk}\tau} \Big/ \int_0^t d\tau \\ T_{nk}(t)e^{\eta\lambda_{nk}t} - \underbrace{T_{nk}(0)}_{=C_{nk}} &= \frac{1}{\eta\lambda_{nk}}F_{nk}(e^{\eta\lambda_{nk}t} - 1) \\ T_{nk}(t) &= \frac{F_{nk}}{\eta\lambda_{nk}} + \left(C_{nk} - \frac{F_{nk}}{\eta\lambda_{nk}}\right)e^{-\eta\lambda_{nk}t}\end{aligned}\quad (4.103)$$

Aby sme dokončili riešenie, musíme poznať vlastné funkcie Laplaciánu v kruhu. Menovite pre vlastnú funkciu Ψ musí platiť:

$$\Delta \Psi(r, \varphi) = -\lambda \Psi(r, \varphi), \quad \Psi(R, \varphi) \equiv 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}_0^+ \quad (4.104)$$

Nulovosť na okraji je všeobecná vlastnosť vlastných funkcií akéhokoľvek lineárneho operátora, táto podmienka navyše výrazne zjednodušuje riešenie (4.94). Pre takto definovaný problém sa dá dokázať, že samotné vlastné hodnoty $-\lambda$ prislúchajúce jednotlivým vlastným funkciám sú nekladné, preto $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$. Použijeme klasickú separáciu premenných:

$$\Psi(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi), \quad R' \equiv \frac{dR}{dr}, \quad \Phi' \equiv \frac{d\Phi}{d\varphi} \quad (4.105)$$

Tento tvar dosadíme do (4.104) a využijeme (4.91):

$$\begin{aligned}R''\Phi + \frac{1}{r}R'\Phi + \frac{1}{r^2}R\Phi'' &= -\lambda R\Phi \Big/ \frac{r^2}{\Phi} \\ r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} + \frac{\Phi''}{\Phi} &= -\lambda r^2 \Big/ -\frac{\Phi''}{\Phi} + \lambda r^2 \\ r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} + \lambda r^2 &= -\frac{\Phi''}{\Phi}\end{aligned}\quad (4.106)$$

Ľavá strana poslednej rovnice závisí len od r , pravá strana len od φ . Z toho usudzujeme, že obe musia byť rovné nejakej konštante, menovite $k > 0$ ¹⁶.

¹⁶Schválne danú konštantu nútime do toho, aby bola nezáporná. Dôvodom je periodicitu $\Psi(r, \varphi)$ v premennej φ , ktorá by inak nemala šancu na splnenie.

Separátne riešime konštantnosť oboch strán rovnice (4.106), najprv pre $\Phi(\varphi)$:

$$-\frac{\Phi''}{\Phi} = k \implies \Phi'' = k\Phi \implies \Phi(\varphi) = A \cos(\sqrt{k}\varphi) + B \sin(\sqrt{k}\varphi) \quad (4.107)$$

Po zohľadnení podmienky $\Psi(r, \varphi + 2\pi) = \Psi(r, \varphi)$ dostávame podmienku na k :

$$\sqrt{k} = n \in \mathbb{N} \implies k = n^2, \quad \Phi(\varphi) = A \cos(n\varphi) + B \sin(n\varphi) \quad (4.108)$$

Riešime rovnicu pre $R(r)$:

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + \lambda r^2 = n^2 \bigg/ R \quad (4.109)$$

$$r^2 R'' + r R' + \lambda r^2 R = n^2 R \bigg/ - n^2 R \quad (4.110)$$

$$r^2 R'' + r R' + (\lambda r^2 - n^2) R = 0 \quad (4.111)$$

Transformujeme premennú r nasledovne:

$$r = \frac{\xi}{\sqrt{\lambda}} \quad (4.112)$$

Rovnica (4.111) prejde na tvar:

$$\xi^2 \frac{d^2 R}{d\xi^2} + \xi \frac{dR}{d\xi} + (\xi^2 - n^2) R = 0 \quad (4.113)$$

Nejakým spôsobom v tejto rovnici spoznáme Besselovu diferenciálnu rovnicu, ktorej riešením je, ako inak, Besselova funkcia.

Rovnica (4.113) je obyčajná lineárna diferenciálna rovnica druhého rádu so singularitou v bode $\xi = 0$ ¹⁷. To, že je to rovnica druhého rádu znamená, že ako fundamentálny systém riešení poslúžia práve *dve* lineárne nezávislé funkcie. Fakt, že rovnica má singularitu v bode 0 zase spôsobí, že jedna z nich bude v danom bode neohraničená. Keby sme sa teda aj pokúšali nájsť obe funkcie pomocou Taylorovho rozvoja v okolí $\xi = 0$, nájdeme nanajvýš len jednu, pretože Taylorov rad neohraničenej funkcie v bode nespojitosti neexistuje.

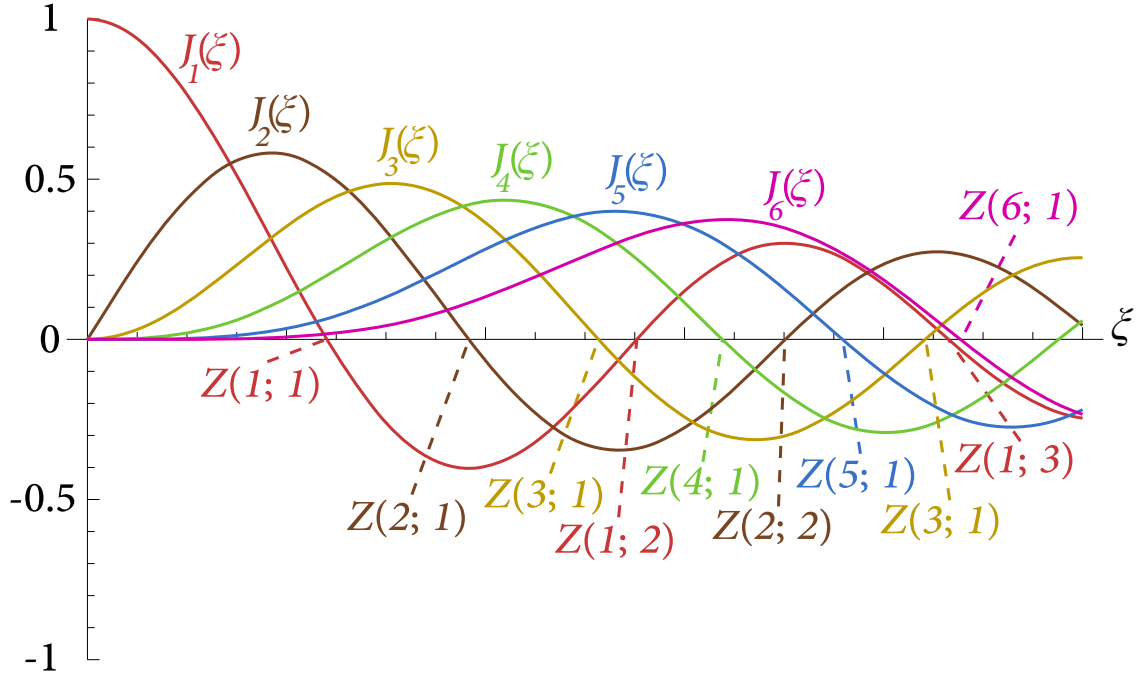
Dve riešenia tvoriace fundamentálny systém riešení teda budú Besselova funkcia prvého a druhého druhu, z ktorej prvá je ohraničená v okolí 0, druhá nie je. Keďže my hľadáme len fyzikálne riešenie (a neohraničený tok v 0 neznie fyzikálne), berieme len tú prvú, ktorá sa bežne označuje ako J_n :

$$R(\xi) = A J_n(\xi) \implies R_n(r) = A J_n(\sqrt{\lambda}r) \quad (4.114)$$

Každá z funkcií $J_n(x)$ má nekonečne mnoho koreňov. Ako $Z(n; j)$ označíme j -ty nenulový koreň n -tej Besselovej funkcie prvého druhu. Podmienka $\Psi(R, \varphi) = 0$ kladie teraz podmienku na λ :

$$0 = R_n(R) = A J_n(\sqrt{\lambda}R) \implies \sqrt{\lambda}R \stackrel{!}{=} Z(n; j) \implies \lambda_{nj} = \left(\frac{Z(n; j)}{R} \right)^2 \quad (4.115)$$

¹⁷To spoznáme napr. z toho, že nekonštantný koeficient pri najvyššej derivácii nadobúda hodnotu 0 pri $\xi = 0$, čo spôsobuje redukcii diferenciálneho rádu rovnice v danom bode. Takýto úkaz voláme singularita a vždy vedie aj na funkcie, ktoré nie sú ohraničené v danom singularnom bode.

Obrázok 4.7: Prvých 6 Besselových funkcií J a ich netriviálne korene.

Dostávame teda vlastné funkcie a vlastné hodnoty v tvare:

$$\Psi_{nk}(r, \varphi) = K_{nk}^1 J_n \left(\frac{Z(n; k)}{R} r \right) \cos(n\varphi) + K_{nk}^2 J_n \left(\frac{Z(n; k)}{R} r \right) \sin(n\varphi) \quad (4.116)$$

$$\lambda_{nk} = \left(\frac{Z(n; k)}{R} \right)^2 \quad (4.117)$$

Vrátime sa k nášmu riešeniu:

$$v(r, \varphi, t) = \sum_{n, k} T_{nk}(t) \Psi_{nk}(r, \varphi) \quad (4.118)$$

$$T_{nk}(t) = \frac{F_{nk}}{\eta \lambda_{nk}} + \left(C_{nk} - \frac{F_{nk}}{\eta \lambda_{nk}} \right) e^{-\eta \lambda_{nk} t} \quad (4.119)$$

$$F_{nk} = A_{nk}^2 \iint_{r \leq R} r (-\rho g) \Psi_{nk}(r, \varphi) dr d\varphi \quad (4.120)$$

$$C_{nk} = A_{nk}^2 \iint_{r \leq R} r v_0(r, \varphi) \Psi_{nk}(r, \varphi) dr d\varphi \quad (4.121)$$

$$A_{nk} \equiv \left[\iint_{r \leq R} r |\Psi_{nk}(r, \varphi)|^2 dr d\varphi \right]^{-1/2} \quad (4.122)$$

Aj keď by to bolo veľmi zaujímavé, nič nejdeme počítať, len si ukážeme zaujímavú vlastnosť týchto riešení. Dosadíme $T_{nk}(t)$ do všeobecného riešenia:

$$v(r, \varphi, t) = \underbrace{\sum_{n,k} \frac{F_{nk}}{\eta \lambda_{nk}} \Psi_{nk}(r, \varphi)}_{= v_{\infty}(r, \varphi)} + \sum_{n,k} \left(C_{nk} - \frac{F_{nk}}{\eta \lambda_{nk}} \right) e^{-\eta \lambda_{nk} t} \Psi_{nk}(r, \varphi) \quad (4.123)$$

Skúmame funkciu $v_{\infty}(r, \varphi)$:

$$v_{\infty}(r, \varphi) \equiv \sum_{n,k} \frac{F_{nk}}{\eta \lambda_{nk}} \Psi_{nk}(r, \varphi) \quad (4.124)$$

Budeme predpokladať, že funkcia v_{∞} je hladká (vo všetkých premenných) a rad z druhých derivácií podľa r a φ rovnomerne konverguje. Aplikujeme teda Laplaceov operátor na obe strany:

$$\Delta v_{\infty}(r, \varphi) = \sum_{n,k} \frac{F_{nk}}{\eta \lambda_{nk}} \Delta \Psi_{nk}(r, \varphi) \quad (4.125)$$

Nebudeme rozpisovať výrazy, miesto toho si uvedomíme, že $\Delta \Psi_{nk} = -\lambda_{nk} \Psi_{nk} \implies \Delta \Psi_{nk} / \lambda_{nk} = -\Psi_{nk}$:

$$\Delta v_{\infty}(r, \varphi) = -\frac{1}{\eta} \sum_{n,k} F_{nk} \Psi_{nk}(r, \varphi) = \frac{\rho g}{\eta} \quad (4.126)$$

Toto je však rovnica zhodná s rovnicou pre ustálené laminárne tečenie vo valci. Riešenie pre $v_{\infty}(r, \varphi)$ takisto splňa nulovosť na okraji, to ale znamená, že riešenie $v_{\infty}(r, \varphi)$ je zhodné s riešením, ktoré sme našli v (4.78). Sú zhodné vďaka vete o jednoznačnosti riešenia Poissonovej rovnice¹⁸.

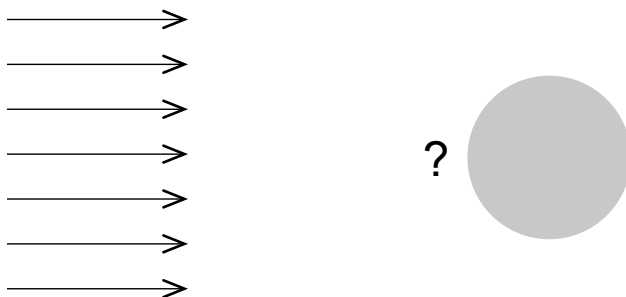
Ako už iste tušíte, druhý člen v (4.123) bude pre $t \rightarrow \infty$ nulový. Dá sa ukázať, že pre hladké počiatkové podmienky $v_0(r, \varphi)$ platí, že druhý člen v (4.123) je rovnomerne konvergentný rad na $t \in (\varepsilon, \infty)$, $\varepsilon > 0$, teda možno zameniť poradie limity a sumy a dostaneme želaný výsledok:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(r, \varphi, t) = v_{\infty}(r, \varphi) = \frac{\rho g}{4\eta} (r^2 - R^2) \quad (4.127)$$

¹⁸V tomto prípade pravá strana rovnice je rovnaká a aj okrajové podmienky sú rovnaké, teda podľa vety o jednoznačnosti riešenia aj riešenie je len jedno - to, ktoré sme už našli predtým.

Potenciálové obtekanie nekonečného zvislého valca**

Potenciálové tečenie je stacionárne nevírové tečenie nestlačiteľnej neviskózne kvapaliny. Táto bude obtekať okolo nekonečného valca polomeru R položeného do cesty toku tak, aby jeho os symetrie bola kolmá na $\vec{v}$. Obrázok:



Obrázok 4.8: Aké bude stacionárne nevírové tečenie nestlačiteľnej neviskózne kvapaliny okolo nekonečného valca?

Pri riešení využijeme dvojrozmernosť toku a jeho nevírovosť:

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{0} \implies \exists U(x, y) ; \quad \vec{\nabla} U = \vec{v}$$

teda existencia skalárneho potenciálu toku kvapaliny.

Z rovnice kontinuity máme pre nestlačiteľnú kvapalinu podmienku:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \implies \Delta U = 0$$

čo je Laplaceova rovnica.

Na to, aby bolo jej riešenie jednoznačné, potrebujeme okrajovú podmienku. Jedna z podmienok je, že tečenie v nekonečne je len v smere zľava doprava, teda pre polohy ďaleko od valca platí:

$$\vec{v} = v_0 \vec{e}_1$$

Jedná sa o neviskóznú kvapalinu, teda pri valci nebude tok nulový, ale stále platí, že musí byť rovnobežný s povrchom valca, teda jeho kolmá zložka musí byť nulová:

$$x^2 + y^2 = R^2 \implies \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

Bolo by výhodné prejsť k polárnym súradniciam (čisto formálne do cylindrických, no zložka z odvodíť vypadne). Laplace v týchto súradniciach má tvar:

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Okrajové podmienky pre $\vec{v}$ sme vyriešili, teraz ich treba pretaviť do funkcie U . Jej tvar ďaleko od valca musí byť:

$$U = v_0 x + \text{konšt.} = v_0 r \cos(\varphi) + \text{konšt.}$$

Druhá okrajová podmienka je trochu zložitejšia. Napíšme si, čo je vlastne gradient v polárnych súradniciach:

$$\vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

Má platiť:

$$r = R \implies (\vec{\nabla} U) \cdot \vec{n} = 0$$

Lenže $\vec{n}$ je práve jednotkový vektor v smere kolmom na povrch valca. No to je práve vektor $\vec{e}_r$ v polárnych súradniciach (ak os valca je v nule), preto môžeme písať:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=R} = 0$$

Nájďme teda riešenie Laplaceovej rovnice s takýmito okrajovými podmienkami:

$$\Delta U(r, \varphi) = 0; \quad \left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \quad \wedge \quad U = v_0 r \cos(\varphi) + \text{konšt.}; \quad \frac{r}{R} \gg 1$$

Skúsenosť ukazuje, že Laplaceova rovnica sa dá separovať, ak U je v tvare súčinu zložky, ktorá závisí len od r a zložky, ktorá závisí len od φ :

$$U(r, \varphi) = R(r) \Phi(\varphi)$$

Kvôli šetreniu miesta nebudeme vypisovať ani derivácie (miesto nich dáme čiarku), ani argumenty - je jasné, že čiarka pri R je derivácia podľa r . Separujme teda Laplaceovu rovnicu:

$$\begin{aligned} \Delta U &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r R' \Phi) + \frac{1}{r^2} R \Phi'' &= 0 \\ R'' \Phi + \frac{1}{r} R' \Phi + \frac{1}{r^2} R \Phi'' &= 0 \quad \bigg/ \quad \frac{r^2}{R \Phi} \\ \frac{r^2 R''}{R} + \frac{r R'}{R} &= -\frac{\Phi''}{\Phi} \end{aligned}$$

Dostali sme separovanú rovnicu - obe strany závisia od inej premennej, čo ale nutne znamená, že obe strany sú konštanty - a to rovnaké. Označme ju K ¹⁹:

$$\frac{r^2 R''}{R} + \frac{r R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = K$$

Pre Φ tak dostávame:

$$-\frac{\Phi''}{\Phi} = K \implies \Phi(\varphi) = A \cos(\sqrt{K} \varphi) + B \sin(\sqrt{K} \varphi)$$

Úplne prirodzená požiadavka na funkciu Φ je, aby bola 2π -periodická. Ak by totiž nebola, funkcia R by mohla robiť hocičo, už nikdy by nezosišla funkciu U na rozhraní $\varphi = 0$ a $\varphi = 2\pi$ (čo je to isté) tak, aby bola spojitá. Dostávame teda podmienku na konštantu K :

$$\sqrt{K} = n \in \mathbb{N} \implies K_n = n^2$$

¹⁹Ak by sme ju označili opačným znamienkom, došli by sme ku riešeniam v podobe $\sinh$ a $\cosh$, ktoré ale pre φ časť riešenia nevyhovujú.

Pre R zložku sme dostali rovnicu:

$$\frac{r^2 R''}{R} + \frac{r R'}{R} = K_n$$

$$r^2 R'' + r R' - K_n R = 0$$

Toto je homogénna diferenciálna rovnica, ktorej riešenie hľadáme v tvare:

$$R(r) = r^\alpha$$

$$\alpha(\alpha - 1)r^\alpha + \alpha r^\alpha - K_n r^\alpha = 0$$

$$\alpha^2 = K_n \implies \alpha_n = \pm n$$

Výsledná funkcia U bude superpozícia všetkých prípustných funkcií s príslušnými koeficientami:

$$U(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{-n}) (A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi))$$

Pripomíname, že ak nájdeme akékoľvek riešenie, ktoré bude spĺňať okrajové podmienky, bude jediné vďaka vete o jednoznačnosti riešenia. Skúsme konečným počtom členov časti R splniť, aby $U(R, \varphi) = 0$ a zároveň, aby fungovala podmienka v nekonečne. To sa dá, ale len vtedy, ak zahodíme všetky časti r^n okrem tej, kde $n = 1$ - ak by sme to neurobili, riešenie v nekonečne by nebolo úmerné $r \cos(\varphi)$. Vidíme, že v riešení musí byť prítomný člen $v_0 r \cos(\varphi)$:

$$U(r, \varphi) = v_0 r \cos(\varphi) + \sum_{n=0}^{\infty} r^{-n} (A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi))$$

Podľa okrajovej podmienky pri valci máme:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \implies v_0 \cos(\varphi) - \sum_{n=1}^{\infty} n R^{-n+1} (A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)) =$$

$$v_0 \cos(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} n R^{-n+1} (A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi))$$

Z matematickej analýzy, konkrétne z časti o Fourierových radoch a o trigonometrickom polynóme vieme, že funkciu $\cos(\varphi)$ nemáme ako inak rozložiť do ostatných trigonometrických funkcií (t.j. do iných funkcií $\sin(n\varphi)$ a $\cos(n\varphi)$), ako len tak, že zoberieme práve $\cos(\varphi)$ ²⁰. Teda potom nutne $A_n = 0$ pre $n \neq 1$ a $B_n = 0$ a dostávame:

$$v_0 \cos(\varphi) = A_1 \cos(\varphi)$$

Zo všetkých zložiek nám ostali jediné dve - tá, ktorá je úmerná $r \cos(\varphi)$ a tá, ktorá je úmerná $\frac{1}{r} \cos(\varphi)$:

$$U(r, \varphi) = v_0 r \cos(\varphi) + A_1 \frac{1}{r} \cos(\varphi)$$

Vidíme, že okrajová podmienka v nekonečne je splnená - to sme od nej aj žiadali. Taktiež okrajová podmienka pri valci bude splnená, Ak:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=R} = v_0 \cos(\varphi) - A_1 \frac{1}{R^2} \cos(\varphi) = 0 \implies A_1 = R^2$$

²⁰Tento fakt v sebe obnáša ortogonalita a úplnosť systému trigonometrických funkcií na intervale $(0, 2\pi)$.

Dostali sme teda kompletne riešenie Laplaceovej rovnice s istotou, že je jediné:

$$U(r, \varphi) = v_0 \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos(\varphi)$$

Výsledok prepíšeme do kartézskej sústavy a vrátime sa k rýchlostnému poľu:

$$U(x, y) = v_0 \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos(\varphi) = v_0 \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \underbrace{r \cos(\varphi)}_{=x} = v_0 x \left(1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right)$$

$$v_x = v_0 \left(1 - \frac{R^2 (x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

$$v_y = -v_0 \frac{2R^2 xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Z Bernoulliho rovnice získame vyjadrenie pre tlak:

$$\frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 + p = \frac{1}{2} \rho v_0^2 + p_\infty \implies p = \frac{1}{2} \rho (v_0^2 - v^2) + p_\infty$$

V tejto rovnici sme si zvolili dva body - jeden niekde blízko valca, v tom bode je rýchlosť v a skúmaný tlak je p . V druhom bode, ďaleko od valca je rýchlosť toku smerom doprava stabilnou veľkosťou v_0 a tlak v nekonečne sme označili p_∞ .

Na vyjadrenie tlaku sa hodí polárna sústava. Vďaka kolmosti $\vec{e}_r$ a $\vec{e}_\varphi$ platí:

$$\begin{aligned} v^2 &= v_r^2 + v_\varphi^2 = U_r'^2 + \frac{1}{r^2} U_\varphi'^2 = v_0^2 \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right)^2 \cos^2(\varphi) + v_0^2 \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right)^2 \sin^2(\varphi) = \\ &= v_0^2 \left(1 + \frac{R^4}{r^4} \right) - v_0^2 \frac{2R^2}{r^2} (\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)) = v_0^2 \left(1 + \frac{R^4}{r^4} - \frac{2R^2}{r^2} \cos(2\varphi) \right) \end{aligned}$$

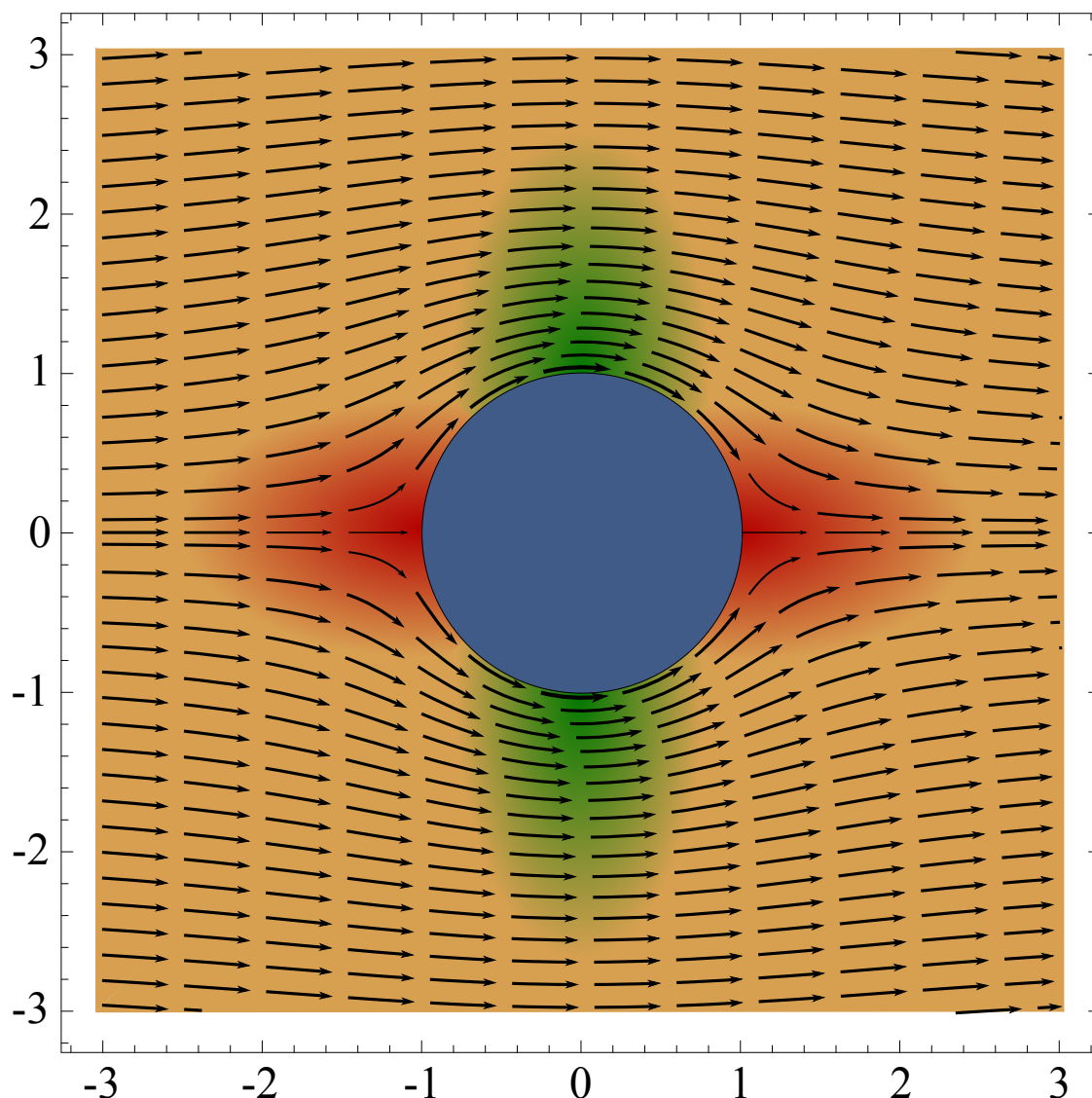
Teraz môžeme vyjadriť tlak v polárnej sústave:

$$p(r, \varphi) = \frac{1}{2} \rho v_0^2 \left(\frac{2R^2}{r^2} \cos(2\varphi) - \frac{R^4}{r^4} \right) + p_\infty$$

V kartézskej sústave bude mať trochu škaredší tvar:

$$p(x, y) = \frac{1}{2} \rho v_0^2 \frac{2R^2 (x^2 - y^2) - R^4}{(x^2 + y^2)^2} + p_\infty$$

Vidíme, že v okolí valca, teda $r \gtrsim R$ je najväčší tlak pri $\varphi = 0$ a $\varphi = \pi$, naopak, najmenší tlak nastáva pri $\varphi = \pi/2$ a $\varphi = 3\pi/2$.



Obrázok 4.9: Prúdnice spolu s vektorovým poľom stacionárneho nevírivého prúdenia nestlačiteľnej neviskózne kvapaliny okolo zvislého nekonečne dlhého valca, ktorý predstavuje tmavomodrý kruh. Naznačené je aj farebné pole tlaku, maximálny tlak predstavuje červená farba, minimálny modrá.

Z uvedeného príkladu by sa mohlo zdať, že téma obtekania objektov je vlastne jednoduchá a algoritmická - veď uznajte, jediné, čo sme potrebovali je riešenie Laplaceovej rovnice. Podobný postup by sa dal zopakovať pre rôzne objekty²¹, jediná problém by bol s nekonečným radom - všeobecným riešením Laplaceovej rovnice. Je treba zakaždým poskladať takú funkciu, ktorá spĺňa požadovaný tok ďaleko od objektu a zároveň spĺňa obtekanie okolo objektu rovnobežné s jeho hranicou, no to je už iný problém a čisto teoreticky sa to dá²².

Veľký problém však nastáva už v tom, že obtekanie okolo objektov vôbec nie je potenciálové²³. Pri reálnych tokoch pozorujeme za objektom turbulentné prúdenie a víry. Takéto riešenie by sme získali jedine numericky.

²¹Napríklad elipsy, štvorce, machulky, ...

²²Kde „čisto teoreticky“ znamená, že existuje veta o jednoznačnosti riešenia Laplaceovej rovnice pre mix Dirichletovej a Neumannovej okrajovej podmienky.

²³Pripomíname, že výraz „potenciálové“ vychádza z faktu: $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{0} \implies \vec{v} = \vec{\nabla} U$

4.3 Pružné kontinuum

Základná veličina, ktorá nám dávala predstavu o tom, čo robí kvapalina, bolo jej rýchlostné pole $\vec{v}$. V pružnom kontinuu bude jeho hlavný predstaviteľ pole posunutí, $\vec{u}$. Nepredstavujeme si, že by sa pružné kontinuum niekam ďaleko samo hýbalo, navyše si budeme predstavovať, že pri vystavení pružného kontinua nejakej sile, sú tieto posunutia $\vec{u}$ malé.

4.3.1 Tenzor deformácie

Pre takéto pole by bolo vhodné zaviesť kritérium, kedy sa dá povedať, že došlo k deformácii - je jasné, že ak zoberieme naše kontinuum a presunieme ho o 10m doľava, k žiadnej deformácii nedošlo. Takisto, ak ho otočíme hore nohami, tiež nedošlo k deformácii. Bolo by teda dobré si ujasniť, čo to je vlastne tá deformácia. To zatiaľ nevieme, tak si aspoň ujasníme, čo to deformácia *nie je*. Už sme zistili, že posunutia a otočenie nie je deformácia, teda deformácia nie je izometria. Izometria sú také transformácie, ktoré zachovávajú vzdialenosti. Črtá sa možnosť, ako spoznať, že sa dva body od seba oddialili. Ak vezmeme výraz $\partial_i u_j$, tento bude zjavne nulový pri všetkých posunutíach, no na rozťahovanie zareaguje nenulovosťou. Otázne je, či je možné takýto výraz oklamať otočením (t.j. že bude nulový pri otáčaní, čo je zlé). Preto skúsajme otočenie celého kontinua o uhol $\delta\varphi$ okolo osi určenej vektorom $\vec{n}$. Poloha ľubovoľného bodu sa tak zmení:

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \delta\varphi \vec{n} \times \vec{r}$$

Vypočítajme $\partial_i u_j$ pre takúto rotáciu:

$$u_i = \varepsilon \vec{n} \times \vec{r} \implies \partial_i u_j = \delta\varphi \varepsilon_{jkl} \partial_i n_k x_l = \delta\varphi \varepsilon_{jkl} n_k \delta_{il} = \delta\varphi \varepsilon_{ijk} n_k \neq 0$$

Bohužiaľ, zistili sme, že výraz $\partial_i u_j$ je nenulový aj pri rotácii, čo nie je vlastnosť, ktorá nám vyhovuje. Na druhej strane, dostali sme, že $\partial_i u_j$ pre rotáciu je antisymetrický výraz. Už máme skúsenosť, že kombinácia symetrického a antisymetrického výrazu je nulová. Preto ak by sme ako kritérium deformácie použili výraz:

$$\partial_i u_j + \partial_j u_i$$

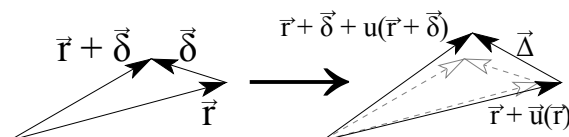
pre rotáciu o $\delta\varphi$ okolo $\vec{n}$ dostaneme 0:

$$\partial_i u_j + \partial_j u_i = \delta\varphi \overbrace{(\varepsilon_{ijk} + \varepsilon_{jik})}^{=0} n_k = 0$$

Dostali sme sa tak k výrazu, ktorý by mohol byť vhodným kritériom deformácie kontinua a nazveme ho tenzor deformácie:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad (4.128)$$

Jeho štatút dobrého kritéria deformácie ešte stojí na vratkých nohách - vieme, že je nulový pri akomkoľvek posunutí a akejkolvek rotácii, no nevieme, či náhodou nie je nulový aj pri nejakej skutočnej deformácii. Na to skúsajme kontinuum pred a po deformácii - majme dva body, bod $\vec{r}$ a druhý, ktorý je od neho vzdialený o $\vec{\delta}$, teda jeho poloha bude $\vec{r} + \vec{\delta}$. Po deformácii sa tieto dva body dostanú do novej polohy a ich vzájomná poloha bude $\vec{\Delta}$:



Obrázok 4.10: Stav dvoch bodov pred a po deformácii.

Pre $\vec{\Delta}$ platí:

$$\vec{\Delta} = \vec{r} + \vec{\delta} + \vec{u}(\vec{r} + \vec{\delta}) - (\vec{r} + \vec{u}(\vec{r}))$$

Vieme, že k deformácii dochádza *práve vtedy*, ak $|\vec{\Delta}| \neq |\vec{\delta}|$. Mali by sme preto vyjadriť $|\vec{\Delta}|$, no to je obtiažne, jednoduchšie bude vyjadriť Δ^2 :

$$\Delta^2 = \Delta_i \Delta_i = \left[\delta_i + u_i(\vec{r} + \vec{\delta}) - u_i(\vec{r}) \right] \left[\delta_i + u_i(\vec{r} + \vec{\delta}) - u_i(\vec{r}) \right]$$

Výraz $u_i(\vec{r} + \vec{\delta})$ rozložíme do Taylorovho radu do prvého rádu a budeme predpokladať, že $\vec{\delta}$ je *malé*:

$$u_i(\vec{r} + \vec{\delta}) = u_i(\vec{r}) + \delta_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$\Delta^2 = \left[\delta_i + \delta_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \left[\delta_i + \delta_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right]^{24}$$

Pri roznásobovaní tohto výrazu budeme navyše predpokladať, že výraz $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ je malý, teda súčin takýchto dvoch výrazov dá oproti zvyšku zanedbateľnú nulu:

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= \delta^2 + \delta_i \delta_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \delta_i \delta_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \underbrace{\delta_j \delta_k \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}}_{\text{malé}} = \delta^2 + \delta_i \delta_j \underbrace{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{=2\varepsilon_{ij}} \\ \Delta^2 &= \delta^2 + 2\delta_i \delta_j \varepsilon_{ij} \end{aligned}$$

Vidíme, že jednoznačne platí:

$$\Delta^2 \neq \delta^2 \Leftrightarrow \varepsilon_{ij} \neq 0$$

čo je presne to, čo má ε_{ij} spĺňať. Po ceste sme použili, že $\partial_i u_j$ je *malý* výraz. Ak k tomu navyše platí, že aj u_i je malý výraz, jedná sa o lineárnu pružnosť.

4.3.2 Hookov zákon

Vieme teda, čomu je rovný tenzor deformácie:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i)$$

Vo všeobecnej rovnici kontinua však vystupuje tenzor napätia, σ_{ij} . Ešte nevieme, ako spolu súvisia tenzor napätia a tenzor deformácie, no dá sa predpokladať nasledujúca závislosť:

$$\sigma_{ij}(\varepsilon_{kl}, \vec{r}, t)$$

My však vieme, že ε_{kl} je malý výraz (dôvodom je malosť výrazu $\partial_k u_l$), rozviňme teda σ_{ij} do Taylorovho radu v okolí $\varepsilon_{kl} = 0$:

$$\sigma_{ij}(\varepsilon_{kl}, \vec{r}, t) = \underbrace{\sigma_{ij}(0, \vec{r}, t)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}}_{=C_{ijkl}} \Big|_{\varepsilon=0} \varepsilon_{kl} + \mathbf{O}(|\varepsilon|^2)$$

²⁴ Aby nekolidovali indexy, v druhej zátvorke sme index j premenovali na k .

Výraz $\sigma_{ij}(0, \vec{r}, t)$ je nulový, pretože pri nulovom tenzore deformácie sa nekoná deformácia a teda aj plošné sily budú nulové. Druhý výraz je súčin $C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$, my už vieme, že C_{ijkl} nezávisí od ε_{kl} , pretože v derivácii sme zvolili $\varepsilon = 0$, teda C_{ijkl} závisí len od $\vec{r}$ a t . Zvyšok radu sme kvôli malosti (a linearite) ε zanedbali. Dostávame tak vzťah:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (4.129)$$

To, čo sme práve odvodili, sa nazýva Hookov zákon²⁵. Tento vzťah je *lineárny*, pretože zachováva lineárne kombinácie - sprostredkovateľom tejto závislosti je tenzor *štvrtého* rádu, C_{ijkl} , ktorý budeme nazývať tenzor elastických koeficientov²⁶. Napriek lineárnosti vzťahu medzi tenzorom napätia a tenzorom deformácie, je trochu desivé, že tenzor, ktorý tento vzťah sprostredkúva, teda tenzor elastických koeficientov, je tenzor štvrtého rádu, teda na kompletne určenie správania sa pružného kontinua s najvšeobecnejšou anizotropiou by malo byť potrebných 81 elastických koeficientov, čo je naozaj veľa. Ukážeme si, že vďaka symetriám tenzorov napätia a deformácie je možné tento počet značne zredukovať. Dve symetrie vidno priamo:

$$\left. \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial \varepsilon_{kl}} \right|_{\varepsilon=0} \implies C_{ijkl} = C_{jikl} \quad (4.130)$$

$$\left. \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{lk}} \right|_{\varepsilon=0} \implies C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad (4.131)$$

Tretia symetria je trochu skrytá a bez dôkazu²⁷ uvidíme, že:

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad (4.132)$$

Prvé dve symetrie (tiež volané vedľajšie symetrie) sú spôsobené symetriami tenzorov napätia a deformácie a redukujú počet neznámych koeficientov C_{ijkl} postupne z 81 na 54 a z 54 na 36. Tretia symetria (hlavná) je spôsobená istou záležitosťou, ktorú nebudeme hlbšie pitvať, no s radosťou konštatujeme, že táto symetria redukuje počet neznámych koeficientov z 36 na 21. Je tomu tak preto, lebo tenzor C_{ijkl} môžeme efektívne kvôli hlavnej symetrii písať ako C_{AB} , kde A a B beží od 1 do 9, pretože samotné tenzory napätia a deformácie sú matice 3x3. Ďalej tieto tenzory sú symetrické, teda A a B efektívne bežia od 1 do 6. Lenže $C_{AB} = C_{BA}$, teda táto akoby matica 6x6 je symetrická, čo z 36 nezávislých koeficientov necháva len 21 nezávislých koeficientov²⁸.

Zistili sme, že pre úplne najvšeobecnejšie anizotropné a nehomogénne prostredie treba 21 nezávislých koeficientov, ktoré sa menia v priestore (nehomogenita). To je ešte stále celkom dosť, ale čo čakať, reč je o najškaredšom možnom kontinuu. Namiesto plakania si uvedomíme, že svet sa miestami skladá aj z kusov toho najkrajšieho kontinua - izotropného a homogénneho, ktorý potrebuje len dve konštanty na kompletne určenie správania sa tohto kontinua, práve také kontinuum ideme skúmať.

²⁵Robert Hooke.

²⁶Čitateľ možno začína mať zmätok v tenzoroch. Hlavný tenzor, ktorý sa vyskytuje vo všeobecnej pohybovej rovnici kontinua sa nazýva *tenzor napätia* (stress tensor) a značí sa σ_{ij} . Špeciálne pre pružné kontinuum sme museli zaviesť ďalší tenzor, ktorý sa nazýva *tenzor deformácie* (strain tensor) a značíme ho ε_{ij} . Nakoniec tretí tenzor, *tenzor elastických koeficientov* (stiffness tensor) C_{ijkl} sprostredkúva lineárny vzťah medzi tenzorom napätia a tenzorom deformácie $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$.

²⁷Mimochodom, tento fakt sa nahliada z toho, že pre *funkciu hustoty energie napätia* U platí:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

z čoho však vyplýva:

$$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}$$

Dotyčná skrytá symetria tenzoru elastických koeficientov je teraz zjavná z rovnosti druhých zmiešaných derivácií pri zámene poradia derivovania (predpokladom je spojitost týchto druhých derivácií).

²⁸ $\sum_{i=1}^6 i = 21$

4.3.3 Hookov zákon pre homogénne a izotrópne kontinuum

Ak by tenzory napätia a deformácie neboli tenzory, ale len vektory, v izotropnom kontinuu by platilo $\sigma_i = C\delta_{ij}\varepsilon_j = C\varepsilon_i$, teda vektor ε by mieril v smere σ (v izotropnom kontinuu nemá dôvod uprednostniť niektorý smer, všetky sú rovnocenné a teda pri zadanom smere σ už len z tohto smeru a izotropie prostredia iný smer neposkladá, ako smer σ).

Pre vzťah medzi σ_{ij} a ε_{ij} bude platiť, že tenzor, ktorý ich sprostredkúva, je izotrópny - inak povedané, jeho komponenty sú rovnaké vo všetkých vzťažných systémoch, ktoré sú voči sebe len otočené. Vo všeobecnosti, pre dané $n \neq 1$ môže existovať niekoľko jedinečných tenzorov n -tého rádu, pre tenzory rádu 1 (t.j. vektory) takýto tenzor (vektor) neexistuje. Jedinečný tenzor druhého rádu, ktorý je izotrópny, je tenzor δ_{ij} , jedinečný izotrópny tenzor rádu tri je Levi-Civito symbol ε_{ijk} .

Existuje niekoľko (tri) jedinečných tenzorov rádu štyri, ktoré sú izotrópne, no nemusíme ich poznať, pretože platí jedna veľmi užitočná veta (bez mena): všeobecný izotrópny tenzor možno vyskladať jedine z Kroneckerových delt a Levi-Civitových symbolov. Izotrópny tenzor rádu štyri sa teda ale musí skladať jedine z Kroneckerových delt, pretože Levi-Civito symbol tam jednoducho nenatlačíme²⁹:

$$C_{ijkl} = a\delta_{ij}\delta_{kl} + b\delta_{ik}\delta_{jl} + c\delta_{il}\delta_{jk} \quad (4.133)$$

Vďaka (4.130), (4.131) a (4.132) máme:

$$\begin{aligned} C_{ijkl} = C_{jikl} &\implies a\delta_{ij}\delta_{kl} + b\delta_{ik}\delta_{jl} + c\delta_{il}\delta_{jk} = a\delta_{ji}\delta_{kl} + b\delta_{jk}\delta_{il} + c\delta_{jl}\delta_{ik} \implies b = c \\ C_{ijkl} = C_{ijlk} &\implies a\delta_{ij}\delta_{kl} + b\delta_{ik}\delta_{jl} + c\delta_{il}\delta_{jk} = a\delta_{ij}\delta_{lk} + b\delta_{il}\delta_{jk} + c\delta_{ik}\delta_{jl} \implies b = c \\ C_{ijkl} = C_{klij} &\implies a\delta_{ij}\delta_{kl} + b\delta_{ik}\delta_{jl} + c\delta_{il}\delta_{jk} = a\delta_{kl}\delta_{ij} + b\delta_{ki}\delta_{lj} + c\delta_{kj}\delta_{li} \implies \text{nič} \end{aligned}$$

Vidíme, že prvé dve symetrie priniesli novú informáciu, $b = c$, tretia symetria nepriniesla nič. Platí teda:

$$C_{ijkl} = a\delta_{ij}\delta_{kl} + b\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right)$$

Teda naozaj vidíme, že pre izotrópne a homogénne kontinuum stačia dve konštanty (pre nehomogénne dve funkcie), a a b , ktoré odteraz budeme značiť λ a μ a volať *Lamého elastické koeficienty*. Pre tenzor napätia teda platí:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} = \lambda\underbrace{\delta_{kl}\varepsilon_{kl}}_{=\varepsilon_{kk}} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right)\varepsilon_{kl} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + \mu\underbrace{(\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji})}_{=2\varepsilon_{ij}}$$

Vidíme, že sa nám vo vzťahu objavil výraz pre *stopu matice* ε_{ij} :

$$Tr\varepsilon = \delta_{kl}\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kk} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \equiv \vartheta \quad (4.134)$$

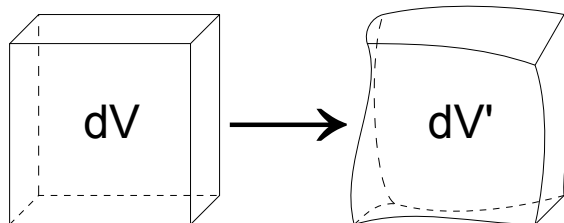
Túto konštantu ϑ budeme volať *objemová dilatácia*. Dostali sme Hookov zákon pre homogénne a izotrópne prostredie:

$$\sigma_{ij} = \lambda\vartheta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (4.135)$$

²⁹Niektor by sa mohol snažiť vyrábať kombinácie súčinnu Levi-Civitovho symbolu s Kroneckerovou deltou, no také čosi by vždy viedlo na nulový výraz a súčin dvoch Levi-Civitových symbolov je len niečo čo už máme zastúpené - napr. $\varepsilon_{ijm}\varepsilon_{klm}$ sa dá pomocou Davis-Cup identity vyjadriť pomocou Kroneckerových delt.

4.3.4 Objemová dilatácia

Majme nejaký objem dV , ktorý sa vplyvom deformácie zdeformuje na objem dV' :



Obrázok 4.11: Zmena objemu po deformácii.

Platí $dV = dx dy dz$. Vplyvom deformácie sa zmení súradnicový systém:

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{u}(\vec{r}) \quad (4.136)$$

$$x'_i = x_i + u_i(\vec{r}) \quad (4.137)$$

Vieme, že nový objem vypočítame ako:

$$dV' = |J| dV \quad (4.138)$$

kde J je jakobián transformácie:

$$J_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (4.139)$$

Vieme, že v determinante sa prvky matice medzi sebou všelijako násobia, my však vieme, že $\partial_i u_j$ je malé, z determinantu teda ostane:

$$|J| = 1 + \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 1 + \vartheta \quad (4.140)$$

Pre objemový element dV' tak platí:

$$dV' = |J| dV = (1 + \vartheta) dV \implies \vartheta = \frac{dV' - dV}{dV} \quad (4.141)$$

Výraz ϑ teda vyjadruje relatívnu zmenu objemového elementu pri deformácii, preto sa nazýva objemová dilatácia.

4.3.5 Homogénne a izotrópne pružné kontinuum, Lamého rovnica

Vychádzame zo všeobecnej pohybovej rovnice kontinua a vzťahmi, ktoré sme odvodili doteraz:

$$\rho a_i = \partial_j \sigma_{ij} + f_i \quad \sigma_{ij} = \lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad (4.142)$$

Vzhľadom na malosť u_i je člen a_i rovný druhej časovej derivácii poľa posunutí. Píšeme teda:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= \partial_j \left[\lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \delta_{ij} + \mu (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \right] + f_i = \lambda \partial_i (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \mu \left[\partial_i (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \Delta u_i \right] + f_i \\ \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \mu \Delta \vec{u} + \vec{f} \end{aligned} \quad (4.143)$$

Rovnica, ktorú sme práve odvodili, sa nazýva Lamého rovnica. Potešujúca správa je, že táto rovnica je *lineárna*.

4.4 Vlny v pružnom kontinuu a v kvapalinách

V tejto časti si veľmi stručne rozoberieme vlny v pružnom kontinuu a vlny v kvapaline. Nebudeme sa zaoberať detailami, ako rozdelenie vln na objemové a povrchové, poprípadne na ich ďalšie delenie, pretože to nie je cieľom tohto predmetu³⁰. Začneme jednoduchšími vlnami v pružnom kontinuu.

4.4.1 Vlny v izotropnom pružnom kontinuu

Tak, ako aj v predošlých častiach, nebudeme riešiť Lamého rovnicu (4.143) v jej plnej paráde (aj keď nás úprimne teší svojou linearitou), použijeme ansatz rovinnnej vlny. Zaujímá nás predsa, či sa v pružnom kontinuu môže šíriť rovinná, lineárne polarizovaná vlna a ak áno, za akých predpokladov. Tento ansatz dosadíme v nasledujúcom tvare:

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{u}_0 f(\vec{n} \cdot \vec{r}, t) ; \quad \vec{u}_0 - \text{konšt.}$$

Takýto ansatz nazývame rovinnou vlnou, pretože $\xi = \vec{n} \cdot \vec{r}$ určuje rovnicu roviny (teda $\vec{u}$ závisí od $\vec{r}$, ale len v nejakej špeciálnej kombinácii $\vec{n} \cdot \vec{r}$) a lineárne polarizovanou, pretože $\vec{u}_0$ je konštanta nemeniaca sa s časom ani v priestore. Dosadíme tento ansatz do (4.143) bez pôsobenia objemových síl:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \mu \Delta \vec{u} + \vec{0} \\ \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} &= \vec{u}_0 \ddot{f} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= \partial_i u_i = u_{0i} \partial_i f(\vec{n} \cdot \vec{r}, t) = u_{0i} \frac{\partial f(\xi, t)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_i} = u_{0i} f' n_i = \vec{u}_0 \cdot \vec{n} f' \\ \left[\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \right]_i &= \partial_i \vec{u}_0 \cdot \vec{n} f' = \vec{u}_0 \cdot \vec{n} n_i f'' \implies \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = \vec{u}_0 \cdot \vec{n} f'' \vec{n} \\ \Delta \vec{u} &= \vec{u}_0 f'' \underbrace{\vec{n}^2}_{=1} \\ \rho \ddot{f} \vec{u}_0 &= (\lambda + \mu) (\vec{u}_0 \cdot \vec{n}) f'' \vec{n} + \mu f'' \vec{u}_0 \\ \underbrace{(\rho \ddot{f} - \mu f'')}_{=Q_1} \vec{u}_0 - \underbrace{(\lambda + \mu) (\vec{u}_0 \cdot \vec{n}) f'' \vec{n}}_{=Q_2} &= 0 \end{aligned}$$

Dospeli sme k rovnici typu:

$$Q_1 \vec{u}_0 + Q_2 \vec{n} = 0$$

V závislosti na polohe $\vec{u}_0$ a $\vec{n}$ máme dve možnosti. Pokiaľ $\vec{u}_0 \parallel \vec{n}$, potom určite existuje číslo c také, že $\vec{u}_0 = c\vec{n}$. Ak $\vec{u}_0 \not\parallel \vec{n}$, potom $\vec{u}_0$ a $\vec{n}$ sú lineárne nezávislé, teda rovnica môže byť splnená iba ak $Q_1 = Q_2 = 0$.

³⁰Ďalší záujem treba smerovať na oblasť ako je fyzika Zeme, ku ktorej neodmysliteľne patria vlny v kontinuu, poprípade špeciálne štúdium mechaniky kontinua a hydrodynamiky.

1. $\vec{u}_0 \parallel \vec{n}$

Pre tento prípad platí $\vec{u}_0 = c\vec{n}$, teda môžeme písať:

$$\begin{aligned} (\rho\ddot{f} - \mu f'') c\vec{n} - (\lambda + \mu) c (\vec{n} \cdot \vec{n}) f'' \vec{n} &= 0 \\ \left[(\rho\ddot{f} - \mu f'') - (\lambda + \mu) f'' \right] \vec{n} &= 0 \\ Q\vec{n} &= 0 \end{aligned}$$

Pre nenulový vektor $\vec{k}$ je táto rovnica splnená iba ak $Q = 0$:

$$\begin{aligned} (\rho\ddot{f} - \mu f'') - (\lambda + \mu) f'' &= 0 \\ \ddot{f} - \frac{2\mu + \lambda}{\rho} f'' &= 0 \end{aligned}$$

Dostali sme vlnovú rovnicu pre funkciu f . Rýchlosť šírenia vln, keď $\vec{u}_0 \parallel \vec{n}$ je:

$$c_l = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho}} \quad \text{rýchlosť šírenia pozdĺžnych (longitudinálnych, p) vln}$$

 2. $\vec{u}_0 \nparallel \vec{n}$

Ak vektor $\vec{u}_0$ je lineárne nezávislý od $\vec{n}$, potom musí platiť:

$$\begin{aligned} \rho\ddot{f} - \mu f'' &= 0 \\ (\lambda + \mu) (\vec{u}_0 \cdot \vec{n}) f'' &= 0 \end{aligned} \tag{4.144}$$

Prvá rovnica je znovu vlnová rovnica pre funkciu f , tentoraz s rýchlosťou šírenia:

$$c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad \text{rýchlosť šírenia priečných (transverzálnych, s) vln}$$

Tieto vlny sme nazvali priečne, aj keď platí len $\vec{u}_0 \nparallel \vec{n}$, teda nie nutne $\vec{u}_0 \perp \vec{n}$ (vtedy by by malo zmysel volať tieto vlny *priečne*). Ukážeme, že nutne $\vec{u}_0 \perp \vec{n}$. Ak by platilo $\vec{u}_0 \nsubseteq \vec{n}$, z druhej rovnice (4.144) vyplýva:

$$(\lambda + \mu) (\vec{u}_0 \cdot \vec{n}) f'' = 0 \wedge \lambda > 0 \wedge \mu > 0 \wedge \vec{u}_0 \nsubseteq \vec{n} \implies f'' = 0 \implies f(\vec{n} \cdot \vec{r}, t) = a(t)\vec{n} \cdot \vec{r} + b(t) \tag{4.145}$$

No ak by sme mali takéto riešenie pre f , to by znamenalo, že pre nenulové $a(t)$ by $\vec{u}$ rástlo nad všetky medze - nebolo by už malé. Ak by platilo, že $a(t) = 0$, potom by $\vec{u}$ bola konštanta v priestore a nejaká funkcia v čase, čo však len znamená, že by sa celé kontinuum nejakým spôsobom posúvalo v čase, to ale nie sú vlny (kontinuum sa pri takomto pohybe nedeformuje). Z toho vyplýva, že nulovosť druhej rovnice (4.144) je nutné splniť tak, že $\vec{u}_0 \perp \vec{n}$.

Zistili sme teda dva druhy riešení - také, ktorých smer šírenia je rovnobežný so smerom kmitania, tieto vlny sme nazvali pozdĺžne a ich rýchlosť je $c_l = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho}}$. Druhý druh vln, priečny, kmitá kolmo na smer šírenia, preto sme tieto vlny nazvali priečne a ich rýchlosť je $c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$. Vidíme, že rýchlosť pozdĺžnych vln je väčšia ako rýchlosť priečných vln, preto pozdĺžne dostali názov *p* vlny, teda primárne a priečne *s* vlny, sekundárne - pri kmitavom pohybe zeme sa z daného miesta šíria rôzne typy vln, no do iného miesta, vzdialeného od zdroja, najprv dorazia pozdĺžne vlny, až potom priečne, čo sa deje vďaka rozdielnej rýchlosti šírenia týchto vln.

Vďaka tomu, že Lamého rovnica je lineárna, všeobecné riešenie vlny možno zložiť ako lineárnu kombináciu pozdĺžneho a priečného kmitania, ktorá bude tiež spĺňať Lamého rovnicu.

Pri priečných vlnách nedochádza ku objemovej dilatácii $\vartheta = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \vec{n} \cdot \vec{u}_0 f' = 0$, pri pozdĺžnych vlnách k nej dochádza (vtedy $\vec{n} \parallel \vec{u}_0 \implies \vartheta = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \vec{n} \cdot \vec{u}_0 f' \neq 0$).

4.4.2 Vlny v ideálnej kvapaline

Pre ideálnu kvapalinu³¹ zoberieme Eulerovu rovnicu bez objemových síl spolu s rovnicou kontinuity:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} &= -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.146)$$

Rovnako by sme mohli skúsiť dosadiť ansatz pre rovinnú vlnu, no ďaleko by sme nedošli - aj s ansatzom je riešenie tejto rovnice ťažké. Skúsme však dosadiť takýto smiešny konštantný ansatz:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 \\ p &= p_0 \\ \vec{v} &= \vec{0} \end{aligned} \quad (4.147)$$

Tento ansatz samozrejme spĺňa obe rovnice (4.146). Teraz vezmeme taký ansatz, ktorý sa bude nepatrne líšiť od smiešneho ansatzu, bude to len jeho malé vyrušenie:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \hat{\rho} \\ p &= p_0 + \hat{p} \\ \vec{v} &= \vec{0} + \hat{\vec{v}} \end{aligned} \quad (4.148)$$

teda platí, že veličiny $\hat{\rho}$, $\hat{p}$ a $\hat{\vec{v}}$ a ich derivácie podľa času a priestorových súradníc sú *malé* (v zmysle, že akýkoľvek ich vzájomný súčin možno zanedbať oproti týmto veličinám a ostatným členom). Z prvej rovnice (4.146) tak dostaneme:

$$\begin{aligned} (\rho_0 + \hat{\rho}) \frac{\partial \hat{\vec{v}}}{\partial t} + (\rho_0 + \hat{\rho}) (\hat{\vec{v}} \cdot \vec{\nabla}) \hat{\vec{v}} &= -\vec{\nabla} p_0 - \vec{\nabla} \hat{p} \\ \rho_0 \frac{\partial \hat{\vec{v}}}{\partial t} &= -\vec{\nabla} \hat{p} \end{aligned} \quad (4.149)$$

Z rovnice kontinuity dostávame:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho_0 + \hat{\rho})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [(\rho_0 + \hat{\rho}) \hat{\vec{v}}] &= 0 \\ \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \hat{\vec{v}} &= 0 \end{aligned} \quad (4.150)$$

Tento výsledok zderivujeme podľa času:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{\rho}}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \hat{\vec{v}} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \hat{\rho}}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho_0 \frac{\partial \hat{\vec{v}}}{\partial t} \right) &= 0 \end{aligned}$$

³¹Názov kvapalina je zavádzajúci. Patrí sem napríklad aj vzduch.

Za $\rho_0 \partial_t \hat{v}$ dosadíme (4.149):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{\rho}}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} \hat{p}) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \hat{\rho}}{\partial t^2} - \Delta \hat{p} &= 0 \end{aligned} \quad (4.151)$$

Toto je *takmer* vlnová rovnica, problém je, že miesto rovnakej premennej (buď hustota, alebo tlak), je to rovnica pre obe veličiny zmiešané spolu. Predpokladajme teda, že tlak a hustota závisia iba na sebe navzájom a už na ničom inom³². Keďže sa však obe veličiny menia iba málo, je možné tlak rozvinúť v okolí ρ_0 do prvého rádu Taylorovho radu, pričom zanedbanie bude malé:

$$\begin{aligned} p(\rho) &= \underbrace{p(\rho_0)}_{=p_0} + \left. \frac{dp}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0} \underbrace{(\rho - \rho_0)}_{=\hat{\rho}} \\ \hat{p} = p(\rho) - p_0 &= \underbrace{\left. \frac{dp}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0}}_{=k} \hat{\rho} = k \hat{\rho} \\ \hat{p} &= k \hat{\rho} \end{aligned} \quad (4.152)$$

Dostali sme priblíženie závislosti tlaku p od hustoty ρ (resp. malého vyrušenia tlaku $\hat{p}$ od malého vyrušenia hustoty $\hat{\rho}$). Túto závislosť dosadíme do (4.151):

$$\frac{\partial^2 \hat{\rho}}{\partial t^2} - k \Delta \hat{\rho} = 0 \quad (4.153)$$

Vidíme, že $\hat{\rho}$ má spĺňať vlnovú rovnicu, rýchlosť šírenia bude v tomto prípade $c_0 = \sqrt{k}$. Pre tlak $\hat{p}$ platí rovnaká rovnica:

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial t^2} - k \Delta \hat{p} = 0 \quad (4.154)$$

Rýchlosť šírenia takejto skalárnej tlakovej vlny bude tiež $c_0 = \sqrt{k}$. Z prvej rovnice (4.149) máme:

$$\rho_0 \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \hat{p}$$

Túto rovnicu zderivujeme podľa času:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial t^2} = -\vec{\nabla} \left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial t} \right)$$

Pre výraz $\partial_t p$ máme z (4.152) a (4.150):

$$\hat{p} = k \hat{\rho} \implies \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} = k \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -k \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \hat{v} \quad (4.155)$$

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial t^2} &= k \rho_0 \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \hat{v} \right) \\ \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial t^2} &= k \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \hat{v} \right) \end{aligned} \quad (4.156)$$

³² Ak tlak nezávisí na entropii S , tento prípad sa nazýva *barotropny*.

My by sme na pravej strane potrebovali $\Delta \hat{v}$, čo je $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \hat{v})$, avšak vidíme tam miesto toho $\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \hat{v})$. Prehltne sme slzy zúfalstva a počítajme výraz dvojitej rotácie rýchlostného poľa, $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \hat{v})$:

$$\begin{aligned} \left[\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \hat{v}) \right]_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{kab} \partial_a \hat{v}_b = \varepsilon_{kij} \varepsilon_{kab} \partial_j \partial_a \hat{v}_b = (\delta_{ia} \delta_{jb} - \delta_{ib} \delta_{ja}) \partial_j \partial_a \hat{v}_b = \underbrace{\partial_i \partial_j \hat{v}_j}_{=[\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \hat{v})]_i} - \underbrace{\partial_j \partial_j \hat{v}_i}_{=\Delta \hat{v}_i} \\ \implies \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \hat{v}) &= \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \hat{v}) - \Delta \hat{v} \end{aligned}$$

Lenže výraz $\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \hat{v})$ je presne to, čo sa nachádza v rovnici (4.156), a chýba v nej $\Delta \hat{v}$, čo je ten výraz, ktorý by sme v nej potrebovali:

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \hat{v}) = \Delta \hat{v} + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \hat{v})$$

Tento výraz dosadíme do (4.156):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial t^2} &= k \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \hat{v}) \\ \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial t^2} &= k \Delta \hat{v} + k \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \hat{v}) \\ \underbrace{\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial t^2} - k \Delta \hat{v}}_{\text{vlny?}} &= k \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \hat{v}) \end{aligned}$$

Vidíme, že ľavá strana je vlastne vlnová rovnica pre vektorové vlny $\hat{v}$, no to by platilo, keby bola na pravej strane nula. Lenže miesto toho je tam akási podivná dvojité rotácia. Keďže však ľavá strana vyzerá veľmi sľubne, skúsme na ňu ansatz rovinnnej lineárne polarizovanej vlny a pracujme s rovnicou, kde bol gradient divergencie (prevedenie na tvar s prítomným laplaciánom bola len motivácia):

$$\begin{aligned} \hat{v} &= \vec{V}_0 f(\vec{n} \cdot \vec{r}, t) \\ \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial t^2} &= \vec{V}_0 \ddot{f} \\ \left[\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \hat{v}) \right]_i &= \partial_i \partial_j \vec{V}_{0j} f = \partial_i n_j \vec{V}_{0j} f' = n_i n_j \vec{V}_{0j} f'' \implies \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \hat{v}) = \vec{n} \cdot \vec{V}_0 f'' \vec{n} \\ \vec{V}_0 \ddot{f} &= k (\vec{n} \cdot \vec{V}_0) f'' \vec{n} \\ Q_1 \vec{V}_0 &= Q_2 \vec{n} \end{aligned} \tag{4.157}$$

Znovu sme rovniciu doviedli do tvaru, keď začína byť dôležitý vzťah medzi $\vec{V}_0$ a $\vec{n}$, teda smer kmitania a smer šírenia sa vln v tekutine. Budeme rozlišovať dva prípady, buď $\vec{V}_0 \parallel \vec{n}$, alebo $\vec{V}_0 \not\parallel \vec{n}$.

1. $\vec{V}_0 \parallel \vec{n}$

Pokiaľ platí $\vec{V}_0 \parallel \vec{n}$, potom existuje skalár c taký, že $\vec{V}_0 = c \vec{n}$ a rovnica prejde na tvar:

$$\begin{aligned}\vec{V}_0 \ddot{f} &= k \left(\vec{n} \cdot \vec{V}_0 \right) f'' \vec{n} \\ c \vec{n} \ddot{f} &= k c \left(\vec{n} \cdot \vec{n} \right) f'' \vec{n} \\ \left(\ddot{f} - k f'' \right) \vec{n} &= \vec{0}\end{aligned}$$

Keďže všetky zložky vektora $\vec{n}$ nebudú nikdy naraz nulové (ak áno, nič nekmitá), potom musí platiť:

$$\ddot{f} - k f'' = 0$$

Pre funkciu f tak dostávame štandardnú vlnovú rovnicu. Rýchlosť šírenia vlny v tomto prípade je totožný s rýchlosťou šírenia vln v prípade hustoty a tlaku, teda $c_0 = \sqrt{k}$.

 2. $\vec{V}_0 \not\parallel \vec{n}$

Pokiaľ nie sú vektory $\vec{V}_0$ a $\vec{n}$ rovnobežné, potom sú nutne lineárne nezávislé, čo znamená:

$$\begin{aligned}\ddot{f} &= 0 \\ k \left(\vec{n} \cdot \vec{V}_0 \right) f'' &= 0\end{aligned}$$

Druhú rovnicu môžeme splniť jednoducho, ak $\vec{V}_0 \perp \vec{n}$, no prvá rovnica vlastne hovorí:

$$f = a(\vec{r})t + b(\vec{r})$$

Ak by platilo, že $a \neq 0$, potom by už $\hat{v}$ nebolo *malé* vyrušenie rýchlostného poľa, pretože f by rástlo s časom nad všetky medze. Ak však $a = 0$, potom f , a teda ani $\hat{v}$ nezávisí od času, čo ale značí stacionárny tok. Stacionárny tok však neznamená žiadne vlnenie a preto je tento prípad nevyhovujúci. Z toho plyní záver, že v ideálnej kvapaline sa pri príslušných zanedbaniach *nešíria* priečne rovinné vlny.

Dospeli sme teda k záveru, že v kvapaline sa pri istých zanedbaniach šíria rovinné, no iba pozdĺžne vlny, pričom sa vlní tlak, hustota aj rýchlostné pole s rovnakou rýchlosťou $c_0 = \sqrt{k}$. Túto rýchlosť nepoznáme, no vieme, že:

$$k = \left. \frac{dp}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0}$$

Vychádzajme teda zo stavovej rovnice ideálneho plynu, ktorá obsahuje obe tieto veličiny (tlak aj hustotu):

$$pV = NkT \quad V = \frac{m}{\rho} \implies \frac{p}{\rho} = \frac{NkT}{m} \quad (4.158)$$

Z tohto tvaru sa môžeme pokúsiť využiť tri deje ideálneho plynu - izochorický, izobarický a izotermický. Pre fixnú jednotkovú hmotnosť $m = \rho V$ nemá zmysel izochorický dej, pretože potom $\rho = \text{konšt.}$ a to nie je nič, čo by sme vedeli využiť. Podobne izobarický dej predpokladá $p = \text{konšt.}$, za tohto predpokladu by však bola rýchlosť šírenia vln v tekutinách nulová (a to nie je pravda). Ostáva teda izotermický dej, pre ktorý píšeme:

$$\begin{aligned}pV = \text{konšt.} &\implies \frac{p}{\rho} = \text{konšt.} \\ \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} &\implies p = p_0 \frac{\rho}{\rho_0} \implies k = \left. \frac{dp}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0} = \frac{p_0}{\rho_0} \implies c_{\text{izoterm}} = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}\end{aligned} \quad (4.159)$$

Inou alternatívou je adiabatický dej, pre ktorý platí:

$$pV^\kappa = \text{konšt.} \implies \frac{p}{\rho^\kappa} = \text{konšt.}$$

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = \frac{p_0}{\rho_0^\kappa} \implies p = p_0 \frac{\rho^\kappa}{\rho_0^\kappa} \implies k = \left. \frac{dp}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0} = \kappa \frac{p_0}{\rho_0} \implies c_{\text{adiabat}} = \sqrt{\kappa} \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\kappa} c_{\text{izoterm}} \quad (4.160)$$

Môžeme porovnať c_{izoterm} a c_{adiabat} pre vzduch, kde $p_0 = 101\,325\text{ Pa}$, $\rho_0 = 1.2\text{ kg m}^{-3}$ a $\kappa = 1.4$:

$$\begin{aligned} c_{\text{izoterm}} &= 290.6\text{ m s}^{-1} && \text{izotermický model} \\ c_{\text{adiabat}} &= 343.8\text{ m s}^{-1} && \text{adiabatický model} \end{aligned} \quad (4.161)$$

Experiment vie ukázať, ktorá z rýchlostí je bližšie k pravde - vieme merať rýchlosť zvuku vo vzduchu a ukazuje sa, že hodnota 343.8 m s^{-1} je správna, teda takéto vlnenie je adiabatické.