Tenzor deformácie, Hookov zákon a tak ...

Marián Fecko*
KTF&DF, FMFI UK, Bratislava

Krátky doplnok k prednáške Teoretická mechanika.

Obsah

*e-mail: `fecko@fmph.uniba.sk`

1 Tenzor deformácie

1.1 Dve elementárne odvodenia tenzora deformácie

Prvý pohľad: Uvažujem dva body blízko seba, v polohách $\mathbf{r}$ a $\mathbf{r}+\boldsymbol{\delta}$. Kvadrát ich vzdialenosti teda je

$$[(\mathbf{r}+\boldsymbol{\delta})-\mathbf{r}]^2=\boldsymbol{\delta}^2 \tag{1}$$

Prvý sa presunie do bodu $\mathbf{r}+\mathbf{u}(\mathbf{r})$ a druhý do bodu $\mathbf{r}+\boldsymbol{\delta}+\mathbf{u}(\mathbf{r}+\boldsymbol{\delta})$. Kvadrát ich novej vzdialenosti teda bude

$$\boldsymbol{\Delta}^2 \equiv [(\mathbf{r}+\boldsymbol{\delta}+\mathbf{u}(\mathbf{r}+\boldsymbol{\delta})-(\mathbf{r}+\mathbf{u}(\mathbf{r}))]^2 \tag{2}$$

To ale je

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Delta}^2 &= [(\boldsymbol{\delta}+\mathbf{u}(\mathbf{r}+\boldsymbol{\delta})-\mathbf{u}(\mathbf{r})]^2 \\
&= [\delta_i+u_i(\mathbf{r})+u_{i,j}\delta_j-u_i(\mathbf{r})][\delta_i+u_i(\mathbf{r})+u_{i,k}\delta_k-u_i(\mathbf{r})] \\
&= [\delta_i+u_{i,j}\delta_j][\delta_i+u_{i,k}\delta_k] \\
&= \boldsymbol{\delta}^2+2u_{i,j}\delta_i\delta_j+u_{i,j}u_{i,k}\delta_j\delta_k
\end{aligned}$$

V lineárnej pružnosti sa predpokladá, že *posunutia a aj ich derivácie sú malé.* Potom vidno, že tie tri členy, ktoré sa tu objavili, nie sú rovnako veľké - smerom doprava ich rádová veľkosť klesá. Stredný člen je najnižšia oprava k pôvodnému ľavému (t.j. zahodiť ho nemôžeme, ak chceme dostať čokoľvek zaujímavé), ale člen vpravo je malý ešte aj voči strednému (má o jeden faktor $u_{i,j}$ viac), takže ho pri uvažovanej presnosti (ak chceme prvú opravu) treba *zanedbať.* Dostali sme teda výsledok, že

$$\boldsymbol{\delta}^2 \mapsto \boldsymbol{\Delta}^2=\boldsymbol{\delta}^2+2u_{i,j}\delta_i\delta_j \equiv \boldsymbol{\delta}^2+2\epsilon_{ij}\delta_i\delta_j \tag{3}$$

kde

$$\boxed{\epsilon_{ij} := u_{(i,j)} \equiv \frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})} \tag{4}$$

O tom, či sa vzdialenosť blízkych bodov mení alebo nemení (a detailnejšie, ktoré vzdialenosti sa menia a ktoré nie) teda rozhoduje symetrická bilineárna forma ϵ_{ij} definovaná vzťahom (4). Volá sa *tenzor deformácie*.

Druhý pohľad: Uvažujem konštantné (a nenulové) pole posunutí. To zodpovedá rovnomernému posunutiu celého kontinua

$$\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}+\epsilon\mathbf{n} \qquad \text{t.j.} \qquad \mathbf{u}(\mathbf{r},t)=\epsilon\mathbf{n} \tag{5}$$

(posunutie o ϵ v smere $\mathbf{n}$). Posunutie je ale *izometria*, t.j. transformácia, ktorá zachováva vzdialenosti a preto (podľa definície :-) *ne*spôsobuje deformácie. Poučím sa, že

- existujú aj polia posunutí (konštantné), ktoré zodpovedajú nulovej deformácii
- deformácia by preto mohla byť skrytá v *deriváciách* komponent poľa posunutí

Takže sa zameriam na maticu prvých derivácií zložiek poľa posunutí, teda na $u_{i,j}$. Tá sa už posunutiami oklamať nedá. Ešte ale nie je jasné, či sa nedá oklamať *rotáciami* (tie sú tiež izometrie). Infinitezimálna rotácia sa dá zapísať ako

$$\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r} + \epsilon \mathbf{n} \times \mathbf{r} \qquad \text{t.j.} \qquad \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \epsilon \mathbf{n} \times \mathbf{r} \tag{6}$$

(otočenie o ϵ okolo jednotkového vektora $\mathbf{n}$). Tu vychádza

$$u_{i,j} = \epsilon \epsilon_{ikj} n_k \tag{7}$$

Takže výraz $u_{i,j}$ sa rotáciou oklamať *dal* (je nenulový a pritom deformácia je nulová). Všimnem si ale, že výraz $u_{i,j}$ vyšiel *anti*symetrický, takže ak sa z neho vyberie len *symetrická časť*, dostaneme potrebnú nulu:

$$u_{(i,j)} = -\epsilon \epsilon_{(ij)k} n_k = 0 \tag{8}$$

Poučenie: Symetrická časť výrazu $u_{i,j}$, t.j. práve výraz (4), sa nedá okabátiť žiadnou izometriou (transláciou ani rotáciou), a preto môže slúžiť ako miera deformácie.

1.2 Odvodenie tenzora deformácie pomocou Lieovej derivácie

Napíšme súradnicové vyjadrenie *Lieovej derivácie* [1] metrického tenzora g v smere vektorového poľa ξ

$$(\mathcal{L}_\xi g)_{ij} = \xi^k g_{ij,k} + g_{kj} \xi^k{}_{,i} + g_{ki} \xi^k{}_{,j} \tag{9}$$

V Euklidovskom priestore a v kartézskych súradniciach (t.j. keď $g_{ij} = \delta_{ij}$) to dáva

$$(\mathcal{L}_\xi g)_{ij} = \xi_{i,j} + \xi_{j,i} \tag{10}$$

Keď to porovnám s výrazom (4), hneď vidím, že tenzor deformácie má aj vyjadrenie

$$\boxed{\epsilon_{ij} := \frac{1}{2} (\mathcal{L}_u g)_{ij}} \tag{11}$$

Je to teda (až na faktor 1/2) Lieova derivácia (bežnej 3-rozmernej euklidovskej) metriky v smere poľa posunutí.

[1] Ak o Lievej derivácii (a toku vektorového poľa) nevieme nič, pokračujeme v čítaní ďalšej kapitoly. Tam zrejme tiež nebudeme rozumieť paragrafu (2.1), ale prečítame si aspoň jeho *výsledok*, ktorý by mohol byť - aspoň na intuitívnej úrovni - *pochopiteľný* a užitočný. A potom si prečítame paragraf (2.2), kde to bude odvodené elementárne. Z porovnania týchto dvoch metód si potom, v závislosti od svojho vkusu, odnesieme/neodnesieme pocit, že sa raz hádam na tú Lieovu deriváciu, pull-backy apod. niekde pozrieme. Napríklad v knihe [5] :-)

Je to prekvapujúce? Nemalo by byť! Transformácia je (podľa definície) deformáciou, ak *nie je* izometriou. Vektorové polia (Killingove) generujúce *izometrie* sa počítajú z (Killingových :-) rovníc

$$\mathcal{L}_\xi g = 0 \tag{12}$$

a situácia, keď je výraz $\mathcal{L}_\xi g$ *nenulový* signalizuje, že tok poľa ξ bude *meniť dĺžky* (niektorých) kriviek, t.j. bude spôsobovať *deformáciu* (vzdialenosť dvoch bodov je dĺžka istej krivky). T.j. výraz $\mathcal{L}_\xi g$ je presne to, čo nesie informáciu o tom, či príslušný tok poľa ξ prostredie deformuje (ak je nenulový) alebo nedeformuje (ak je nulový).

2 Význam jednotlivých komponent tenzora deformácie

Na pochopenie priameho významu jednotlivých komponent tenzora deformácie môžeme vyštartovať
- z jeho prudko vedeckého vyjadrenia cez Lieovu deriváciu v tvare (11)
- z jeho elementárneho vyjadrenia (metódami paragrafu (1.1))

Vybrať si jednu z týchto možností je vecou vkusu, obe voľby vedú k tomu istému výsledku :-) Na zdôraznenie tohto faktu uvádzame výklad v tejto kapitole v opačnom poradí ako v 1. kapitole, t.j. najprv prudko vedecký a až potom elementárny.

2.1 Odvodenie pomocou Lieovej derivácie

Pripomeňme si (pozri [5]) súvis Lieovej derivácie v smere poľa ξ a pull-backu voči infinitezimálnemu toku Φ_t tohoto poľa

$$\Phi_t^* g = g + t\mathcal{L}_\xi g \qquad\qquad |t| << 1 \tag{13}$$

Odtiaľ na súradnicovej báze

$$(\Phi_t^* g)(\partial_i, \partial_j) = g(\partial_i, \partial_j) + t\mathcal{L}_\xi g(\partial_i, \partial_j) \tag{14}$$

Teraz si treba uvedomiť, že úlohu poľa posunutí z teórie lineárnej pružnosti hrá naše pole $t\xi$ (t.j. naše ξ až po vynásobené infinitezimálnym faktorom t; tok o t pozdĺž ξ je teda to isté ako tok o 1 pozdĺž u, t.j. posunutie $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r})$)

$$u \equiv t\xi \tag{15}$$

takže

$$\epsilon_{ij} := \frac{1}{2}(\mathcal{L}_u g)_{ij} = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{t\xi} g)_{ij} = \frac{t}{2}(\mathcal{L}_\xi g)_{ij} \tag{16}$$

Potom s využitím definície pull-backu a definície (11) dostávame

$$g(\Phi_{t*}\partial_i, \Phi_{t*}\partial_j) = g(\partial_i, \partial_j) + 2\epsilon_{ij} \tag{17}$$

Zaveďme označenie

$$\hat{\partial}_i := \Phi_{t*}\partial_i \tag{18}$$

pre súradnicový bázový vektor ∂_i odtečený infinitezimálnym tokom Φ_t. Ak ešte označíme skalárny súčin bodkou (t.j. $g(u,v) \equiv u \cdot v$), môžeme prepísať výsledok (17) do tvaru

$$\hat{\partial}_i \cdot \hat{\partial}_j = \partial_i \cdot \partial_j + 2\epsilon_{ij} \tag{19}$$

Zapíšme ešte kartézsku súradnicovú bázu (pripomeňme, že je ortonormovaná, sme v E^3) ako

$$e_i := \partial_i \qquad\qquad e_i \cdot e_j = \delta_{ij} \tag{20}$$

Potom

$$\boxed{\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} + 2\epsilon_{ij}} \tag{21}$$

Tento vzorec dáva priamu interpretáciu komponent tenzora deformácie. Menovite tieto komponenty dávajú, ako vidíme, najnižšiu opravu pre *skalárne súčiny* infinitezimálne *odtečených* bázových vektorov (t.j. skalárne súčiny bázových vektorov *po deformácii* prostredia).

Pozrime sa na dva typické konkrétne prípady, ϵ_{11} a ϵ_{12} (t.j. jeden diagonálny a jeden mimodiagonálny člen matice komponent tenzora deformácie). Z (21) dostávame

$$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1 = 1 + 2\epsilon_{11} \tag{22}$$

$$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = 2\epsilon_{12} \tag{23}$$

Poďme najprv dekódovať význam rovnice (22). Uvedomíme si, že výraz $\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1$ je *kvadrát* dĺžky vektora e_1 *po deformácii.* Pre samotnú jeho dĺžku tak máme vyjadrenie

$$|\hat{e}_1| = 1 + \epsilon_{11} \equiv |e_1| + \epsilon_{11} \tag{24}$$

Tento vzorec ukazuje, ako súvisí komponenta ϵ_{11} s *nárastom dĺžky* bázového vektora e_1 (jeho pôvodná dĺžka bola 1, teraz je $1 + \epsilon_{11}$).

Ak teda mám deformáciu charakterizovanú zložkami tenzora deformácie ϵ_{ij}, dĺžky jednotlivých bázových vektorov sa menia takto:

$$1 \equiv |e_1| \quad \mapsto \quad 1 + \epsilon_{11} \equiv |\hat{e}_1| \tag{25}$$

$$1 \equiv |e_2| \quad \mapsto \quad 1 + \epsilon_{22} \equiv |\hat{e}_2| \tag{26}$$

$$1 \equiv |e_3| \quad \mapsto \quad 1 + \epsilon_{33} \equiv |\hat{e}_3| \tag{27}$$

Ak teraz dva blízke body v kontinuu spája vektor $l_1 e_1$ (t.j. l_1 je ich *pôvodná* - infinitezimálna - *vzdialenosť*), po deformácii ich bude spájať vektor $l_1\hat{e}_1$, takže ich nová vzdialenosť bude $l_1|\hat{e}_1| = (1 + \epsilon_{11})l_1$. Vzťahy (25), (26) a (27) sa dajú teda vyjadriť aj ako

$$l_1 \quad \mapsto \quad (1 + \epsilon_{11})l_1 \tag{28}$$

$$l_2 \quad \mapsto \quad (1 + \epsilon_{22})l_2 \tag{29}$$

$$l_3 \quad \mapsto \quad (1 + \epsilon_{33})l_3 \tag{30}$$

kde l_1,l_2 a l_3 sú vzdialenosti dvoch blízkych bodov, ktoré sú voči sebe postupne v smere x-ovej, y-ovej a z-ovej osi (ide o tri rôzne prípady dvojíc bodov). To ale znamená, že ϵ_{11} je *relatívne predĺženie* kontinua v smere x-ovej osi (a podobne sa interpretujú prípady ϵ_{22} a ϵ_{33}). Tým je výklad *diagonálnych* zložiek tenzora deformácie hotový.

Na pochopenie významu mimodiagonálnych zložiek potrebujeme porozumieť rovnici (23). Medzi vektormi e_1 a e_2 pred deformáciou bol pravý uhol, ale vzťah (23) ukazuje, že *po* deformácii to už tak všeobecne *nie* je. Nech medzi vektormi $\hat{e}_1$ a $\hat{e}_2$ je uhol $\pi/2 - 2\gamma_{12}$ (teda pravý uhol sa *zmenší* o $2\gamma_{12}$). Potom môžeme rovnicu (23) zapísať takto:

$$|\hat{e}_1||\hat{e}_2|\cos(\pi/2 - 2\gamma_{12}) = 2\epsilon_{12} \tag{31}$$

Keďže oprava

$$\pi/2 \mapsto \pi/2 - 2\gamma_{12} \tag{32}$$

je infinitezimálna, platí

$$\cos(\pi/2 - 2\gamma_{12}) = \cos(\pi/2) + 2\gamma_{12} = 2\gamma_{12} \tag{33}$$

Spolu s opravou dĺžok (24) tak z (31) dostávame

$$(1 + \epsilon_{11})(1 + \epsilon_{22})2\gamma_{12} = 2\epsilon_{12} \tag{34}$$

Teraz si už stačí uvedomiť, že γ_{12} aj ϵ_{12} sú *malé*, takže opravy v zátvorkách netreba brať vážne. Zostane teda

$$\gamma_{12} = \epsilon_{12} \tag{35}$$

No a to je hľadaná interpretácia mimodiagonálnych zložiek tenzora deformácie: mimodiagonálne ϵ_{ij} opisuje *uhol* γ_{ij}, o dvojnásobok ktorého deformácia zmenší pôvodne pravý uhol medzi bázovými vektormi e_i a e_j $(i \neq j)$

$$\boxed{\pi/2 \mapsto \pi/2 - 2\epsilon_{ij}} \tag{36}$$

Zhrnutie:
- diagonálne zložky dávajú relatívne predĺženie v zodpovedajúcom smere
- mimodiagonálne zase zmenu uhla medzi zodpovedajúcimi bázovými vektormi

Konkrétne overenie tejto všeobecnej interpretácie vidno napríklad vo výsledkoch (124) a (139) pre čistý ťah a čistý šmyk.

2.2 Odvodenie bez Lieovej derivácie

Uvažujem trochu všeobecnejšiu situáciu, ako v (1) a (2). Všeobecnejšiu v tom, že budem skúmať relatívnu polohu až *troch* bodov pred a po deformácii (nielen dvoch). Konkrétne, budem mať až *dva* relatívne vektory $\boldsymbol{\delta}_1$ a $\boldsymbol{\delta}_2$ namiesto jedného

$\boldsymbol{\delta}$. Tie tri ostro sledované body sú $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}+\boldsymbol{\delta}_1$ a $\mathbf{r}+\boldsymbol{\delta}_2$ (namiesto $\mathbf{r}$ a $\mathbf{r}+\boldsymbol{\delta}$ predtým). Posuny týchto troch bodov sú nasledovné:

$$\mathbf{r} \quad \mapsto \quad \mathbf{r}+\mathbf{u}(\mathbf{r}) \tag{37}$$
$$\mathbf{r}+\boldsymbol{\delta}_1 \quad \mapsto \quad \mathbf{r}+\boldsymbol{\delta}_1+\mathbf{u}(\mathbf{r}+\boldsymbol{\delta}_1) \tag{38}$$
$$\mathbf{r}+\boldsymbol{\delta}_2 \quad \mapsto \quad \mathbf{r}+\boldsymbol{\delta}_2+\mathbf{u}(\mathbf{r}+\boldsymbol{\delta}_2) \tag{39}$$

To môžem zapísať aj takto:

$$\mathbf{r} \quad \mapsto \quad \mathbf{R} \tag{40}$$
$$\mathbf{r}+\boldsymbol{\delta}_1 \quad \mapsto \quad \mathbf{R}+\boldsymbol{\Delta}_1 \tag{41}$$
$$\mathbf{r}+\boldsymbol{\delta}_2 \quad \mapsto \quad \mathbf{R}+\boldsymbol{\Delta}_2 \tag{42}$$

Zaviedol sa teda do hry jazyk *nových relatívnych* vektorov $\boldsymbol{\Delta}_1$ a $\boldsymbol{\Delta}_2$ (voči novému - posunutému - počiatku $\mathbf{R}$). No a zaujímavé bude teraz to, ako sa zmení skalárny súčin relatívnych vektorov

$$\boldsymbol{\delta}_1 \cdot \boldsymbol{\delta}_2 \mapsto \boldsymbol{\Delta}_1 \cdot \boldsymbol{\Delta}_2 = ? \tag{43}$$

V skalárnom súčine $\boldsymbol{\delta}_1 \cdot \boldsymbol{\delta}_2$ je totiž informácia ako o dĺžkach vektorov $\boldsymbol{\delta}_1$ a $\boldsymbol{\delta}_2$, tak aj o uhle medzi nimi, takže výsledok výpočtu *zmeny* tohto skalárneho súčinu nesie informáciu ako o zmenách *vzdialeností* blízkych bodov (čo už vieme, lebo tento výpočet pre $\boldsymbol{\delta}_1 = \boldsymbol{\delta}_2 = \boldsymbol{\delta}$ sme už robili, pozri (3)), tak aj o zmenách *uhlov* pri deformácii kontinua (na čo potrebujeme tento výpočet pre $\boldsymbol{\delta}_1 \neq \boldsymbol{\delta}_2$ - konkrétnejšie pre $\boldsymbol{\delta}_1 \perp \boldsymbol{\delta}_2$ - *to* bude novinka). Z rovníc (37) až (42) vidíme, že

$$\boldsymbol{\Delta}_1 \quad = \quad \boldsymbol{\delta}_1+\mathbf{u}(\mathbf{r}+\boldsymbol{\delta}_1)-\mathbf{u}(\mathbf{r}) \tag{44}$$
$$\boldsymbol{\Delta}_2 \quad = \quad \boldsymbol{\delta}_2+\mathbf{u}(\mathbf{r}+\boldsymbol{\delta}_2)-\mathbf{u}(\mathbf{r}) \tag{45}$$

Zovšeobecnením rovnice (2) je teda rovnica

$$\boldsymbol{\Delta}_1 \cdot \boldsymbol{\Delta}_2 = [\boldsymbol{\delta}_1+\mathbf{u}(\mathbf{r}+\boldsymbol{\delta}_1)-\mathbf{u}(\mathbf{r})] \cdot [\boldsymbol{\delta}_2+\mathbf{u}(\mathbf{r}+\boldsymbol{\delta}_2)-\mathbf{u}(\mathbf{r})] \tag{46}$$

a ako ukazuje jednoduchý výpočet, zovšeobecnením výsledku (3) je výsledok

$$\boldsymbol{\Delta}_1 \cdot \boldsymbol{\Delta}_2 = \boldsymbol{\delta}_1 \cdot \boldsymbol{\delta}_2 + 2\epsilon_{ij}(\boldsymbol{\delta}_1)_i(\boldsymbol{\delta}_2)_j \tag{47}$$

Tento vzorec zodpovedá vzorcu (21) z prudko vedeckého formalizmu.

▼ Naozaj:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Delta}_1 \cdot \boldsymbol{\Delta}_2 &= [\boldsymbol{\delta}_1+\mathbf{u}(\mathbf{r}+\boldsymbol{\delta}_1)-\mathbf{u}(\mathbf{r})] \cdot [\boldsymbol{\delta}_2+\mathbf{u}(\mathbf{r}+\boldsymbol{\delta}_2)-\mathbf{u}(\mathbf{r})] \\
&= [(\boldsymbol{\delta}_1)_i + u_i(\mathbf{r}) + u_{i,j}(\boldsymbol{\delta}_1)_j - u_i(\mathbf{r})][(\boldsymbol{\delta}_2)_i + u_i(\mathbf{r}) + u_{i,j}(\boldsymbol{\delta}_2)_j - u_i(\mathbf{r})] \\
&= [(\boldsymbol{\delta}_1)_i + u_{i,j}(\boldsymbol{\delta}_1)_j][(\boldsymbol{\delta}_2)_i + u_{i,k}(\boldsymbol{\delta}_2)_k] \\
&= \boldsymbol{\delta}_1 \cdot \boldsymbol{\delta}_2 + (u_{i,j}+u_{j,i})(\boldsymbol{\delta}_1)_i(\boldsymbol{\delta}_2)_j + u_{i,j}u_{i,k}(\boldsymbol{\delta}_1)_j(\boldsymbol{\delta}_2)_k \\
&= \boldsymbol{\delta}_1 \cdot \boldsymbol{\delta}_2 + 2\epsilon_{ij}(\boldsymbol{\delta}_1)_i(\boldsymbol{\delta}_2)_j + u_{i,j}u_{i,k}(\boldsymbol{\delta}_1)_j(\boldsymbol{\delta}_2)_k \\
&\doteq \boldsymbol{\delta}_1 \cdot \boldsymbol{\delta}_2 + 2\epsilon_{ij}(\boldsymbol{\delta}_1)_i(\boldsymbol{\delta}_2)_j
\end{aligned}$$

kde

$$\epsilon_{ij} := u_{(i,j)} \equiv \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

je náš starý známy tenzor deformácie. Vidíme, že znalosť tenzora deformácie neumožňuje len výpoveď (3), ale aj všeobecnejšiu výpoveď (47). ▲

Stojí za povšimnutie, že výsledok (47) môžeme zapísať aj takto:

$$\delta_{ij}(\boldsymbol{\Delta}_1)_i(\boldsymbol{\Delta}_2)_j = (\delta_{ij} + 2\epsilon_{ij})(\boldsymbol{\delta}_1)_i(\boldsymbol{\delta}_2)_j \tag{48}$$

To možno čítať tak, že ľavú stranu, čo je skalárny súčin *nových* relatívnych vektorov v *pôvodnom* bežnom zmysle (t.j. pomocou samotného δ_{ij}) môžeme nahradiť pravou stranou, skalárnym súčinom *pôvodných* relatívnych vektorov, ale v *novom* zmysle, pomocou *modifikovanej* symetrickej bilineárnej formy

$$\delta_{ij} \mapsto g_{ij} \equiv \delta_{ij} + 2\epsilon_{ij} \tag{49}$$

Symetrickej bilineárnej forme, ktorá je šedou eminenciou za skalárnym súčinom, sa hovorí *metrický tenzor*. Vyšlo teda, že pôvodný (bežný) metrický tenzor sa efektívne zmenil na trochu iný. V tomto pohľade na vec sa teda tvárime, že žiadne body sa neposunuli, všetko zostalo tam kde bolo, len sa z nejakých záhadných príčin (trochu) zmenil metrický tenzor, teda nástroj na výpočet skalárnych súčinov a *to* má za následok zmeny dĺžok (nezmenených) relatívnych vektorov (spájajúcich blízke body) a uhlov medzi relatívnymi vektormi. Nezabúdajme ale, že všetky tieto efekty nastali *v skutočnosti* preto, lebo body sa (poľom posunutí $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$) poposúvali a *neposúvali sa rovnako* (čo je odrazené v závislosti $\boldsymbol{u}$ na $\boldsymbol{r}$).

Vráťme sa ale k hlavnej úlohe, priamej interpretácii jednotlivých zložiek ϵ_{ij} tenzora deformácie.

Zvoľme vo vzorci (48)

$$\boldsymbol{\delta}_1 = \boldsymbol{\delta}_2 = \boldsymbol{\delta} = (l, 0, 0) \qquad\qquad l << 1 \tag{50}$$

Potom samozrejme (formálne z (44), (45)) aj $\boldsymbol{\Delta}_1 = \boldsymbol{\Delta}_2 = \boldsymbol{\Delta}$ a o jeho dĺžke hovorí (48) vtedy toto:

$$|\boldsymbol{\Delta}| = |\boldsymbol{\delta}|(1 + \epsilon_{11}) \equiv l(1 + \epsilon_{11}) \tag{51}$$

Čo to znamená? Malá palička dĺžky l v smere x-ovej osi sa stala (tiež malou) paličkou dĺžky $l(1+\epsilon_{11})$. Preto samotné ϵ_{11} nie je (podľa definície) nič iné, ako *relatívne predĺženie* v smere x-ovej osi. Podobné by to bolo pre zvyšné dve *diagonálne* zložky.

Uvažujme teraz *dve* také paličky, jednu v smere osi x, druhú v smere y

$$\boldsymbol{\delta}_1 = (l, 0, 0) \tag{52}$$

$$\boldsymbol{\delta}_2 = (0, l, 0) \tag{53}$$

Vzorce (44), (45) potom dávajú

$$\boldsymbol{\Delta}_1 = l(1 + \epsilon_{11}, u_{2,1}, u_{3,1}) \tag{54}$$

$$\boldsymbol{\Delta}_2 = l(u_{1,2}, 1 + \epsilon_{22}, u_{3,2}) \tag{55}$$

Všimnem si, že nová prvá malá palička už nemá smer x-ovej osi, je (trošku) naklonená (okrem toho, že je trošku natiahnutá). To isté sa týka druhej. Aký je uhol medzi novými paličkami zistíme zo skalárneho súčinu. Po zanedbaní členov zbytočne vysokého rádu dostávame

$$\mathbf{\Delta}_1 \cdot \mathbf{\Delta}_2 = l^2[u_{1,2} + u_{2,1}] \equiv 2l^2\epsilon_{12} \tag{56}$$

(To isté dáva aj (47).) Uhol medzi paličkami (52) a (53) bol pravý, takže medzi tými trošku otočenými bude len trošku iný ako pravý. Parametrizujeme ho tak, že bude $\pi/2 - 2\gamma_{12}$ (pozri (32)). Potom

$$\mathbf{\Delta}_1 \cdot \mathbf{\Delta}_2 = |\mathbf{\Delta}_1||\mathbf{\Delta}_2| \cos(\pi/2 - 2\gamma_{12}) = l(1+\epsilon_{11})l(1+\epsilon_{22})2\gamma_{12} \tag{57}$$

Porovnanie s (56) dáva (po zanedbaní zbytočne malých členov)

$$\gamma_{12} = \epsilon_{12} \tag{58}$$

čo je v zhode s (35).

3 Hookov zákon

3.1 Tenzorová formulácia Hookovho zákona

Ak budú v kontinuu pôsobiť plošné sily, spôsobia jeho deformovanie. Plošné sily sú uložené do tenzora napätia $\sigma \equiv \sigma_{ij}$, deformácie sú v tenzore deformácií $\epsilon \equiv \epsilon_{ij}$. Takže musí *v každom bode* kontinua a *v každom čase* existovať nejaký, možno riadne komplikovaný, vzťah

$$\sigma(\epsilon, \mathbf{r}, t) \tag{59}$$

(Pod tenzorom ϵ sa myslí jeho hodnota v $(\mathbf{r}, t)$.) V *lineárnej* pružnosti sú však (podľa predpokladu) deformácie *malé* (všetky ϵ_{kl} sú malé), takže poď ho na Taylorov rozvoj (okolo $\epsilon_{kl} = 0$):

$$\sigma_{ij}(\epsilon, \mathbf{r}, t) = \sigma_{ij}(0, \mathbf{r}, t) + \left.\frac{\partial \sigma_{ij}(\epsilon, \mathbf{r}, t)}{\partial \epsilon_{kl}}\right|_{\epsilon_{kl}=0} \epsilon_{kl} + \dots \tag{60}$$

Teraz si uvedomíme, že

$$\sigma_{ij}(0, \mathbf{r}, t) = 0 \tag{61}$$

(keď niet deformácií, nie je dôvod na plošné sily, ktoré by ich vygenerovali). Tiež *označíme*

$$\left.\frac{\partial \sigma_{ij}(\epsilon, \mathbf{r}, t)}{\partial \epsilon_{kl}}\right|_{\epsilon_{kl}=0} := C_{ijkl}(\mathbf{r}, t) \tag{62}$$

Dostaneme *lineárne priblíženie* (komplikovaného) vzťahu (60) v tvare

$$\sigma_{ij}(\epsilon, \mathbf{r}, t) = C_{ijkl}(\mathbf{r}, t)\epsilon_{kl}(\mathbf{r}, t) \tag{63}$$

V ľudskejšom, menej podrobnom zápise dostávame

$$\boxed{\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}} \tag{64}$$

Toto je *Hookov zákon* v tenzorovom tvare. Nehovorí nič viac (ale ani o nič menej) ako to, že (pre malé deformácie) závisí tenzor napätia od tenzora deformácií *lineárne*. Tá lineárna závislosť je sprostredkovaná tenzorom 4. rangu C_{ijkl}. Ako vidíme, na odpoveď na otázku, aké plošné sily sa vygenerujú ako dôsledok ľubovoľnej deformácie, potrebujeme vedieť všetky komponenty tohoto tenzor(ového poľ)a. Tento tenzor teda nesie informáciu o *pružných vlastnostiach daného kontinua*. Volá sa *tenzor pružnosti* (*stiffness tensor*, *elasticity tensor*) alebo tiež *tenzor elastických koeficientov*.

Rovno z definície (62) vidno jeho symetrie

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} \tag{65}$$

Trochu pracnejšie sa dokazuje jeho symetria

$$C_{ijkl} = C_{klij} \tag{66}$$

(Treba na ňu žiadať, aby existovala potenciálna energia pre deformácie, t.j. analóg konzervatívnosti silového poľa. Pozri odsek 3.3.)

Tieto symetrie spolu výrazne redukujú počet nezávislých zložiek tenzora C_{ijkl}. Keby bol „všeobecný", mal by zjavne $3^4 = 81$ komponent (tri nezávislé možnosti výberu na štyroch miestach). Ukazuje sa (pozri úvahy v časti 3.3.2), že vyššie špecifikované symetrie redukujú počet nezávislých zložiek na 21.

3.2 Izotropné a homogénne kontinuum

Pružné vlastnosti kontinua sú teda uložené do tenzorového poľa 4. rangu C_{ijkl}. Poznať toto tenzorové pole pre všeobecné (najhoršie možné) kontinuum znamená poznať 21 funkcií premenných $\mathbf{r}, t$. My sa tu, naopak, pozrieme len na najjednoduchšie možné kontinuum. Volá sa izotropné a homogénne. Izotropné je také, že jeho pružné vlastnosti necítia otočenie a homogénne zase také, že necítia posunutie.

Začneme homogenitou. To je invariantnosť voči ľubovoľnému posunutiu $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r} + \mathbf{a}$. V kartézskych súradniciach (a zložkách tenzora voči nim) je homogénnosť tenzora jednoducho fakt, že pre ľubovoľné $\mathbf{a}$ platí

$$C_{ijkl}(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = C_{ijkl}(\mathbf{r}) \tag{67}$$

To znamená, že komponenty tenzora sú *konštanty*. Z 21 neznámych funkcií sa tak v prípade homogénneho kontinua stáva 21 neznámych konštánt.

S izotropnosťouje to je trochu zložitejšie. Nájsť všetky izotropné tenzory (tenzory invariantné voči rotáciám) je dosť netriviálny matematický problém. Jeho výsledok je však známy a jeho opis je veľmi jednoduchý. Hovorí, že existujú práve dva "fundamentálne" izotropné tenzory a že všetky ostatné sú poskladané z nich (sú ich "tenzorové súčiny"). Komponenty tých dvoch základných stavebných tehličiek sú (v kartézskej báze) dané dobre známymi objektmi, a to Kroneckerovým symbolom a Levi-Civitovým symbolom

$$\delta_{ij} \qquad\qquad \epsilon_{ijk} \tag{68}$$

Poďme vyzbrojení týmito vedomosťami k C_{ijkl}. Ten má 4 indexy a treba ho zostaviť z tehličiek, ktoré majú 2 indexy (Kronecker) a 3 indexy (Levi-Civita). Po troche rozmýšľania zistíme, že ϵ_{ijk} je nepoužiteľná tehlička (má už 3 indexy, do 4 chýba 1 a 1-indexovú tehličku nemáme). Takže to treba poskladať z dvoch Kroneckerov. Sú tri možnosti rozhodiť 4 indexy na dve delty:

$$\delta_{ij}\delta_{kl} \qquad \delta_{ik}\delta_{jl} \qquad \delta_{il}\delta_{jk} \tag{69}$$

Každý z týchto tenzorov sám osebe je izotropný (aj homogénny) a najvšeobecnejší izotropný tenzor je (podľa vyššie prezradeného výsledku) ľubovoľná lineárna kombinácia týchto troch (s konštantnými koeficientami, aby sme nepokazili homogénnosť)

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\delta_{ik}\delta_{jl} + \nu\delta_{il}\delta_{jk} \tag{70}$$

Teraz sa nasadia požiadavky na všeobecné symetrie C_{ijkl} a zistí sa, že na ich splnenie treba zobrať $\mu = \nu$, t.j.

$$\boxed{C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})} \tag{71}$$

Toto je teda najvšeobecnejší homogénny a izotropný tenzor s potrebným počtom indexov a s potrebnými symetriami. Vidíme, že obsahuje len *dve* voľné *konštanty*. (Na rozdiel od 21 voľných funkcií pre najnepríjemnejšie kontinuum.) Ak tieto dve konštanty pre dané pružné kontinuum zistíme (stačia na to dve vhodné merania), vieme už o pružných vlastnostiach tohoto kontinua všetko. (V rámci lineárnej teórie.) Vieme teda už *predpovedať* výsledky rôznych *iných* meraní. (Čo je zmyslom teoretickej fyziky :-)

Hookov zákon v tvare (64) sa po dosadení (71) zmení na svoj špeciálny tvar

$$\boxed{\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij}} \qquad\qquad \theta := \epsilon_{kk} \equiv \mathrm{Tr}\,\epsilon \tag{72}$$

Toto je *Hookov zákon* pre *homogénne a izotropné kontinuum* v smere $\sigma(\epsilon)$, t.j. pre situáciu, keď poznám ϵ a chcem z toho σ. Dá sa však ľahko aj obrátiť a napísať v tvare $\epsilon(\sigma)$ t.j. pre situáciu, keď poznám σ a chcem z toho ϵ. Dopadne to takto:

$$\epsilon_{ij} = \hat{\lambda}\hat{\theta}\delta_{ij} + 2\hat{\mu}\sigma_{ij} \qquad\qquad \hat{\theta} := \sigma_{kk} \equiv \mathrm{Tr}\,\sigma \tag{73}$$

kde

$$\hat{\lambda} = -\frac{\lambda}{2\mu}\frac{1}{3\lambda + 2\mu} \qquad\qquad 2\hat{\mu} = \frac{1}{2\mu} \tag{74}$$

▼ Inverzný výraz k (64) musí mať tvar

$$\epsilon_{ij} = \hat{C}_{ijkl}\sigma_{kl} \tag{75}$$

Keďže aj (zatiaľ neznámy) tenzor $\hat{C}_{ijkl}$ musí byť izotropný a homogénny, musí mať tiež štruktúru (71), len s inými dvoma voľnými konštantami $\hat{\lambda}$ a $\hat{\mu}$. Tak dostávame (73). Ak vyrátame stopu rovnice (72), dostaneme

$$\hat{\theta} = (3\lambda + 2\mu)\theta \tag{76}$$

Dosadenie (73) do (72) dáva

$$\sigma_{ij} = (\lambda\theta + 2\mu\hat{\lambda}\hat{\theta})\delta_{ij} + (4\mu\hat{\mu})\sigma_{ij} \tag{77}$$

Preto

$$4\mu\hat{\mu} = 1 \qquad\qquad \lambda\theta + 2\mu\hat{\lambda}\hat{\theta} = 0 \tag{78}$$

Kombinácia rovníc (76) a (78) vedie na výsledok (74).

▲

3.3 Energia deformácie a symetria $C_{ijkl} = C_{klij}$

3.3.1 Čo vlastne hľadáme

Pružné prostredie reaguje na deformáciu s nevôľou - snaží sa vrátiť do stavu pred deformáciou. Ak ho teda chceme zdeformovať, musíme naňho *silovo* pôsobiť a vykonať pritom *prácu*.

Predstavíme si, že naše pružné prostredie *už je* zdeformované poľom posunutí $\mathbf{u}(\mathbf{r})$. Zdeformujeme ho *ešte trochu* o $\delta\mathbf{u}(\mathbf{r})$. Zrátajme infinitezimálnu prácu δA potrebnú na túto *dodatočnú* malú deformáciu.

Máme dva typy príspevkov, za objemové a plošné sily. Za deformáciu objemu dV a plôšky $d\mathbf{S}$ dostávame toto:

$$\begin{aligned} \text{za objemové} \qquad \delta A_{\text{obj}} &= dV\mathbf{f}_{\text{obj}}(\mathbf{r}) \cdot \delta\mathbf{u}(\mathbf{r}) \equiv (f_{\text{obj}})_i \delta u_i dV && (79) \\ \text{za plošné} \qquad \delta A_{\text{pl}} &= d\mathbf{f}_{\text{pl}}(\mathbf{r}) \cdot \delta\mathbf{u}(\mathbf{r}) \equiv \delta u_i \sigma_{ij} dS_j && (80) \end{aligned}$$

Celý objem V s hranicou ∂V teda dá

$$\delta A = \int_V (f_{\text{obj}})_i \delta u_i dV + \int_{\partial V} \delta u_i \sigma_{ij} dS_j \tag{81}$$

a prerobením druhého člena Gaussovou vetou na spoločný objemový integrál dostaneme

$$\delta A = \int_V ((f_{\text{obj}})_i \delta u_i + \partial_j(\delta u_i \sigma_{ij}))dV \tag{82}$$

Napokon nasadenie Leibniza v druhom člene vedie na

$$\delta A = \int_V ((f_{\text{obj}})_i + \partial_j \sigma_{ij})\delta u_i + (\partial_j \delta u_i)\sigma_{ij}))dV \tag{83}$$

Ak je naše kontinuum v rovnováhe (čo prepokladáme), platí

$$(f_{\text{obj}})_i + \partial_j \sigma_{ij} = 0 \tag{84}$$

(pripomeňme, že vo „všeobecnej pohybovej rovnici kontinua" je vpravo ρa_i, kde **a** je *zrýchlenie* elementu dV, čo je teraz nula), takže zostane

$$\delta A = \int_V \sigma_{ij}(\partial_j \delta u_i)dV = \int_V \sigma_{ij}\frac{1}{2}(\partial_j \delta u_i + \partial_i \delta u_j)dV \tag{85}$$

(druhé = vyplýva zo symetrie tenzora napätia, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$), t.j.

$$\boxed{\delta A = \int_V dV \sigma_{ij}\delta\epsilon_{ij}} \tag{86}$$

kde

$$\delta\epsilon_{ij} := \frac{1}{2}(\partial_j \delta u_i + \partial_i \delta u_j) \tag{87}$$

je *prírastok* k tenzoru deformácie, vyvolaný prírastkom k poľu posunutí (alebo aj tenzor *dodatočnej* deformácie, t.j. tenzor deformácie (4), vyrátaný len z dodatočnej deformácie δu_i).

[*Celkové* pole posunutí, pôvodné plus dodatočné, je $\mathbf{u}(\mathbf{r}) + \delta\mathbf{u}(\mathbf{r})$. Jemu zodpovedajúci *celkový* tenzor deformácie je

$$\frac{1}{2}(\partial_j(u_i + \delta u_i) + \partial_i(u_j + \delta u_j)) = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j) + \frac{1}{2}(\partial_j \delta u_i + \partial_i \delta u_j) \tag{88}$$

Podľa (4) a (87) to môžeme napísať v tvare

$$(\text{celkový tenzor deformácie})_{ij} = \epsilon_{ij} + \delta\epsilon_{ij} \tag{89}$$

Vidíme teda, že výraz (87) dáva *prírastok* k tenzoru deformácie, vyvolaný prírastkom k poľu posunutí.]

Ak teraz využijeme vo výraze (86) pre (dodatočnú) prácu vykonanú na (dodatočnú) deformáciu pružného prostredia *Hookov zákon* (64), dostaneme

$$\delta A = \int_V dV C_{ijkl}\epsilon_{kl}\delta\epsilon_{ij} \tag{90}$$

A v tejto výpočtovej fáze nastúpi hlavná myšlienka (predstava): Chceme, aby sa naša práca *investovala do potenciálnej energie.* Čiže aby práca δA viedla na *nárast* (o δU) nejakej veličiny U, (potenciálnej) *energie deformácie*:

$$\delta A = \delta U \qquad \delta U = \int_V dV \delta u \tag{91}$$

Pre nejaké (hľadané)

$$U = \int_V dV u \tag{92}$$

Čiže sa vlastne hľadá taká funkcia

$$u(\epsilon) \equiv u(\epsilon_{11}, \epsilon_{12}, \dots, \epsilon_{33}), \tag{93}$$

objemová *hustota* energie deformácie, pre ktorú platí

$$\epsilon_{ij} \mapsto \epsilon_{ij} + \delta\epsilon_{ij} \qquad \Rightarrow \qquad u \mapsto u + \delta u \tag{94}$$

kde (pozri (90))

$$\delta u = C_{ijkl}\epsilon_{kl}\delta\epsilon_{ij} \tag{95}$$

3.3.2 Ako to nájdeme

Vo výrazoch typu (90) či (95) je nepríjemne veľa indexov, čo trochu zahmlieva matematickú podstatu problému.

Zjednodušme preto zápis takto:

Keďže je tenzor *deformácie* symetrický, $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$, nie všetky jeho komponenty sú nezávislé (keď viem napr. ϵ_{12}, viem už aj $\epsilon_{21} = \epsilon_{12}$). Nezávislých je zjavne len *šesť* zo všetkých deviatich. Napríklad zoberieme diagonálne a „nad-diagonálne" (zvyšné tri - „pod-diagonálne" zložky - už potom vieme). Zavedieme nový index $A = 1, \dots, 6$ a ním očíslované zložky ϵ_A (t.j. $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_6$) takto:

$$\epsilon_1 = \epsilon_{11}, \quad \epsilon_2 = \epsilon_{12}, \quad \epsilon_3 = \epsilon_{13}, \quad \epsilon_4 = \epsilon_{22}, \quad \epsilon_5 = \epsilon_{23}, \quad \epsilon_6 = \epsilon_{33} \tag{96}$$

V tomto zápise sa hľadaná funkcia u z (93) stane explicitne funkciou šiestich (nových) premenných

$$u(\epsilon) \equiv u(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5, \epsilon_6) \tag{97}$$

Ale aj tenzor *napätia* je symetrický, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, preto aj on má len *šesť* nezávislých komponent σ_A (t.j. $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6$), kde opäť

$$\sigma_1 = \sigma_{11}, \quad \sigma_2 = \sigma_{12}, \quad \sigma_3 = \sigma_{13}, \quad \sigma_4 = \sigma_{22}, \quad \sigma_5 = \sigma_{23}, \quad \sigma_6 = \sigma_{33} \tag{98}$$

Vzhľadom na symetrie (65) tenzora *pružnosti* C_{ijkl} môžeme (aj tu) nahradiť prvú symetrickú dvojicu C_{ij--} indexom A, druhú symetrickú dvojicu C_{--kl} indexom B a zaviesť tak namiesto C_{ijkl} objekt C_{AB}, ktorý má už len $6 \times 6 = 36$ komponent $(C_{11}, C_{12}, \dots, C_{16}, C_{21}, \dots, C_{66})$.

[Pripomeňme, pozri koniec odseku 3.1, že *apriori* má tenzor C_{ijkl} až 81 komponent. Vidíme, že symetrie (65) redukujú počet nezávislých zložiek na 36. O chvíľu ukážeme, pozri text za (107), že symetria (66) zníži tento počet ďalej až na 21.]

Z Hookovho zákona (64) sa tak stane toto

$$\sigma_A = C_{AB}\epsilon_B \tag{99}$$

a náš problém (94), (95) teraz vyzerá takto: Hľadá sa funkcia (97) taká, že

$$\epsilon_A \mapsto \epsilon_A + \delta\epsilon_A \qquad \Rightarrow \qquad u \mapsto u + \delta u \tag{100}$$

kde (pozri (95))

$$\delta u = C_{AB}\epsilon_B \delta\epsilon_A \tag{101}$$

Aby sme si uvedomili, že ide o starú známu úlohu o potenciálovosti (či nepotenciálovosti) silového poľa, označme

$$f_A(\epsilon) \equiv f_A(\epsilon_1, \dots, \epsilon_6) := C_{AB}\epsilon_B \tag{102}$$

Potom máme pre δu dve rôzne vyjadrenia:

$$\begin{aligned} \delta u &\overset{1.}{=} (\partial_A u)\delta\epsilon_A && (103)\\ &\overset{2.}{=} f_A(\epsilon)\delta\epsilon_A && (104) \end{aligned}$$

(Prvá rovnosť vyplýva zo (100) - Taylorov rozvoj do 1.rádu, druhá zo (101) a označenia (102).) Má teda platiť

$$f_A = \partial_A u \tag{105}$$

Tento problém však poznáme z mechaniky: „Silové pole" f_A má byť *potenciálové*. Odtiaľ aj vieme, *kedy* také je. Práve vtedy, keď sa „rovnajú krížne derivácie", čiže keď

$$\partial_B f_A = \partial_A f_B \tag{106}$$

Ak dosadíme za f_A výraz (102), dostaneme z toho podmienku

$$C_{AB} = C_{BA} \tag{107}$$

To znamená, že 6×6 matica C_{AB} je *symetrická*, takže má *len* $(6 \times 7)/2 = 21$ *nezávislých* prvkov (namiesto $6 \times 6 = 36$). V pôvodnom (štvorindexovom) označení to je symetria

$$\boxed{C_{ijkl} = C_{klij}} \tag{108}$$

Podmienka (108) je teda nevyhnutnou a postačujúcou podmienkou na to, aby existovala potenciálna energia pre deformácie pružného kontinua.

A ako vyzerá to u keď splnená *je*? Keď si napíšeme, čo chceme splniť, t.j.

$$f_A \equiv C_{AB}\epsilon_B = \partial_A u \tag{109}$$

nevyžaduje to nijaký závratný intelektuálny výkon prísť k výrazu

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_A C_{AB}\epsilon_B \tag{110}$$

(ak je derivácia *lineárna* v premenných ϵ_A, samotná funkcia musí byť v nich *kvadratická*). Preto v pôvodnom (štvorindexovom) označení to je

$$\boxed{u = \frac{1}{2}\epsilon_{ij} C_{ijkl}\epsilon_{kl}} \tag{111}$$

a celková potenciálna energia deformácia pružného kontinua v objeme V je (podľa (92))

$$\boxed{U = \int_V u dV = \frac{1}{2}\int_V \epsilon_{ij} C_{ijkl}\epsilon_{kl} dV} \tag{112}$$

3.3.3 Čo to dá pre homogénne a izotropné kontinuum

Pripomeňme si, že pre homogénne a izotropné kontinuum sa tenzor pružnosti C_{ijkl} zjednoduší (pozri (71)) na tvar

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{113}$$

Keď to dosadíme do (111), dostaneme

$$u = \frac{1}{2}(\lambda(\mathrm{Tr}\,\epsilon)^2 + 2\mu \mathrm{Tr}\,(\epsilon^2)) \tag{114}$$

kde

$$\mathrm{Tr}\,\epsilon = \epsilon_{jj} \equiv \theta \qquad (\epsilon^2)_{ij} = \epsilon_{ik}\epsilon_{kj} \qquad \mathrm{Tr}\,(\epsilon^2) = (\epsilon^2)_{jj} = \epsilon_{jk}\epsilon_{kj} \tag{115}$$

▼ Naozaj:

$$\begin{aligned} 2u &= \epsilon_{ij} C_{ijkl}\epsilon_{kl} \\ &= \epsilon_{ij}(\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}))\epsilon_{kl} \\ &= \lambda\epsilon_{jj}\epsilon_{kk} + \mu(\epsilon_{kj}\epsilon_{kj} + \epsilon_{lj}\epsilon_{jl}) \\ &= \lambda(\mathrm{Tr}\,\epsilon)(\mathrm{Tr}\,\epsilon) + \mu(\epsilon_{kj}\epsilon_{jk} + \epsilon_{lj}\epsilon_{jl}) \\ &= \lambda(\mathrm{Tr}\,\epsilon)^2 + 2\mu \mathrm{Tr}\,(\epsilon^2) \end{aligned}$$

▲

Teraz

$$(\mathrm{Tr}\,\epsilon)^2 \geq 0 \qquad \mathrm{Tr}\,(\epsilon^2) \geq 0 \tag{116}$$

▼ Naozaj: $\mathrm{Tr}\,\epsilon$ je reálne číslo, takže jeho kvadrát $(\mathrm{Tr}\,\epsilon)^2 \geq 0$. Ďalej ϵ_{kj} je *symetrická* bilineárna forma, takže sa dá (vo fixnom bode $\mathbf{r}$) *diagonalizovať*. Potom (tiež bilineárna forma) $(\epsilon^2)_{ij} = \epsilon_{ik}\epsilon_{kj}$ bude tiež diagonálna, pričom na jej diagonále sú *kvadráty* reálnych čísel, čiže nezáporné čísla. Potom aj ich stopa (súčet týchto troch čísel) je nezáporné číslo. Stopa však *nezávisí od bázy*, takže bola nezáporná aj pred diagonalizáciou. ▲

A samozrejme chceme, aby

$$u \geq 0 \tag{117}$$

[Pružná potenciálna energia by mala byť *zdola ohraničená*, $u \geq u_0$ (ináč by sa kontinuum *spontánne* - samo od seba - *deformovalo*, lebo by to preňho bolo energeticky výhodné: spontánnou deformáciu by prechádzalo k stále nižšej a nižšej energii). Jej najnižšia hodnota, t.j. u_0, sa dá nastaviť na ľubovoľnú konkrétnu predpísanú hodnotu vhodnou aditívnou konštantou. My to nastavujeme tak, že pre nulovú deformáciu chceme mať nulovú energiu.]

Zo (114), (116) a (118) dostávame dôležité obmedzenie na hodnoty parametrov λ, μ:

$$\boxed{\lambda \geq 0} \qquad \boxed{\mu \geq 0} \tag{118}$$

4 Praktické charakteristiky pružného kontinua

Zistili sme, že pružné vlastnosti homogénneho a izotropného kontinua sú (v rámci lineárnej pružnosti) úplne charaktrizované dvoma konštantami, λ a μ. V rôznych situáciách sa prejavujú ich konkrétne kombinácie, ktoré vznikli historicky zrejme aj skôr a sú známe pod nejakými menami. Pozrieme sa na nejaké príklady.

4.1 Youngov modul E a Poissonova konštanta ν

Youngov modul pružnosti (*Young modulus*) E sa spomína už v stredoškolskej fyzike. Definuje sa vzorcom

$$\sigma = E\epsilon \qquad\qquad \epsilon := \frac{\Delta L}{L} \tag{119}$$

Myslí sa tým toto: Tyč dĺžky L sa naťahuje napätím σ (sila na jednotku plochy) a vyvolá sa tým jej predĺženie ΔL. Veličina $\epsilon := \Delta L/L$ je *relatívne* predĺženie a tvrdí sa, že (pre malé deformácie) toto relatívne predĺženie závisí *lineárne* od napätia. Youngov modul E je jednoducho koeficient úmernosti tejto lineárnej závislosti.

[Presnejšie, ako vidno z rovnice (119), je to koeficient *inverznej* - samozrejme tiež lineárnej - závislosti $\sigma(\epsilon)$. Veľké E má materiál, ktorý sa daným napätím relatívne predĺži *málo*. Na rovnicu (119) sa teda možno pozerať *dvojako*: Buď máme dané relatívne predĺženie ϵ a zaujíma nás napätie σ, ktoré to spôsobilo (pohľad $\sigma(\epsilon)$, tu je koeficient úmernosti E), alebo máme dané napätie a zaujíma nás vyvolané relatívne predĺženie (pohľad $\epsilon(\sigma)$, tu je koeficient úmernosti $1/E$).]

Teraz to isté vysokoškolsky. Potrebujeme napísať *tenzor* napätia pre uvažovanú situáciu. Ak je naťahovanie tyče v smere osi $x \equiv x^1$, vyzerá takto:

$$\sigma_{ij} = \sigma\delta_{i1}\delta_{j1} \qquad \text{t.j.} \qquad \sigma_{ij} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{120}$$

▼ Pre takýto tenzor dáva všeobecný definičný vzorec vyjadrujúci vektor napätia $\boldsymbol{\nu}$ na plôške v smere jednotkového vektora $\mathbf{n}$

$$\nu_i = \sigma_{ij}n_j \tag{121}$$

toto:

$$\nu_i = \sigma\delta_{i1}n_1 \tag{122}$$

To hovorí, že:
- napätie na plôškach s normálou v smere y a z je nulové
- napätie na plôške s normálou v smere x má smer x (konkrétne $\boldsymbol{\nu} = (\sigma, 0, 0)$)

No ale to je presne taká situácia s plošnými silami, akú si predstavujeme pri vyslovení spojenia "čistý ťah s napätím σ v smere osi x" ▲

Hookov zákon v obrátenom tvare (73) potom dáva pre tenzor deformácie výraz

$$\epsilon_{ij} = (\hat{\lambda}\delta_{ij} + 2\hat{\mu}\delta_{i1}\delta_{j1})\sigma \tag{123}$$

Maticovo to je

$$\epsilon_{ij} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \tag{124}$$

kde

$$a \equiv (\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})\sigma \equiv \frac{2\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}\sigma \qquad b \equiv -\hat{\lambda}\sigma \equiv \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\sigma \tag{125}$$

Čo to znamená pre pole posunutí? Máme

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= \epsilon_{11} = a \\ u_{2,2} &= \epsilon_{22} = -b \\ u_{3,3} &= \epsilon_{33} = -b \end{aligned}$$

(plus ostatné derivácie nulové), odkiaľ

$$\begin{aligned} u_1 &= ax \\ u_2 &= -by \\ u_3 &= -bz \end{aligned}$$

(plus ešte aditívne konštanty, čo ale dáva transláciu, ktorá ma nezaujíma, nie je deformáciou). Vidím, že čistý ťah v smere osi x vedie na deformáciu

$$x \mapsto (1+a)x \tag{126}$$
$$y \mapsto (1-b)y \tag{127}$$
$$x \mapsto (1-b)z \tag{128}$$

čo je (očakávané) natiahnutie v smere osi x (faktorom $(1+a)$, $L \mapsto L + aL$) a (neočákavané, ale po rozmyslení akceptovateľné) *súčasné skrátenie* v *priečnom* smere (natiahnutie faktorom $(1-b)$, $l \mapsto l - bl$). Z kocky rozmerov $L \times L \times L$ sa teda stáva hranol rozmerov

$$(1+a)L \times (1-b)L \times (1-b)L \tag{129}$$

Objem tej kocky sa potom mení takto

$$L^3 \equiv V \mapsto V + \Delta V = V + (a-2b)V \tag{130}$$

a teda objemová dilatácia je

$$\theta = (a-2b) = \dots (125) \dots = 1/2\mu \tag{131}$$

Je asi logické, že táto charakteristika materiálu je vždy kladná (naťahovaním by sa vec nemala objemovo svrknúť).

No a už môžeme identifikovať Youngov modul. Uvedomíme si, že konštanta a je vlastne relatívne predĺženie ϵ spomínané v stredoškolskom vzorci (119) (keďže (126) hovorí, že $L \mapsto (1+a)L = L + aL$). Ak teda porovnám (119) s vyjadrením pre a z (125)

$$\sigma = E\epsilon \qquad a = \frac{2\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)}\sigma \qquad a \equiv \epsilon \tag{132}$$

dostanem vyjadrenie pre *Youngov modul* v tvare

$$\boxed{E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{2\lambda+\mu}} \tag{133}$$

Fakt, že okrem podĺžneho natiahnutia dochádza k priečnemu skráteniu sa volá *Poissonov jav.* Jeho kvantitatívnou mierou je pomer (relatívneho) priečneho skrátenia k pozdĺžnemu natiahnutiu, ktorý sa volá *Poissonova konštanta* (*Poisson's ratio*)

$$\nu := \frac{b}{a} = \dots (125) \dots = \frac{\lambda}{4\lambda+\mu} \tag{134}$$

Táto konštanta je spravidla tiež kladná (t.j. priečny rozmer sa naozaj skracuje keď pozdĺžny rozťahujeme), ale existujú exotické materiály, kde to tak nie je (pozri wiki).

4.2 Modul v šmyku G

Modul pružnosti v šmyku (*shear modulus*) G sa tiež spomína už v stredoškolskej fyzike. Definuje sa vzorcom

$$\sigma = G\gamma \tag{135}$$

Myslí sa tým toto: Na hornú stenu hranola výšky l pôsobíme *tangenciálnym* napätím σ (t.j. ťaháme ju silou v smere tejto plochy; napätie je sila na jednotku plochy). Vyvolá sa tým tangenciálny posun hornej steny o δ, t.j. zošikmenie bočných stien hranola o uhol γ. Tento uhol bude daný vzťahom $\tan\gamma = \delta/l$ a keďže pre malé uhly je $\tan\gamma \approx \gamma$, tak

$$\gamma = \delta/l \tag{136}$$

Tvrdí sa, že uhol γ *lineárne* závisí od pôsobiaceho tangenciálneho napätia σ. Modul pružnosti v šmyku G je jednoducho koeficient úmernosti tejto lineárnej závislosti. Samotná deformácia tohto druhu sa volá deformácia šmykom.

[Opäť, ako vidno z rovnice (135), je to koeficient *inverznej* - samozrejme tiež lineárnej - závislosti $\sigma(\gamma)$. Veľké G má materiál, ktorého steny sa daným tangenciálnym napätím naklonia *málo*. Na rovnicu (135) sa teda opäť možno pozerať *dvojako*: Buď máme dané zošikmenie stien o γ a zaujíma nás tangenciálne napätie σ, ktoré to spôsobilo (pohľad $\sigma(\gamma)$, tu je koeficient úmernosti G), alebo máme dané tangenciálne napätie a zaujíma nás vyvolané zošikmenie stien (pohľad $\gamma(\sigma)$, tu je koeficient úmernosti $1/G$).]

Teraz to isté vysokoškolsky. Pre *túto* deformáciu napíšeme pole posunutí, z neho vyrátame tenzor deformácie a z Hookovho zákona zodpovedajúci tenzor napätia. Napokon identifikujeme, kde tam je to stredoškolské G.

Ak hornú stenu ťaháme v smere $x \equiv x_1$, pole posunutí musí mať smer x_1 a rásť lineárne v smere x_3 od nuly (vo výške $x_3 = 0$) po δ (vo výške $x_3 = l$). To dáva

$$u_i(\mathbf{r}) = \delta_{1i} x_3 \frac{\delta}{l} \equiv \delta_{1i} x_3 \gamma \tag{137}$$

Z neho

$$u_{i,j}(\mathbf{r}) = \delta_{1i}\delta_{3j}\gamma \tag{138}$$

takže

$$\epsilon_{ij} \equiv \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{i,j}) = \frac{\gamma}{2}(\delta_{1i}\delta_{3j} + \delta_{3i}\delta_{1j}) \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \gamma/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{139}$$

Na diagonále sú samé nuly, takže $\theta = 0$ a Hookov zákon (72) dáva

$$\sigma_{ij} \equiv 2\mu\epsilon_{ij} = \mu\gamma(\delta_{1i}\delta_{3j} + \delta_{3i}\delta_{1j}) \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu\gamma & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{140}$$

Všeobecný vzorec

$$\nu_i = \sigma_{ij} n_j \tag{141}$$

dáva na hornej stene hranola (kde je $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$)

$$\nu_i = \sigma_{i3} \tag{142}$$

a špeciálne

$$\nu_1 = \sigma_{13} \tag{143}$$

Pravú stranu odčítame z (140) - je to $\mu\gamma$. Ľavú stranu po hlbokom zamyslení identifikujeme so stredoškolským σ zo vzorca (135). (Je to prvá - teda tu tangenciálna - zložka napätia na hornej stene hranola. Je tam pritom jediná nenulová, ako ukazuje (142) a (140).) Tak prepíšeme (143) na

$$\sigma = \mu\gamma \tag{144}$$

a porovnaním s (135) dostávame hlavný výsledok, že

$$\boxed{G = \mu} \tag{145}$$

Tajomný koeficient μ v Hookovom zákone (72) má teda *priamu* fyzikálnu interpretáciu ako *modul* pružnosti *v šmyku*. (Čo sa asi nedá povedať o druhom koeficiente, o λ. Napríklad Youngov modul E je, ako ukazuje (133), pomerne komplikovanou funkciou oboch tajomných koeficientov λ aj μ.)

4.3 Stlačiteľnosť κ a nestlačiteľnosť K

Predstavím si, že hodím homogénnu oceľovú guľku na dno bazéna. Je tam tlak, ktorý sa ju snaží izotropne stlačiť a trošku sa mu to aj podarí: Jej objem sa zmenší z V na $V + dV$ (kde dV je *záporné* a veľmi malé voči V). Takéto izotropné stláčanie je vlastne pôsobenie istých špeciálnych plošných síl. (Vedecky sa volajú *všestranný tlak*.) Ako každé plošné sily, aj tieto opisuje nejaký tenzor napätia. Ak sa opäť hlboko zamyslíme (žiaľ, už druhýkrát v krátkom čase), zistíme, že tieto konkrétne opisuje tenzor napätia

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \tag{146}$$

(Formálne rovnaký, ako opisuje *ideálnu* tekutinu. To p je tam tlak na dne bazéna.) Tú zmenu $V \mapsto V + dV$ môžem chápať tak, že mám závislosť $V(p)$, kde $V \equiv V(0)$ a $V \mapsto V + dV$ je dôsledkom zmeny tlaku $(p \equiv 0) \mapsto (p \equiv dp)$, kde $p \equiv dp$ je ten tlak na dne bazéna. (Keďže nie je veľký oproti nulovému tlaku vody na hladine, nie je hriech označiť ho ako infinitezimálny tlak dp.) Teda

$$V \mapsto V + dV \qquad \text{je vlastne} \qquad V(0) \mapsto V(dp) \tag{147}$$

Mierou toho, ako sa materiál (objemovo) stláča pri vystavení všestrannému tlaku je zrejme veličina, zvaná *stlačiteľnosť*, definovaná takto:

$$\kappa := -\frac{1}{V}\left.\frac{dV}{dp}\right|_{p=0} \qquad \text{t.j.} \qquad \kappa := -\frac{V'(0)}{V} \tag{148}$$

[Tá *derivácia* dáva zmenu objemu pri zmene tlaku, *delenie* V*-čkom* spôsobí, že to je relatívne (na jednotku pôvodného objemu), *mínus* vpredu zabezpečí, aby to bolo kladné a výpočet derivácie *v nule* je preto, že ma zaujíma, ako sa zmenšuje ten objem na začiatku tlačenia, nie pri už veľkom tlaku a pridaním ešte trošku ďalšieho tlaku.]

Pomocou stlačiteľnosti sa dá vzťah medzi objemom V ešte pri nulovom tlaku $p = 0$ a objemom $V + dV$ už pri pôsobení tlaku $p \equiv dp$ napísať aj takto:

$$V(dp) - V(0) = -\kappa V dp \qquad \text{t.j.} \qquad V(p) = V - \kappa V p \tag{149}$$

Odtiaľ pre objemovú dilatáciu θ dostávame

$$\theta := \frac{V(p) - V(0)}{V(0)} = -\kappa p \tag{150}$$

Keď teraz skombinujeme Hookov zákon (72) s podmienkou pre všestranný tlak (146), dostaneme

$$-p\delta_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij} \tag{151}$$

Výpočet stopy oboch strán dá

$$-3p = (3\lambda + 2\mu)\theta \tag{152}$$

a dosadenie výrazu pre θ z (150) poskytuje konečný výraz pre stlačiteľnosť

$$\boxed{\kappa = \frac{1}{\lambda + \frac{2}{3}\mu}} \tag{153}$$

Prevrátená hodnota stlačiteľnosti sa volá *nestlačiteľnosť* (*bulk modulus*)

$$K := \frac{1}{\kappa} \tag{154}$$

a ako vidíme, cez tajomné koeficienty λ a μ sa vyjadruje takto

$$\boxed{K = \lambda + \frac{2}{3}\mu} \tag{155}$$

Veľkú nestlačiteľnosť K (čiže malú stlačiteľnosť κ) má materiál, ktorý na (všestranný) tlak reaguje (čo sa týka zmeny objemu) málo (pozri napr. (149)).

Poďakovanie

Ďakujem.

Literatúra

[1] D.Ilkovič: Fyzika I, Bratislava, SNTL, 1975

[2] M.Fecko: Sylabus + príklady (40 strán vo formáte A4)
http://sophia.dtp.fmph.uniba.sk/~fecko/teormech/primech11.pdf

[3] Hooke's law, Wikipedia

[4] Infinitesimal strain theory, Wikipedia

[5] M.Fecko: Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov,
Bratislava, Iris 2004 (2.vydanie 2009)