Dôkaz jednej identity, ktorá sa zíde v 2. prednáške z teoretickej mechaniky

Marián Fecko *

15. októbra 2013

Obsah

1 Dokazovaná identita

Pri odvodení Lagrangeových rovníc 2.druhu z D'Alembertovho-Lagrangeovho princípu sa vyskytuje nasledovné tvrdenie:

$$\boxed{\dot{\bar{p}} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^a} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial T}{\partial q^a}} \tag{1}$$

1.1 Samotný dôkaz (výpočet)

Tu si najprv vysvetlíme, ako treba chápať pravú stranu a potom sa pustíme do dôkazu, že sa ľavá strana rovná pravej.

Vpravo figuruje funkcia T, čo je *kinetická energia*.

$$T = \sum_{k=1}^{N} T_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\mathbf{r}}_k^2 \tag{2}$$

*Už dlhé roky kradne veľa času na prednáške z teoretickej mechaniky jeden dosť otravný výpočet. Ďalej sa nevyužíva, treba len jeho výsledok. Aby sa tam mohlo hovoriť o zaujímavejších veciach, urobím tento výpočet detailne tu a budem naň len odkazovať.

Z derivácií ale vidno, že ju máme chápať ako funkciu $2n$ *nezávislých* premenných

$$T = T(q, \dot{q}) = T(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) \tag{3}$$

[Keď sa robia parciálne derivácie, skúma sa tým (podľa ich definície) zmena funkcie pri zmene jednej zo súradníc, pričom ostatné sa držia fixné. Tu je trochu psychologický problém, že veď predsa $\dot{q}^1(t)$ závisí od toho, aké je $q^1(t)$, t.j. ako môžem držať napríklad $q^1(t)$ fixné a meniť $\dot{q}^1(t)$ (to si vyžaduje parciálna derivácia voči $\dot{q}^1$). Odpoveď (trochu povrchná) je, že *len ak* to formálne chápem *tak*, ako sa hovorí (t.j. že všetky súradnice sú nezávislé) platí spomínaná identita. Platnosť tej identity je teda viazaná na *práve tento* výklad, čo sa pod tým zápisom myslí. (Dalo by sa odpovedať aj hlbšie a podrobnejšie, ale tým sa teraz nezaťažujme, berme to takto pragmaticky.)]

Vyjadrenie (3) vznikne z (2) tak, že sa využije *parametrizácia* konfiguračného priestoru (zavedenie zovšeobecnených súradníc, pozri (27))

$$\bar{r}(q) \qquad \text{t.j.} \qquad \mathbf{r}_k(q^1, \dots, q^n) \tag{4}$$

Naozaj, potom podľa (28) a (29) dostávame

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\mathbf{r}}_k^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q^a}.\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q^b}\ \dot{q}^a \dot{q}^b \equiv \frac{1}{2} T_{ab}(q)\ \dot{q}^a \dot{q}^b \tag{5}$$

kde *matica kinetickej energie* sa definuje ako

$$T_{ab}(q) := \sum_{k=1}^{N} m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q^a}.\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q^b} \tag{6}$$

Vidíme, že kinetická energia je *kvadratickou* formou voči zovšeobecneným *rýchlostiam*, pričom *matica* tejto kvadratickej formy závisí od zovšeobecnených *súradníc*

$$T = T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} T_{ab}(q)\ \dot{q}^a \dot{q}^b \tag{7}$$

Teraz je už zrejmé, čo sa myslí pod parciálnymi deriváciami na pravej strane (1). Posledná vec, ktorú treba definovať, je časová derivácia d/dt, ktorou sa tá pravá strana začína. Pod ňou sa tu myslí derivácia voči premennej t (času), ktorá je skrytá v premenných q^a a $\dot{q}^a$:

$$\frac{d}{dt} f(q, \dot{q}) = \frac{d}{dt} f(q(t), \dot{q}(t)) = \frac{\partial f}{\partial q^a}\dot{q}^a + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}^a}\ddot{q}^a \tag{8}$$

Tým by malo byť zrejmé, čo sa to vlastne v (1) tvrdí a dá sa prikročiť k samotnému dôkazu.

Tento dôkaz prebieha nesmierne dôvtipne. V prvom kroku sa rozráta na drobné ľavá strana dokazovanej identity. V druhom zase pravá. No a v treťom sa pohľadom na oba výsledky zbadá, že sú vlastne rovnaké. Naozaj dôvtipné.

Začnime teda sľubovanou ľavou stranou (1).

$$\begin{aligned}
Ľ &= \dot{\bar{p}} \cdot \tfrac{\partial \bar{r}}{\partial q^a} \\
&\overset{(33)}{=} \textstyle\sum_{k=1}^N \dot{\mathbf{p}}_k \cdot \tfrac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q^a} \\
&\overset{(32)}{=} \textstyle\sum_{k=1}^N m_k \left(\tfrac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q^b}\ \ddot{q}^b + \tfrac{\partial^2 \mathbf{r}_k}{\partial q^b \partial q^c}\ \dot{q}^b \dot{q}^c \right) \cdot \tfrac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q^a} \\
&= \left(\textstyle\sum_{k=1}^N m_k \tfrac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q^a} \cdot \tfrac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q^b} \right) \ddot{q}^b + \left(\textstyle\sum_{k=1}^N m_k \tfrac{\partial^2 \mathbf{r}_k}{\partial q^b \partial q^c} \cdot \tfrac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q^a} \right) \dot{q}^b \dot{q}^c \\
&\overset{(6)}{=} T_{ab}\ \ddot{q}^b + \left(\textstyle\sum_{k=1}^N m_k \tfrac{\partial^2 \mathbf{r}_k}{\partial q^b \partial q^c} \cdot \tfrac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q^a} \right) \dot{q}^b \dot{q}^c
\end{aligned}$$

Ak ešte zavediem označenie

$$X_{bca} := \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial^2 \mathbf{r}_k}{\partial q^b \partial q^c} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q^a} \tag{9}$$

tak ľavá strana vyzerá celkom jednoducho:

$$Ľ = T_{ab}\ \ddot{q}^b + X_{bca}\ \dot{q}^b \dot{q}^c \tag{10}$$

Všimnem si, že X_{bca} má takúto symetriu

$$X_{bca} = X_{cba} \tag{11}$$

a že veličiny X_{bca} a T_{ab} súvisia vzťahom

$$\frac{\partial T_{ab}}{\partial q^c} = X_{acb} + X_{bca} \tag{12}$$

Teraz prejdem na chvíľu na pravú stranu (1). Tam si najprv zrátam polotovary. Pomocou (7) a (22) dostávam

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^a} = T_{ab} \dot{q}^b \tag{13}$$

a odtiaľ pomocou (12) toto

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^a} = T_{ab} \ddot{q}^b + \frac{\partial T_{ab}}{\partial q^c}\ \dot{q}^b \dot{q}^c = T_{ab} \ddot{q}^b + (X_{acb} + X_{bca})\ \dot{q}^b \dot{q}^c \tag{14}$$

Ďalej podľa (7) a (12)

$$\frac{\partial T}{\partial q^a} = \frac{1}{2} \frac{\partial T_{bc}}{\partial q^a}\ \dot{q}^b \dot{q}^c = \frac{1}{2} (X_{bac} + X_{cab})\ \dot{q}^b \dot{q}^c \tag{15}$$

Celá pravá strana dokazovanej identity (1) potom vyzerá

$$\mathrm{P} = T_{ab}\ddot{q}^b + \left((X_{acb} + X_{bca}) - \frac{1}{2}(X_{bac} + X_{cab})\right)\ \dot{q}^b\dot{q}^c \tag{16}$$

Keď to porovnám s (10), vidím, že prvé členy sa sú rovnaké (takže o tie sa už nestarám) a potrebujem už len zistiť, či platí rovnosť bez nich, t.j. či platí

$$X_{bca}\ \dot{q}^b\dot{q}^c \stackrel{?}{=} \left((X_{acb} + X_{bca}) - \frac{1}{2}(X_{bac} + X_{cab})\right)\ \dot{q}^b\dot{q}^c \tag{17}$$

Pomocou symetrie (11) sa pravá strana tejto (zatiaľ otáznej) rovnosti prepíše takto

$$X_{bca}\ \dot{q}^b\dot{q}^c \stackrel{?}{=} \left(\frac{1}{2}(X_{acb} - X_{bac}) + X_{bca}\right)\ \dot{q}^b\dot{q}^c \tag{18}$$

t.j. otázka znie

$$0 \stackrel{?}{=} (X_{acb} - X_{bac})\ \dot{q}^b\dot{q}^c \tag{19}$$

Bolo by fajn (už by to bolo hotové), keby bola zátvorka nulová. Drobný problém je, že ona *sama osebe* nulová *nie je* (symetria (11) na jej vynulovanie nestačí). Akokoľvek ale kladie odpor, nepomôže jej to, lebo je *efektívne* nulová v tom zmysle, že *po vynásobení* členom $\dot{q}^b\dot{q}^c$ *dáva* nulu. Na overenie tohoto tvrdenia treba využiť triky (23) a (26) (hovoria, že si vo výraze takejto štruktúry stačí nechať zo všeobecnej matice len jej symetrickú časť) a symetriu (11). (Úlohu symetrickej matice v indexoch bc tu hrá výraz $\dot{q}^b\dot{q}^c$.) Detailne:

$$\begin{aligned}
2(X_{acb} - X_{bac})\ \dot{q}^b\dot{q}^c &\stackrel{(26)}{=} ((X_{acb} + X_{abc}) - (X_{bac} + X_{cab}))\ \dot{q}^b\dot{q}^c \\
&= ((X_{acb} - X_{cab}) + (X_{abc} - X_{bac}))\ \dot{q}^b\dot{q}^c \\
&\stackrel{(11)}{=} (0 + 0)\ \dot{q}^b\dot{q}^c \\
&= 0
\end{aligned}$$

Takže hotovo, tvrdenie (1) platí.

1.2 Pomocné tvrdenia, na ktoré sa pri výpočte (dôkaze) odvolávam

Tu vymenujem technické fakty, ktoré sa využívajú pri výpočte. Prvá časť (až po (26)) je spomenutá v nultej kapitole, v indexovej časti na začiatku. Na tie ďalej zase treba vedieť (len) derivovať :-) a používať sumačnú konvenciu. (Posledná je definícia.)

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\ x_j = \delta_{ij} \tag{20}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\ (k_j x_j) = k_i \tag{21}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\ \left(\frac{1}{2} A_{jk} x_j x_k\right) = A_{ij} x_j \tag{22}$$

$$V_{ij} = \frac{1}{2}(V_{ij} + V_{ji}) + \frac{1}{2}(V_{ij} - V_{ji}) \equiv S_{ij} + A_{ij} \tag{23}$$

$$S_{ij} = S_{ji} \qquad A_{ij} = -A_{ji} \tag{24}$$

$$\mathcal{A}_{ij}\mathcal{S}_{ij} = 0 \tag{25}$$

$$V_{ij}\mathcal{S}_{ij} = S_{ji}\mathcal{S}_{ij} \quad , \quad V_{ij}\mathcal{A}_{ij} = A_{ji}\mathcal{A}_{ij} \tag{26}$$

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(q^1, \ldots, q^n) \tag{27}$$

$$\mathbf{v}_k \equiv \dot{\mathbf{r}}_k = \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q^a}\ \dot{q}^a \tag{28}$$

$$\mathbf{v}_k^2 = \dot{\mathbf{r}}_k^2 \equiv \dot{\mathbf{r}}_k\ .\ \dot{\mathbf{r}}_k = \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q^a}.\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q^b}\ \dot{q}^a \dot{q}^b \tag{29}$$

$$\mathbf{a}_k \equiv \ddot{\mathbf{r}}_k = \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q^a}\ \ddot{q}^a + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_k}{\partial q^a \partial q^b}\ \dot{q}^a \dot{q}^b \tag{30}$$

$$\mathbf{p}_k = m_k \dot{\mathbf{r}}_k \tag{31}$$

$$\dot{\mathbf{p}}_k = m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = m_k \mathbf{a}_k = m_k \left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q^a}\ \ddot{q}^a + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_k}{\partial q^a \partial q^b}\ \dot{q}^a \dot{q}^b\right) \tag{32}$$

$$\bar{a}.\bar{b} = \mathbf{a}_1.\mathbf{b}_1 + \cdots + \mathbf{a}_N.\mathbf{b}_N \equiv \sum_{k=1}^{N} \mathbf{a}_k.\mathbf{b}_k \tag{33}$$

2 A ako sa príde na to, čo treba dokazovať?

Hlavné dokazované tvrdenie (1) pôsobí dojmom, že spadlo z neba. Ako sa dá prísť na to, že by také niečo mohlo platiť? Ukazuje sa, že to nie je až také ťažké. Skôr naopak, cesta k tomu je veľmi prirodzená. Stačí preniesť vo výraze vľavo

$$\dot{\bar{p}} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^a} \tag{34}$$

bodku z prvého člena na druhý a potom dopočítať vzniknuté výrazy.
Prenesenie:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{p}} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^a} &= \frac{d}{dt}\left(\bar{p} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^a}\right) - \bar{p} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^a} && (35) \\ &\equiv \frac{d}{dt} A_a - B_a && (36) \end{aligned}$$

Dopočítanie:

$$\begin{aligned} \bar{p} &= (m_1 \dot{\mathbf{r}}_1, \ldots, m_N \dot{\mathbf{r}}_N) && (37) \\ &= \left(m_1 \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q^b}, \ldots, m_N \frac{\partial \mathbf{r}_N}{\partial q^b}\right) \dot{q}^b && (38) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial q^a} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q^a}, \ldots, \frac{\partial \mathbf{r}_N}{\partial q^a}\right) \tag{39}$$

Potom

$$\begin{aligned} A_a &= \left(\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q^b} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q^a}\right) \dot{q}^b && (40) \\ &\equiv T_{ba}(q) \dot{q}^b && (41) \end{aligned}$$

kde $T_{ba}(q)$ je presne matica („kinetickej energie") definovaná rovnicou (6). (K tomuto výrazu sa ešte vrátime).

Poďme sa teraz venovať úprave výrazu B_a. Keďže, ako vidíme zo zápisu $\mathbf{r}_k(q)$, polohy $\mathbf{r}_k$ sú funkcie q, aj ich derivácie $\partial \mathbf{r}_k(q)/\partial q^a$ sú funkcie q. To znamená, že

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^a} &= \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q^a \partial q^b} \dot{q}^b && (42) \\ &\equiv \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}_1}{\partial q^a \partial q^c}, \ldots, \frac{\partial^2 \mathbf{r}_N}{\partial q^a \partial q^c}\right) \dot{q}^c && (43) \end{aligned}$$

Keď to teraz vynásobíme (s cieľom získať výraz B_a) skalárne vektorom $\bar{p}$ v tvare (38), dostaneme

$$\begin{aligned} B_a &= \left(\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q^b} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_k}{\partial q^a \partial q^c} \right) \dot{q}^b \dot{q}^c && (44) \\ &\equiv X_{acb}(q) \dot{q}^b \dot{q}^c && (45) \end{aligned}$$

kde X_{acb} sa definovalo v (9). Zatiaľ je teda výsledok taký, že platí (36), pričom pre výrazy A_a a B_a máme vyjadrenia (40), (41) a (45):

$$\begin{aligned} \dot{\bar{p}} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^a} &= \frac{d}{dt} A_a - B_a && (46) \\ &= \frac{d}{dt} (T_{ba}(q) \dot{q}^b) - X_{acb}(q) \dot{q}^b \dot{q}^c && (47) \end{aligned}$$

Ak sa tomuto vyjadreniu zahľadíme bližšie do očí, spozorujeme, že by sa to dalo zapísať *jednoduchšie*, ak by sme chápali premenné q^a a $\dot{q}^a$ ako *nezávislé*. Naozaj, ak by to tak bolo a ak vezmeme do úvahy symetriu (11) a súvis (12) medzi $T_{ab}(q)$ a $X_{abc}(q)$, dostaneme

$$\begin{aligned} \dot{\bar{p}} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^a} &= \frac{d}{dt} \left(T_{ba}(q) \dot{q}^b\right) - X_{acb}(q) \dot{q}^b \dot{q}^c && (48) \\ &= \frac{d}{dt} (T_{ba}(q) \dot{q}^b) - \frac{1}{2} \left(X_{acb}(q) + X_{abc}(q)\right) \dot{q}^b \dot{q}^c && (49) \\ &= \frac{d}{dt} (T_{ba}(q) \dot{q}^b) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial T_{bc}}{\partial q^a} \right) \dot{q}^b \dot{q}^c && (50) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^a} \left(\frac{1}{2} T_{bc}(q) \dot{q}^b \dot{q}^c \right) \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial T_{bc}(q) \dot{q}^b \dot{q}^c}{\partial q^a} \right) && (51) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^a} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^a} && (52) \end{aligned}$$

Takže sa prijme *dohoda*, že keď chceme rozpočítať posledný výraz na drobné, *máme* chápať premenné q^a a $\dot{q}^a$ ako *nezávislé*. V tom (a *len v tom*) prípade platí identita (1), ktorá umožňuje napísať Lagrangeove rovnice v jednoduchom a elegantnom tvare

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^a} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^a} = Q_a \qquad (53)$$