# Cvičenie 10

## Písomka

Nájdite frekvencie a módy malých kmitov sústavy s lagranžiánom
$L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3k & k \\ k & 3k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,
ktorý zodpovedá sústave dvoch hmotných bodov $m$ pripevnených medzi vodorovné pružinky s tuhosťami $2k$, $k$ a $2k$. Napíšte aj všeobecné riešenie.

## Prepočítané príklady

- Malé kmity Foucaultovho kyvadla 9.10 (výpočet na konci pdf)

## Domáca úloha (bodovaná, namiesto písomky)

- 2 príklady tu.
  Úlohu vypracujte čitateľne, odfoťte/oskenujte a pošlite ako jedno pdf na môj email najneskôr 3.12. do začiatku cvičenia o 9:50.

## Domáca úloha (nepovinná)

- Príklady 9.5 - 9.9 zo zbierky
- Ďalšie príklady tu (Riešenie druhého príkladu tu)

## Treba si zapamätať

- Sily v neinerciálnej sústave:

$$m\vec{a} = \vec{F} \underbrace{-m\vec{A}}_{\text{Zotrvač}} \underbrace{-2m(\vec{\omega} \times \vec{v})}_{\text{Coriolis}} \underbrace{-m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}}_{\text{Euler}} \underbrace{-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{Odstreď}}$$

- Kuchynský recept na malé kmity:
  1. $T, U \longrightarrow L = T - U$
  2. rovnovážna poloha (minimum potenciálnej energie): bod $q_0 = (q_0^1, q_0^2, \cdots q_0^n)$
  3. Taylorov rozvoj U okolo rovnovážnej polohy:
     $U = U(q_0) + \partial_a U|_{q_0}(q^a - q_0^a) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial q^a \partial q^b}|_{q_0}(q^a - q_0^a)(q^b - q_0^b) + ...$, kde $\partial_a U|_{q_0} = 0$,
     potom $M_{ab} = T_{ab}(q_0)$, $K_{ab} = \frac{\partial^2 U}{\partial q^a \partial q^b}|_{q_0}$

4. $L = \frac{1}{2} M_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b - \frac{1}{2} K_{ab} x^a x^b$ pre $x^a = q^a - q^a_0$ (nové súradnice s počiatkom v rovnovážnej polohe)

5. Lagrangeove rovnice: $M_{ab} \ddot{x}^b + K_{ab} x^b = 0$

6. ansatz $\begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ \vdots \\ x^n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^1 \\ k^2 \\ \vdots \\ k^n \end{pmatrix} cos(\omega t + \alpha)$

   dosadený do Lagrangeových rovníc dáva sústavu rovníc

   (musí platiť pre $\forall t$, teda aj pre $t = 0$): $\Big(K - \omega^2 M\Big) \begin{pmatrix} k^1 \\ k^2 \\ \vdots \\ k^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

7. Sústava má nenulové riešenie ($\forall k^i$ nie sú naraz $= 0$) len pre $\omega^2$ spĺňajúce $det(K - \omega^2 M) = 0$. Riešenie rovnice dáva charakteristické frekvencie módov $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n$.

8. Pre každú frekvenciu $\omega_i$ existuje stĺpček amplitúd $(k^1_i, k^2_i, \cdots k^n_i)^T$ z bodu 6 získaný dosadením $\omega_i$ do sústavy rovníc z bodu 6.

9. i. mód: $\begin{pmatrix} x^1_i(t) \\ x^2_i(t) \\ \vdots \\ x^n_i(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^1_i \\ k^2_i \\ \vdots \\ k^n_i \end{pmatrix} cos(\omega_i t + \alpha_i)$

10. Všeobecné riešenie je lineárnou kombináciou všetkých módov:

    $\begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ \vdots \\ x^n(t) \end{pmatrix} = \sum_i a_i \begin{pmatrix} k^1_i \\ k^2_i \\ \vdots \\ k^n_i \end{pmatrix} cos(\omega_i t + \alpha_i)$

    Neznáme konštanty $a_i$, $\alpha_i$ nájdeme z počiatočných podmienok.

9.10 Foucaultovo kyvadlo

8.3 sférické kyvadlo v priblížení malých kmitov ($\dot{z}=0$) $\Rightarrow$ $z=$ konšt.

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\frac{1}{2}m\frac{g}{l}(x^2+y^2)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}=0 \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}-\frac{\partial L}{\partial y}=0$$

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}+mg\frac{x}{l}&=0\\ \underbrace{m\ddot{y}+mg\frac{y}{l}}&=0\end{aligned}\right\}\text{ v inerciálnej sústave}$$

$$m\ddot{\vec{r}}+mg\frac{\vec{r}}{l}=0 \qquad \vec{r}=(x,y) \qquad \omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}}$$

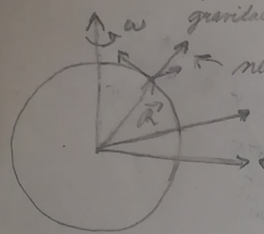
9.6 sily v neinerciálnej sústave

$$m\ddot{\vec{r}}=\underset{\text{gravitačná}}{\vec{F}}-m\vec{A}-2m\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}-m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

korekcia na pohyb okolo Slnka – zanedbáme oproti Coriolisovej

$\vec{\omega}=$ konšt., Eulerova $=0$

odstredivá: oprava ku gravitačnej, dostaneme tiažovú

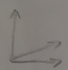


neinerciálna sústava č. 2

neinerciálna sústava č. 1

$\vec{r}=\vec{R}+\vec{r}\,'$ ← v sústave č. 2

v sústave č. 1 $\dot{\vec{R}}=\ddot{\vec{R}}=0$



← laboratórna (inerciálna) sústava

$$m\ddot{\vec{r}}\,'=\vec{F}-2m\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}\,'-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times(\underbrace{\vec{R}+\vec{r}\,'}_{\approx\vec{R},\text{ lebo } r'\ll R}))\doteq\underbrace{(\vec{F}-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R}))}_{\text{tiažová sila } \propto mg,}-2m\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}\,'$$

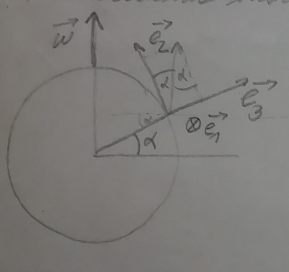
použili sme ju aj v inerciálnej sústave

$\Rightarrow$ pre malé kmity (rozvoj V do 2. rádu dal $\ddot{z}'=0$):

$$\underbrace{m\ddot{\vec{r}}\,'+mg\frac{\vec{r}\,'}{l}}_{\text{z inerciálnej sústavy, 2 rovnice}}=-\left(2m\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}\,'\right)_{x'y'}$$

← $\vec{r}\,'=(x',y')$, $z'=$ konšt. $\Rightarrow$ rovinný problém

$\Rightarrow$ neinerciálna sústava č. 2 = lokálne súradnice na Zemi ($x'$ po rovnobežke na V, $y'$ na S po poludníku, $z'$ kolmo)



$$\vec{\omega}=\omega(0\,\vec{e}_1+\cos\alpha\,\vec{e}_2+\sin\alpha\,\vec{e}_3)$$

$$\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}\,'=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha\\ \dot{x}' & \dot{y}' & 0\end{vmatrix}\omega=\omega\vec{e}_1(-\dot{y}'\sin\alpha)+\omega\vec{e}_2\,\dot{x}'\sin\alpha+\underbrace{\omega\vec{e}_3(-\dot{x}'\cos\alpha)}$$

↖ $\dot{z}'=0$

malé oproti tiažovej v smere $\vec{e}_3$, zanedbali by sme už pred priblížením malých kmitov

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\ddot{x}'\\ \ddot{y}'\end{pmatrix}+\omega_0^2\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}-\omega\dot{y}'\sin\alpha\\ \omega\dot{x}'\sin\alpha\end{pmatrix} \qquad \omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}}=\frac{1}{t_0}$$

← pohybové rovnice v neinerciálnej sústave

$\Rightarrow$ bezrozmerné premenné

$$\xi=\frac{x'}{l} \qquad \eta=\frac{y'}{l} \qquad \tau=\frac{t}{t_0}=\omega_0 t$$

s čiarkou — derivácie podľa $\tau$

$$\Rightarrow \xi''+\xi=2\frac{\omega}{\omega_0}\sin\alpha\,\eta' \qquad \eta''+\eta=-2\frac{\omega}{\omega_0}\sin\alpha\,\xi'$$

$$\varepsilon=2\frac{\omega}{\omega_0}\sin\alpha$$

$$\xi''+\xi=\varepsilon\eta' \qquad \eta''+\eta=-\varepsilon\xi'$$

$\Rightarrow \varepsilon: \quad |\varepsilon| = \left|\frac{2\omega}{\omega_0}\sin\lambda\right| \leq \left|2\frac{\omega}{\omega_0}\right| = 2\frac{\omega}{\sqrt{\frac{g}{l}}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\,\omega \doteq 2\frac{2\pi}{24\cdot 3600} \approx 10^{-4}$

pre $l \doteq 10\,m$, $g \doteq 10\,ms^{-2}$

$\Downarrow$ môžeme použiť v poruchovej metóde

$\Rightarrow$ nová premenná: $\rho = \xi + i\eta$

$$\rho'' + \rho = -i\varepsilon\rho' \Rightarrow \rho(\tau) = Ae^{B\tau}$$

$$B^2 + i\varepsilon B + 1 = 0$$

$$B = \frac{-i\varepsilon \pm \sqrt{-\varepsilon^2 - 4}}{2} \doteq -\frac{i\varepsilon}{2} \pm i$$

alebo $\quad B = B_0 + \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + \dots$

$$(B_0 + \varepsilon B_1 + \dots)^2 + i\varepsilon(B_0 + \varepsilon B_1 + \dots) + 1 = 0$$

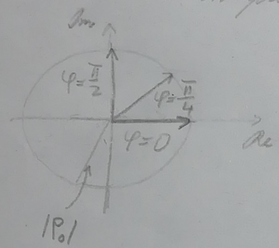
$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon^0: \; B_0^2 + 1 = 0 \rightarrow B_0 = \pm i \\ \varepsilon^1: \; 2B_0B_1 + iB_0 = 0 \rightarrow B_1 = -\frac{i}{2} \end{array}\right\} \rho(\tau) \doteq e^{-\frac{i\varepsilon\tau}{2}}\left(Ae^{i\tau} + Ce^{-i\tau}\right)$$

$\Rightarrow$ bez Coriolisovej sily: $\rho = \rho_0(\tau) = Ae^{i\tau} + Ce^{-i\tau}$

s Coriolisovou silou:

$$\rho = |\rho_0|\underbrace{e^{i\,Arg(\rho_0)}\,e^{-\frac{i}{2}\varepsilon\tau}}_{\varphi = \text{ fáza komplexného čísla } (e^{i\varphi})} = e^{-\frac{i\varepsilon\tau}{2}}\left(Ae^{i\tau} + Ce^{-i\tau}\right)$$

veľkosť komplexného čísla




$\Rightarrow$ keď $\varphi$ závisí od času, dostávame točenie v komplexnej rovine (u nás je na reálnej osi $\xi$ a na imaginárnej $\eta$, teda dostávame skutočné otáčanie v priestore)

$\Rightarrow$ kyvadlo pustené zo S s nulovou počiatočnou rýchlosťou

$\rho(0) = 0 + i\tilde{\eta}_0 \qquad \rho'(0) = 0 + i0$

$\rho(0) = A + C = i\tilde{\eta}_0$

$A = i\tilde{\eta}_0 - C \qquad \rho'(0) = -\frac{i\varepsilon}{2}A + iA - \frac{i\varepsilon}{2}C - iC = 0$

$$\frac{\varepsilon}{2}(A + C) = A - C = \frac{i\varepsilon}{2}\tilde{\eta}_0$$

$$i\tilde{\eta}_0 - 2C = \frac{i\varepsilon}{2}\tilde{\eta}_0 \rightarrow C = i\frac{\tilde{\eta}_0}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$A = \frac{i\tilde{\eta}_0}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$\Rightarrow \rho_0 = \frac{i\tilde{\eta}_0}{2}\left(e^{i\tau} + e^{-i\tau}\right) = i\tilde{\eta}_0\cos(\tau)$

$\Rightarrow \xi_0(\tau) = 0$

$\eta_0(\tau) = \tilde{\eta}_0\cos(\tau) \Rightarrow$ kmitanie v rovine zo S na J

$\Rightarrow Arg(\rho_0)$ neovplyvňuje stáčanie

$\Rightarrow$ otočenie o $2\pi$ : $\varphi = 2\pi \Rightarrow \frac{\varepsilon\tilde{\tau}}{2} = 2\pi \rightarrow \tilde{\tau} = \omega_0 T \Rightarrow T = \frac{4\pi}{\varepsilon\omega_0} = \frac{4\pi}{2\omega}\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1\,\text{deň}}{\sin\alpha}$

$$\Rightarrow \varphi(\tau) = \frac{i\tilde{\xi}_0}{2}\left(e^{i\tau}+e^{-i\tau}\right)e^{-\frac{i\varepsilon\tau}{2}} + \frac{i\tilde{\xi}_0\varepsilon}{4}\left(e^{i\tau}-e^{-i\tau}\right)e^{-\frac{i\varepsilon\tau}{2}} =$$

$$= i\tilde{\xi}_0 \cos\tau\, e^{-\frac{i\varepsilon\tau}{2}} - \frac{\tilde{\xi}_0\varepsilon}{2}\sin\tau\, e^{-\frac{i\varepsilon\tau}{2}} =$$

$$= \left(i\tilde{\xi}_0\cos\tau - \frac{\tilde{\xi}_0\varepsilon}{2}\sin\tau\right)\left(\cos\left(\frac{\varepsilon\tau}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\varepsilon\tau}{2}\right)\right)$$

$$\xi(\tau) = \tilde{\xi}_0\cos\tau\sin\left(\frac{\varepsilon\tau}{2}\right) - \frac{\tilde{\xi}_0\varepsilon}{2}\sin\tau\cos\left(\frac{\varepsilon\tau}{2}\right)$$

$$\eta(\tau) = \tilde{\xi}_0\cos\tau\cos\left(\frac{\varepsilon\tau}{2}\right) + \frac{\tilde{\xi}_0\varepsilon}{2}\sin\tau\sin\left(\frac{\varepsilon\tau}{2}\right)$$

$$x(t) = y(0)\cos(\omega_0 t)\sin(\omega\sin\alpha\, t) - y(0)\sin\alpha\frac{\omega}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\cos(\omega\sin\alpha\, t)$$

$$y(t) = y(0)\cos(\omega_0 t)\cos(\omega\sin\alpha\, t) + y(0)\sin\alpha\frac{\omega}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\sin(\omega\sin\alpha\, t)$$

$\Rightarrow$ na S pologuli $\rightarrow \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \sin\alpha > 0 \Rightarrow x(t)$

na J pologuli $\rightarrow \alpha \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \rightarrow \sin\alpha < 0 \Rightarrow x(t) \mapsto -x(t) \Rightarrow$ točenie do opačnej strany

$\Rightarrow$ na S póle $\rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$

$$x(t) = y(0)\cos(\omega_0 t)\sin(\omega t) - y(0)\frac{\omega}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\cos(\omega t)$$

$$y(t) = y(0)\cos(\omega_0 t)\cos(\omega t) + y(0)\frac{\omega}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\sin(\omega t)$$

↳ pozorovateľ nestojaci na točiacej sa Zemi vidí kyvadlo, ktoré sa kýve stále v rovnakej rovine a pod ním sa otáča Zem