

## Cvičenie 5

### Písomka

Napište lagranžián a pohybové rovnice k úlohe o rovinnom matematickom kyvadle ( $m, L$ ), ktorého bod závesu sa pohybuje po x-ovej osi predpísaným spôsobom:  $X_z(t) = X_0 \sin(\omega t)$ ,  $\omega = \text{const}$ .

### Prepočítané príklady

Na cvičení sme rátali príklady 4.3 zo zbierky. Okrem toho sme využili variačný princíp na nájdenie tvaru rotujúceho švihadla a nájdenie tvaru mydlovej blany natiahnutej medzi dvomi kružnicami.

- Švihadlo:

- (a) Nájdite rovnicu, ktorá popisuje tvar homogénneho švihadla s dĺžkou  $l$  a hmotnosťou  $m$  rotujúceho bez vplyvu gravitácie (vo vesmíre) a bez trenia konštantnou uhlovou rýchlosťou  $\omega$  okolo vodorovnej osi  $y$ , na ktorej sú jeho konce ukotvené.

Návod:

1. Prejdite do sústavy otáčajúcej sa uhlovou rýchlosťou  $\omega$  rovnako ako švihadlo. V tejto sústave je situácia statická, ale pôsobí tam odstredivá sila. Ukážte, že odstredivá sila je potenciálová a  $U = -(1/2)m\omega^2 r_{\perp}^2$ .
2. Ukážte, že funkcionál, ktorý treba extremalizovať, je:

$$\psi[x, z] = \int_{y_1}^{y_2} dy \left[ \sqrt{x'^2 + z'^2 + 1} \left( \lambda - \frac{1}{2} \rho \omega^2 (x^2 + z^2) \right) \right]$$

3. Argumentujte, prečo je možné úlohu riešiť v rovine.
4. Dobojujte to k diferenciálnej rovnici (využite zákon zachovania!!):

$$\frac{\lambda - \frac{1}{2} \rho \omega^2 x^2}{\sqrt{x'^2 + 1}} = Q$$

- (b) Krivka, ktorá je riešením rovnice sa volá troposkeina. Rovnicu nevieme zintegrovat' v elementárnych funkciách. Koľko konštánt by bolo potrebné zafixovať, keby sme vedeli? Aké podmienky by fixovali tieto konštanty? Ukážte, že tvar troposkeiny nezávisí na hustote lana ani na rýchlosti točenia švihadla (Návod: vhodne zapíšte konštanty  $\lambda, Q$ ).

## Domáca úloha

- dokončiť príklady zo zbierky 4.4 a 4.5
- časť b) zo zadania úlohy o švihadle
- príklad 2 z časti 3: Ďalšie príklady
- príklady s výsledkami: 1
- prečítať si niečo o Lagrangeových multiplikátoroch
- pozrieť si príklady 5.3, prípadne aj 5.4 a 5.4 zo zbierky

## Treba si zapamätať

- Účinkový integrál vo fyzike:  $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q^a, \dot{q}^a, t) dt$
- Prekladový slovník pre variačný počet (hľadanie extrémov funkcionálov):  $t \rightarrow x, q \rightarrow y, \dot{\phantom{y}} \rightarrow y'$
- Účinkový integrál vo variačnom počte:  $S = \int_{x_A}^{x_B} \mathcal{L}(y, y', x) dx$
- Za každú väzbu  $V = \int_{x_A}^{x_B} g(y, y', x) dx$  pribudne nový člen do lagranžiánu s jedným Lagrangeovým multiplikátorom (pre každú väzbu vlastný multiplikátor):  $\mathcal{L}_\lambda = \mathcal{L} + \lambda g(y, y', x)$
- Eulerove rovnice:  $\frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0$
- Cykličnosť x:  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} y' - \mathcal{L} = const.$