Cvičenie 6

Písomka

Pre zadaný účinok $S = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + (y')^2} dx$ nájdite funkciu $y(x)$, ktorá ho extremalizuje a zároveň spĺňa väzbu $\sigma = \int_{x_A}^{x_B} y(x) dx$ a okrajové podmienky $y(x_A) = y_A$, $y(x_B) = y_B$. Napíšte, ako by ste vypočítali neznáme konštanty.

Prepočítané príklady

- Hamiltonián + rovnice pre sústavu dvoch hmotných bodov, z ktorých je jeden viazaný na vodorovnú os x a visí na ňom matematické kyvadlo (L, m), ktoré sa kýve v zvislej rovine xy.
- Hamiltonián pre dva hmotné body - jeden viazaný na kružnici v rovine xy a druhý viazaný na osi z - spojené pružinkou.
- Fázový portrét pre hmotný bod v potenciáli $U = -\frac{\kappa M m}{r}$.

Domáca úloha

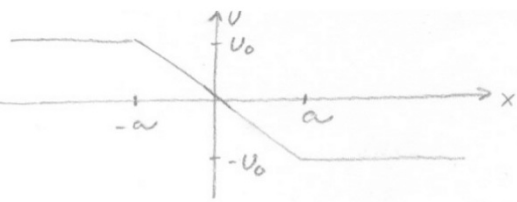
- 5.3 pre 3a.3, 3a.4, 3a.7, 3a.9, 3a.11 (niektoré výsledky tu)
- 5.4
- Fázový portrét pre časticu v jednorozmernom potenciáli (riešenie je na konci tohto pdf):

$$U(x) = \begin{cases} U_0 & x < -a \\ -\frac{U_0}{a} x & |x| < a \\ -U_0 & x > a \end{cases}$$

Treba si zapamätať

- Hamiltonián: $H(q, p, t) = p_i \dot{q}^i(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t) = \frac{1}{2}(p)\left(T^{-1}\right)(p) + U$
- Zovšeobecnená hybnosť: $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$
- Hamiltonove rovnice:
  - ⋆ $\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$
  - ⋆ $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$
- Fázový portrét: $H = E = const.$, riešenia Hamiltonových rovníc vo fázovom priestore.

$$U(x) = \begin{cases} V_0 & x < -a \\ -\frac{V_0}{a}x & |x| < a \\ -V_0 & x > a \end{cases}$$



$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - U(x)$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \rightarrow \quad H = \frac{p^2}{2m} + U(x) \quad \rightarrow \quad E = konšt. = \frac{p^2}{2m} + U(x) \quad \rightarrow \quad p = \pm\sqrt{2m(E - U(x))}$$

$$p(x) = \begin{cases} \pm\sqrt{2m(E - V_0)} & x < -a \quad \dots \quad E - V_0 \geq 0 \Rightarrow E \geq V_0 & (E = V_0 \dots p = 0) \\ \pm\sqrt{2m\left(E + \frac{V_0}{a}x\right)} & |x| < a \quad \dots \quad E + \frac{V_0}{a}x \geq 0 \Rightarrow E \geq -\frac{V_0}{a}x & \left(\begin{matrix} x=-a \\ E=V_0 \end{matrix}\; p=0 \;\middle|\; \begin{matrix} x=a \\ E=-V_0 \end{matrix}\; p=0\right) \\ \pm\sqrt{2m(E + V_0)} & x > a \quad \dots \quad E + V_0 \geq 0 \Rightarrow E \geq -V_0 & (E = -V_0 \dots p = 0) \end{cases}$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \Rightarrow \begin{cases} p > 0 \dots \dot{x} > 0 \Rightarrow x \text{ rastie s časom } t \\ p < 0 \dots \dot{x} < 0 \Rightarrow x \text{ klesá s časom } t \end{cases}$$