

Cvičenie 8

Písomka

$$\{\vec{r} \cdot \vec{p}, p^2\}$$

Prepočítané príklady

- 6.12
- Malé kmity dvojného matematického kyvadla

Domáca úloha

- Príklad 2 z časti 4 tu
- Príklady 4 a 5 z časti 5 tu
- 6.11 - 6.14
- Časť 7 tu
- Príklady tu

Treba si zapamätať

- Škálovanie: $L \mapsto \lambda L$ nemení pohybové rovnice.
- Kuchynský recept na malé kmity:

1. $T, U \longrightarrow L = T - U$

2. rovnovážna poloha (minimum potenciálnej energie): bod $q_0 = (q_0^1, q_0^2, \dots, q_0^n)$

3. Taylorov rozvoj U okolo rovnovážnej polohy:

$$U = U(q_0) + \partial_a U|_{q_0} (q^a - q_0^a) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial q^a \partial q^b} |_{q_0} (q^a - q_0^a)(q^b - q_0^b) + \dots, \text{ kde } \partial_a U|_{q_0} = 0,$$

potom $M_{ab} = T_{ab}(q_0)$, $K_{ab} = \frac{\partial^2 U}{\partial q^a \partial q^b} |_{q_0}$

4. $L = \frac{1}{2} M_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b - \frac{1}{2} K_{ab} x^a x^b$ pre $x^a = q^a - q_0^a$ (nové súradnice s počiatkom v rovnovážnej polohe)

5. Lagrangeove rovnice: $M_{ab} \ddot{x}^b + K_{ab} x^b = 0$

6. ansatz
$$\begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ \vdots \\ x^n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^1 \\ k^2 \\ \vdots \\ k^n \end{pmatrix} \cos(\omega t + \alpha)$$

dosadený do Lagrangeových rovníc dáva sústavu rovníc

(musí platiť pre $\forall t$, teda aj pre $t = 0$):
$$(K - \omega^2 M) \begin{pmatrix} k^1 \\ k^2 \\ \vdots \\ k^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

7. Sústava má nenulové riešenie ($\forall k^i$ nie sú naraz = 0) len pre ω^2 spĺňajúce $\det(K - \omega^2 M) = 0$.
Riešenie rovnice dáva charakteristické frekvencie módov $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$.

8. Pre každú frekvenciu ω_i existuje stĺpček amplitúd $(k_i^1, k_i^2, \dots, k_i^n)^T$ z bodu 6 získaný dosadením ω_i do sústavy rovníc z bodu 6.

9. i. mód:
$$\begin{pmatrix} x_i^1(t) \\ x_i^2(t) \\ \vdots \\ x_i^n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_i^1 \\ k_i^2 \\ \vdots \\ k_i^n \end{pmatrix} \cos(\omega_i t + \alpha_i)$$

10. Všeobecné riešenie je lineárnou kombináciou všetkých módov:

$$\begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ \vdots \\ x^n(t) \end{pmatrix} = \sum_i a_i \begin{pmatrix} k_i^1 \\ k_i^2 \\ \vdots \\ k_i^n \end{pmatrix} \cos(\omega_i t + \alpha_i)$$

Neznáme konštanty a_i, α_i nájdeme z počiatočných podmienok.