# Cvičenie 9

## Písomka

Škálovaním lagranžiánu pre harmonický oscilátor $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$ zistite, ako sa zmení frekvencia kmitov oscilátora ak amplitúdu kmitov 2x zväčšíme.

## Prepočítané príklady

- Malé kmity systému 3a.7
- Malé kmity sférického kyvadla
- Malé kmity pružinového rovinného kyvadla

## Domáca úloha

- Časť 7 tu
- Príklady na malé kmity tu
- Nájdite frekvenciu malých kmitov fyzikálneho kyvadla - homogénnej paličky dĺžky $L$ a hmotnosti $M$.
- Vyriešte úlohu pre malé kmity guličky s hmotnosťou $m$ s daným lagranžiánom:
  $L = \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \left(\frac{h}{d^2}e^{\frac{x^2+4y^2}{d^2}}(x\dot{x} + 4y\dot{y})\right)^2\right] - \frac{1}{2}mghe^{\frac{x^2+4y^2}{d^2}}$.
  Parametre $h$ a $d$ opisujú tvar vaničky, v ktorej sa gulička pohybuje.
- Vyriešte úlohu pre malé kmity sústavy 3 hmotných bodov (s hmotnosťami v poradí $m$, $M$, $m$) a 4 vodorovných pružín (s tuhosťami $k$). Riešenie (kvalitatívne) skúste najprv uhádnuť. Čo by sa zmenilo, keby mali všetky hmotné body rovnakú hmotnosť?
- Príklady z druhej skupiny tu

## Treba si zapamätať

- Kuchynský recept na malé kmity:
  1. $T, U \longrightarrow L = T - U$
  2. rovnovážna poloha (minimum potenciálnej energie): bod $q_0 = (q_0^1, q_0^2, \cdots q_0^n)$

3. Taylorov rozvoj U okolo rovnovážnej polohy:

   $U = U(q_0) + \partial_a U|_{q_0}(q^a - q_0^a) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial q^a \partial q^b}|_{q_0}(q^a - q_0^a)(q^b - q_0^b) + ...$, kde $\partial_a U|_{q_0} = 0$,

   potom $M_{ab} = T_{ab}(q_0)$, $K_{ab} = \frac{\partial^2 U}{\partial q^a \partial q^b}|_{q_0}$

4. $L = \frac{1}{2}M_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b - \frac{1}{2}K_{ab}x^a x^b$ pre $x^a = q^a - q_0^a$ (nové súradnice s počiatkom v rovnovážnej polohe)

5. Lagrangeove rovnice: $M_{ab}\ddot{x}^b + K_{ab}x^b = 0$

6. ansatz $\begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ \vdots \\ x^n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^1 \\ k^2 \\ \vdots \\ k^n \end{pmatrix} cos(\omega t + \alpha)$

   dosadený do Lagrangeových rovníc dáva sústavu rovníc

   (musí platiť pre $\forall t$, teda aj pre $t = 0$): $\begin{pmatrix} K - \omega^2 M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k^1 \\ k^2 \\ \vdots \\ k^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

7. Sústava má nenulové riešenie ($\forall k^i$ nie sú naraz $= 0$) len pre $\omega^2$ spĺňajúce $det(K - \omega^2 M) = 0$. Riešenie rovnice dáva charakteristické frekvencie módov $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n$.

8. Pre každú frekvenciu $\omega_i$ existuje stĺpček amplitúd $(k_i^1, k_i^2, \cdots k_i^n)^T$ z bodu 6 získaný dosadením $\omega_i$ do sústavy rovníc z bodu 6.

9. i. mód: $\begin{pmatrix} x_i^1(t) \\ x_i^2(t) \\ \vdots \\ x_i^n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_i^1 \\ k_i^2 \\ \vdots \\ k_i^n \end{pmatrix} cos(\omega_i t + \alpha_i)$

10. Všeobecné riešenie je lineárnou kombináciou všetkých módov:

    $\begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ \vdots \\ x^n(t) \end{pmatrix} = \sum_i a_i \begin{pmatrix} k_i^1 \\ k_i^2 \\ \vdots \\ k_i^n \end{pmatrix} cos(\omega_i t + \alpha_i)$

    Neznáme konštanty $a_i$, $\alpha_i$ nájdeme z počiatočných podmienok.