

Obsah

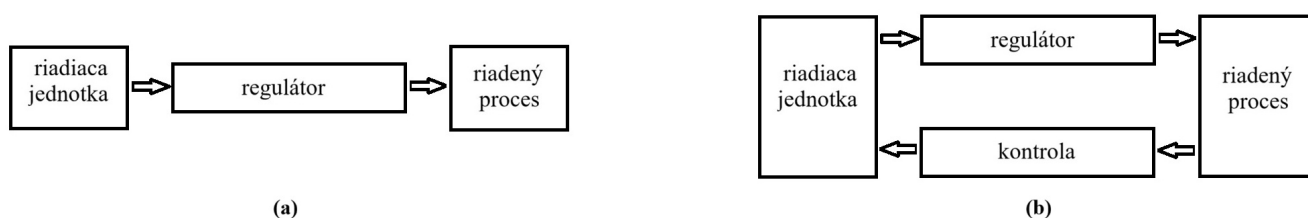
1	NÁČRT ANALÝZY RIADIACICH SYSTÉMOV.	1
1.1	Bloková schéma.	1
1.2	Linearita systému.	2
1.3	Laplaceovská reprezentácia systému.	3
2	ZÁKLADNÉ BLOKY RIADIACICH SYSTÉMOV.	6
2.1	Jednoduchý systém 1. rádu.	6
2.2	Systém 1. rádu s nulovým bodom.	9
2.3	Jednoduchý systém 2. rádu.	11
2.4	Zložitejšie systémy.	14
3	SYSTÉMY SO SPÄTNOU VÄZBOU.	16
3.1	Spájanie blokov a slučka spätnej väzby.	16
3.2	Transfigurácia blokovej schémy.	17
3.3	Operačný zosilňovač so spätnou väzbou.	18
3.4	Presnosť regulácie v systéme so spätnou väzbou.	20
3.5	Póly slučky spätnej väzby.	21
A	Slovník Laplaceovej transformácie	25
B	Rozklad na parciálne zlomky	26
C	Metóda uzlových potenciálov	26
D	Fázový posúvač	28

1 NÁČRT ANALÝZY RIADIACICH SYSTÉMOV.

1.1 Bloková schéma.

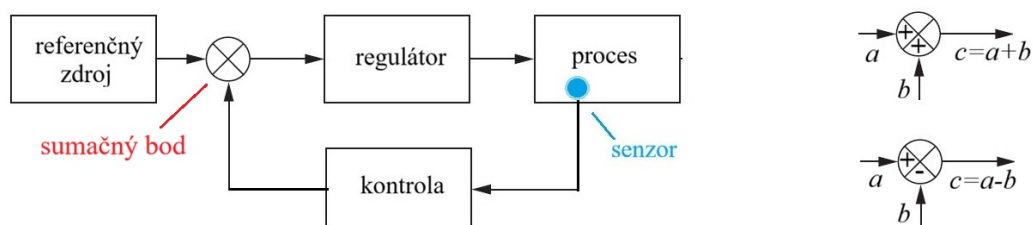
Bloková schéma systému je grafické zobrazenie šírenia signálu medzi jednotlivými funkčnými prvkami systému - **blokami**. Neobsahuje pritom technické detaily jednotlivých blokov, ale ilustruje dynamiku systému ako celku.

Principiálna bloková schéma najjednoduchšieho systému riadenia procesov (obr. a), pracujúceho s pevne stanovenými vstupnými parametrami (vstupný signál z riadiacej jednotky) regulujúcimi riadený proces, bez možnosti monitorovania *aktuálnych* parametrov procesu, obsahuje jedinú *priamu* vetvu. (Týmto spôsobom pracuje väčšina zariadení domácnosti, ako pračka, mikrovlnka, atď.)

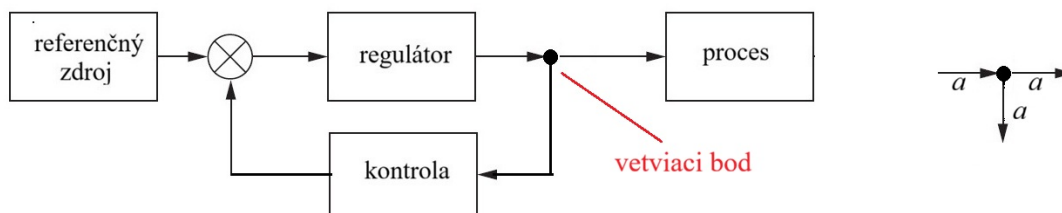


Podstatou moderného automatizovaného riadenia technologického procesu je však zabezpečenie požadovaných hodnôt premenných (fyzikálnych veličín) určujúcich priebeh procesu prostredníctvom monitorovania týchto hodnôt a *korekcií* prípadných odchýlok. Bloková schéma takéhoto systému (obr. b) preto musí predstavovať slučku so **spätnou väzbou** (SV): Priama vetva *operatívne* nastavuje požadované hodnoty premenných v danom procese na základe snímaných *aktuálnych* hodnôt týchto premenných, dodávaných riadiacej jednotke *spätnou* vetvou.

Ak je riadiacou jednotkou počítač, sú potrebné rozhrania a prevodníky pre jeho komunikáciu s oboma vetvami, spracovávajúcimi *analogové* signály (veličiny). Veľmi často si však vystačíme s jednoduchým (a lacným) plne analogovým riadením, plnohodnotne zabezpečujúcim požadované parametre procesu. (Typickým príkladom je riadenie vykurovania pomocou termostatu.) Principiálna schéma (obr.) v takomto prípade obsahuje (analogový) **sumačný bod**, v ktorom sa **referenčný signál** z riadiaceho zdroja (t.j. signál určujúci *požadovanú* hodnotu regulovaného parametra) zlučuje (sčítava alebo odčítava) s **kontrolným signálom** (reprezentujúcim *meranú* aktuálnu hodnotu regulovaného parametra).



Tento sumačný bod je realizovaný (spravidla ako súčasť regulátora) tak, aby signál zo SV korigoval nežiadúce odchýlky monitorovanej veličiny. Ak sú parametre procesu jednoznačne určené signálom z regulátora, zaniká potreba samostatného senzora, a kontrolný signál môžeme odvodiť priamo z výstupu regulátora prostredníctvom **vetviaceho bodu** (obr.) prepúšťajúceho signál do dvoch alebo viacerých vetiev s *nezmenenou* veľkosťou (napr. amplitúdou napätia, *nie* výkonom).



Z povahy tejto slučky vyplýva, že prípadný nežiadúci *nárast* hodnoty regulovanej veličiny znamená *kladný* prírastok kontrolného signálu. Ak by sa tento signál *sčítaval* s referenčným signálom - hovoríme vtedy o **kladnej SV**, regulátor by spôsobil neustále *zvyšovanie* hodnoty výstupu. Systém s kladnou SV má teda tendenciu k neobmedzenému nárastu výstupnej veličiny, čo znamená *nestabilitu* a nebezpečenstvo deštrukcie. Naopak, stabilizáciu výstupnej veličiny zabezpečuje **záporná SV**, pri ktorej sa kontrolný signál *odčítava* od referenčného. Prípadná odchýlka na výstupe (nárast/pokles) sa prejaví *opačným* pôsobením regulátora (pokles/nárast).

Uvedená schéma tvorí náčrt podstaty regulačných systémov. Tento náčrt však obsahuje viacero zamľčaných predpokladov a dôležitých detailov, ktoré v ďalšom texte postupne prediskutujeme.

1.2 Linearita systému.

Základným predpokladom, z ktorého budeme vychádzať v celom texte, je, že regulačný obvod pracuje v *lineárnom* režime. **Linearitu** systému definujeme pomocou dvoch základných vlastností:

Homogenita systému prenášajúceho/spracovávajúceho signál znamená, že pre jeho vstupný a výstupný signál, x resp. y , platí

$$y = Gx \quad x \rightarrow \alpha x \quad \Rightarrow \quad y \rightarrow G(\alpha x) = \alpha(Gx)$$

kde G je koeficient prenosu - **zosilnenie** systému.

Princíp superpozície znamená, že

$$x = x_1 + x_2 \quad \Rightarrow \quad y = G(x_1 + x_2) = Gx_1 + Gx_2$$

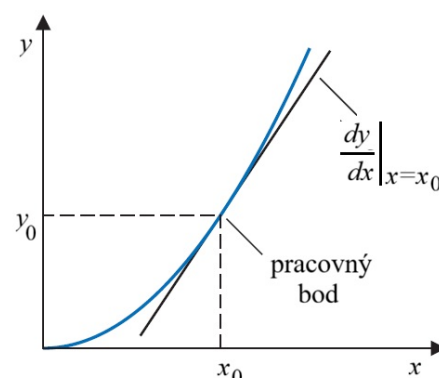
Linearita systémov je však len *idealizáciou* - každý reálny systém pri určitých (spravidla dostatočne vysokých) úrovniach signálu prejde do *nelineárneho* režimu - odkloní sa od lineárneho vzťahu $y = Gx$, prípadne dôjde k nasýteniu. (Aj najjednoduchší prvok - rezistor sa pri vysokom prúde zohreje a mení svoj odpor, $R \rightarrow R(i)$, a Ohmov zákon $v = R(i)i$ už *nie je* lineárnou funkciou $v(i)$.)

Každý systém však môžeme v dostatočne malom okolí vybraného **pracovného bodu** považovať za lineárny, rozvinutím do Taylorovho radu a zanedbaním vyšších členov,

$$y(x) = y_0 + \underbrace{\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=x_0}}_G (x - x_0) + \dots$$

$$\underbrace{(y - y_0)}_{\Delta y} = G \underbrace{(x - x_0)}_{\Delta x}$$

Uvažovaným vstupným a výstupným signálom sú potom *odchýlky* od hodnôt signálov v pracovnom bode uprostred linearizovanej oblasti.



Ak je systém lineárny (vo vyššie uvedenom zmysle), jeho dynamiku (vzťah medzi vstupným a výstupným signálom, v_i resp. v_o) matematicky opisujú *lineárne* diferenciálne rovnice. Ich všeobecný tvar (pre ľubovoľne zložitý lineárny systém) je

$$a_n \frac{d^n v_o}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} v_o}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 v_o = b_m \frac{d^m v_i}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} v_i}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 v_i$$

pričom pre realistický systém musí platiť $n \geq m$. Obmedzíme sa tiež na **stacionárne systémy**, pre ktoré koeficienty a_k, b_k (úplne charakterizujúce daný systém) *nezávisia* od času. Dá sa ukázať,¹ že všeobecné riešenia takýchto rovníc majú tvar²

$$v_o(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{\lambda_k t} + \sum_{k=1}^n c_k \int_0^t e^{\lambda_k(t-\tau)} v_i(\tau) d\tau$$

kde λ_k sú korene **charakteristickej rovnice**, t.j. algebrickej rovnice n -tého stupňa s *nulovou* pravou stranou, $v_i = 0$, získanej dosadením (a derivovaním) predpokladaného tvaru riešenia (tzv. *ansatzu*) $v_o(t) = A e^{\lambda t}$. Prvý člen je súčet n **prechodových riešení**, opisujúcich **prechodový jav** - odozvu výstupu *po vypnutí* vstupného signálu, pričom koeficienty A_k sú dané počiatočnými podmienkami. Druhý člen je súčet n **stacionárnych riešení** - odoziev na *pretrvávajúci* vstupný signál (po odznení prechodových javov, a teda nezávisiacich od počiatočných podmienok).

Jednoduchá analýza všeobecného riešenia nás dovedie k nasledovným dôležitým záverom:

- Možnosť vyjadriť všeobecné riešenie ako súčet - *superpozíciu* - čiastkových riešení je výlučnou vlastnosťou *lineárnych* systémov.
- Korene charakteristickej rovnice môžu byť *reálne* alebo *komplexné*. Ku každému komplexnému koreňu však musí existovať aj *komplexne združený* koreň.
- Ak má byť systém ako celok *stabilný*, výstupný signál nesmie mať tendenciu k *neohraničenému* nárastu v čase (pri ohraničenom vstupnom signáli). Všetky reálne korene resp. všetky reálne časti komplexných koreňov λ_k musia teda byť *záporné*. (Stabilitou systémov sa budeme podrobnejšie zaoberať v ďalších častiach textu.)
- Pre (záporné) *reálne* λ_k znamenajú čiastkové prechodové riešenia *monotónny zánik* prechodového javu. Pre *komplexné* $\lambda_k = \sigma_k + i\omega_k$ môžeme čiastkové riešenia rozpísať v tvare $e^{\lambda_k t} = e^{\sigma_k t} e^{i\omega_k t}$, čo pre $\sigma_k < 0$ znamená prechodový jav v podobe zanikajúcich *oscilácií*.

Z uvedeného vyplýva, že nech je *lineárny* systém akokoľvek zložitý (veľké n, m), jeho odozva je superpozíciou *dvoch* základných módo, odpovedajúcich reálnym resp. komplexným koreňom λ_k .

1.3 Laplaceovská reprezentácia systému.

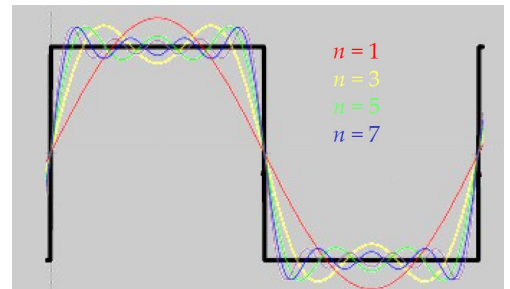
V kap. 1.2 sme vzťah medzi vstupným a výstupným signálom pre systém resp. jednotlivé jeho súčasti - bloky - reprezentovali jednoduchým koeficientom prenosu (zosilnením) G . Aj v prípade lineárnych blokov však tento prenos vo všeobecnosti závisí od *frekvencie* signálu, nazývame ho teda **prenosovou funkciou**, $G(\omega)$. Výrazy typu $v_o = G v_i$ majú jasný fyzikálny zmysel len ak signály majú *harmonický* časový priebeh, $v_{i,o}(t) \sim e^{i\omega t}$, a $G = G(\omega)$ na *danej* frekvencii.

¹Technickými detailami riešenia sa v tomto texte nezaobráame.

²Ak je l koreňov charakteristickej rovnice *identických*, ide o tzv. **viacnásobný koreň**, a odpovedajúcich l riešení sa zmení na $e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, \dots, t^{l-1} e^{\lambda t}$.

Pre *neharmonické* signály ich frekvenčné spektrum (určené Fourierovým rozkladom) obsahuje *viacero* frekvencií (napr. obdĺžnikový signál s periódou T na obr. je „skomponovaný“ z harmonických signálov na frekvenciách $\omega, 3\omega, 5\omega, \dots$, kde $\omega = \frac{2\pi}{T}$). Výrazy typu $v_o(t) = G(\omega = ?)v_i(t)$ v takýchto prípadoch zjavne nemajú zmysel. Zmysel majú výrazy typu

$$V_o(\omega) = G(\omega)V_i(\omega)$$



kde $V_{i,o}(\omega)$ sú fourierovské zložky (obrazy) signálov $v_{i,o}(t)$ na konkrétnej frekvencii ω . V elektrotechnike je však „obľúbenejšou“ modifikácia Fourierovej transformácie (FT), tzv. **Laplaceova transformácia** (LT)

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} X(s)e^{st} ds$$

kde $s = \sigma + i\omega$ je „komplexná frekvencia“.³ V praxi sa pritom namiesto počítania týchto integrálov používa „prekladový slovník“ medzi dôležitými funkciami $x(t)$ a ich laplaceovskými obrazmi $X(s)$. Slovník najbežnejších výrazov je v Dodatku A. Všeobecné výrazy sa upravujú do tvarov, ktoré sa dajú nájsť v slovníku. LT najdôležitejších signálov sú:

- jednotkový skok v $t = 0$: $u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s}$
- harmonický signál: $u(t) \sin \omega t \xleftrightarrow{LT} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad u(t) \cos \omega t \xleftrightarrow{LT} \frac{s}{s^2 + \omega^2}$
- exponenciálny signál: $u(t)e^{-at} \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s+a}$
- signál $u(t)x(t)$ škálovaný v čase: $u(t)x(at) \xleftrightarrow{LT} X\left(\frac{s}{a}\right)$
- signál $x(t)$ oneskorený v čase o τ : $u(t-\tau)x(t-\tau) \xleftrightarrow{LT} X(s)e^{-s\tau}$
- signál $u(t)e^{-at}x(t) \xleftrightarrow{LT} X(s+a)$

Prítomnosť funkcie $u(t)$ pri všetkých časových vyjadreniach signálov zohľadňuje dolnú hranicu integrovania pri LT. (Často sa však v zápisoch vynecháva.)

Najdôležitejšou črtou LT je transformácia derivácie

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{LT} sX(s) - x(0)$$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{LT} s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}\frac{dx(0)}{dt} - \dots - \frac{d^{n-1}x(0)}{dt^{n-1}}$$

kde $x(0)$ a $\frac{d^k x(0)}{dt^k}$ predstavujú počiatočné podmienky v čase $t = 0$. LT derivácie n -tého rádu teda zahrňuje n počiatočných podmienok (ktoré sú nevyhnutné pri riešení dif. rovnice n -tého rádu). Ak sú všetky počiatočné podmienky vynulované, k -ta derivácia sa transformuje na prosté násobenie s^k . Analogicky, integrácia podľa času sa transformuje na násobenie obrazu integrovaného signálu faktorom $\frac{1}{s}$. Diferenciálna rovnica systému (kap. 1.2) sa potom transformuje na *algebraický* výraz - polynóm vzhľadom na s ,

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0) V_o(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0) V_i(s)$$

resp.

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = G(s) \quad \underline{V_o(s) = G(s)V_i(s)}$$

³Podmienka existencie LT je $\int_0^{\infty} |v(t)|e^{-\sigma t} dt < \infty, (\sigma > 0) \Leftrightarrow |v(t)| < Me^{\alpha t}$ pre všetky t . Oblasť konvergenencie je teda $\alpha < \sigma < \infty$, čiže $v(t)$ nesmie rásť rýchlejšie než exponenciálne.

Prenosovú funkciu $G(s)$ v podobe podielu polynómov vieme vyjadriť (faktorizovať) pomocou koreňových činiteľov polynómov (čitateľa aj menovateľa)

$$G(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

kde K je číselný faktor, z_k sú tzv. **nulové body** a p_k sú tzv. **póly**⁴ prenosovej charakteristiky - jedny aj druhé môžu byť reálne alebo komplexné (v komplexne združených pároch). Je zrejmé, že pre $s = z_k$ je prenos nulový, kým pre $s = p_k$ neohraničene rastie (čo predstavuje potenciálny problém, ktorému sa budeme venovať neskôr). Majme pritom na pamäti, že v tomto laplaceovskom obraze pracujeme s *komplexnou* premennou $s = \sigma + i\omega$, a čísla n_k, p_k teda predstavujú *bod* v *komplexnej rovine*, ktorej (vertikálna) imaginárna os kvantifikuje frekvenciu ω .

Prenosová funkcia $G(s)$ je teda tiež *komplexné číslo* - dvojica reálnych čísel oddelených imaginárnou jednotkou i - priradená každej frekvencii ω . Za takouto dvojicou kvantifikátorov sa skrýva dvojica vlastností systému - prenos *amplitúdy* signálu *na danej frekvencii* a odpovedajúci *fázový posuv* medzi výstupným a vstupným signálom,

$$G(s)|_{s \rightarrow i\omega} = |G(s)|e^{i\varphi(s)}|_{s \rightarrow i\omega}$$

Hovoríme o **amplitúdovej** resp. **fázovej prenosovej charakteristike**. Prenosová funkcia bude naším východiskovým bodom pri študovaní vlastností riadiacich systémov. Vstupný aj výstupný signál pritom nemusia byť reprezentované *rovnakou* fyzikálnou veličinou - v takom prípade $G(s)$ nie je bez-rozmerná. Typickým príkladom je situácia, keď za vstupnú veličinu považujeme prúd a za výstupnú veličinu napätie, alebo naopak. Prenosovou funkciou je vtedy **impedancia** resp. **admitancia**,

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} \quad [\Omega] \qquad Y(s) = \frac{I(s)}{V(s)} \quad [S]$$

V prípade základných pasívnych elektronických prvkov - rezistora (odpor R), kondenzátora (kapacita C) a cievky (indukčnosť L) platí

$$\begin{aligned} v_R(t) &= Ri(t) & v_C(t) &= \frac{1}{C} \int i(t) dt & v_L(t) &= L \frac{di(t)}{dt} \\ V_R(s) &= RI(s) & V_C(s) &= \frac{1}{sC} I(s) & V_L(s) &= sLI(s) \end{aligned}$$

Pre impedanciu $Z(s)|_{s \rightarrow i\omega} = |Z(s)|e^{i\varphi(s)}|_{s \rightarrow i\omega}$ kondenzátora resp. cievky to znamená

$$Z_C(i\omega) = \frac{1}{\omega C} e^{-i\pi/2} \qquad Z_L(i\omega) = \omega L e^{i\pi/2}$$

čiže v kondenzátore napätie zaostáva za prúdom o $\pi/2$ a v cievke naopak.

V kontexte systémov riadenia procesov nás predovšetkým zaujíma rýchlosť, stabilita a presnosť nastavovania technologických parametrov, čiže odozva systémov *v čase*. Reprezentuje ju tzv. **prechodová charakteristika** - odozva systému na vstupný signál v podobe *jednotkového skoku*, $v_i(t) = u(t)$. Získame ju z prenosovej charakteristiky:

$$v_o(t) \xleftrightarrow{LT} V_o(s) = \frac{1}{s} G(s)$$

Ľubovoľne zložitú (realistickú pre $n \geq m$) prenosovú funkciu $G(s)$ vieme totiž rozložiť na *súčet parciálnych zlomkov*, a teda

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \dots + \frac{K_n}{s - p_n}$$

⁴Za *póly* sa často považujú aj korene takých činiteľov menovateľa, ktoré sa súčasne nachádzajú aj v čitateli, a môžu teda byť vykrátené - fyzikálne *neznamenajú* singularitu prenosovej funkcie. Obdobne to platí aj pre *nulové body*.

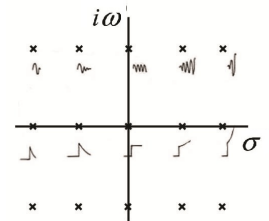
Ak je niektorý z pólov *viacnásobný* (opakujúci sa l -násobne), *odpovedajúce* parciálne zlomky sa zmenia na

$$\frac{K_1}{s-p} + \frac{K_2}{(s-p)^2} + \dots + \frac{K_l}{(s-p)^l}$$

Návod na dopočítanie koeficientov K_k je v Dodatku B. Laplaceovské výrazy typu $\frac{K_k}{s-p_k}$ sa spätne transformujú na tvar $K_k e^{p_k t}$, čo pre *reálne* p_k znamená *monotónny* (exponenciálny) časový vývoj, kým pre *komplexne združené* páry $p_k, p_k^* = \sigma_k \pm i\omega_k$ *nemonotónny* časový vývoj - harmonické *oscilácie* s exponenciálne sa meniacou amplitúdou,

$$e^{p_k t} + e^{p_k^* t} = e^{\sigma_k t} (e^{i\omega_k t} + e^{-i\omega_k t}) \sim e^{\sigma_k t} \cos \omega_k t$$

Je zrejmé, že póly ležiace v kladnej komplexnej polrovine, $\sigma_k > 0$, znamenajú (teoreticky) *neohraničený nárast* výstupného signálu v čase a teda *nestabilitu* systému. Pre stabilné systémy musíme preto požadovať póly v *ľavej* polrovine, $\sigma_k < 0$. Čím ďalej vľavo tieto póly ležia, tým skôr sa prechodový jav utlmí.

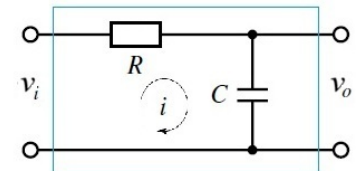


Správanie ľubovoľne zložitého systému bude teda kombináciou týchto dvoch základných módoov prenosu. Analyzujeme ich preto podrobnejšie v ďalšej časti na systémoch 1. a 2. rádu.⁵

2 ZÁKLADNÉ BLOKY RIADIACICH SYSTÉMOV.

2.1 Jednoduchý systém 1. rádu.

Typickým systémom 1. rádu v elektrotechnike je RC -obvod (obr.). Odpovedajúcu diferenciálnu rovnicu skonštruujeme pomocou Ohmovho a Kirchhoffových zákonov. Vzťah medzi napätím a prúdom na rezistore (odpor R) a kondenzátore (kapacita C) je



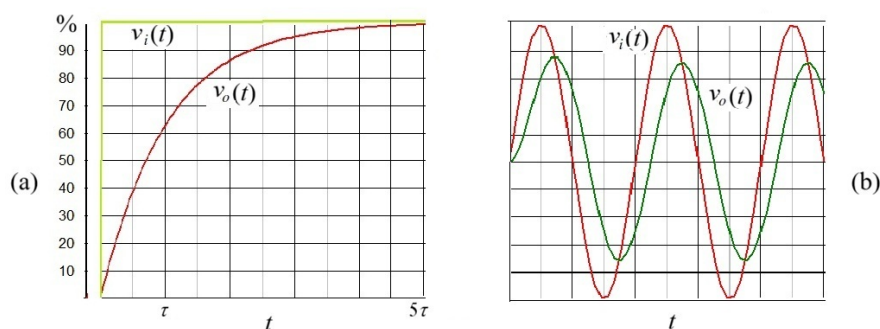
$$v_i - v_o = Ri \qquad v_o = \frac{1}{C} \int i dt$$

Derivovaním druhej rovnice a eliminovaním prúdu i dostávame

$$RC \frac{dv_o}{dt} + v_o = v_i$$

Táto dif. rovnica 1. rádu vyjadruje časový vývoj výstupného napätia $v_o(t)$ pri danom vstupnom napätí $v_i(t)$. Ak je napr. vstupným signálom napäťový *skok* z nuly na nenulovú jednosmernú úroveň (nabíjanie kondenzátora), riešene očakávame v tvare $v_o(t) \sim e^{-t/\tau}$, kde $\tau = RC$ je tzv. **časová konštanta** obvodu - čas charakterizujúci *monotónny* prechod od počiatočného do konečného stavu výstupu (obr. a).

⁵Rád systému je určený najvyššou mocninou s v menovateli prenosovej charakteristiky, po vykrátení prípadných rovnakých koreňových činiteľov čitateľa a menovateľa.

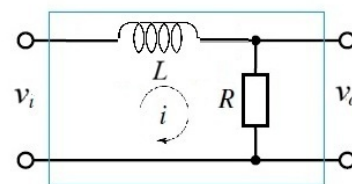


Alternatívnym jednoduchým systémom 1. rádu je RL -obvod na obr.

Platí

$$v_i = L \frac{di}{dt} + Ri \quad i = \frac{v_o}{R} \quad \frac{L}{R} \frac{dv_o}{dt} + v_o = v_i$$

Až na odlišnú časovú konštantu $\tau = \frac{L}{R}$ je to identická dif. rovnica ako v prípade RC -obvodu, analýza aj vlastnosti oboch obvodov budú teda *rovnaké*.



Ak je vstupný signál harmonický ($v_i(t) \sim \sin \omega t$), očakávame rovnako harmonický výstupný signál na *tej istej* frekvencii ω - to je dôsledok linearity. Uvidíme však, že v závislosti od frekvencie monotónne klesá prenos amplitúdy a narastá fázový posuv $v_o(t)$ voči $v_i(t)$ (obr. b).

LT uvedenej dif. rovnice a odpovedajúca prenosová charakteristika systému sú

$$(\tau s + 1)V_o(s) = V_i(s) \quad G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\gamma}{s + \gamma} \quad \gamma = \frac{1}{\tau}$$

Pre jednotkový skok na vstupe, $V_i(s) = \frac{1}{s}$, platí na výstupe

$$V_o(s) = G(s)V_i(s) = \frac{\frac{1}{\tau}}{s(s + \gamma)} = \dots = \frac{1}{s} + \frac{-1}{s + \gamma} \quad \xleftrightarrow{LT} \quad v_o(t) = 1 - e^{-\gamma t}$$

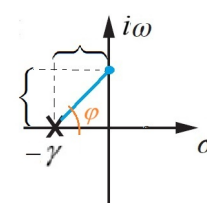
čo je očakávaný výsledok. Prvý člen $v_o(t)$ je *stacionárna* (pretrvávajúca) **vynútená odozva** na jednotkový signál na vstupe, kým druhý člen je *prechodová* (exponenciálne zanikajúca) **prirodzená odozva** systému.

Ľahko nahliadneme, že hodnota $\gamma = \frac{1}{\tau}$ odpovedá *strmosti počiatočného nárastu* výstupného signálu v čase, a za čas τ dosiahne výstup 63% konečnej hodnoty (pre $t \rightarrow \infty$). Z hľadiska riadenia procesov je dôležitá **doba ustálenia** výstupu, T_s , ktorú konvenčne definujeme ako dobu dosiahnutia 2%-nej odchýlky od konečnej hodnoty, čo je v tomto prípade ($v_o(t) = 0,98$)

$$T_s \cong 4\tau$$

Nastavením parametra τ môžeme teda dosiahnuť požadovanú rýchlosť ustálenia zmien v riadenom procese. Naopak, ak tento parameter nepoznáme (systém je „čiernou skrinkou“), môžeme ho zmerať privedením jednotkového skoku na vstup.⁶

Prenosová charakteristika $G(s)$ nemá žiaden nulový bod a má *jediný reálny* pól $p = -\gamma$, ležiaci na *reálnej* osi v *ľavej* komplexnej polrovine. Takémuto pólu odpovedá (v tomto prípade jediná) čiastková prirodzená odozva e^{pt} s *tlmeným* charakterom (záporné σ) bez oscilácií ($i\omega = 0$). Čím bližšie je tento pól k imaginárnej osi ($\sigma = 0$), tým slabšie je tlmenie.



⁶Jednotkový skok $u(t)$ je *idealizovaný* signál, jeho dokonale ostré hrany nie je možné fyzikálne realizovať, dá sa však realizovať jeho „rozumne *hladká*“ napodobenina.

Prenosová charakteristika $G(s)$, určujúca pomer výstupného a vstupného signálu v závislosti od frekvencie ($s \rightarrow i\omega$), je pre dané ω komplexné číslo. Jeho modul $|G(s)|$ určuje pomer amplitúd,

$$|G(s)|_{s \rightarrow i\omega} = \frac{|V_o(\omega)|}{|V_i(\omega)|} = \frac{\frac{1}{\tau}}{|i\omega - (-\gamma)|}$$

Výraz v menovateli reprezentuje dĺžku úsečky medzi pólom a konkrétnou frekvenciou - bodom na imaginárnej osi (modrá na obr.), a amplitúdový prenos je nepriamo úmerný tejto dĺžke. (Čím bližšie je daná frekvencia k singularite - pólu, tým je prenos väčší.) Nárast dĺžky úsečky s rastúcou ω teda korešponduje poklesu prenosu.

$$|G(s)|_{\omega \rightarrow 0} \rightarrow 1 \quad |G(s)|_{\omega \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

Fázový posuv výstupu voči vstupu je fázou komplexnej prenosovej charakteristiky na danej frekvencii,

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{|V_o(s)|e^{i\varphi_o}}{|V_i(s)|e^{i\varphi_i}} = \frac{|V_o(s)|}{|V_i(s)|}e^{i(\varphi_o - \varphi_i)} = |G(s)|e^{i\varphi}$$

Fáza komplexného čísla c je $\arctan \frac{\Im\{c\}}{\Re\{c\}}$, čo pre našu prenosovú charakteristiku znamená

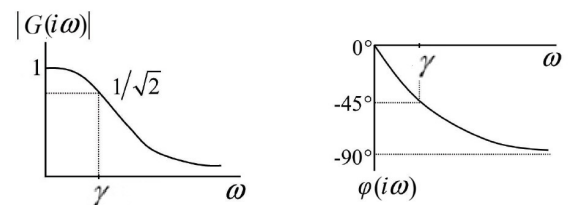
$$\varphi = -\arctan \frac{\Im\{i\omega - (-\gamma)\}}{\Re\{i\omega - (-\gamma)\}}$$

V komplexnej s -rovine to znamená uhol (červený na obr.) medzi reálnou osou a spojnicou pólu s konkrétnym bodom $s = i\omega$ na imaginárnej osi. Keďže fázový posuv pochádza od pólu, teda z *menovatela*, uhol je *záporný*, čo interpretujeme ako časové *zaostávanie* výstupu voči vstupu. Očividne, s narastajúcou frekvenciou toto zaostávanie narastá,

$$\varphi(s)_{\omega \rightarrow 0} \rightarrow 0^\circ \quad \varphi(s)_{\omega \rightarrow \infty} \rightarrow -90^\circ$$

Pre $\omega = \gamma$ je $|G(s)| = 1/\sqrt{2} \cong 0,7$ a $\varphi(s) = -45^\circ$.

Grafy $|G(i\omega)|$ a $\varphi(i\omega)$ sú ú *amplitúdovou* resp. *fázovou* prenosovou charakteristikou (obr.).



Ak sa viac zaujímate o prenosové vlastnosti systému vo *frekvenčnej* oblasti (napr. pri konštrukcii frekvenčných filtrov), osobitnú dôležitosť pre nás má *strmosť* zmeny prenosových charakteristík medzi oblasťou s vysokým a slabým amplitúdovým prenosom (a odpovedajúcimi fázovými posuvmi). Táto strmosť sa obvykle udáva v **decibeloch na dekádu** (dB/dek), ktoré kvantifikujú (dekadický) logaritmus *pomeru* výstupných amplitúd pre dve frekvencie líšiace sa faktorom 10, čiže

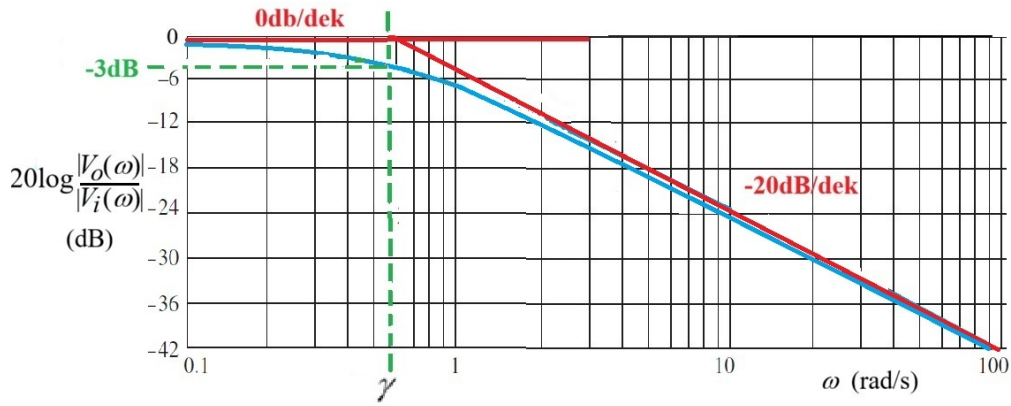
$$20 \log \frac{|V_o(10\omega)|}{|V_o(\omega)|} = 20 \log \frac{|G(10\omega)|}{|G_o(\omega)|} = 20 \log |G(10\omega)| - 20 \log |G(\omega)| \quad (\text{dB})$$

(Predpokladáme tu, že amplitúda vstupného signálu je *pre všetky frekvencie rovnaká*.) V log-log škále sa naša amplitúdová charakteristika monotónne mení medzi dvoma asymptotami pre $\omega \ll \gamma$ ($\omega\tau \ll 1$) a $\omega \gg \gamma$ ($\omega\tau \gg 1$):

$$|G(i\omega)| = \frac{\gamma}{|i\omega - (-\gamma)|} = \frac{1}{|1 + i\omega\tau|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \xrightarrow{\omega\tau \ll 1} 1 \quad \frac{1}{|1 + i\omega\tau|} \xrightarrow{\omega\tau \gg 1} \frac{1}{\omega\tau}$$

Prvá z asymptot je 0dB/dek. Druhú dostaneme ako

$$\begin{aligned} 20 \log |G(10\omega)|_{\omega\tau \gg 1} - 20 \log |G(\omega)|_{\omega\tau \gg 1} &= 20 (\log(10\omega\tau)^{-1} - \log(\omega\tau)^{-1}) = \\ &= -20(\log 10 + \log \omega\tau - \log \omega\tau) = -20\text{dB/dek} \end{aligned}$$



Priesečník asymptot je v $\omega = \gamma$, kde je prenos $|G(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ a teda $\log \frac{1}{\sqrt{2}} \cong -3 \text{ dB}$ (obr.).

2.2 Systém 1. rádu s nulovým bodom.

Predpokladajme systém 1. rádu s prenosovou charakteristikou

$$G(s) = \frac{s - z}{s - p}$$

čomu odpovedá napr. obvod na obr., pre ktorý $z = -\frac{R_0}{L}$ a $p = -\frac{R+R_0}{L}$. Ak $R = R_0$, potom

$$G(s) = \frac{s + \gamma}{s + 2\gamma} \quad \gamma = \frac{R}{L} = \frac{R_0}{L}$$

Odozva na jednotkový skok bude (červená na obr.)

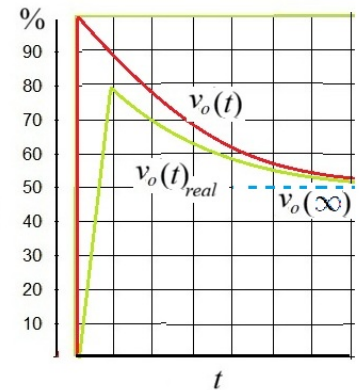
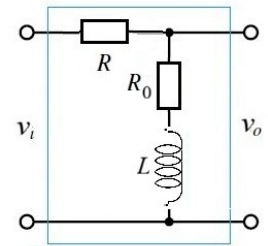
$$V_o(s) = \frac{s + \gamma}{s(s + 2\gamma)} = \dots = \frac{1/2}{s} + \frac{1/2}{s + 2\gamma} \quad v_o(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2\gamma t}$$

Prirodzená odozva na jednotkový skok je opäť exponenciálne tlmená, tentokrát jej však predchádza „okamžitý“ nárast $v_o(t = 0) \rightarrow 1$, teda na hodnotu *prevyšujúcu* konečný stav. Takémuto priebehu porozumieme, ak na pridanie nulového bodu z k prenosovej charakteristike bez nulového bodu, $G^*(s) = \frac{1}{s-p}$, nahliadneme ako na jej *násobenie* faktorom $(s - z)$, čiže

$$G(s) = (s - z)G^*(s) = sG^*(s) - zG^*(s)$$

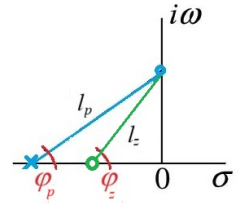
Táto nová prenosová charakteristika pozostáva z dvoch príspevkov: Kým faktor z v druhom člene len *škáluje* $G^*(s)$ (s vlastnosťami opísanými v kap. 2.1), v prvom člene je $G^*(s)$ násobené s , čo je LT *časovej derivácie*. Člen s v čitateli prenosovej charakteristiky teda znamená prenos úmerný strmosti časovej zmeny vstupného signálu. Nekonečne strmý jednotkový skok je *idealizáciou*, každý reálny signál má nábehovú hranu konečnej strmosti, čomu odpovedá $v_o(t)_{real}$ (zelená na obr.).

Prenos amplitúdy a fázový posuv spektrálnej zložky o frekvencii ω (pre vstupný signál ľubovoľného časového priebehu) sú v tomto systéme dané vzťahmi



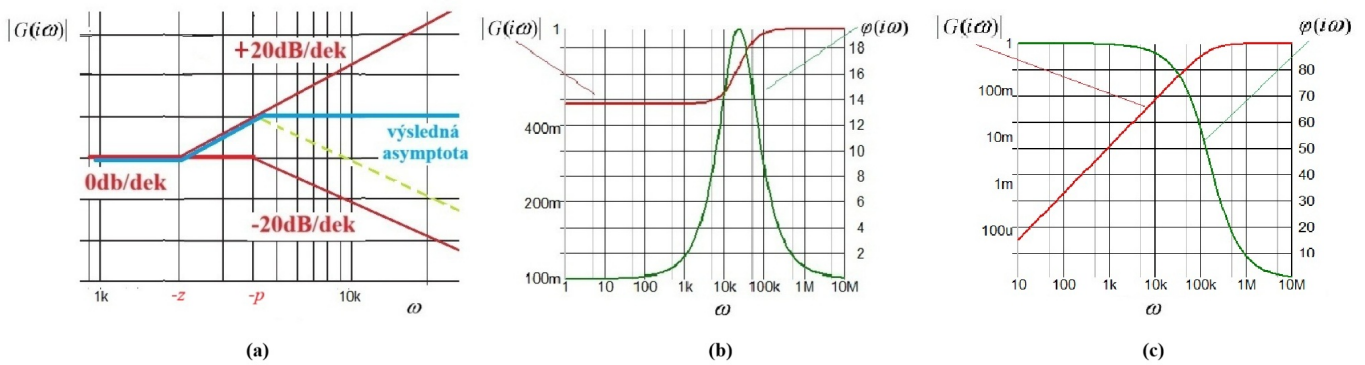
$$\frac{|V_o(i\omega)|}{|V_i(i\omega)|} = \frac{|s - z|_{s \rightarrow i\omega}}{|s - p|_{s \rightarrow i\omega}} = \frac{l_z(i\omega)}{l_p(i\omega)}$$

$$\varphi(i\omega) = \varphi_z(i\omega) - \varphi_p(i\omega)$$



kde l_z, l_p sú vzdialenosti nulového bodu/pólu od bodu $i\omega$ v komplexnej rovine.

Kým príspevok menovateľa k prenosu amplitúdy (tak ako v predchádzajúcej kap. 2.1) je určený asymptotami 0dB/dek a -20dB/dek s priesečníkom v $\omega = -p$, čitateľ prispieva dvojicou asymptot 0dB/dek a +20dB/dek s priesečníkom $\omega = -z$ p aj z sú reálne), pričom tieto asymptoty sa sčítavajú do výsledných asymptot (modré na obr. a). Pre $\omega \rightarrow \infty$ je prenos jednotkový (v ilustračnom RL -obvode indukancia $i\omega L \rightarrow \infty$) bez fázového posuvu, kým pre $\omega \rightarrow 0$ je prenos amplitúdy $\frac{z}{p}$ (RL -obvod ako napäťový delič $\frac{R_0}{R+R_0}$), opäť bez fázového posuvu. Fázový posuv kopíruje strmosť amplitúdovej charakteristiky (obr. b).

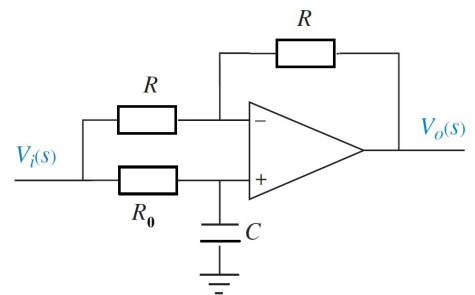


Posúvaním nulového bodu k imaginárnej osi (zmenšovaním R_0) rozširujeme nadol oblasť zmeny $|G(i\omega)|$, a odpovedajúco meníme *polohu aj veľkosť* maxima fázového posuvu, až po maximálny fázový posuv $+90^\circ$. Pre $z \rightarrow 0$ dostávame prenosové charakteristiky na obr. c.

Ak by sme naopak približovali nulový bod smerom k pólu (v prípade nášho RL -obvodu zmenšovaním pomeru R/R_0), nulový bod by čoraz viac kompenzoval pól, a v limite $R/R_0 \rightarrow 0$ ($z \rightarrow p$) by sa skompenzovali úplne (systém by mal jednotkový prenos).

Preskúmame napokon prípad (reálneho) nulového bodu v *kladnej* polrovine. Takýto systém môžeme realizovať tzv. fázovým posúvačom na obr. Jeho prenosová charakteristika je (na základe analýzy v Dodatku D)

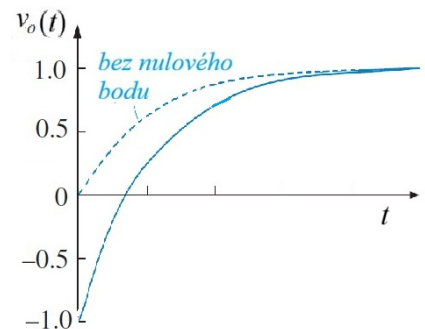
$$G(s) = -\frac{s - \gamma}{s + \gamma} \quad z = -p = \gamma = \frac{1}{R_0 C}$$



Odozvu na jednotkový skok opäť vyjadríme pomocou typického prenosu *bez* nulového bodu, $G^*(s) = \frac{1}{s + \gamma}$,

$$\begin{aligned} V_o(s) &= \frac{G(s)}{s} = (\gamma - s) \frac{G^*(s)}{s} = \frac{\gamma}{s(s + \gamma)} - \frac{1}{s + \gamma} = \\ &= \underbrace{\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \gamma} \right]}_{V_o^*(s)} - \frac{1}{s + \gamma} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s + \gamma} \end{aligned}$$

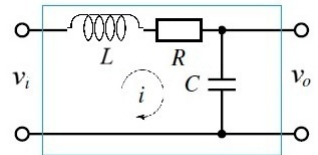
$$v_o(t) = v_o^*(t) - e^{-\gamma t} = 1 - 2e^{-\gamma t}$$



kde $v_o^*(t)$ a $V_o^*(s)$ sú odozva a jej laplaceovský obraz pre systém *bez* nulového bodu. Vidíme, že prítomnosť kladného nulového bodu znamená počiatočný zákmit do *opačnej* polarizácie než je požadovaná výsledná hodnota, čo je pre optimálnu reguláciu zväčša nežiadúci jav.

2.3 Jednoduchý systém 2. rádu.

Druhým základným typom systému je systém 2. rádu. Príkladom je RLC -obvod (obr.). Oproti predchádzajúcemu RC -obvodu vytvára prúd i dodatočný napäťový spád na cievke (indukčnosť L)



$$v_L = L \frac{di}{dt} \quad v_R = Ri \quad v_C = \frac{1}{C} \int i dt = v_o \quad v_i = v_L + v_R + v_C$$

Eliminovaním prúdu dostaneme dif. rovnicu 2. rádu pre napätie

$$LC \frac{d^2 v_o}{dt^2} + RC \frac{dv_o}{dt} + v_o = v_i$$

Je očividné, že rád systému súvisí s počtom prvkov akumulujúcich energiu (cievky vo forme magnetického a kondenzátory vo forme elektrického poľa), pre ktoré je napätie dané deriváciou/integrálom prúdu, čo v Laplaceovom obraze znamená pridanie s resp. $1/s$. *Nie je* však pravidlom, že rád systému je rovný počtu akumulčných prvkov.

Pre v_i v tvare jednotkového skoku (z 0 na 1V) hľadáme riešenia dif. rovnice vo všeobecnom tvare $v_o(t) \sim e^{\alpha t}$, odpovedajúcom prirodzenej prechodovej odozve systému. Ukážeme si, ako všetky riešenia exaktne získame v laplaceovskom formalizme pomocou prenosovej funkcie. LT danej dif. rovnice vedie na prenosovú charakteristiku v tvare

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\gamma s + \omega_0^2} = \frac{\omega_0^2}{(s - p_1)(s - p_2)} \quad \gamma = \frac{R}{2L} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

s dvoma pólmi $p_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$. Odozva na jednotkový skok, $v_i(t) = u(t)$, bude v Laplaceovom obraze

$$V_i(s) = \frac{1}{s} \quad V_o(s) = G(s)V_i(s) = \frac{\omega_0^2}{s(s^2 + 2\gamma s + \omega_0^2)} = \frac{\omega_0^2}{s(s - p_1)(s - p_2)}$$

Vo výraze pre odozvu pribudol ďalší pól $p_3 = 0$ od vstupného signálu. Ako hneď uvidíme, prítomnosť dvoch prvkov schopných *akumulovať* energiu (L a C) *v tomto prípade* vytvára predpoklad pre *oscilácie* systému v okolí **vlastnej frekvencie** ω_0 . Na druhej strane, parameter γ (priamo úmerný *dissipatívne*mu prvku R) reprezentuje *útlm*.

Uvažujme najprv prípad **pretlmeného systému**, $\gamma > \omega_0$, keď p_1, p_2 sú 2 rôzne reálne záporné korene menovateľa, pričom $p_1 p_2 = \omega_0^2$. Rozkladom na parciálne zlomky dostaneme

$$V_o(s) = \dots = \omega_0^2 \left[\frac{1}{p_1 p_2 s} + \frac{1}{p_1 (p_1 - p_2)(s - p_1)} + \frac{1}{p_2 (p_2 - p_1)(s - p_2)} \right]$$

a spätnou LT

$$v_o(t) = \left[1 + \frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_2 - p_1} e^{p_2 t} \right] u(t)$$

Vidíme, že póly p_1, p_2 (< 0) určujú *prirodzenú* monotónne tlmenú prechodovú odozvu systému, kým pól $p_3 = 0$ určuje stacionárnu odozvu *vynútenú* pretrvávajúcim vstupným signálom $u(t)$.

Pre **podtlmený systém**, $\gamma < \omega_0$, sú p_1, p_2 dva *komplexne združené* korene, a rozklad kvadratickej formy na koreňové činitele preto nie je výhodnou stratégiou - výraz pre $v_o(t)$ z predchádzajúceho prípadu by totiž obsahoval komplexné parametre. Vhodnou úpravou $V_o(s)$ vieme dostať výrazy (ktoré nájdeme v tabuľke LT)

$$V(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\gamma}{s^2 + 2\gamma s + \omega_0^2} = \frac{1}{s} - \frac{s + \gamma}{(s + \gamma)^2 + \omega_\gamma^2} - \frac{\gamma}{\omega_\gamma} \frac{\omega_\gamma}{(s + \gamma)^2 + \omega_\gamma^2}$$

čo spätnou LT dá

$$v_o(t) = \left[1 - e^{-\gamma t} \left[\cos \omega_\gamma t + \frac{\gamma}{\omega_\gamma} \sin \omega_\gamma t \right] \right] u(t) \quad \omega_\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

čiže tlmené harmonické kmity s frekvenciou ω_γ a časovou konštantou útlmu $\tau = 1/\gamma$.

Hraničný prípad $\gamma = \omega_0$ s *dvojnásobným reálnym koreňom* $p_{1,2} = -\omega_0$ predstavuje tzv. **kritické tlmenie**. Vtedy rozklad na parciálne zlomky vedie na

$$V_o(s) = \frac{\omega_0^2}{s(s + \omega_0)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \omega_0} - \frac{\omega_0}{(s + \omega_0)^2}$$

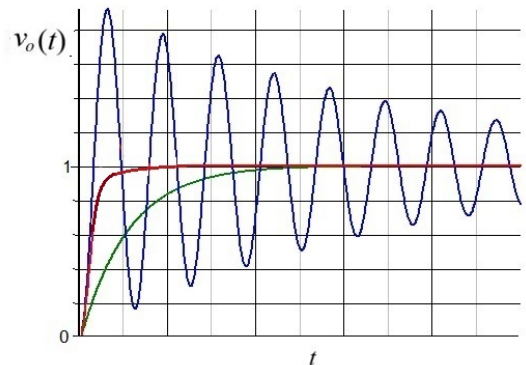
a po spätnej LT⁷

$$v_o(t) = [1 - e^{-\omega_0 t} - \omega_0 t e^{-\omega_0 t}] u(t)$$

čo je (napriek lineárnej závislosti posledného člena od t) ešte stále *monotónne tlmená* odozva.

Vidíme teda, že na rozdiel od systému 1. rádu (v ktorom zmenou parametrov meníme odozvu len kvantitatívne) zmena parametrov znamená vo všeobecnosti aj kvalitatívnu zmenu odozvy - monotónne tlmenie alebo tlmené oscilácie (obr.).

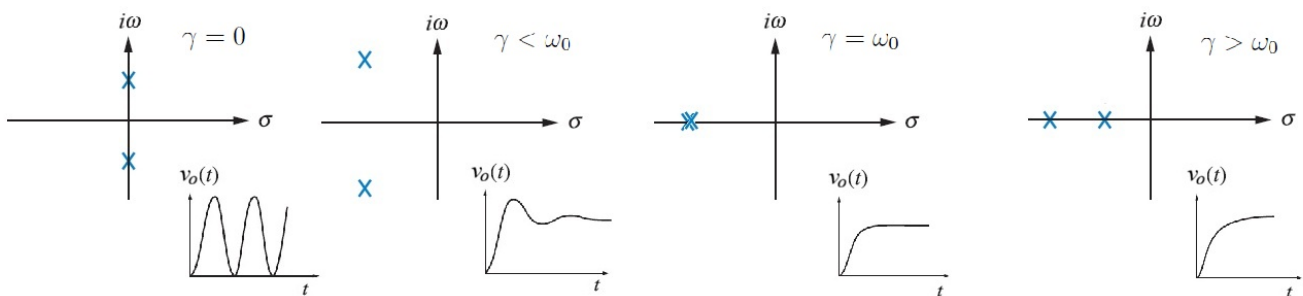
Tlmenie γ ovplyvňuje dobu odoznenia prechodového javu, a tým aj rýchlosť dosiahnutia výslednej ustálenej hodnoty. Prípad kritického tlmenia (červený na obr.) odpovedá *najkratšiemu* času dosiahnutia výslednej hodnoty *bez prekmitov*.



Ak by sme tlmenie úplne eliminovali, $\gamma \rightarrow 0$ ($R \rightarrow 0$), čiže

$$V(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \quad v_o(t) = [1 - \cos \omega_0 t] u(t)$$

odzvou by boli *netlmené* harmonické kmity na *vlastnej* frekvencii ω_0 okolo hodnoty danej pretrvávajúcim vstupným signálom $u(t)$. Póly p_1, p_2 by boli čisto imaginárne - symetricky rozložené na imaginárnej osi. Rozloženie pólov v komplexnej rovine pre všetky uvažované prípady je na obr.



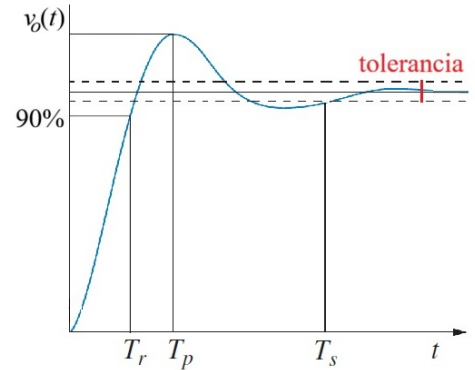
⁷Platí

$$X(s + a) \xleftrightarrow{LT} e^{-at} x(t) \quad , \quad \frac{1}{s^2} \xleftrightarrow{LT} t \quad , \quad \frac{1}{(s + \omega_0)^2} \xleftrightarrow{LT} t e^{-\omega_0 t}$$

Pri riadení procesov je kľúčovým rýchle a stabilné nastavenie požadovaných hodnôt parametrov procesu (bez prekmitov). Tu však vidíme, že čím rýchlejšie dosiahne výstup systému 2. rádu požadovanú hodnotu, tým väčší je následný prekmit aj doba utlmenia vlastných kmitov (okolo požadovanej hodnoty). Nevyhnutnou súčasťou návrhu systému je teda kompromis medzi protichodnými požiadavkami - dostatočne malým tlmením kvôli rýchlosti nábehu a dostatočne veľkým tlmením kvôli stabilite.

Z užívateľského hľadiska sú parametrami charakterizujúcimi prechodový jav (v *podtlmenom* systéme 2. rádu)

- doba nárastu na 90% požadovanej hodnoty (*rise time*) T_r ,
- doba dosiahnutia maximálneho prekmitu (*peak time*) T_p ,
- percento prekmitu (*overshoot*) %OS - percentuálny podiel maximálneho prekmitu a konečnej hodnoty,
- doba ustálenia konečnej hodnoty (*settling time*) T_s v rámci tolerovanej odchýlky.



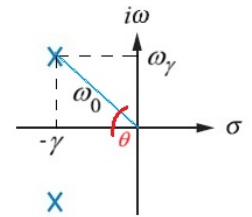
Štandardnými metódami vieme z výrazu $v_o(t)$ pre podtlmený prípad ukázať, že platí

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_\gamma} = f(\omega_\gamma) \quad \%OS = e^{-\pi\gamma/\omega_\gamma} \times 100\% = f(\gamma/\omega_\gamma) \quad T_s|_{\pm 2\%} \cong \frac{4}{\gamma} = f(\gamma)$$

Póly podtlmeného systému 2. rádu sú

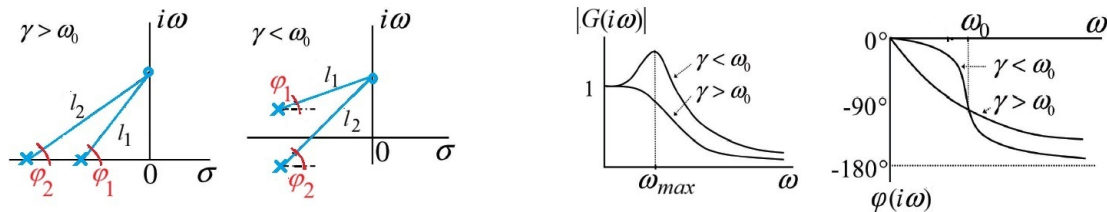
$$p_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma \pm i\omega_\gamma \quad \omega_0^2 = \omega_\gamma^2 + \gamma^2 \quad \tan \theta = \frac{\omega_\gamma}{\gamma}$$

Je teda zrejmé, že T_p závisí nepriamo úmerne od (absolútnej hodnoty) vertikálnej súradnice pólů, T_s závisí nepriamo úmerne od (absolútnej hodnoty) horizontálnej súradnice pólů, a radiály (čiary $\theta = konst$) sú čiarami konštantného %OS.



Horizontálnym/vertikálnym posuvom pólů v s -rovine (prostredníctvom zmeny vnútorných parametrov systému) tak môžeme *nezávisle* na sebe meniť T_p a T_s , kým radiálnym posuvom pólů meníme *súčasne* oboje pri nezmenenom prekmite. Takýmto spôsobom nastavujeme požadované parametre riadenia procesov. Naopak, *meraním* prechodovej odozvy môžeme (neznáme) parametre systému určiť.

Pokiaľ ide o závislosť amplitúdovej a fázovej časti prenosovej charakteristiky od *frekvencie*, opäť je daná polohou pólů vzhľadom na dané $s = i\omega$ (obr.)



$$G(s)_{s \rightarrow i\omega} = \frac{\omega_0^2}{(i\omega - p_1)(i\omega - p_2)} = \frac{\omega_0^2}{|i\omega - p_1|e^{i\varphi_1}|i\omega - p_2|e^{i\varphi_2}} = \frac{\omega_0^2}{l_1(\omega)l_2(\omega)} e^{-i(\varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega))}$$

Kým v *pretlmenom* prípade s rastúcou frekvenciou amplitúda prenosu $|G(i\omega)|$ monotónne klesá (l_1 aj l_2 monotónne rastú), v *podtlmenom* prípade l_1 spočiatku (pre malé frekvencie) klesá (a $\varphi_1 < 0$), čo vedie na nemonotónny priebeh s lokálnym maximom pre $\omega \cong \omega_\gamma$. Ide v tomto prípade o **rezonančné** zosilnenie amplitúdy výstupu (*naprázdno* - bez záťaže, nie zosilnenie *výkonu*). Strmosť poklesu pre $\omega \gg \omega_\gamma$ je v oboch prípadoch v log-log škále daná asymptotou -40 dB/dek (na rozdiel od -20 dB/dek

pre systémy 1. rádu).⁸ Záporne vzatý celkový fázový posuv $\varphi(i\omega)$ („oneskorenie“ výstupu voči vstupu) v oboch prípadoch s frekvenciou monotónne narastá, aj keď s rôznou strmostou.

$$\omega = 0 : |G| = 1, \varphi = 0^\circ$$

$$\omega \rightarrow \infty : |G| \rightarrow 0, \varphi \rightarrow -180^\circ$$

$$\omega = \omega_0 : |G| = \frac{\omega_0}{2\gamma}, \varphi = -90^\circ$$

$$\max\{|H(i\omega)|\} : \frac{d|H(i\omega)|}{d\omega} = 0$$

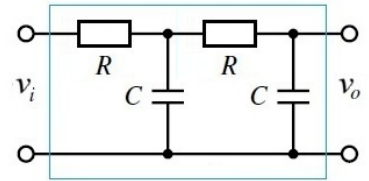
$$\omega_{max} = \omega_0 \sqrt{1 - 2\left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2}$$

$$|H(i\omega)|_{max} = \frac{\omega_0}{2\gamma \sqrt{1 - 2\left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2}}$$

Dostatočným tlmením teda vieme tendenciu systému k osciláciám eliminovať. Túto tendenciu však *nemusí* mať *každý* systém 2. rádu.

Napr. prenosová charakteristika systému 2. rádu na obr. (vypočítaná metódou uzlových potenciálov, Dodatok C) je

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3\gamma s + \gamma^2} \quad \gamma = \frac{1}{RC}$$



Polynóm v menovateli má podobnú štruktúru ako vyššie študovaný *RLC*-obvod, člen 0-tého stupňa γ^2 tu však reprezentuje *útlm* (korešponduje s koeficientom γ pri člene 1. stupňa). Korene polynómu sú $-3\gamma \pm \sqrt{5\gamma^2}$, teda *nevyhnutne* reálne (záporné). Takýto systém sa správa rovnako ako vyššie opísaný *podtlmený RLC*-systém.

2.4 Zložitejšie systémy.

Preskúmame teraz vplyv pridania nulových bodov a ďalších pólov k systému 2. rádu na jeho vlastnosti. Predpokladajme najprv systém 2. rádu, s dvoma reálnymi pólmi p_1, p_2 v ľavej polrovine, a s *nulovým bodom* z na zápornej reálnej osi, s prenosovou charakteristikou

$$G(s) = \frac{s - z}{(s - p_1)(s - p_2)} = \dots = \frac{(p_1 - z)/(p_1 - p_2)}{s - p_1} + \frac{(p_2 - z)/(p_2 - p_1)}{s - p_2}$$

Ak $|z| \gg |p_1|, |p_2|$, tento výraz sa zjednoduší na

$$G(s) \cong z \left(\frac{1}{(p_1 - p_2)(s - p_1)} + \frac{1}{(p_2 - p_1)(s - p_2)} \right) = zG^*(s)$$

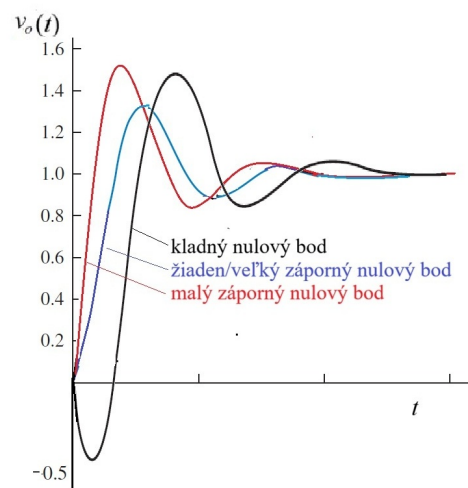
kde $G^*(s)$ je prenosová charakteristika tohto systému *bez* nulového bodu (s vlastnosťami opísanými v kap. 2.3). Prítomnosť vzdialeného nulového bodu sa teda prejaví len ako škálovací faktor. Tento záver rovnako platí aj pre dvojicu komplexne združených pólov.

⁸ $20 [\log(10\omega)^2 - \log \omega^2] = \dots = 40$

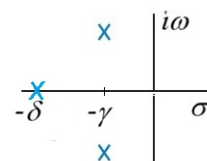
Odozvu takéhoto systému na jednotkový skok môžeme opäť (ako v kap. 2.2) skúmať pomocou $G^*(s)$, pričom $V_o^*(s) = \frac{G^*(s)}{s}$ je odozva systému *bez* nulového bodu (kap. 2.3). Potom

$$V_0(s) = (s - z) \frac{G^*(s)}{s} = (s - z)V_o^*(s) = sV_o^*(s) - zV_o^*(s)$$

Pre dostatočne veľké $|z|$ ($z < 0$) je dominantnou škálovaná odozva $|z|V_o^*(s)$ (ako *bez* nulového bodu, modrá na obr. pre podtlmený systém). Pre malé $|z|$ však dominuje *derivačný* prvý člen, úmerný strmosti $v_i(t)$, čo znamená rýchlejší počiatkový nábeh či prekmit výstupu (červená na obr.). Pre $z > 0$ (v pravej polrovine) dochádza opäť (ako v kap. 2.2) k počiatkovému nárastu v *opačnej polarite* (čierna na obr.).



Predpokladajme ďalej systém *bez* nulových bodov, s komplexne združenou dvojicou pólů a *dodatočným* reálnym pólom v ľavej polrovine (obr.), čiže systém 3. rádu, s prenosovou funkciou v tvare



$$G(s) = \frac{\omega_0^2 \delta}{(s^2 + 2\gamma s + \omega_0^2)(s + \delta)} \quad p_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \quad p_3 = -\delta$$

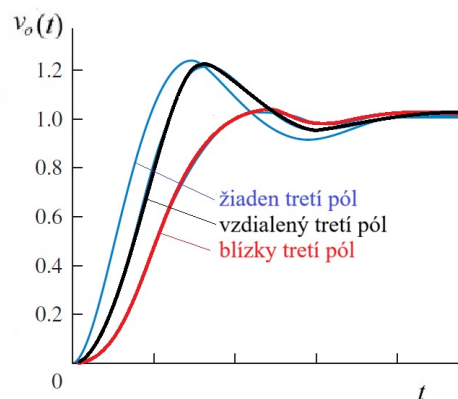
Odozva na jednotkový skok bude

$$V_o(s) = \frac{G(s)}{s} = \dots = \frac{1}{s} + \frac{as + b}{s^2 + 2\gamma s + \omega_0^2} + \frac{c}{s + \delta}$$

s koeficientmi

$$a = \frac{\delta(2\gamma - \delta)}{\delta^2 + \omega_0^2 - 2\gamma\delta} \quad b = \frac{\delta(4\gamma^2 - \omega_0^2 - 2\gamma\delta)}{\delta^2 + \omega_0^2 - 2\gamma\delta} \quad c = \frac{-\omega_0^2}{\delta^2 + \omega_0^2 - 2\gamma\delta}$$

Ak pól p_3 leží „dostatočne ďaleko vľavo“, $\delta \rightarrow \infty$, dostávame $a \rightarrow -1$, $b \rightarrow -2\gamma$, $c \rightarrow 0$. Znamená to, že pól p_3 sa v prechodovej odozve prakticky *neprejaví* (ním vyvolaná odozva rýchlo zaniká, čierna na obr.). Systém sa v takomto prípade správa podobne ako systém 2. rádu (modrá na obr.), a $p_{1,2}$ nazývame **dominantnými pólmi**. Takáto aproximácia je v praxi prijateľná pre $\delta > 10\gamma$. Tretí (reálny) pól blízky k dominantným sa prejaví výraznejším *tlmením* prekmitov spôsobených dominantnou dvojicou pólů (červená na obr.).



Zovšeobecňujeme teraz predchádzajúce závery na systém s m nulovými bodmi a n pólmi, s prenosovou charakteristikou

$$G(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

- Odozva tohto systému je superpozíciou odoziev jednotlivých koreňových činiteľov. Reálnym pólom odpovedá čiastková odozva systému 1. rádu, a komplexne združeným pólom čiastková odozva systému 2. rádu.
- Príspevok každého nulového bodu či pólu závisí od jeho polohy v komplexnej rovine.
- Príspevky od koreňov - nulových bodov aj pólů - ležiacich vo vzdialenej ľavej polrovine sú zanedbateľné voči príspevkom od koreňov blízkych k imaginárnej osi.
- Príspevky od blízko pri sebe ležiacich nulových bodov a pólů sa navzájom kompenzujú (eliminujú).

- Prítomnosť pólov v pravej polrovine znamená nestabilitu systému. (Stabilitou systémov sa budeme zaoberať neskôr.)

Z hľadiska spektrálneho zloženia prenosu platí, že:

- Prenos amplitúd jednotlivých spektrálnych zložiek je daný vzťahom

$$|G(s)|_{s \rightarrow i\omega} = |K| \left(\frac{|s - z_1| |s - z_2| \dots |s - z_m|}{|s - p_1| |s - p_2| \dots |s - p_n|} \right)_{s \rightarrow i\omega}$$

- Celkový fázový posuv pri prenose danej spektrálnej zložky je

$$\varphi(s)_{s \rightarrow i\omega} = \arctan \frac{\Im\{s - z_1\}}{\Re\{s - z_1\}} + \dots + \arctan \frac{\Im\{s - z_m\}}{\Re\{s - z_m\}} - \arctan \frac{\Im\{s - p_1\}}{\Re\{s - p_1\}} - \dots - \arctan \frac{\Im\{s - p_n\}}{\Re\{s - p_n\}}$$

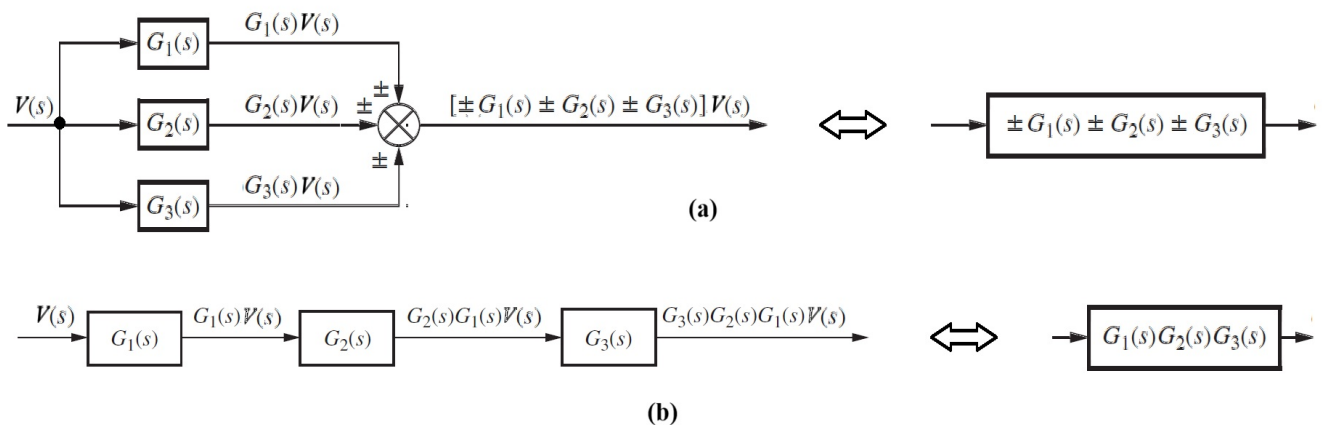
3 SYSTÉMY SO SPÄTNOU VÄZBOU.

3.1 Spájanie blokov a slučka spätnej väzby.

Sofistikované riadiace systémy konštruujeme skladaním jednotlivých funkčných blokov.

Pri *paralelnom* skladaní blokov vchádza signál *rovnako* (nezoslabene) na vstupy všetkých blokov, a výstupné signály z nich sa zlučujú (sčítavajú/odčítavajú) v sumačnom bode (obr. a). Takýto systém môžeme modelovať *jediným* ekvivalentným blokom s prenosom

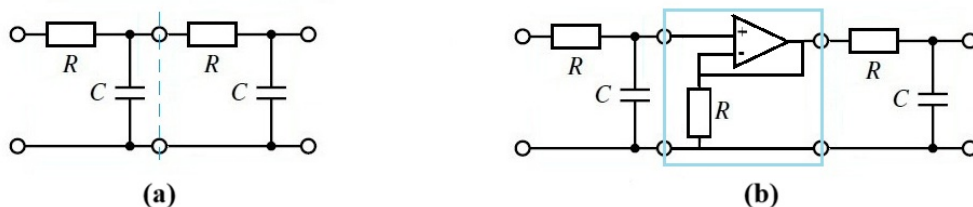
$$G(s) = \sum_k (\pm) G_k(s)$$



Pri *sériovom* - tzv. **kaskádnom** skladaní blokov (obr. b) môžeme prenosy $G_k(s)$ jednotlivých blokov jednoducho kombinovať *len* za predpokladu, že $G_k(s)$ *nezávisia* od ich vzájomného spájania. V takom prípade

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)G_3(s)\dots$$

Jednotlivé $G_k(s)$ totiž charakterizujú bloky s *nezafáženým výstupom*. Pre *napäťové* signály to znamená, že každý nasledujúci blok v kaskáde má (idealizovane) *nekonečnú vstupnú impedanciu*. Ako (kontra)príklad uveďme kaskádu dvoch jednoduchých *RC* obvodov z kap. 2.1 (obr. a).

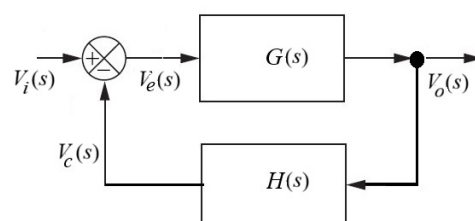


Každý z nich má prenos $G_{1,2}(s) = \frac{\gamma}{s+\gamma}$, kde $\gamma = \frac{1}{RC}$. Prenos celej kaskády je však (kap. 2.3)

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3\gamma s + \gamma^2} \neq G_1(s)G_2(s) = \left(\frac{\gamma}{s+\gamma}\right)^2$$

Druhý RC -člen predstavuje totiž *záťaž* o impedancii⁹ $Z(s) = R + \frac{1}{sC}$ na výstupe prvého RC -člena. Tomuto zaťaženiu sa vieme vyhnúť vložením tzv. **napäťového sledovača** (viac o ňom v kap. 3.3, resp. v Dodatku C) s (ideálne) nekonečným vstupným odporom a jednotkovým prenosom (obr. b).¹⁰ V ďalšom texte pre jednoduchosť predpokladáme, že každý uvažovaný blok je takto zabezpečený nekonečnou vstupnou impedanciou, a prenos kaskády je daný súčinom čiastkových prenosov.

Na zabezpečenie presnosti a stability požadovanej výstupnej veličiny doplníme priamu vetvu riadiaceho systému s prenosom $G(s)$ spätnou prenosovou vetvou s prenosom $H(s)$ (obr.), uzatvárajúcou slučku *zápornej spätnej väzby* (SV). Medzi signálmi v jednotlivých segmentoch slučky platia vzťahy



$$V_e(s) = V_i(s) - V_c(s) \quad V_o(s) = G(s)V_e(s) \quad V_c(s) = H(s)V_o(s) = G(s)H(s)V_e(s)$$

Výraz $\frac{V_c(s)}{V_e(s)} = G(s)H(s)$ predstavuje tzv. **zosilnenie/prenos otvorenej slučky** (ďalej len POS), t.j. bez uzatvorenia slučky v sumačnom bode. Kombináciou týchto výrazov (eliminovaním $V_e(s)$) dostaneme **zosilnenie/prenos uzavretej slučky** (PUS) zápornej SV, čiže pomer výstupu a vstupu celej slučky,

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = G_{SV}(s)$$

Pri znalosti zosilnení $G(s)$ a $H(s)$ môžeme teda nastavením referenčnej hodnoty $V_i(s)$ stabilizovať požadovanú hodnotu V_o pre daný proces. Pre *kladnú* SV by namiesto znamienka $+$ v menovateli tohto výrazu figurovalo znamienko $-$. Všeobecný tzv. **Blackov vzťah** pre PUS so zápornou resp. kladnou SV je

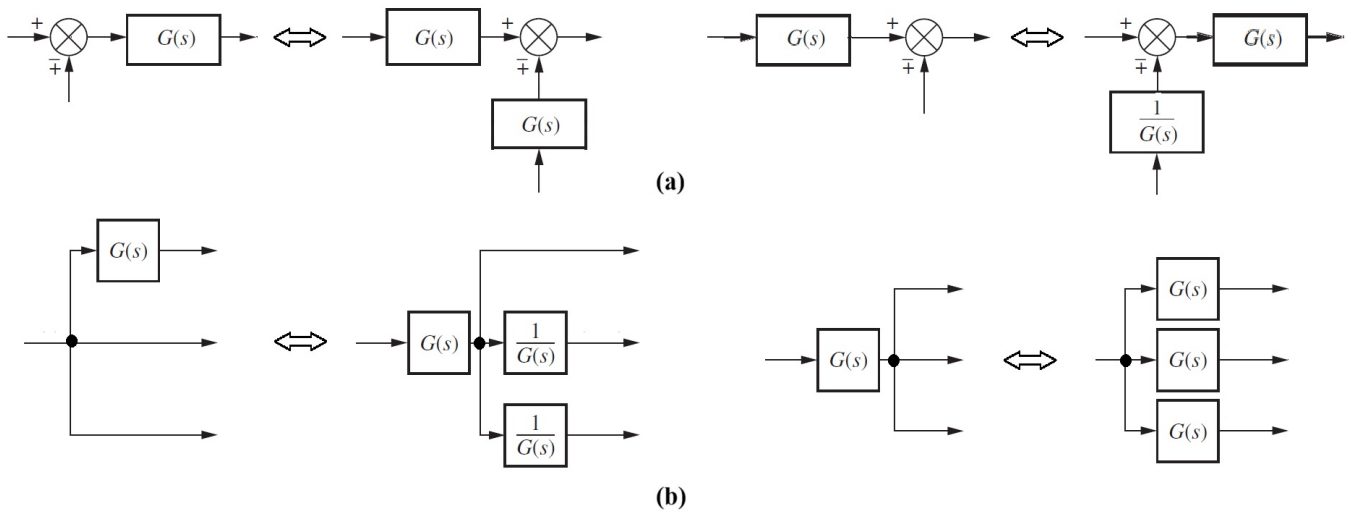
$$G_{SV}(s) = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)H(s)}$$

3.2 Transfigurácia blokovej schémy.

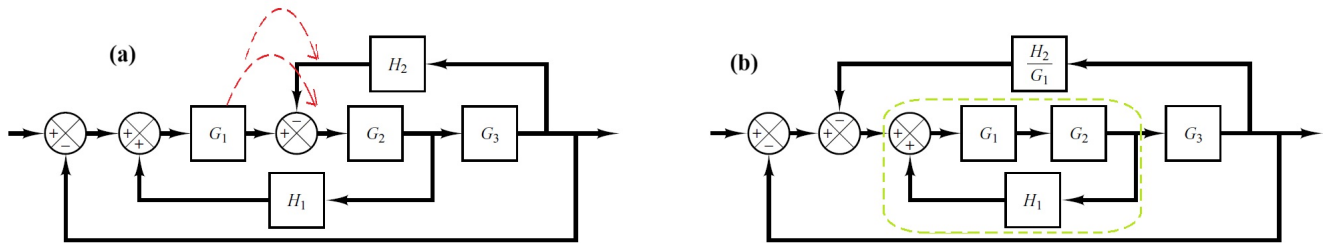
Bloková schéma riadiaceho systému vyjadruje jeho dynamiku, nemusí však korešpondovať s jeho fyzickou architektúrou. Jednotlivé bloky sú často fikciou, a môžeme ich teda v schéme presúvať a zlučovať za účelom jej zjednodušenia. Pravidlá presunu bloku cez sumačný a vetviaci bod sú graficky znázornené na obr. a resp. b.

⁹Impedanciou v laplaceovskom formalizme je podiel $\frac{V(s)}{I(s)}$ na danom prvku. Pre kondenzátor platí $v(t) = \frac{1}{C} \int i(t)dt$, a teda $V(s) = \frac{I(s)}{sC}$ (kap. 1.3). Analogicky, pre indukčnosť platí $V(s) = sLI(s)$.

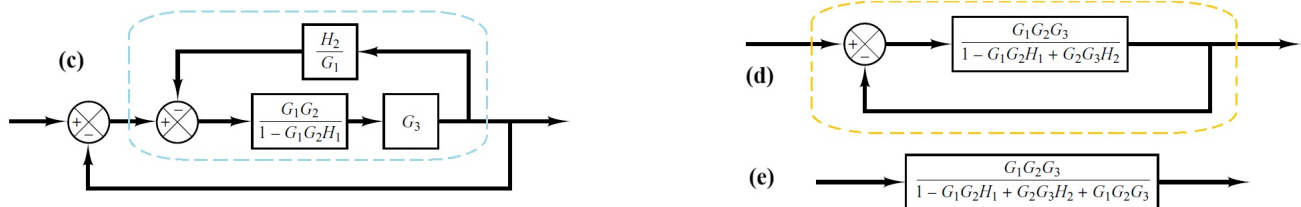
¹⁰Navyše extrémne malý *výstupný* odpor operačného zosilňovača zabezpečuje, že sa javí ako *ideálny napäťový zdroj*.



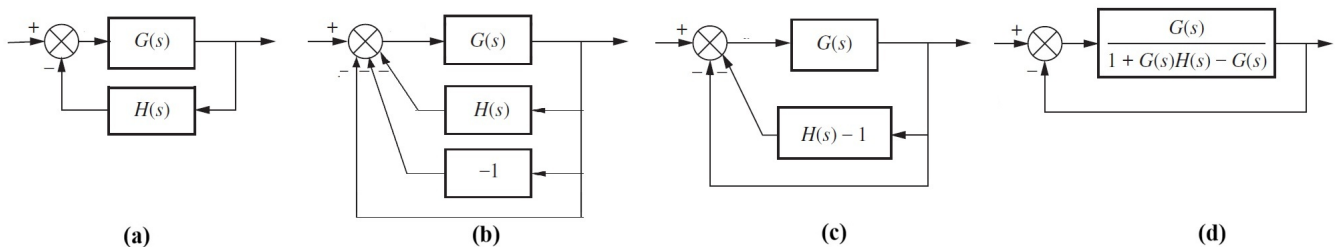
Užitočnosť takýchto transfigurácií ukážeme na blokovej schéme (obr. a), pričom ľahko nájdeme jej prenosovú funkciu.



- (a)→(b): Presun bloku cez sumačný bod.
(b)→(c): Zlúčenie blokov v slučke SV pomocou Blackovho vzťahu.
(c)→(d): Zlúčenie blokov v druhej slučke SV pomocou Blackovho vzťahu.
(d)→(e): Zlúčenie blokov v tretej slučke SV pomocou Blackovho vzťahu.



Transfiguráciou môžeme tiež zmeniť systém so SV s ľubovoľným spätným prenosom na SV s jednotkovým prenosom (obr. (a)-(d)).

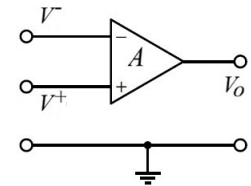


3.3 Operačný zosilňovač so spätnou väzbou.

V regulačných systémoch je štandardnou požiadavka na nastaviteľné zosilnenie prenosu jednotlivých blokov, $|G(s)| \gg 1$, a to v širokom rozsahu frekvencií, teda nielen ako rezonančný efekt. Na to je však

potrebné, aby príslušný blok obsahoval *aktívny* prvok s *dodatočným* prísunom energie *nezávislým* od spracovávaného signálu, t.j. s vlastným napájaním. Energia napájania sa v ňom transformuje na energiu signálu - zosilnenie.

Lineárnym (v rozsahu amplitúd limitovanom napájacím napätím) *aktívnym* prvkom je *operačný zosilňovač* (OZ), ktorého funkčná schéma je na obr. (Samostatné napájanie OZ nie je súčasťou funkčnej schémy.) Zosilnenie vstupného signálu cez invertujúci (-) resp. neinvertujúci (+) vstup je $\mp A$ ($\approx 10^6$ pre nie príliš vysoké frekvencie).

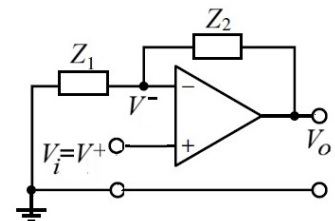


Vstupná impedancia oboch vstupov je veľmi vysoká ($Z_i \rightarrow \infty$) a výstupná impedancia je zanedbateľná ($Z_o \rightarrow 0$), výstupné napätie nezávisí od záťaže, výstup OZ sa teda chová ako *ideálny napäťový zdroj*. Platí

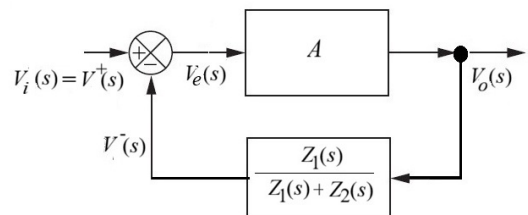
$$V_o(s) = A \underbrace{[V^+(s) - V^-(s)]}_{V_e(s)}$$

Pre konštrukciu zosilňovačov s požadovaným *konečným* zosilnením je potrebné doplniť OZ *zápornou SV*, ktorá sa realizuje spätnou vetvou medzi výstupom a invertujúcim vstupom. Prvým zo základných zapojení je **neinvertujúci zosilňovač** (obr.). Jeho ekvivalentná bloková schéma s napäťovým deličom v spätnej vetve je na obr. Prenosy priamej a spätnej vetvy sú

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_e(s)} = A \quad H(s) = \frac{V^-(s)}{V_o(s)} = \frac{Z_1(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}$$



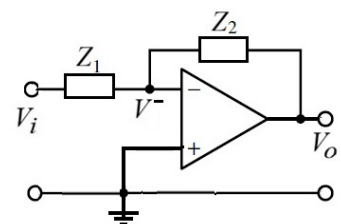
Prenos celého systému je (Blackov vzťah)



$$G_{SV}(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{A}{1 + A \frac{Z_1(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}} \stackrel{A \rightarrow \infty}{=} 1 + \frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$$

Porovnaním vzťahov ľahko zistíme, že $V_e = V^+ - V^- = 0$, čiže $V^+ = V^-$, čo je dôsledok SV. Ak navyše položíme $Z_2 = 0$ (skrat), dostaneme napäťový sledovač (z kap. 3.1) s jednotkovým prenosom.

Druhým základným zapojením je **invertujúci zosilňovač** (obr.). Tentokrát vstupné napätie V_i nie je privedené priamo ani na jeden zo vstupov OZ, a teda ani na sumačný bod uzatvárajúci slučku SV. Napäťový prenos zosilňovača V_o/V_i ľahko nájdeme z podmienok $Z_i \rightarrow \infty$ a $A \rightarrow \infty$: Pre prúd vyplýva



$$I = \frac{V_i - V^-}{Z_1} = \frac{V^- - V_o}{Z_2}$$

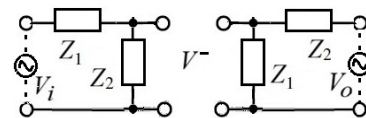
Keďže $V^+ = 0$, prenos priamej vetvy je $\frac{V_o}{V_e} = -\frac{V_o}{V^-} = A \Rightarrow V^- = -\frac{V_o}{A} \rightarrow 0$, a teda

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$$

Opäť vidíme, že $V^- = V^+$. Identický výraz musíme nájsť aj pomocou odpovedajúcej blokovej schémy so SV a Blackovho vzťahu. Táto schéma však musí obsahovať popri slučke SV aj dodatočný blok priameho prenosu $V_i \rightarrow V^-$. Postup je nasledovný: Napätie V^- je generované *dvoma* (ideálnymi napäťovými) zdrojmi - zdrojom vstupného signálu (V_i) a výstupom OZ (V_o). Podľa princípu superpozície samostatne vypočítame príspevok jedného zdroja pri *skratovanom* druhom,

$$G_i(s) = \frac{V^-(s)}{V_i(s)} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

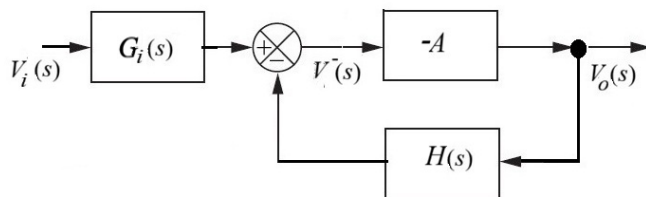
$$H(s) = \frac{V^-(s)}{V_o(s)} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$$



Bloková schéma je potom na obr., pričom

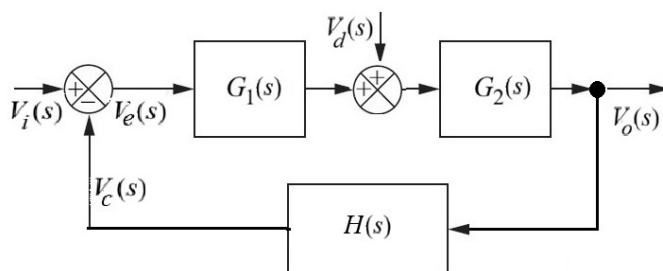
$$G_{SV}(s) = \frac{-A}{1 - AH(s)} \xrightarrow{A \rightarrow \infty} -\frac{Z_1(s) + Z_2(s)}{Z_1(s)}$$

$$G_{tot}(s) = G_i(s)G_{SV}(s) = \dots = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$$



3.4 Presnosť regulácie v systéme so spätnou väzbou.

Hlavnou prednosťou zápornej SV v regulačných systémoch je eliminovanie nežiadúcich *nekontrolovateľných* vplyvov, napr. v dôsledku zmeny parametrov elektroniky zahrievaním, stárnutím či externými vplyvmi. Robustnosť regulácie voči takýmto vplyvom demonštrujeme na modifikovanej schéme (obr.), v ktorej dodatočným sumačným bodom *vo vnútri* regulátora vnášame nežiadúcu poruchu $V_d(s)$.



Signál na výstupe systému bude teraz pozostávať z dvoch príspevkov - od referenčného zdroja a od poruchy, $V_o(s) = V_{o/i}(s) + V_{o/d}(s)$, a ich samostatné prenosy budú

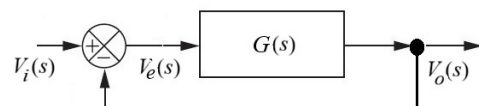
$$\frac{V_{o/i}(s)}{V_i(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

$$\frac{V_{o/d}(s)}{V_d(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

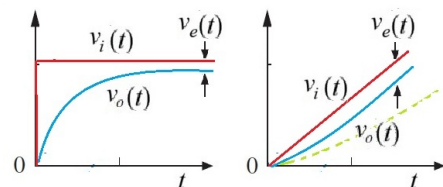
Ak uvažujeme nerovnosti $|G_1(s)H(s)| \gg 1$, a $|G_1(s)G_2(s)H(s)| \gg 1$ (vďaka prítomnosti aktívnych prvkov), potom $\frac{V_{o/d}(s)}{V_d(s)} \cong \frac{1}{G_1(s)H(s)} \rightarrow 0$, čiže efekt poruchy je zanedbateľný. Súčasne $\frac{V_{o/i}(s)}{V_i(s)} \cong \frac{1}{H(s)}$, čiže prenos riadiaceho signálu nezávisí od zosilnení v priamej vetve a teda ani od ich prípadných variácií. Ak navyše $H(s) = 1$, výstup priamo kopíruje referenčný vstup.

V blokovej schéme systému s $H(s) = 1$ (obr.) platí

$$V_e(s) = V_i(s) - V_o(s)$$



Na signál $V_e(s)$ môžeme nahliadať ako na odchýlku/chybu výstupného signálu $V_o(s)$ voči „požadovanej“ (referenčnej) hodnote $V_i(s)$, vyvolanú architektúrou systému. Ak je riadiacim signálom jednorázová (ideálne skoková) zmena, zaujíma nás odchýlka *po ustálení* - tzv. **statická chyba** $v_e(t \rightarrow \infty)$. Naproti tomu v prípade kontinuálne sa meniaceho riadiaceho (vstupného signálu) je statickou chybou *priebežná* odchýlka od referenčnej hodnoty (obr.). Platí



$$V_e(s) = V_i(s)[1 - G_{SV}(s)] = \dots = \frac{V_i(s)}{1 + G(s)}$$

Statickú chybu teda vieme určiť nielen pomocou PUS, čiže $G_{SV}(s)$, ale pri $H(s) = 1$ aj priamo z $G(s)$. Pre LT limity totiž platí

$$v_e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} v_e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sV_e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sV_i(s)}{1 + G(s)}$$

Ak $V_i(s) = \frac{1}{s}$ (jednotkový skok), dostávame

$$v_e(\infty) = \dots = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)}$$

kde $\lim_{s \rightarrow 0} G(s)$ je *jednosmerné* zosilnenie priamej vetvy. Nulová statická chyba teda vyžaduje $\lim_{s \rightarrow 0} G(s) \rightarrow \infty$. Túto podmienku spĺňajú prenosové funkcie s jednoduchým alebo viacnásobným pólom v *počiatku*, $p = 0$,

$$G(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2)\dots}{s^k(s - p_1)(s - p_2)\dots}$$

Ak $G(s)$ takýto pól nemá, chyba je *nenulová*. Ak by napr. zosilnenie v priamej vetve *nezáviselo* od frekvencie, $G(s) = K$, takáto chyba by bola

$$V_o(s) = KV_e(s) \quad \Rightarrow \quad v_e(t) = \frac{1}{K}v_o(t) \neq 0$$

Zvyšovaním zosilnenia K v priamej vetve by sme mohli statickú chybu potlačiť.

Ak by vstupný signál lineárne narastal s časom, $v_i(t) = t$, jeho LT by bola $V_i(s) = \frac{1}{s^2}$, a statická chyba

$$v_e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s/s^2}{1 + G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + sG(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)}$$

Požiadavka nulovej chyby je teraz $\lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \rightarrow \infty$, čo vyžaduje aspoň dvojnásobný pól v počiatku. Pri jednoduchom takomto póle je chyba *nenulová* ale *konečná*, avšak pre $G(s)$ bez takéhoto pólu je chyba *nekonečná* - to by znamenalo *divergujúce* $v_i(t)$ a $v_o(t)$ (zelená prerušovaná na obr.).

Ako príklad uvažujme obvod s prenosom priamej vetvy $G(s) = \frac{K}{s(s+2\gamma)}$. Pre $V_i(s) = \frac{1}{s}$ je $v_e(\infty) = 0$, pre $V_i(s) = \frac{1}{s^2}$ je $v_e(\infty) = 2\gamma/K$. Zväčšením zosilnenia K teda môžeme redukovať chybu pri signáli $v_i(t) = t$. Pre *parabolický* vstupný signál ($v_i(t) = t^2$) je $V_i(s) = \frac{1}{s^3}$ a $v_e(\infty) = \infty$.

Výrazy

$$\kappa_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \quad \kappa_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \quad \kappa_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2G(s)$$

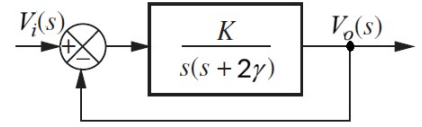
sa nazývajú **chybovými konštantami polohy, rýchlosti a zrýchlenia**. Čím su tieto hodnoty vyššie, tým sú statické chyby nižšie.

3.5 Póly slučky spätnej väzby.

Z Blackovho vzťahu pre PUS SV jasne vyplýva, že prítomnosť SV mení charakter pólů výslednej prenosovej funkcie $G_{SV}(s)$ v porovnaní s $G(s)$ bez SV. Ilustrujme to pre jednoduchosť na systéme 2. rádu (resp. aproximácii zložitejšieho systému s dvojicou *dominantných* pólů, kap. 2.4).

Predpokladajme systém s blokovou schémou na obr. Zosilňovací blok 2. rádu s regulovateľným koeficientom zosilnenia K je doplnený SV s jednotkovým zosilnením, a teda

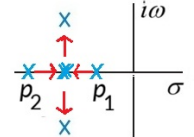
$$G(s) = \frac{K}{s(s+2\gamma)} \quad H(s) = 1 \quad G_{SV}(s) = \frac{K}{s^2 + 2\gamma s + K}$$



Bez SV má tento blok dva reálne póly, $p_1 = 0$ a $p_2 = -2\gamma$, nezávislo na zosilnení K . Vplyvom SV sa však tieto póly *presúvajú* v komplexnej rovine v závislosti od zosilnenia K ,

$$p_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - K}$$

Pre $K < \gamma^2$ sú póly stále reálne - systém je *pretlmený* (kap. 2.3). S postupným nárastom K sa póly *posúvajú* po reálnej osi (navzájom sa približujú, obr.). Pre $K = \gamma^2$ póly splynú do dvojnásobného reálneho pólu - tlmenie je *kritické*. Ak zosilnenie K presiahne túto hodnotu, narastajú imaginárne časti pólov, odpovedajúce frekvencii tlmených *oscilácií*.



Pre prechodovú odozvu (odozvu na jednotkový skok) systému to znamená, že zosilnením meníme charakter ustálenia výstupu (kap. 2.3). V *pretlmenom* režime s nárastom K klesá doba (monotónneho) ustálenia T_s . Prechodom do *podtlmeného* režimu sa s nárastom K nemení T_s , klesá však doba počiatočného nárastu výstupu T_r a narastá percento prekmitu %OS. Zmenou zosilnenia (podľa kap. 3.4) tiež ovplyvňujeme statickú chybu regulácie pre iné časové priebehy riadiacich signálov. Optimálne nastavenie zosilnenia v priamej vetve má teda kľúčový význam pre kvalitu riadiaceho procesu. Sformulujeme preto najdôležitejšie zákonitosti „trajektórie“ pólov $G_{SV}(s)$ v komplexnej rovine (angl. *root locus*) pri zmene zosilnenia.

Pre všeobecný systém s regulovateľným prenosom $KG(s)$ v priamej vetve a prenosom $H(s)$ v spätnej väzbe je PUS zápornej SV

$$G_{SV}(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)}$$

Póly p_k tejto prenosovej funkcie (pri danom zosilnení $K > 0$) odpovedajú podmienke

$$KG(s)H(s) = -1$$

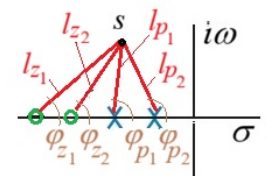
Stačí nám teda skúmať *túto* podmienku pre POS SV (kaskády priamej a spätnej vetvy *bez* uzavretia slučky), $KG(s)H(s)$, namiesto hľadania pólov výrazne zložitejšej $G_{SV}(s)$. Uvedená komplexná podmienka sa rozpadá na dve reálne podmienky

$$|G(s)H(s)| = \frac{1}{K} \quad \varphi(s) = (2k+1)\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

Nech funkcia $G(s)H(s)$ má m nulových bodov a n pólov (nezávisiacich od K). Potom tieto podmienky znamenajú

$$K = \frac{1}{|G(s)H(s)|} = \frac{l_{p_1}(s)l_{p_2}(s) \dots l_{p_n}(s)}{l_{z_1}(s)l_{z_2}(s) \dots l_{z_m}(s)}$$

$$\varphi(s) = \sum_j^m \varphi_{z_j}(s) - \sum_j^n \varphi_{p_j}(s) = (2k+1)\pi$$



Keďže fázová podmienka *nezávisí* od zosilnenia K , splňa ju *samostatná množina* bodov s - tzv. **vetva pólu** - pre *každý* pól p_k POS, definujúca **geometrické miesto** $\mathcal{L}_k$ (*locus*) odpovedajúceho pólu PUS. Amplitúdová podmienka priradzuje každému bodu $s \in \mathcal{L}_k$ určitú hodnotu zosilnenia K . Zmenou zosilnenia sa teda každý pól p_k PUS presúva pozdĺž *svojej* vetvy $\mathcal{L}_k$.

Jednotlivé vetvy $\mathcal{L}_k$ v komplexnej rovine môžeme približne lokalizovať aj bez podrobných výpočtov, a to na základe nasledovných pravidiel:

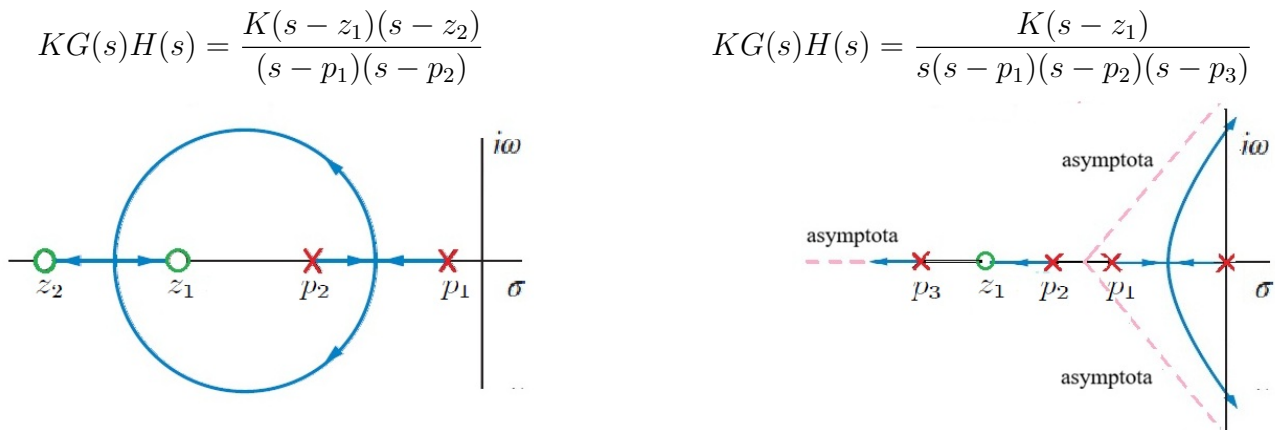
- Sústava vetiev pólov PUS je symetrická vzhľadom na reálnu os.¹¹
- Každá vetva má začiatok, odpovedajúci $K \rightarrow 0$, v niektorom z pólov POS, a koniec, odpovedajúci $K \rightarrow \infty$, v niektorom z nulových bodoch POS.¹² Podľa potreby dopĺňame POS o póly a nulové body ležiace v nekonečne, čím sa vyrovnajú ich počty pre ľubovoľnú funkciu. (Funkcia $f(s)$ má v nekonečne pól ak $f(s \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$, a nulový bod ak $f(s \rightarrow \infty) \rightarrow 0$. Napr. $f(s) = \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s^2}$ má navyše dva nulové body v nekonečne.)
- Smer vetvy od pólu/k nulovému bodu POS v nekonečne je daný asymptotou, ktorej priesečník s reálnou osou a uhol voči nej sú

$$\sigma_{as} = \frac{\sum_j p_j - \sum_j z_j}{\text{počet } p_j - \text{počet } z_j} \Big|_{\text{len konečné}} \quad \varphi_{as} = \frac{(2k+1)\pi}{\text{počet } p_j - \text{počet } z_j} \Big|_{\text{len konečné}}$$

kde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Menovateľ v zlomkoch určuje počet asymptot, a teda počet po sebe idúcich hodnôt k .

- Časti vetiev na reálnej osi sa nachádzajú vľavo od nepárneho počtu reálnych pólov a/alebo nulových bodov POS.¹³

Ilustračné príklady geometrie vetiev pre dané POS sú na obr.



Hodnoty σ , pri ktorých vetvy opúšťajú/dosahujú reálnu os (pod uhlom $\pm 90^\circ$) sú miestami maximálneho/minimálneho K na danom úseku reálnej osi, vieme ich teda určiť z extrému funkcie

$$K(\sigma) = \frac{-1}{G(\sigma)H(\sigma)}$$

medzi príslušnou dvojicou pólov/nulových bodov.

¹¹K tomuto záveru môžeme intuitívne dospieť na základe príkladu zo začiatku kapitoly.

¹²K tomuto záveru dospejeme zo zápisu $G_{SV}(s)$ v tvare

$$\frac{K[\text{nulové body } G(s)][\text{póly } H(s)]}{[\text{póly } G(s)][\text{póly } H(s)] + K[\text{nulové body } G(s)][\text{nulové body } H(s)]}$$

v limitách $K \rightarrow 0$ a $K \rightarrow \infty$.

¹³Tento záver môžeme vyvodiť z fázového/uhlového kritéria pólu $G_{SV}(s)$.

Príkladom POS s dvojicou komplexne združených pólů je

$$KG(s)H(s) = \frac{K(s - z_1)}{(s - p_1)(s - p)(s - p^*)}$$

Uhol φ_p (vzhľadom na vodorovnú os), pod ktorým začína vetva vychádzajúca z pólu p , je uhlom spojnice tohto pólu s bodom na vetve v jeho tesnej blízkosti. Pre uhly spojnic nášho bodu so všetkými pólmí a nulovými bodmi POS platí podľa uhlového kritéria bodov na vetve

$$\varphi_{z_1} - \varphi_{p_1} - \varphi_p - \varphi_{p^*} = (2k + 1)\pi$$

Z hodnôt nulových bodov a pólů určíme φ_{z_1} a φ_{p_1} ($\varphi_{p^*} = 90^\circ$) a vypočítame φ_p . Obdobne by sme postupovali v prípade komplexne združených nulových bodoch.

Z hľadiska stability systému sú dôležitými hraničné hodnoty K , pri ktorých vetvy pretínajú imaginárnu os a prechádzajú do *pravej* polroviny (póly v pravej polrovine predstavujú nestabilitu systému).¹⁴ Túto hraničnú hodnotu zosilnenia vieme získať výpočtom opäť z uhlovej podmienky pre bod na danej vetve, pri súčasnom splnení podmienky $s = i\omega$ ($\sigma = 0$).

Napokon ešte spomeňme, ako by sa správanie pólů PUS zmenilo pri zámene *zápornej* SV za *kladnú* SV: Podmienka pólu PUS by sa zmenila na

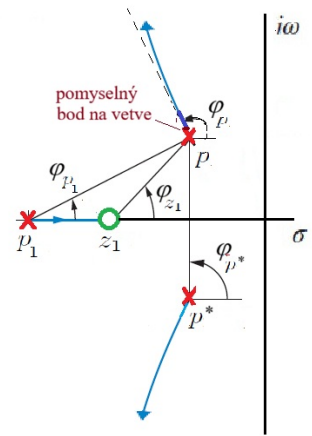
$$KG(s)H(s) = +1 \quad \Leftrightarrow \quad |G(s)H(s)| = \frac{1}{K} \quad , \quad \varphi(s) = 2k\pi \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

Zmena by teda nastala len vo *fázovej* podmienke. Pre geometriu vetiev by to znamenalo zmeny v uhloch:

- Pre uhly asymptot (pri nezmenenom priesečníku σ_{as}) by platilo

$$\varphi_{as} = \frac{2k\pi}{\text{počet } p_j - \text{počet } z_j} \Big|_{\text{len konečné}}$$

- Časti vetiev *na reálnej osi* by sa nachádzali *vľavo* od *párneho* počtu reálnych pólů a/alebo nulových bodov POS (teda tam, kde by sa *nenachádzali* v prípade zápornej SV).



¹⁴Existujú aj systémy so SV s vetvami začínajúcimi v pravej polrovine a prechádzajúcimi s narastajúcim K do ľavej polroviny. Takéto systémy sú naopak nestabilné pre malé zosilnenia.

DODATKY

A Slovník Laplaceovej transformácie

$\frac{a}{s}$	a
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n n – prirodzené ?.
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at} a – komplexné ?.
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$, $a \neq b$	$\frac{1}{a-b} (e^{-bt} - e^{-at})$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}
$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at}$
$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin \omega t$
$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at} \sin \omega t$
$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$\sinh \omega t$
$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos \omega t$
$\frac{s}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at} \cos \omega t$
$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	$\cosh \omega t$
$\frac{1}{s^2(s+a)}$, $a \neq 0$	$\frac{1}{a^2} (e^{-at} + at - 1)$
$\frac{1}{s(s+a)^2}$, $a \neq 0$	$\frac{1}{a^2} (1 - e^{-at} - ate^{-at})$
$\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega^3} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$
$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$, $a \neq b$, $a, b \neq 0$	$\frac{1}{ab} + \frac{1}{ab(a-b)(be^{-at} - ae^{-bt})}$
$\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^2} (1 - \cos \omega t)$
$\frac{1}{(s+a)(s^2+\omega^2)}$	$\frac{1}{a^2+\omega^2} (e^{-at} + \frac{a}{\omega} \sin \omega t - \cos \omega t)$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$, $a \neq b \neq c$	$\frac{1}{(b-a)(c-a)} e^{-at} + \frac{1}{(a-b)(c-b)} e^{-bt} + \frac{1}{(a-c)(b-c)} e^{-ct}$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)^2}$, $a \neq b$	$\frac{1}{(a-b)^2} \{ e^{-at} - [1 + (b-a)t] e^{-bt} \}$
$\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^2} - \frac{\sin \omega t}{\omega^3}$
$\frac{1}{[(s+a)^2+\omega^2]^2}$	$\frac{1}{2\omega^3} e^{-at} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$
$\frac{1}{s^2(s+a)^2}$, $a \neq 0$	$\frac{1}{a^2} - \frac{2}{a^3} + \frac{1}{a^2} te^{-at} + \frac{2}{a^3} e^{-at}$
$\frac{1}{(s^2+\omega_1^2)(s^2+\omega_2^2)}$	$\frac{1}{\omega_2^2-\omega_1^2} \left(\frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} - \frac{\sin \omega_2 t}{\omega_2} \right)$
$\frac{1}{s(s+a)^3}$, $a \neq 0$	$\frac{1}{a^3} - \left(\frac{t^2}{2a} + \frac{t}{a^2} + \frac{1}{a^3} \right) e^{-at}$
$\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^2} - \frac{\sin \omega t}{\omega^3}$
$\frac{1}{s^4-\omega^4}$	$\frac{1}{2\omega^3} (\sinh \omega t - \sin \omega t)$
$\frac{1}{s^3(s^2+\omega^2)}$	$\frac{t^2}{2\omega^2} - \frac{\cos \omega t - 1}{\omega^4}$
$\frac{1}{s(s^2+\omega^2)^2}$	$\frac{1}{\omega^4} (1 - \cos \omega t) - \frac{1}{2\omega^3} t \sin \omega t$
$\frac{1}{s(s+a)(s+b)^2}$, $a \neq b$, $a, b \neq 0$	$\frac{1}{ab^2} - \frac{e^{-at}}{a(a-b)^2} - \left[\frac{t}{b(a-b)} + \frac{a-2b}{b^2(a-b)^2} \right] e^{-bt}$
$\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)^2}$	$\frac{3}{2\omega^5} \sin \omega t + \frac{1}{2\omega^4} t \cos \omega t + \frac{1}{\omega^4} t$
$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$, $a \neq b$	$\frac{1}{a-b} (ae^{-at} - be^{-bt})$
$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$
$\frac{s}{(s^2+\omega_1^2)(s^2+\omega_2^2)}$	$\frac{1}{\omega_2^2-\omega_1^2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t)$
$\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega} t \sin \omega t$
$\frac{s}{s^4-\omega^4}$	$\frac{1}{2\omega^2} [\cosh \omega t - \cos \omega t]$
$\frac{s^2}{s^4-\omega^4}$	$\frac{1}{2\omega} [\sinh \omega t + \sin \omega t]$
$\frac{s^3}{s^4-\omega^4}$	$\frac{1}{2} [\cosh \omega t + \cos \omega t]$
$\frac{s+a}{s^2+\omega^2}$	$\frac{\sqrt{a^2+\omega^2}}{\omega} \sin(\omega t + \phi)$ $\phi = \arctan \frac{\omega}{a}$
$\frac{s+a}{(s+b)^2+\omega^2}$	$\sqrt{1 + \frac{(a-b)^2}{\omega^2}} e^{-bt} \sin(\omega t + \phi)$ $\phi = \arctan \frac{\omega}{a-b}$
$\frac{s+a}{s(s+b)^2}$, $a, b \neq 0$	$\frac{a}{b} \left[\left(1 - \frac{a}{b}\right) t - \frac{b}{a^2} \right] e^{-bt}$

B Rozklad na parciálne zlomky

Podiel polynómov $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ (stupeň polynómu $N(s)$ musí byť menší než stupeň $D(s)$) rozkladáme na parciálne zlomky ako

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s-p_n)(s-p_{n-1})\dots(s-p_1)} = \frac{K_n}{s-p_n} + \frac{K_{n-1}}{s-p_{n-1}} + \dots \frac{K_1}{s-p_1}$$

Koeficient K_l vypočítame ako

$$K_k = (s-p_k)F(s)|_{s=p_k}$$

(Všetky parciálne zlomky na pravej strane okrem k -teho tým vynulujeme.) Ak $D(s)$ obsahuje l -násobný koreň p_k , jemu odpovedajúce parciálne zlomky budú

$$\frac{K_{k,1}}{s-p_k} + \frac{K_{k,2}}{(s-p_k)^2} + \dots + \frac{K_{k,l}}{(s-p_k)^l}$$

Koeficient $K_{k,l}$ vypočítame ako

$$K_{k,l} = (s-p_k)^l F(s)|_{s=p_k}$$

Koeficienty $K_{k,l-1}$ atď. vypočítame z rozkladu výrazu $(s-p_k)^l F(s)$ na parciálne zlomky jeho postupným derivovaním podľa s (a dosadením $s = p_k$).

Ak $D(s)$ obsahuje komplexne združený pár koreňov, niekedy je výhodné skonštruovať z nich *jediný* parciálny zlomok s *kvadratickou* formou v menovateli (v reálnom obore je takáto kvadratická forma ďalej neredukovateľná). Napr.

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2s+K_3}{s^2+2s+5}$$

Z výrazu $sF(s)_{s=0}$ získame $K_1 = \frac{3}{5}$. Potom

$$s(s^2+2s+5)F(s) = 3 = \left(K_2 + \frac{3}{5}\right)s^2 + \left(K_3 + \frac{6}{5}\right)s + 3$$

čo platí len ak $K_2 = -\frac{3}{5}$ a $K_3 = -\frac{6}{5}$.

C Metóda uzlových potenciálov

Metódu uzlových potenciálov používame na výpočet napätí/prúdov v jednotlivých vetvách elektronických sietí. V sieti s $n+1$ uzlami je založená je na výpočte napätí (potenciálov) jednotlivých n uzlov voči *zvolenému* referenčnému uzlu riešením sústavy n rovníc maticovou metódou,

$$\begin{pmatrix} g_{11} & -g_{12} & \dots & -g_{1n} \\ & \dots & \dots & \\ -g_{n1} & -g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ \dots \\ V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ \dots \\ I_n \end{pmatrix}$$

kde

g_{ii} *prostý* súčet (> 0 !) všetkých admitancií zbiehajúcich sa do uzla i

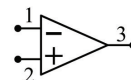
$g_{ij} = g_{ji}$ - *prostý* súčet (> 0 !) admitancií medzi i -tým a j -tým uzlom

I_i - *algebraický* súčet (s ohľadom na znamienko) prúdov generovaných zdrojmi pri i -tom

uzle (v prípade napäťových zdrojov súčinov vodivostí a napätí zdrojov)
 so znamienkom + pre prúd *zo zdroja smerujúci do uzla*
 so znamienkom - pre prúd *zo zdroja smerujúci od uzla*

Ak je súčasťou schémy operačný zosilňovač (OZ), na admitančnú maticu sa superponuje (pripočítava k uzlom patriacim vstupom a výstupu OZ) matica

$$\begin{pmatrix} Y_i & 0 & 0 \\ 0 & Y_i & 0 \\ AY_o & -AY_o & Y_o \end{pmatrix} \xrightarrow{Y_i \rightarrow 0} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ AY_o & -AY_o & Y_o \end{pmatrix}$$



Keďže $A \rightarrow \infty$ a $Y_o \rightarrow \infty$, v celkovej matici sa riadok prislúchajúci výstupu OZ predelí výrazom AY_o . Pri výpočte prenosových funkcií (ako uvidíme nižšie) sa výraz AY_o ($\rightarrow \infty$) nachádza v čitateli aj menovateli, a teda z výpočtu *vypadne* - v admitančnej matici ho teda *neuvádzame*. Výsledná matica sa teda modifikuje tak, že v riadku odpovedajúcom výstupnému uzlu OZ sú len hodnoty:

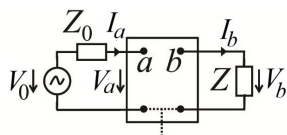
- 1 v stĺpci prislúchajúcom uzlu na *invertujúcom* vstupe OZ
- 1 v stĺpci prislúchajúcom uzlu na *neinvertujúcom* vstupe OZ
- 0 vo všetkých ostatných stĺpcoch

Potenciál i -teho uzla sa potom vypočíta ako

$$V_i = \frac{D_i}{D} = \frac{D_{1i}}{D} I_1 + \dots + \frac{D_{ni}}{D} I_n \quad (\text{rozvoj podľa } i\text{-teho stĺpca})$$

kde D_{ji} sú doplnky k determinantu sústavy (vyškrtnutý i -tý stĺpec a j -tý riadok), pričom $\text{sign} D_{ji} = (-1)^{j+i}$.

Túto metódu používame aj na výpočet prenosových vlastností sietí, pričom spomedzi všetkých uzlov 1 pár tvorí *vstup* systému a 1 pár tvorí *výstup* systému. Často majú oba páry jeden uzol *spoločný* (zvykne byť zemnený) - je vhodné ho zvoliť za *referenčný*. V prípade blokov prenosových sústav sa za uzly považujú aj ich vstupné/výstupné svorky, a uvažujú sa aj prúdy zo vstupného (externého) zdroja a do výstupnej (externej) záťaže (obr.).



a - vstupný uzol
 b - výstupný uzol

Potenciály uzlov a, b sú

$$V_a = \frac{D_{aa}}{D} I_a - \frac{D_{ba}}{D} I_b \quad V_b = \frac{D_{aa}}{D} I_a - \frac{D_{bb}}{D} I_b \quad \text{pričom} \quad v_b = Z I_b$$

Prenosové funkcie potom počítame nasledovným spôsobom:

• Prenos prúdu $\frac{I_b}{I_a} = \dots = \frac{D_{ab}}{D_{bb} + ZD}$

pri výstupe nakrátko $\left(\frac{I_b}{I_a} \right)_{Z=0} = \frac{D_{ab}}{D_{bb}}$

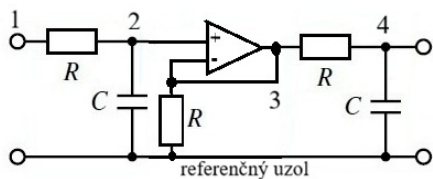
• Prenos napätia $\frac{V_b}{V_a} = \frac{\frac{D_{ab}}{D} I_a - \frac{D_{bb}}{D} I_b}{\frac{D_{aa}}{D} I_a - \frac{D_{ba}}{D} I_b} = \dots = \frac{D_{ab}Z}{D_{aa,bb} + D_{aa}Z}$

$$(D_{aa}D_{bb} - D_{ab}D_{ba} = D \cdot D_{aa,bb})$$

($D_{aa,bb}$ - subdeterminant 2. rádu, vyškrtnutý riadok aj stĺpec a aj b)

pri výstupe naprázdno $\left(\frac{V_b}{V_a} \right)_{Z=\infty} = \frac{D_{ab}}{D_{aa}}$

Ako príklad počítajme schému z kap.3.1



$$\begin{pmatrix} Y & -Y & 0 & 0 \\ -Y & Y + sC & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Y & Y + sC \end{pmatrix} \quad Y = \frac{1}{R}$$

Prenos napätia (naprázdno) je

$$\frac{V_4}{V_1} = \frac{D_{14}}{D_{11}} = \dots = \frac{1}{(1 + sRC)^2}$$

D Fázový posúvač

OZ s veľmi veľkým zosilnením A (idealizovane $A \rightarrow \infty$) prenáša spektrálne zložky napätí na jeho vstupoch ako

$$V_o(s) = A(V_2(s) - V_1(s))$$

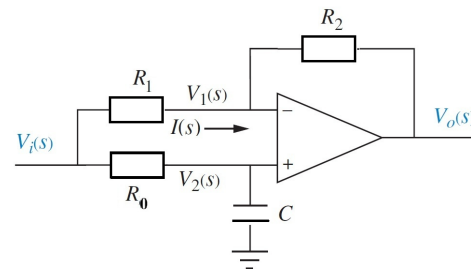
Teoreticky nekonečný vstupný odpor OZ znamená, že pre spektrálne zložky prúdu $I(s)$ (obr.) platí

$$I(s) = \frac{V_i(s) - V_o(s)}{R_1 + R_2}$$

Pritom platí

$$V_1(s) = R_2 I(s) + V_o(s)$$

$$V_2(s) = V_i(s) \frac{1/sC}{R_0 + 1/sC} = \frac{V_i(s)}{1 + sRC}$$



Kombináciou týchto vzťahov dostaneme

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{A(R_1 - sR_2R_0C)}{(sR_0C + 1)(R_1 + R_2 + AR_1)} \xrightarrow{A \rightarrow \infty} \frac{(R_1 - sR_2R_0C)}{(sR_0C + 1)R_1} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{\left(s - \frac{R_1}{R_2R_0C}\right)}{\left(s + \frac{1}{R_0C}\right)}$$

Ak položíme $R_1 = R_2$, potom

$$G(s) = \frac{s - \frac{1}{R_0C}}{s + \frac{1}{R_0C}}$$