Michal Maheľ

FYZIKA I.

Pohyb

Pohyb vo veľkom súbore častíc

Fyzikálne polia

Bratislava 2022

FYZIKA I.
Pohyb
Pohyb vo veľkom súbore častíc
Fyzikálne polia

Autor:
Michal Maheľ
Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra experimentálnej fyziky

Vydavateľ:
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK
Knižničné a edičné centrum
Bratislava 2022
1. vydanie

ISBN:
978-80-8147-118-6

Úvod

Cyklus publikácii Fyzika I.-III. predstavuje súhrn poznatkov na úrovni bakalárskeho štúdia fyziky, a je určený ako sprievodný učebný materiál študentom fyziky a príbuzných prírodných a technických vied. Poslúži však aj ako stručný prehľad pre absolventov a praktizujúcich odborníkov. Nejde o štandardnú učebnicu so súvislým textom, ale o súhrn výrokov (matematických aj verbálnych) podstatných pre danú tému, podľa potreby rozšírených o stručný komentár či matematické odvodenie. V tomto zmysle zhruba odpovedá „zápisu" prednášok na jednotlivé témy. Výber a poradie tém sú zvolené tak, aby navodili syntetizujúci pohľad na fyziku, ktorý mnohým (najmä starším) štandardným učebniciam chýba.

Fyzika I. sa v prvej časti zaoberá základnými formami newtonovského pohybu – translačným a rotačným. Tieto poznatky aplikuje v druhej časti na systémy s veľkým počtom častíc, a formuluje základy molekulovej fyziky, štatistickej fyziky a termodynamiky. V tretej časti ponúka základný opis fundamentálnych klasických polí – gravitačného a elektromagnetického.

Fyzika II. sa venuje kmitom a vlnám, pričom prelínaním sa mechanických a elektromagnetických kmitov/vĺn v texte sa zdôrazňujú univerzálne fyzikálne zákonitosti tohto druhu pohybu. Posledná časť tohto dielu sa venuje relativistickým aspektom pohybu.

Fyzika III. v prvej časti formuluje základy kvantovej mechaniky, atómovej a jadrovej fyziky. Druhá časť ponúka prehľad základných fyzikálnych mechanizmov určujúcich mechanické, elektrické, magnetické a optické vlastnosti látok.

Text dodržuje istý „farebný kód“: Nové pojmy sú zvýraznené modrým textom. Dôležitosť tvrdení je vyjadrená (vo vzostupnom poradí) fialovým/červeným zvýraznením textu alebo modrým/červeným podčiarknutím/orámovaním. Doplňujúce komentáre a odvodenia sú ohraničené hnedými oválnymi rámčekmi, a matematické vsuvky zelenými hranatými rámčekmi.

Pri najlepšej snahe autora nie je možné vylúčiť nepresnosti či nejasné tvrdenia, za ktoré sa autor ospravedlňuje.

Obsah

РОНУВ

Diferenciálne rovnice vo fyzike

vlastnosti fyzikálnych objektov popisujeme pomocou fyzikálnych veličín (napr. poloha, rýchlosť, teplota a pod.)

fyzika sa zaoberá popisom a vysvetlením vlastností fyzikálnych objektov a ich zmien, a vzájomného pôsobenia medzi objektami
fyzikálnymi objektmi sú mikroskopické častice, makroskopické telesá, systémy častíc či telies, fyzikálne polia, pričom na ich popis často používame matematické konštrukcie (hmotný bod, vlna, atď.)

najčastejšou úlohou vo fyzike je nájdenie stavu (tj. vlastností) fyzikálneho objektu (vyjadreného príslušnými fyzikálnymi veličinami) v danej situácii (napr. v danom čase, na danom mieste, pri danej teplote, a pod.), ak je známy jeho stav v inej situácii (v inom čase, atď.)

napr. kde sa práve nachádza družica vypustená pred rokom?
ako sa zmení tlak plynu v nádobe ak zmeníme jeho teplotu? a pod.

hľadáme teda zmenu hodnoty príslušnej veličiny (veličín) v závislosti od zmeny hodnoty inej veličiny (veličín)

funkcia jednej alebo viacerých premenných

závislosť jednej veličiny od inej (alebo viacerých) matematicky vyjadrujú funkcie jednej alebo viacerých premenných $f(a)$ $f(a, b, \dots)$

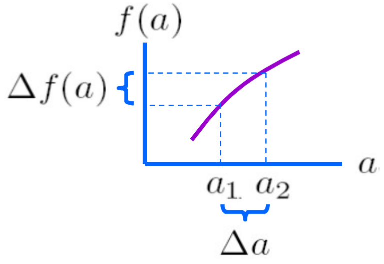
premenné $a, b, \dots$ sú veličiny, ktorých hodnoty sa môžu meniť v určitom obore, resp. intervale

funkcie $f(a), f(a, b, \dots)$ sú veličiny, ktorých hodnoty závisia od konkrétnych hodnôt ich premenných *napr.* *tlak určitého množstva (počtu molekúl) plynu v danom objeme je funkciou teploty plynu (premenná a reprezentuje teplotu a tlak je jej funkciou $f(a)$)*

nadmorská výška nejakého miesta na zemeguli je funkciou zemepisnej dĺžky a šírky tohto miesta (premenné a, b reprezentujú zemepisné súradnice a nadmorská výška je ich funkciou $f(a, b)$)

diferenciál a derivácia funkcie

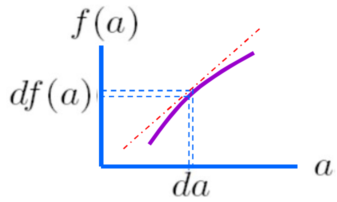
rozdiel hodnôt funkcie $f(a)$ pre dve rôzne hodnoty premennej, a_1 a a_2, určuje celkovú zmenu funkcie $\Delta f(a) = f(a_2) - f(a_1)$ na intervale premennej $\Delta a = a_2 - a_1$



podiel $\frac{\Delta f(a)}{\Delta a}$ určuje priemernú strmosť (tj. prudkosť zmeny) funkcie na danom intervale (strmosť funkcie sa od bodu k bodu môže meniť)

zmenšovaním intervalu zmeny premennej Δa na infinitezimálnu („nekonečne“ malú) hodnotu $\Delta a \to da\ (\to 0)$ - tzv. diferenciál premennej - dostávame infinitezimálnu zmenu hodnoty funkcie $\Delta f(a) \to df(a)$ - diferenciál funkcie

podiel diferenciálov $\frac{df(a)}{da}$ určuje strmosť funkcie „v danom bode“ (tj. v nekonečne malom okolí daného bodu) - deriváciu funkcie v danom bode



strmosť dotyčnice k funkcii v danom bode odpovedá derivácii funkcie !

diferenciál funkcie $f(a)$ môžeme teda vyjadriť pomocou jej derivácie ako $\underline{df(a) = \frac{df(a)}{da} da}$
(o koľko sa zmení funkcia $f(a)$ na intervale da pri strmosti $\frac{df(a)}{da}$)

funkcia, ktorá je na danom intervale premenných spojitá (tj. nie je „prerušená“, má jednoznačnú hodnotu pre každú hodnotu premennej v danom intervale), má deriváciu v každom bode intervalu - derivácia funkcie danej premennej (premenných) je tiež funkciou tejto premennej (premenných)!

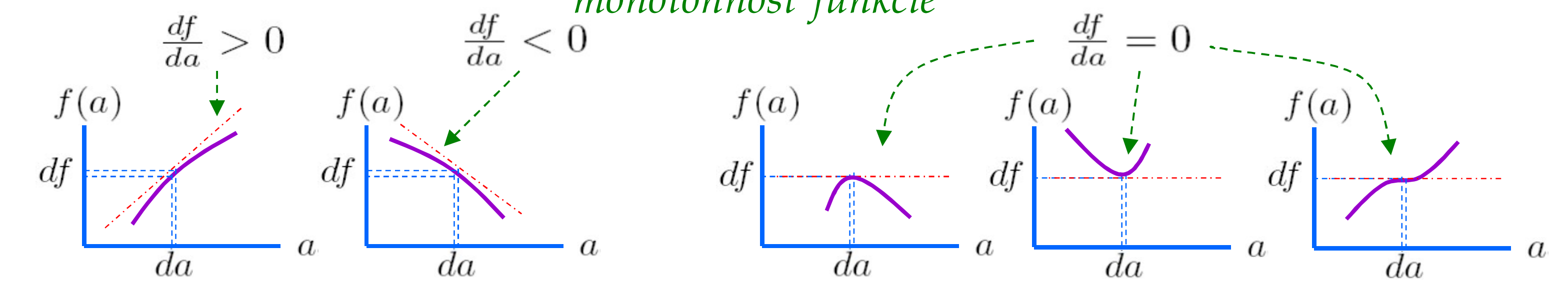
derivácie vyššieho rádu

ak je derivácia danej funkcie spojitou funkciou v danom intervale premenných, má deriváciu v každom bode tohto intervalu – druhá derivácia pôvodnej funkcie (tj. derivácia derivácie), atď.

$$\frac{d^2 f}{da^2} = \frac{d}{da}\frac{df}{da}$$

$$\frac{d^n f}{da^n} = \frac{d}{da}\frac{d^{n-1} f}{da^{n-1}}$$

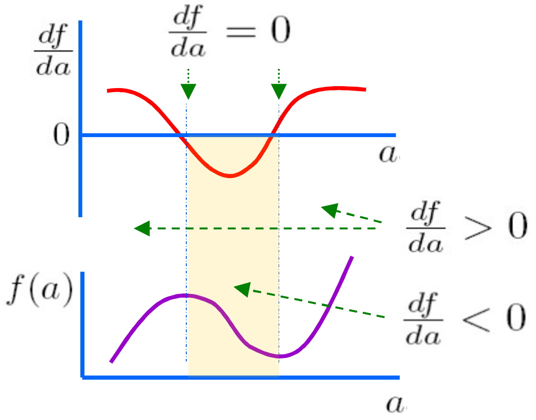
monotónnosť funkcie



rastúca *klesajúca* *maximum* *minimum* *inflexný bod*

funkcia *funkcie (lokálne)*

$\frac{d^2 f}{da^2} < 0$ $\frac{d^2 f}{da^2} > 0$ $\frac{d^2 f}{da^2} = 0$



druhá derivácia funkcie vyjadruje jej krivosť

$\frac{d^2 f}{da^2} < 0$ - *konvexná (vypuklá)*

$\frac{d^2 f}{da^2} > 0$ - *konkávna (dutá)*

$\frac{d^2 f}{da^2} = 0$ - *inflexný bod - bod zmeny krivosti*

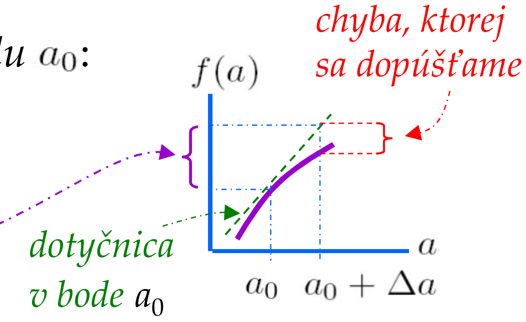
rozvoj funkcie do Taylorovho radu

ak poznáme hodnotu funkcie $f(a)$ *aj jej derivácií vyšších rádov v bode* a_0*, vieme určiť jej hodnotu v bode* $a_0 + \Delta a$ $(\Delta a \to 0)$

v prvom priblížení stačí uvažovať strmosť zmeny funkcie v okolí bodu a_0*:*
na intervale Δa *sa funkcia f(a) zmení o*

$$f(a_0 + \Delta a) - f(a_0) = \frac{f(a_0+\Delta a) - f(a_0)}{\Delta a}\Delta a \to \frac{df(a)}{da}\Big|_{a=a_0}\Delta a$$

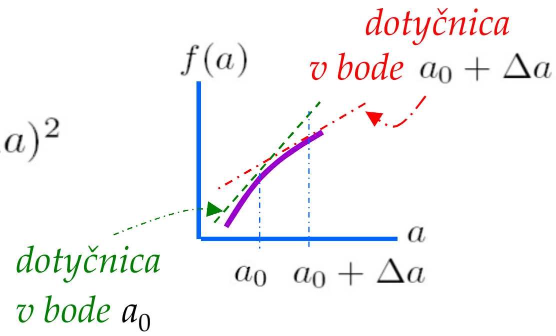
$$= \frac{df(a_0)}{da}\Delta a$$



$$f(a_0 + \Delta a) \cong f(a_0) + \frac{df(a_0)}{da}\Delta a$$

v druhom priblížení pridáme korekciu na zmenu strmosti v bode $a_0 + \Delta a$ *oproti bodu* a_0*:*

$$\left(\frac{df(a_0+\Delta a)}{da} - \frac{df(a_0)}{da}\right)\Delta a = \frac{\frac{df(a_0+\Delta a)}{da} - \frac{df(a_0)}{da}}{\Delta a}(\Delta a)^2 \to \frac{d^2 f(a_0)}{da^2}(\Delta a)^2$$



$$f(a_0 + \Delta a) \cong f(a_0) + \frac{df(a_0)}{da}\Delta a + \frac{d^2 f(a_0)}{da^2}(\Delta a)^2$$

atď.

funkciu f(a), ktorá má derivácie všetkých rádov, môžeme v infinitezimálnom okolí bodu a_0 *vyjadriť pomocou Taylorovho radu - nekonečného radu derivácií*

$$f(a_0 + \Delta a) = f(a_0) + \frac{df(a_0)}{da}\Delta a + \frac{1}{2}\frac{d^2 f(a_0)}{da^2}(\Delta a)^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{d^k f(a_0)}{da^k}(\Delta a)^k$$

$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots (k-1)k$ *(k-faktoriál)* *presnosť určenia hodnoty* $f(a_0 + \Delta a)$ *narastá s rastúcim rádom použitých derivácií*

čím je Δa *menšie, tým menší je význam korekcií vyšších rádov*

rozvoj niektorých dôležitých funkcií v malom okolí bodu $x_0 = 0$:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{6} + \ldots \qquad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \ldots \qquad |\, x \,| < 1 \qquad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha!}{k!(\alpha-k)!}$$

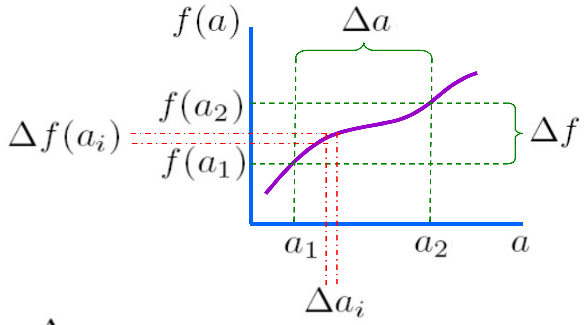
napr.:

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - \ldots \qquad \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \ldots$$

určitý integrál

funkcia $f(a)$ *sa na intervale* $\Delta a = a_2 - a_1$ *zmení o* $\Delta f = f(a_2) - f(a_1)$



celkovú zmenu Δa *môžeme rozdeliť na množstvo malých zmien* Δa_i *, ktorým odpovedá zmena funkcie* $f(a)$ *o* $\Delta f(a_i)$

$$\Delta a = \sum_i \Delta a_i$$

prechodom k infinitezimálnej zmene $\Delta a_i \to da$ *dostávame* Δa *ako súčet „nekonečného počtu nekonečne malých" zmien* da *od* a_1 *po* a_2*, čo matematicky značíme ako* $\int_{a_1}^{a_2} da$ *a nazývame určitým integrálom*

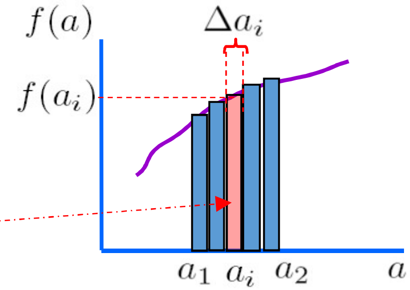
hranice integrovania

$$\boxed{\Delta a = \int_{a_1}^{a_2} da = a_2 - a_1}$$

infinitezimálnej zmene da *odpovedá infinitezimálna zmena* df*, a celková zmena funkcie* $f(a)$ *na intervale* Δa *je daná určitým integrálom*

$$\boxed{\Delta f = \int_{f(a_1)}^{f(a_2)} df = f(a_2) - f(a_1)}$$

pri infinitezimálnej zmene premennej a *v okolí hodnoty* a_i *môžeme predpokladať, že hodnota funkcie* $f(a)$ *sa takmer nemení v intervale* $\Delta a_i \to da$ *a možno ju aproximovať hodnotou* $f(a_i)$



súčin $f(a_i)\Delta a_i$ *prakticky odpovedá ploche pod krivkou* $f(a)$ *v infinitezimálnom intervale* Δa_i

integrál $\int_{a_1}^{a_2} f(a)da$ *teda odpovedá celkovej ploche pod krivkou* $f(a)$ *v celom intervale* $\Delta a = a_2 - a_1$ *(súčet „nekonečného počtu nekonečne malých plôch")*

neurčitý integrál

súčet nekonečného počtu infinitezimálnych zmien (tj. diferenciálov) funkcie $f(a)$ pre všetky hodnoty premennej a (bez určenia hraníc integrovania) – tzv. neurčitý integrál – odpovedá funkcii samotnej $\boxed{\int df = f(a)}\ (+c)$ - s presnosťou na (tzv. integračnú) konštantu

keďže podiel diferenciálov funkcie a jej premennej odpovedá derivácii funkcie podľa premennej, môžeme pre diferenciál funkcie písať $\boxed{df = \frac{df}{da} da}$ a teda $\boxed{f(a) = \int df = \int \frac{df}{da} da\ (+c)}$

derivovanie a integrovanie funkcie podľa jej premennej sú inverzné operácie - integrovaním derivácie (alebo derivovaním neurčitého integrálu) danej funkcie podľa jej premennej dostávame pôvodnú funkciu

derivácia funkcie danej premennej je tiež funkciou tejto premennej !

neurčitý integrál funkcie danej premennej je tiež funkciou tejto premennej !

určitý integrál funkcie danej premennej je číslo ! (tj. jediná hodnota, ktorú dostaneme dosadením hodnôt neurčitého integrálu v hraničných bodoch integrovania a ich odčítaním)

$$\int_{f(a_1)}^{f(a_2)} df = \int df|_{a=a_2} - \int df|_{a=a_1} = f(a)|_{a=a_2} - f(a)|_{a=a_1} = f(a_2) - f(a_1)$$

operátory

fyzikálny zmysel diferenciálu danej funkcie (fyzikálnej veličiny) je jej infinitezimálna zmena (okolo nejakej hodnoty), da, df

fyzikálny zmysel derivácie danej funkcie podľa jej premennej je strmosť zmeny tejto funkcie pri infinitezimálnej zmene jej premennej (okolo nejakej hodnoty), teda podiel diferenciálov funkcie a jej premennej, $\frac{df}{da}$

fyzikálny zmysel integrálu danej funkcie podľa jej premennej $\int f(a)da$ *je súčet „nekonečného počtu (symbol* $\int$ *) nekonečne malých" príspevkov* $f(a)da$ *(lebo* da *je „nekonečne malé")*

z matematického hľadiska môžeme vytvorenie diferenciálu, derivácie či integrálu danej funkcie vnímať ako aplikovanie príslušného operátora $\hat{O}$ *na túto funkciu, ktorý z nej vytvorí jej diferenciál, deriváciu či integrál (zdiferencuje, zderivuje, zintegruje ju)*

aplikovanie operátora na funkciu matematicky znamená istú postupnosť operácií, pri dodržaní poradia predpísaného pre príslušný operátor (neplatí komutatívnosť, $\underline{\hat{O}f(a) \neq f(a)\hat{O}}$ *)*

operátor diferencovania funkcie $f(a)$*:* $\hat{O} = d$ $\hat{O}f = df$

operátor derivovania funkcie $f(a)$*:* $\hat{O} = \frac{d}{da}$ $\hat{O}f = \frac{d}{da}f = \frac{df}{da}$

operátor integrovania funkcie $f(a)$*:* $\hat{O} = \int da$ $\hat{O}f = \int f da$

operátory diferencovania d *a sčítavania nekonečného počtu diferenciálov fyzikálnej veličiny* $\int$ *sú navzájom inverzné operátory (* $d\int = \int d = 1$ *), podobne ako operátory* $\frac{d}{da}$ *a* $\int da$

výpočet derivácií niektorých funkcií

$f(a) = a^n : \frac{df}{da} = na^{n-1}$

$f(a) = cu(a) : \frac{df}{da} = c\frac{du}{da}$

$f(a) = c : \frac{df}{da} = 0$

$f(a) = \sin a : \frac{df}{da} = \cos a$

$f(a) = \cos a : \frac{df}{da} = -\sin a$

$f(a) = e^a : \frac{df}{da} = e^a (= f(a))$

výpočet derivácie súčtu a súčinu funkcií

$f(a) = u(a) + v(a) : \frac{df}{da} = \frac{du}{da} + \frac{dv}{da}$

$f(a) = u(a)v(a) : \frac{df}{da} = \frac{du}{da}v + u\frac{dv}{da}$

výpočet derivácie zloženej funkcie

nech $f(b)$ *a* $b(a)$**:**

$\frac{df}{da} = \frac{df}{db}\frac{db}{da}$

napr. $f(a) = \cos a^n : b(a) = a^n \; , \; f(b) = \cos b$

$\frac{df}{db} = -\sin b = -\sin a^n \; , \; \frac{db}{da} = na^{n-1} \Rightarrow \frac{df}{da} = -na^{n-1}\sin a^n$

výpočet neurčitého integrálu niektorých funkcií

$$\left.\begin{aligned} &\int a^n da = \tfrac{1}{n+1}a^{n+1} \\ &\int nf(a)da = n\int f(a)da \\ &\int n da = n\int da = na \end{aligned}\right\} \quad (+c)$$

$$\left.\begin{aligned} &\int \cos a da = \sin a \\ &\int \sin a da = -\cos a \\ &\int e^a da = e^a \end{aligned}\right\} \quad (+c)$$

$\int 0 da = c$

$\int \{u(a) + v(a)\} da = \int u(a)da + \int v(a)da$

diferenciály, derivácie a integrály funkcie viacerých premenných

strmosť zmeny funkcie viacerých premenných $f(a, b, \ldots)$ pri infinitezimálnej zmene jednej z premenných určuje parciálnu deriváciu funkcie podľa tejto premennej, $\frac{\partial f}{\partial a}$, $\frac{\partial f}{\partial b}$, ...

∂f predstavuje čiastkovú (parciálnu) infinitezimálnu zmenu funkcie pri infinitezimálnej zmene jednej z jej premenných

pravidlá aplikovania operátora parciálnej derivácie $\frac{\partial}{\partial a}$ na funkciu viacerých premenných (tj. výpočtu parciálnej derivácie) sú identické s pravidlami aplikovania operátora $\frac{d}{da}$ (závislosť funkcie od ostatných premenných si pri tom „nevšímame“)

úplný (totálny) diferenciál funkcie $f(a, b, \ldots)$, vyjadrujúci celkovú zmenu funkcie pri infinitezimálnej zmene všetkých jej premenných, je daný výrazom

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial a} da + \frac{\partial f}{\partial b} db + \ldots}$$

parciálne diferenciály funkcie

(podobne ako diferenciál funkcie $f(a)$ je $df = \frac{df}{da} da$)

(fyzikálny zmysel výrazov ∂a a da je identický – oba predstavujú infinitezimálnu zmenu danej premennej)

funkciu viacerých premenných $f(a, b, \ldots)$ možno integrovať podľa jednej z premenných (podľa rovnakých pravidiel ako funkciu jednej premennej), $\int f(a, b, \ldots) da$, alebo podľa niekoľkých premenných, $\underline{\int\int f(a, b, \ldots) da db}$ (tzv. dvojný integrál), atď.

(pri aplikovaní operátora $\int\int \, da db$ používame pravidlá integrovania podľa jednej premennej postupne pre obe premenné v ľubovoľnom poradí) *derivácia jednej fyzikálnej veličiny podľa inej vyjadruje strmosť ich vzájomnej závislosti - prudkosť zmeny jednej veličiny pri nepatrnej zmene druhej*

polarita (znamienko, + alebo -) derivácie jednej fyzikálnej veličiny podľa inej vyjadruje monotónnosť ich vzájomnej závislosti (tj. či daná fyzikálna veličina rastie alebo klesá pri nepatrnej zmene druhej veličiny)

celkovú konečnú zmenu fyzikálnej veličiny vyjadruje jej určitý integrál

dôležité rovnice fyziky majú tvar diferenciálnych rovníc – popisujú zmenu fyzikálnych veličín v závislosti od iných veličín (tj. obsahujú derivácie týchto veličín)

riešením diferenciálnych rovníc, tj. integrovaním derivácií príslušných fyzikálnych veličín získavame hodnoty týchto veličín, popisujúce stav daného fyzikálneho objektu, pri rôznych (meniacich sa) vonkajších podmienkach

Vektory

skalár – fyzikálna veličina, ktorá je (za daných podmienok) úplne charakterizovaná jej veľkosťou (číslom)

vektor – fyzikálna veličina, ktorá je (za daných podmienok) úplne charakterizovaná jej veľkosťou a smerom

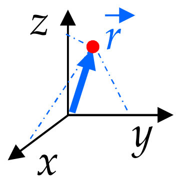
napr. teplota vzduchu (na danom mieste) je skalár – je úplne určená veľkosťou
rýchlosť vetra (na danom mieste) je vektor – je úplne určená veľkosťou a smerom

vektory

zápis vektorových veličín v 3-rozmernom priestore závisí od výberu súradnicovej sústavy najčastejšou (a najprirodzenejšou) súradnicovou sústavou je kartézska sústava s 3 navzájom kolmými referenčnými smermi (osami) x,y,z

napr. polohový vektor $\vec{r}[x, y, z]$*, určujúci polohu bodu v 3D priestore vzhľadom na počiatok súradnicovej sústavy (daný spojnicou počiatku súradnicovej sústavy s daným bodom) je popísaný 3 zložkami – veľkosťami priemetov vektora na osi x,y,z, veľkosť polohového vektora je*

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

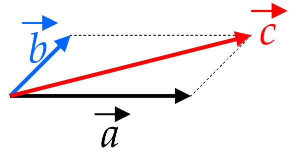


ľubovoľný vektor $\vec{a}[a_x, a_y, a_z]$ *v kartézskej sústave súradníc má zložky* a_x, a_y, a_z *rovné veľkostiam jeho priemetov na osi x,y,z a veľkosť*

$$\boxed{a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

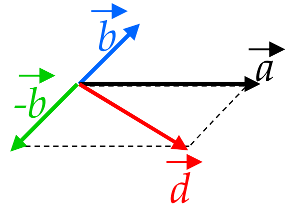
$$n\vec{a}[na_x, na_y, na_z]$$

súčet a rozdiel vektorov



$$\vec{a}[a_x, a_y, a_z]$$
$$\vec{b}[b_x, b_y, b_z]$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$
$$\vec{c}[a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z]$$



$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} + (-1)\vec{b}$$
$$\vec{d}[a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z]$$

skalárny súčin vektorov

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\vartheta$ ← *uhol zvieraný vektormi*

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

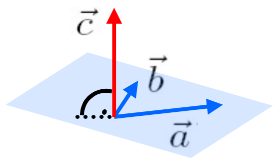
$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 \cos 0 = a^2$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

vektorový súčin vektorov

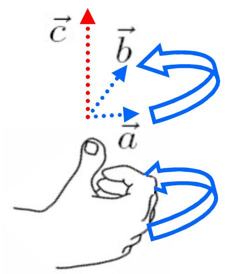
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$
$$c = ab\sin\vartheta$$
$$\vec{c} \perp \vec{a},\ \vec{c} \perp \vec{b}$$

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y$$
$$c_y = a_z b_x - a_x b_z$$
$$c_z = a_x b_y - a_y b_x$$



$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$$
$$\vec{a} \times \vec{a} = 0$$

$$(n\vec{a}) \times \vec{b} = n(\vec{a} \times \vec{b})$$



$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$
$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

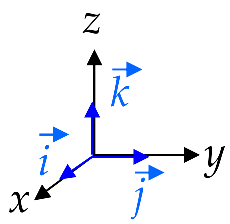
$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

jednotkové vektory bázy

vektorová báza kartézskej sústavy je trojica *navzájom kolmých vektorov jednotkovej veľkosti* v smeroch súradnicových osí x,y,z

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = 1\cdot 1\cdot\cos 0 = 1 \qquad \vec{i}\cdot\vec{j} = 1\cdot 1\cdot\cos\tfrac{\pi}{2} = 0$$

$\vec{i}[1,0,0]$
$\vec{j}[0,1,0]$
$\vec{k}[0,0,1]$



ľubovoľný vektor $\vec{a}[a_x, a_y, a_z]$ možno vyjadriť pomocou jednotkových vektorov bázy

$$\underline{\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}} \qquad \vec{a}\cdot\vec{i} = a\cos\vartheta = a_x$$ - priemet vektora do osi x, atď.

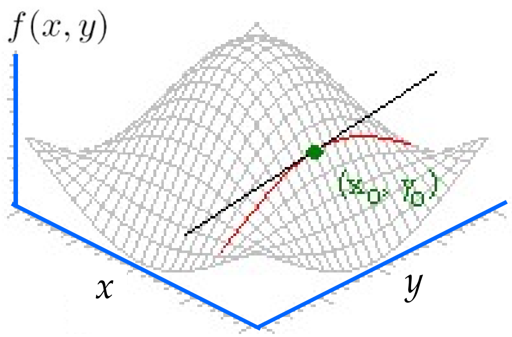
vektorové operátory

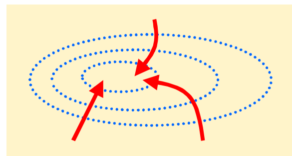
predpokladajme funkciu 2 súradníc $f(x,y)$
(napr. výška zemského povrchu ako funkcia zemepisnej dĺžky a šírky)

$\frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0,y_0)}$, $\frac{\partial f}{\partial y}|_{(x_0,y_0)}$ - strmosť zmeny funkcie *v danom bode* (x_0, y_0) v smere x, resp. y
(strmosť povrchu (v danom mieste) pozdĺž rovnobežky, poludníka)

$\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}$, $\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$ - *vektory* v smeroch x, y o veľkostiach rovných strmosti zmeny funkcie v príslušnom smere)

$(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j})|_{(x_0,y_0)}$ – vektor *v smere maximálnej strmosti nárastu funkcie* $f(x,y)$ v bode (x_0, y_0)





mapa povrchu (vrstevnice)

smery najstrmšieho nárastu výšky (kolmo na vrstevnice) *predpokladajme skalárnu funkciu 3 súradníc* $f(x,y,z)$ *(napr. teplota vzduchu v miestnosti)*

$\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$ - *vektorová funkcia polohy, popisujúca veľkosť a smer najstrmšieho nárastu funkcie* $f(x,y,z)$ *v každom bode priestoru*

$$\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)f = \nabla f \qquad \boxed{\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}}$$

nabla operátor

vektorový nabla operátor aplikovaný na ľubovoľnú skalárnu funkciu polohy určuje veľkosť a smer najstrmšieho nárastu tejto funkcie v každom jej bode – tzv. gradient funkcie

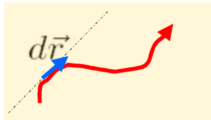
$\underline{\nabla f = \mathrm{grad} f = \vec{g}}$ - *vektorový operátor* $\nabla[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}]$ *aplikovaný na skalárnu funkciu* f *vytvorí vektorovú funkciu* $\vec{g}[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}]$

predpokladajme vektorovú funkciu polohy $\vec{g}(x,y,z)$ *(napr. rýchlosť prúdenia vzduchu v miestnosti)*

aplikovaním vektorového operátora $\int \cdot d\vec{r}$ *uskutočňujeme integrovanie funkcie* $\vec{g}$ *podľa polohy v priestore po určitej dráhe, tvorenej infinitezimálnymi dráhovými úsekmi* $d\vec{r}[dx, dy, dz]$ *(so smerom dotyčníc k integračnej dráhe v danom bode) - tzv. dráhový (krivkový) integrál*

$$\underline{\int \vec{g}\cdot d\vec{r}} = \int (g_x dx + g_y dy + g_z dz) = \int g_x dx + \int g_y dy + \int g_z dz$$

(skalárny súčin vektorov)



vektorový operátor dráhového integrálu aplikovaný na vektorovú funkciu vytvorí skalárnu funkciu

ak $\vec{g} = \nabla f \Rightarrow g_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $g_y = \frac{\partial f}{\partial y}$, $g_z = \frac{\partial f}{\partial z}$

$$\underline{\int \vec{g}\cdot d\vec{r}} = \int \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right) = \int df \,\underline{= f}\, (+c)$$

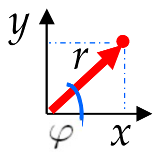
(totálny diferenciál funkcie)

gradient a dráhový integrál sú navzájom inverzné operácie

súradnicové sústavy

poloha bodu v (2D) rovine, v kartézskych súradniciach určená dvojicou hodnôt xy (priemetmi polohového vektora daného bodu na osi x,y), je v polárnych súradniciach určená dvojicou:

r *- veľkosť polohového vektora daného bodu*
φ *- uhol natočenia polohového vektora bodu voči referenčnému smeru (os x)*

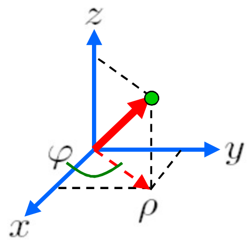


$$\vec{r}[x,y] = \vec{r}[r,\varphi] \qquad \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array} \qquad \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array}$$

polárne súradnice sú výhodné pri popise úloh majúcich stredovú (bodovú) symetriu

poloha bodu v (3D) priestore v cylindrických súradniciach je určená trojicou hodnôt:

ρ *- veľkosť priemetu polohového vektora bodu do roviny xy*
φ *- uhol natočenia priemetu polohového vektora bodu do roviny xy voči osi x*
z *- priemet polohového vektora bodu do osi z*



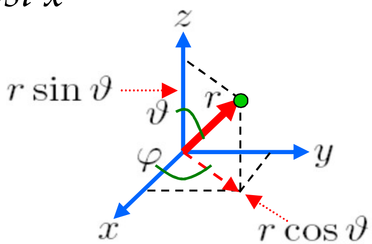
$$\vec{r}[x,y,z] = \vec{r}[\rho,\varphi,z] \qquad \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{array} \qquad \begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \arctan\frac{y}{x} \end{array} \qquad z = z$$

cylindrické súradnice sú výhodné pri popise úloh majúcich osovú symetriu

poloha bodu v (3D) priestore v sférických súradniciach je určená trojicou hodnôt:

r *- veľkosť priemetu polohového vektora bodu do roviny xy*
φ *- uhol natočenia priemetu polohového vektora bodu do roviny xy voči osi x*
ϑ *- uhol natočenia polohového vektora bodu voči osi z*

$$\vec{r}[x,y,z] = \vec{r}[r,\varphi,\vartheta] \qquad \begin{array}{l} x = r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y = r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z = r\cos\vartheta \end{array} \qquad \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \varphi = \arctan\frac{y}{x} \\ \vartheta = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{array}$$



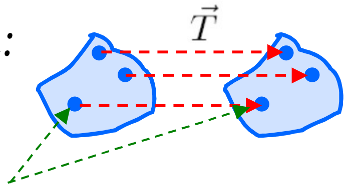
sférické súradnice sú výhodné pri popise úloh majúcich stredovú symetriu

Základné pojmy kinematiky

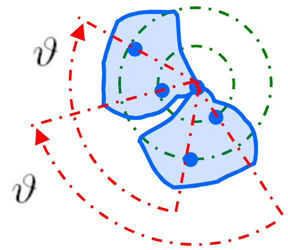
poloha telesa v priestore je určená polohovým vektorom každého bodu telesa

pohyb telesa - zmena jeho polohy s časom, základné druhy jeho pohybu sú:

- *translačný (posuvný) pohyb – každý bod telesa sa posúva o rovnakú vzdialenosť rovnakým smerom – o vektor posunutia* $\vec{T}$: $\underline{\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i + \vec{T}}$



- *rotačný pohyb – poloha každého bodu telesa sa otočí o rovnaký uhol* ϑ *okolo spoločného bodu – stredu otáčania – ktorý môže ležať vo vnútri telesa alebo mimo neho*



zložený pohyb je superpozíciou translačných a rotačných pohybov

napr. valivý pohyb lopty je superpozíciou translačného pohybu a rotačného pohybu okolo stredu lopty

hmotný bod - objekt („nulových rozmerov“), ktorého celá hmotnosť je sústredená do bodu

pojem hmotný bod je vhodným zjednodušením, ak skúmame len pohyb telesa ako celku bez ohľadu na pohyb jednotlivých jeho častí (napr. ako rýchlo a kam letí lopta), alebo ak skúmame pohyb infinitezimálnej časti telesa

rýchlosť (pohybu) $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t \rightarrow 0]{} \frac{ds}{dt}$ $[ms^{-1}]$

pohybujúci sa hmotný bod prejde za časový úsek Δt *dráhu* Δs *, po dobu* Δt *sa však jeho rýchlosť môže meniť,* $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ *je preto priemernou rýchlosťou pohybu*
infinitezimalizáciou Δt *dostávame okamžitú rýchlosť* $\frac{ds}{dt}$ *(rýchlosť = strmosť zmeny dráhy v čase)*

dráha $s = \sum_i \Delta s_i = \sum_i v(t_i)\Delta t \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$ $t_{i+1} = t_i + \Delta t$

celková dráha prejdená pohybujúcim sa hmotným bodom je daná súčtom dráh Δs_i prejdených za jednotlivé časové úseky Δt (v každom časovom úseku určenom časom t_i sa hmotný bod pohybuje rýchlosťou $v(t_i)$), ich infinitezimalizáciou prechádza súčet na integrál v hraniciach od času začiatku pohybu t_1 po jeho koniec t_2, kde $v(t)$ je okamžitá rýchlosť hmotného bodu ako funkcia času

zrýchlenie $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2 s}{dt^2}$ $[ms^{-2}]$

zrýchlenie je rýchlosť (tj. strmosť v čase) zmeny rýchlosti pohybu (tj. zmeny prejdenej dráhy)

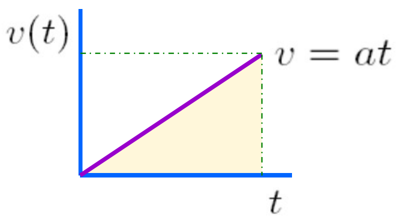
$dv = a(t)dt$, $v(t) = \int a(t)dt + v_0$ *integračná konštanta, určená počiatočnou podmienkou*

$v_0 = v(t_1)$ *čas začiatku zrýchľovania*

$\underline{v(t_2) = v_0 + \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt}$ $s(t) = \int v(t)dt = \underline{\int\left(\int a(t)dt + v_0\right)dt}$

rovnomerne zrýchlený pohyb

ak $a = const.$ *a* $t_1 = 0$, $v_0 = 0$ *(počiatočná podmienka),*
potom $\underline{v = at \ , \ s = \frac{1}{2}at^2}$



pri konštantnom zrýchlení rýchlosť hmotného bodu lineárne narastá s časom, zrýchlenie a určuje strmosť priamky $v = at$

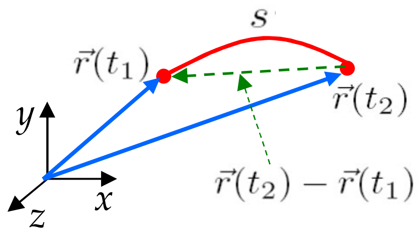
dráha prejdená za daný čas je integrálom rýchlosti cez čas (tj. nekonečným súčtom infinitezimálnych príspevkov $v(t)dt$), jeho veľkosť je daná plochou trojuholníka pod priamkou $v(t)$: $\frac{1}{2}vt = \frac{1}{2}at^2$

rýchlosť aj zrýchlenie sú vektory $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$

$v_x = \frac{dx}{dt}$, *to isté y, z* $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ *zrýchlenie analogicky*

dĺžka celkovej prejdenej dráhy s nemusí odpovedať (pri krivočiarom pohybe) rozdielu polohových vektorov hmotného bodu na začiatku a konci pohybu, $\vec{r}(t_1)$ *a* $\vec{r}(t_2)$, *tj. výslednej zmene polohy*

infinitezimalizáciou pohybu však pre diferenciály platí $dr = ds$



Newtonove zákony dynamiky

zákon zotrvačnosti (1)

teleso bez pôsobenia vonkajšej sily nemení svoj pohybový stav (zotrváva v pokoji alebo v priamočiarom rovnomernom pohybe)

zákon sily (2)

hmotnosť	m	$[kg]$
hybnosť	$\vec{p} = m\vec{v}$	$[Ns = kgms^{-1}]$
sila	$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$	$[N = kgms^{-2}]$

hmotnosť je mierou zotrvačnosti telesa – jeho schopnosti klásť odpor voči zmene jeho pohybového stavu

hybnosť je mierou zotrvačnosti telesa a jeho pohybového stavu

sila je zdrojom zmeny pohybového stavu telesa, je mierou strmosti časovej zmeny jeho hybnosti

Newtonova pohybová rovnica (NPR) - základná rovnica mechaniky !!!

ak poznáme stav telesa (poloha, rýchlosť) v danom okamihu a výslednú silu, pôsobiacu na teleso, vieme pomocou NPR určiť jeho stav v ľubovoľnom inom čase

$$m = const. \Longrightarrow \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \qquad \vec{F} \uparrow\uparrow \vec{a},\ a = \frac{F}{m} \sim \frac{1}{m}$$

čím väčšia je hmotnosť telesa, tým menšiu zmenu jeho pohybového stavu (tj. tým menšie zrýchlenie) spôsobí daná sila, resp. tým väčšia sila je potrebná na určitú zmenu jeho pohybového stavu

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{v} = const.$$

- priamočiary rovnomerný pohyb alebo pokoj (const = 0)

$$F_x = m\frac{dv_x}{dt} = ma_x = m\frac{d^2x}{dt^2}$$ zložka sily v smere x (y,z analog.)

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$F_x = \vec{F}\cdot\vec{i} = F\cos(x,F)$$ uhol medzi smerom sily a osou x

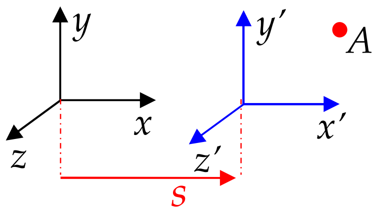
zákon akcie a reakcie (3)

každá akcia vyvolá rovnako veľkú, opačne orientovanú reakciu

ak teleso A pôsobí na teleso B silou $\vec{F}$, teleso B pôsobí na teleso A silou - $\vec{F}$ (rovnako veľkou, opačne orientovanou)

invariantnosť NPR voči transformáciám súradnicových sústav

a.) posunutie (translácia) sústavy



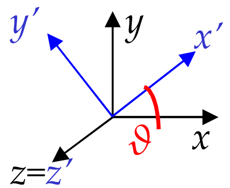
súradnice daného bodu A v posunutej súradnicovej sústave

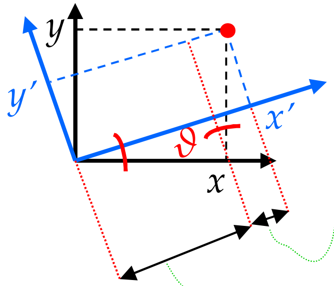
$$x' = x - s\ ,\ y' = y\ ,\ z' = z$$ *transformácie súradníc*

posunutie v smere osi x

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = m\frac{d^2(x-s)}{dt^2} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$ *tvar NRP sa nemení*

b.) pootočenie (rotácia) sústavy





$$x' = x\cos\vartheta + y\sin\vartheta$$

$$y' = y\cos\vartheta - x\sin\vartheta$$

$$z' = z$$

$$F_x = m\frac{d^2x}{dt^2}\ ,\ F_y,\ F_z$$

$$F'_x = m\frac{d^2x'}{dt^2}\ ,\ F'_y,\ F'_z$$

tvar NRP sa nemení

$$F'_x = m\frac{d^2x'}{dt^2} = m\frac{d^2x}{dt^2}\cos\vartheta + m\frac{d^2y}{dt^2}\sin\vartheta = F_x\cos\vartheta + F_y\sin\vartheta$$

$$F'_y = F_y\cos\vartheta - F_x\sin\vartheta \qquad F'_z = F_z$$

súradnice aj sily sa transformujú

tvar NPR je invariantný voči translácii aj rotácii súradnicovej sústavy - *takéto súradnicové sústavy sú ekvivalentné – treba vybrať tú najvýhodnejšiu*

c.) navzájom sa pohybujúce súradnicové sústavy

$v = const. \qquad s = vt \qquad x' = x - s \qquad \frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dt} - v \qquad \frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$

$v = v(t)$ *napr.* $v = \frac{ds}{dt} = at$, $a = const.$ - *zrýchlenie súr. sústavy*

$x' = x - s \qquad s = \frac{1}{2}at^2 \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = a \qquad \frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} - a$

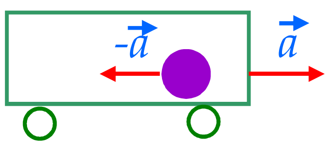
$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x \qquad m\frac{d^2x'}{dt^2} = F'_x - ma$

tvar NRP sa mení !

reálna sila v sústave pohybujúcej sa so zrýchlením

pseudosila F_{px} *- fiktívna sila, ktorú treba pridať do NPR v sústave pohybujúcej sa so zrýchlením*

Pr.: *Rozbiehajúci sa vagón so zrýchlením* $\vec{a}$ *– v sústave spojenej s vagónom pôsobí na predmety pseudosila vyvolávajúca pohyb dozadu so zrýchlením* $-\vec{a}$.



pseudosila je prejavom zotrvačnosti telesa - teleso sa snaží zachovať svoj pôvodný pohybový stav

- *inerciálne súradnicové sústavy – v pokoji alebo priamočiarom rovnomernom pohybe*
  - *NPR v nich platí rovnako*
- *neinerciálne súradnicové sústavy – pohybujúce sa so zrýchlením*
  - *dodatočná pseudosila (určená zrýchlením sústavy) v NPR*

$$\boxed{m\frac{d^2x'}{dt^2} = F_x + F_{px}}$$

Energia a práca, zákon zachovania energie

kinetická (pohybová) energia $\boxed{W_k = \frac{1}{2}mv^2}$ $[J = Nm = kgm^2s^{-2}]$

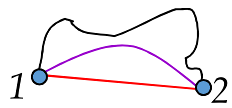
$$W_k = \frac{1}{2}m(\vec{v}\cdot\vec{v}) = \frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2+v_z^2) \quad \text{(skalár)}$$

práca (mechanická) $\boxed{A = \int \vec{F}\cdot d\vec{s}}$ $[J = Nm = kgm^2s^{-2}]$

mech. práca sa koná len v smere posunutia $\vec{F}\cdot d\vec{s} = ds\,F\cos\vartheta$ priemet sily do smeru posunutia

$$F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z \quad \text{(skalár)}$$

konzervatívne sily – práca nimi vykonaná nezávisí od dráhy, len od počiatočného a konečného bodu dráhy



$$\int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_2^1 \vec{F}\cdot(-d\vec{s}) = -\int_2^1 \vec{F}\cdot d\vec{s}$$

potenciálna energia $\boxed{W_p(X) = -\int_P^X \vec{F}\cdot d\vec{s}}$

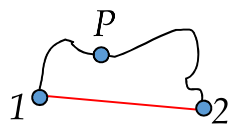
pot. energia telesa v bode X = práca vynaložená na prenesenie telesa do bodu X (do pokojového stavu) z referenčného bodu P

referenčný bod P je ľubovoľne zvoliteľný bod – jeho zámenou za ľubovoľný iný bod Q sa W_p každého bodu zmení len o aditívnu konštantu $W_p(Q) - W_p(P)$

referenčný bod sa spravidla volí v nekonečne, kde sa potenciálna energia definuje ako nulová

$W_p(1) = -\int_P^1 \vec{F} \cdot d\vec{s}$ $\qquad$ $W_p(2) = -\int_P^2 \vec{F} \cdot d\vec{s}$

$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_1^P \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_P^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = W_p(1) - W_p(2)$



práca vynaložená (konzervatívnou silou) na premiestnenie telesa z pokojového stavu v bode 1 do pokojového stavu v bode 2 = rozdiel potenciálnych energii telesa v 1 a 2

nositeľom kinetickej energie je teleso v danom pohybovom stave (určenom svojou hybnosťou), potenciálna energia telesa je daná jeho polohou v danom prostredí – nositeľom potenciálnej energie je teda systém teleso-prostredie,
nositeľom mechanickej práce je sila (resp. zdroj sily), ktorá teleso premiestňuje,
kinetická a potenciálna energia určujú pohybový s polohový stav telesa, práca určuje jeho zmenu

inverznou operáciou k $W_p = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$ *je operácia* $\vec{F} = -\mathrm{grad} W_p$*, ak sa teda v okolí daného bodu (v danom prostredí) mení potenciálna energia telesa, pôsobí na teleso (konzervatívna) sila v smere najstrmšieho poklesu jeho potenciálnej energie – zdrojom tejto sily je prostredie, v ktorom sa teleso nachádza*

práca, konaná akoukoľvek silou $\vec{F}$ *pri premiestňovaní telesa na úseku* $d\vec{s}$ *je* $dA = \vec{F} \cdot d\vec{s}$*, celková práca, vykonaná touto silou pri premiestnení telesa z bodu 1 do bodu 2, je* $A = \int_1^2 dA = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s}$

ak je touto silou práve sila $\vec{F} = -\mathrm{grad} W_p$ *, potom táto sila koná pri premiestnení telesa prácu na úkor jeho potenciálnej energie*

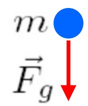
$$A = \int_1^2 dA = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = W_p(1) - W_p(2) = -\int_1^2 dW_p \quad \Rightarrow \quad dA = -dW_p$$

práca konaná prostredím pri premiestňovaní telesa (na úkor potenciálnej energie telesa v prostredí) je kladná ($dA > 0$ *- systém koná prácu) a vedie k zníženiu potenciálnej energie telesa v prostredí (* $dW_p < 0$ *)*

premiestnením telesa sa môže zvýšiť jeho potenciálna energia ($dW_p > 0$) *v danom prostredí na úkor práce vykonanej vonkajšou silou* ($dA < 0$ - *systém prijíma prácu zvonka*)

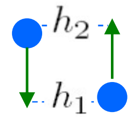
práca konaná reálnou silou je z „pohľadu“ zdroja tejto sily vždy kladná ($dA > 0$) – *koná ju zdroj sily na úkor svojej energie*
z „pohľadu“ skúmaného systému (napr. teleso v danom prostredí), disponujúceho „vlastnou“ silou $\vec{F} = -\mathrm{grad}W_p$ *, však môže byť práca konaná touto silou kladná,* $dA > 0$, *(skutočne ju koná táto „vlastná“ sila) alebo záporná,* $dA < 0$ *(v skutočnosti je dodaná systému „vonkajšou“ silou)*

na každé teleso hmotnosti m pôsobí zemská tiaž $\underline{\vec{F}_g = m\vec{g}}$, *kde* $\vec{g}$ *je tiažové zrýchlenie (smeruje do stredu Zeme)*



na premiestnenie telesa hmotnosti m z výšky h_2 *do* $h_1 < h_2$ *koná prácu sila prostredia* $\vec{F} = \vec{F}_g$ *(na úkor potenciálnej energie telesa)*

$$ds = -dh \ , \ \vec{F} \uparrow\uparrow d\vec{s} \ , \ \vec{F} \cdot d\vec{s} = F ds = -mg dh \ , \ A = \int_{h_2}^{h_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = mg(h_2 - h_1) > 0$$



na premiestnenie telesa hmotnosti m z výšky h_1 *do výšky* $h_2 > h_1$ *koná táto sila prácu*

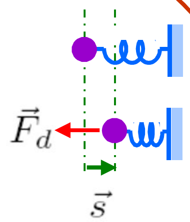
$$ds = dh \ , \ \vec{F} \uparrow\downarrow d\vec{s} \ , \ \vec{F} \cdot d\vec{s} = -F ds = -mg dh \ , \ A = \int_{h_1}^{h_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = mg(h_1 - h_2) < 0$$

v skutočnosti koná prácu vonkajšia sila $\vec{F} = -\vec{F}_g$ *(proti tiaži) v prospech potenciálnej energie telesa*

$$ds = dh \ , \ \vec{F} \uparrow\uparrow d\vec{s} \ , \ \vec{F} \cdot d\vec{s} = F ds = mg dh \ , \ A = \int_{h_1}^{h_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = mg(h_2 - h_1) > 0$$

potenciálna energia telesa v dôsledku jeho tiaže v danej výške h je teda $\underline{W_p(h) = mgh}$
\+ *ľubovoľná integračná konštanta určujúca referenčnú výšku, na ktorej* $W_p = 0$

tiažová sila je $\vec{F}_g = -\mathrm{grad}W_p = mg\underbrace{(-\mathrm{grad}h)} = m\vec{g}$ *smer najstrmšieho poklesu výšky* na teleso na *deformovanej pružine* pôsobí pružina silou $\vec{F}_d = -k\vec{s}$ *proti* smeru jej deformácie $\vec{s}$ (*lineárny* vzťah platí len pre *malé* deformácie), kde k je *koeficient tuhosti* pružiny



na deformovanie pružiny o x je potrebná *vonkajšia* sila $\vec{F} = -\vec{F}_d$, ktorá *koná* prácu (*v prospech* potenciálnej energie telesa *v danom prostredí* – na pružine)

z „pohľadu *systému* teleso-pružina, disponujúceho „vlastnou“ silou $\vec{F} = -k\vec{s}$ ($F = kx$), „koná“ *táto* sila pri deformovaní pružiny *zápornú* prácu (v prospech potenciálnej energie telesa)

$$ds = dx \ , \ \vec{F} \uparrow\downarrow d\vec{s} \ , \ \vec{F} \cdot d\vec{s} = -F ds = -kx dx \ , \ A = \int_0^{x_0} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -k \int_0^{x_0} x dx = -\frac{1}{2} k x_0^2 < 0$$

pri *spätnom* pohybe telesa koná prácu deformovaná pružina (*na úkor* jeho potenciálnej energie)

$$ds = -dx \ , \ \vec{F} \uparrow\uparrow d\vec{s} \ , \ \vec{F} \cdot d\vec{s} = F ds = -kx dx \ , \ A = \int_{x_0}^{0} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -k \int_{x_0}^{0} x dx = \frac{1}{2} k x_0^2 > 0$$

potenciálna energia telesa *na pružine v dôsledku jej deformácie* o x je $W_p(x) = \frac{1}{2} k x^2$

(integračná konštanta sa volí tak, aby $W_p = 0$ na *nedeformovanej* pružine)

spätná sila deformovanej pružiny je $\vec{F} = -\mathrm{grad} W_p = \frac{k}{2}(-\mathrm{grad} x^2) = -k\vec{s}$

potenciálna energia telesa súvisí s jeho *polohou v danom prostredí* – na rôznych miestach *môže* (ale *nemusí*) mať teleso rôznu potenciálnu energiu

napr.:
- v dvoch *rôznych výškach* nad zemou má teleso *rôznu* potenciálnu energiu
- v dvoch rôznych miestach v *rovnakej výške* má teleso *rovnakú* potenciálnu energiu
- teleso na pružine má *rôznu* potenciálnu energiu pri dvoch *rôznych* deformáciách (vodorovnej) pružiny – tj. v dvoch rôznych (napr. vodorovných) polohách

charakter potenciálnej energie telesa v prostredí a jej zmeny v priestore je určený silovým pôsobením tohto prostredia na teleso *práca je energia spotrebovaná silou pri premiestnení telesa, a to v prospech (alebo na úkor) jeho kinetickej alebo potenciálnej energie (alebo oboch)*

napr.:

- *práca konaná vonkajšou silou na vodorovné zrýchlenie telesa sa spotrebuje v prospech (tj. na nárast) jeho kinetickej energie*
- *teleso pohybujúce sa proti brzdiacej sile (napr. treniu) koná prácu na úkor (tj. znížením) svojej kinetickej energie – pôsobí silou, ktorá je reakciou na vonkajšiu brzdiacu silu (táto práca sa spotrebuje v prospech brzdiaceho telesa alebo sa „stratí“ – premení na teplo)*
- *pri premiestnení telesa na miesto s vyššou potenciálnou energiou pôsobením vonkajšej sily sa práca tejto sily spotrebuje v prospech (tj. na zvýšenie) jeho potenciálnej energie*
- *pohybujúce sa teleso pri náraze do pružiny koná prácu pri jej deformácii - pôsobí na pružinu silou, ktorá je reakciou na (opačnú) silu pružiny, ktorá jeho pohyb brzdí – táto práca sa spotrebuje na úkor (tj. znížením) jeho kinetickej energie a v prospech (tj. na nárast) jeho potenciálnej energie na deformovanej pružine*

napr.: na teleso hmotnosti m pôsobí „vonkajšia“ sila $\vec{F} = -2m\vec{g}$ *(dvojnásobok tiaže telesa) a dvíha ho do výšky h, práca konaná touto silou je* $A = \int_0^h \vec{F}\cdot d\vec{s} = 2mg\int_0^h dh = \underbrace{\boxed{mgh}}_{\Delta W_p} + \underbrace{\boxed{mgh}}_{\Delta W_k\ (?)}$

časť tejto sily, $\vec{F}_1 = -m\vec{g}$, *kompenzuje tiaž telesa* $\vec{F}_g = m\vec{g}$

táto časť sily by stačila na premiestnenie telesa „v beztiažovom“ stave (nulová výsledná sila pôsobiaca na teleso) do výšky h priamočiarym rovnomerným nekonečne pomalým pohybom ($W_k = 0$ *)*

alebo konštantnou počiatočnou rýchlosťou ($\Delta W_k = 0$ *)*

práca konaná takouto silou predstavuje prírastok potenciálnej energie telesa ΔW_p

„zvyšná“ časť „vonkajšej“ sily, $\vec{F}_2 = \vec{F} - \vec{F}_1 = -m\vec{g}$*, dodáva telesu zrýchlenie* $\vec{a} = -\vec{g}$ $(a = g)$*,*
práca ňou konaná predstavuje prírastok kinetickej energie telesa ΔW_k

$$\Delta W_k = \tfrac{1}{2} m \Delta v^2 = \tfrac{1}{2} m (v^2 - 0) \qquad v^2 = (at)^2 = g^2 t^2 \qquad \Delta W_k = \tfrac{1}{2} m v^2 = \tfrac{1}{2} m (2gh) = mgh$$

počiatočná rýchlosť telesa

dráha prejdená pri dvíhaní telesa je $s = h = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{2h}{g}$

výkon $\mathcal{P}$ *- práca vynaložená silou za jednotkový časový úsek* $[W = Js^{-1} = kgm^2 s^{-3}]$

$$\mathcal{P} = \frac{\Delta A}{\Delta t} \rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt} \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \underbrace{d \int}_{1} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \qquad \boxed{\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

napr.: „vonkajšia“ sila $\vec{F} = -2m\vec{g}$ *dvíha teleso hmotnosti m do výšky h*
jej časť $\vec{F}_1 = -m\vec{g}$ *kompenzuje tiaž telesa a za čas* $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ *potrebný na zdvihnutie telesa o h*
koná prácu v prospech nárastu potenciálnej energie telesa o $\Delta W_p = mgh$
rýchlosť konania práce - výkon tejto sily je $\mathcal{P}_1 = \frac{dW_p}{dt}$

výkon síl pri premiestnení telesa konštantnou rýchlosťou = rýchlosť zmeny jeho potenciálnej energie

druhá časť sily $\vec{F}_2 = \vec{F} - \vec{F}_1$ *spôsobuje zrýchlenie telesa a teda nárast jeho kinetickej energie*

$$\vec{F}_2 = m\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \mathcal{P}_2 = \vec{F}_2 \cdot \vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = m\left(v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} + v_z \frac{dv_z}{dt}\right)$$

$$\mathcal{P}_2 = \frac{dW_k}{dt} \qquad W_k = \tfrac{1}{2} m (\vec{v} \cdot \vec{v}) \Rightarrow \frac{dW_k}{dt} = m\left(v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} + v_z \frac{dv_z}{dt}\right) = \mathcal{P}_2$$

výkon síl zrýchľujúcich teleso = rýchlosť zmeny jeho kinetickej energie *celkový výkon sily je* $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = \frac{dW_p}{dt} + \frac{dW_k}{dt}$

výkon sa vždy vzťahuje na zdroj sily, ktorá koná prácu – ak sila koná prácu na telese, z pohľadu jej zdroja $dA > 0$ *a teda* $\mathcal{P} = \frac{dA}{dt} > 0$

z pohľadu telesa na ňom „vonkajšia" sila koná prácu ($dA < 0$ *) a teda* $\frac{dW}{dt} > 0$

pôsobením vonkajšej sily na teleso môže nastať zmena jeho pohybového stavu a polohy - práca konaná touto silou sa spotrebúva na zmenu kinetickej a/alebo potenciálnej energie telesa

ak je teleso izolované, tj. nepôsobí naň žiadna „vonkajšia" sila, $F = 0$, $\mathcal{P} = 0 \Rightarrow \frac{dW_p}{dt} + \frac{dW_k}{dt} = 0$

$$\boxed{\frac{d}{dt}(W_k + W_p) = 0 \Rightarrow W_k + W_p = const.}$$

zákon zachovania (mechanickej) energie izolovaného systému

celková mechanická energia (tj. súčet kinetickej a potenciálnej energie) izolovaného systému sa zachováva – pri jeho pohybe môže dôjsť k premene jednej formy energie na druhú $\frac{dW_k}{dt} = -\frac{dW_p}{dt}$

napr.: ak za izolovaný systém považujeme systém teleso-prostredie, v ktorom na teleso hmotnosti m pôsobí iba jeho tiaž $\vec{F}_g = m\vec{g}$ *(nepovažujeme ju za „vonkajšiu" silu – je „súčasťou" systému), potom teleso disponuje kinetickou energiou (danou jeho okamžitým pohybovým stavom) a potenciálnou energiou (danou vzťahom* $\vec{F}_g = -\mathrm{grad} W_p$*), ktorých súčet sa zachováva v každom okamihu, a môžu sa iba „premieňať" jedna do druhej* pri voľnom páde takéhoto telesa z výšky h koná tiaž prácu na úkor potenciálnej energie telesa v danom prostredí ($\Delta W_p < 0$) a v prospech jeho kinetickej energie ($\Delta W_k > 0$)

$$\int_h^0 \vec{F} \cdot d\vec{s} = -mg \int_h^0 dh = mgh - 0 = -\Delta W_p \ (> 0)$$

$$\Delta W_k = \frac{1}{2} m(v^2 - 0) = \frac{1}{2} m g^2 t^2 = \frac{1}{2} m g^2 \frac{2h}{g} = mgh = -\Delta W_p$$

práca konaná „vnútornou“ silou systému je len „prostredníkom“ v premene jednej formy energie systému na druhú - celková energia izolovaného systému sa zachováva

podobné príklady:

- teleso zvýši svoju kinetickú energiu (zrýchli) na úkor svojej potenciálnej energie pri vymrštení stlačenou pružinou
- teleso letiace zvislo nahor spotrebuje svoju kinetickú energiu na nárast svojej potenciálnej energie
- letiace teleso spotrebuje svoju kinetickú energiu na nárast potenciálnej energie pri náraze do pružiny

ak na skúmaný systém pôsobí „vonkajšia“ sila, napr. sila 2mg zvislo nahor na teleso hmotnosti m, systém nie je izolovaný (pôsobí naň „vonkajšia“sila) – jeho energia sa nezachováva – práca konaná „vonkajšou“silou sa premieňa na kinetickú a/alebo potenciálnu energiu telesa – celková energia telesa sa mení (narastá)

práca konaná konzervatívnou silou (tj. takou, pri ktorej práca konaná touto silou nezávisí od tvaru dráhy, pozdĺž ktorej pôsobí na teleso, len od jej koncových bodov) na telese mení jeho potenciálnu energiu na kinetickú a naopak, pričom celková mechanická energia telesa sa zachováva - konzervuje, (napr. práca tiažovej sily konaná na lopte pohybujúcej sa na U-rampe)

príkladom nekonzervatívnej sily je sila trenia, pri ktorej sa časť mechanickej energie pohybujúceho sa telesa stráca (mení na teplo v trecích plochách)

Zákon zachovania hybnosti

zákon akcie a reakcie $\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}$

$(\vec{F}_1 = -\vec{F}_2)$

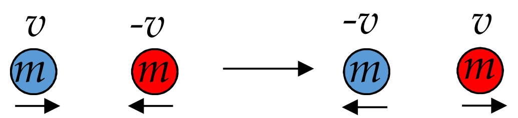
$$\boxed{\frac{d(\vec{p}_1+\vec{p}_2)}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = const}$$

zákon zachovania hybnosti

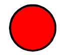
pri zrážke dvoch telies sa celková hybnosť sústavy (tj. súčet vektorov hybností telies) zachováva

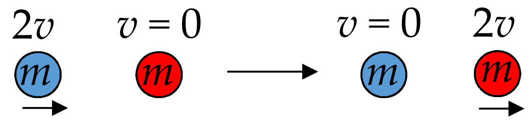
dokonale pružné zrážky - zachováva sa celková hybnosť aj celková kinetická energia telies

v laboratórnej sústave (nezávislej na telesách)



$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m(-v)^2 = \frac{1}{2}m(-v)^2 + \frac{1}{2}mv^2$

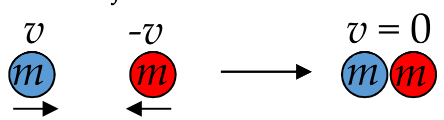
v sústave spojenej pred zrážkou s 



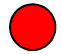
$\frac{1}{2}m(2v)^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}m(2v)^2$

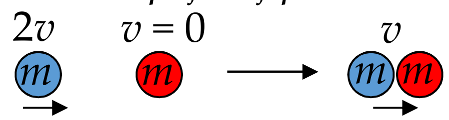
nepružné zrážky - zachováva sa celková hybnosť telies, celková kinetická energia sa nezachováva – jej časť sa mení na iné formy energie (deformácia, ohrev)

v laboratórnej sústave (nezávislej na telesách)



$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m(-v)^2 \neq 0$

v sústave spojenej pred zrážkou s 

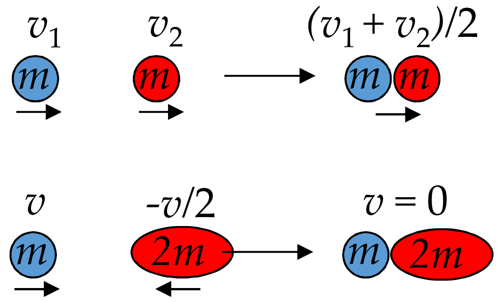


$\frac{1}{2}m(2v)^2 + 0 \neq \frac{1}{2}(2m)v^2$

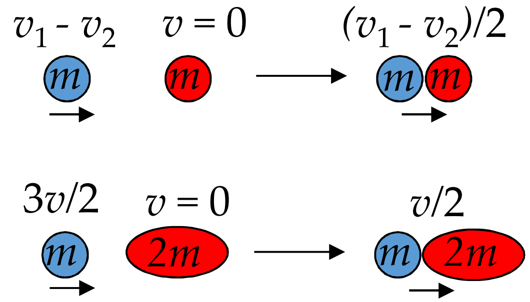
nedokonale pružné zrážky = nepružné zrážky, telesá sa odrazia s menšími rýchlosťami

(časť kinetickej energie sa premení na iné formy energie) *úloha:* *analyzujte zachovanie hybnosti a kinetickej energie a určitý typ zrážky*

v laboratórnej sústave



v sústave spojenej pred zrážkou s



reaktívny (raketový) motor:

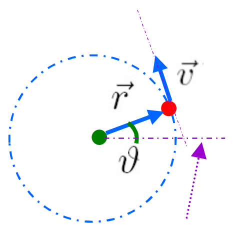
raketa o hmotnosti m_1 *a rýchlosti* v_1 *je poháňaná výtokom plynu o hmotnosti* m_2 *rýchlosťou* v_2

$m_1 \gg m_2$, $v_1 \ll v_2$

$$\underline{m_1 \vec{v}_1 = -m_2 \vec{v}_2}$$

Rotačný pohyb hmotného bodu

rotačný pohyb hmotného bodu je pohyb po kružnici (stred kružnice je stredom otáčania hmotného bodu) obvodovou rýchlosťou $\vec{v}$, ktorej smer má v každom bode dráhy smer dotyčnice ku kružnici otáčania
polohový vektor (sprievodič) hmotného bodu $\vec{r}$ nemení svoju veľkosť (rovnú polomeru kružnice otáčania), jeho smer v každom okamihu definujeme uhlom ϑ voči (ľubovoľne zvolenému) referenčnému smeru

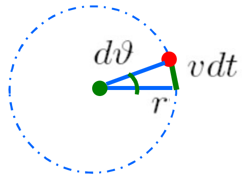


referenčný smer

uhlová rýchlosť $\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$ $[rad\ s^{-1}]$

radián – jednotka uhlovej miery
$(360° = 2\pi rad,\ 1rad = \frac{360°}{2\pi} = 57,3°)$

za infinitezimálny čas dt prejde hmotný bod na kružnici otáčania úsek vdt, odpovedajúci zmene smeru jeho polohového vektora o $d\vartheta$



$$\frac{vdt}{r} = \boxed{\sin d\vartheta \cong d\vartheta\ ,\ d\vartheta \to 0} \Rightarrow \underline{\frac{d\vartheta}{dt} = \omega = \frac{v}{r}}$$

$$rd\vartheta = vdt$$

$$\int_0^{2\pi} rd\vartheta = \int_0^T vdt$$

integrál cez celú kružnicu *cez celú dobu obehu T*

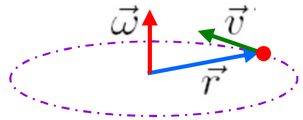
ak sa v počas obehu nemení (rovnomerný pohyb po kružnici)

$$r\int_0^{2\pi} d\vartheta = v\int_0^T dt \qquad 2\pi r = vT \qquad \underline{\omega = \frac{v}{r} = \frac{2\pi}{T}}$$

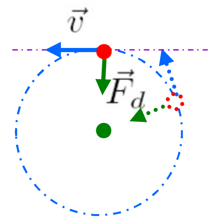
obvod kružnice *perióda obehu*

uhlová rýchlosť je vektor, určujúci rýchlosť i smer otáčania

$$\underline{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$ *(všetky 3 vektory sú navzájom kolmé)*



počas pohybu po kružnici sa vektor $\vec{v}$ mení – mení svoj smer (môže, ale nemusí meniť svoju veľkosť - rovnomerný pohyb po kružnici) pod vplyvom dostredivej sily, ktorá hmotnému bodu udeľuje dostredivé zrýchlenie

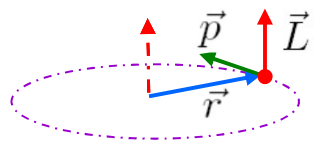


$$\vec{F}_d = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}_d \qquad \underline{a_d = \frac{v^2}{r} = r\omega^2}$$

zdrojom dostredivej sily je väzba pohybujúceho sa hmotného bodu so stredom otáčania (napr. rameno kolotoča)
v neinerciálnej súradnicovej sústave spojenej s rotujúcim hmotným bodom (pohybujúcej sa s dostredivým zrýchlením voči inerciálnej sústave spojenej so stredom otáčania) pribudne do NPR odstredivá pseudosila $\vec{F}_o = -\vec{F}_d$ *, udeľujúca hmotnému bodu odstredivé zrýchlenie* $\vec{a}_o = -\vec{a}_d$
(analýza pohybu po kružnici v neinerciálnej sústave je zložitejšia)

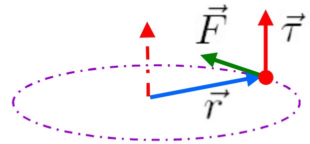
moment hybnosti $\quad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad [Nms]$

$$L = \underbrace{mv}_{p}r = m\omega r^2 \quad (\vec{p} \perp \vec{r}, \ \sin\frac{\pi}{2} = 1)$$



(všetky 3 vektory sú navzájom kolmé)

moment sily $\quad \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad [Nm]$



(všetky 3 vektory sú navzájom kolmé)

moment sily vyvoláva len sila (resp. zložka sily) kolmá na sprievodič hmotného bodu

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad \boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}} \qquad (\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt})$$

$$\vec{F} = 0 \text{ alebo } \vec{F} \| \vec{r} \Rightarrow \boxed{\boxed{\tau = 0 \Rightarrow \vec{L} = const.}}$$

zákon zachovania momentu hybnosti

moment hybnosti a moment sily pri rotačnom pohybe sú veličinami analogickými hybnosti a sile pri translačnom pohybe:
moment hybnosti charakterizuje zotrvačné vlastnosti a pohybový stav rotujúceho hmotného bodu, zmena pohybového stavu rotujúceho hmotného bodu (tj. zmena momentu hybnosti) nastáva len pôsobením momentu sily, ktorý mu udeľuje uhlové zrýchlenie $\epsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{r}\frac{dv}{dt}$

$\tau = 0 \Rightarrow \vec{L} = const. \Rightarrow vr = const.$

bez pôsobenia momentu sily hmotný bod zotrváva v rovnomernom rotačnom pohybe

moment zotrvačnosti $J = mr^2$ $[Nms^2]$

translačný pohyb

$$\begin{array}{ccc} s & \longrightarrow & \vartheta \\ v & \longrightarrow & \omega \\ a & \longrightarrow & \epsilon \\ p & \longrightarrow & L \\ F & \longrightarrow & \tau \\ m & \longrightarrow & J \end{array}$$

rotačný pohyb

moment zotrvačnosti je analógom hmotnosti – vyjadruje zotrvačné vlastnosti hmotného bodu (pri rotačnom pohybe)

$L = \underbrace{mr^2}_{J}\omega$ $\quad \vec{L} = J\vec{\omega}$ $\quad (\vec{p} = m\vec{v})$

kinetická energia rotačného pohybu $\boxed{W_k = \frac{1}{2}J\omega^2}$

$$W_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(r\omega)^2 = \frac{1}{2}(mr^2)\omega^2 = \frac{1}{2}J\omega^2$$

práca konaná momentom sily $\boxed{A = \int \tau d\vartheta}$

$$dA = Fds = Fvdt = Fr\omega dt = \tau\frac{d\vartheta}{dt}dt = \tau d\vartheta$$

výkon dodaný momentom sily $\boxed{\mathcal{P} = \vec{\tau}\cdot\vec{\omega}}$ $\quad (\ \mathcal{P} = \vec{F}\cdot\vec{v},\ Fv = Fr\omega = \tau\omega\ )$

Rotačný pohyb tuhého telesa

dokonale tuhé teleso – *teleso (konečných rozmerov), ktorého tvar (tj. vzájomná vzdialenosť jednotlivých bodov telesa) sa nemení (nedeformuje sa)*

ťažisko – *hmotný stred telesa, dráhu pohybujúceho sa telesa možno nahradiť dráhou ťažiska ako hmotného bodu, sústreďujúceho celú hmotnosť telesa*

ľubovoľný (hmotný) bod i telesa má polohu a hmotnosť $\vec{r}_i$, m_i

celková hmotnosť telesa $M = \sum_i m_i$ *polohový vektor ťažiska* $\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}$

sily pôsobiace medzi časticami (hmotnými bodmi) vo vnútri telesa sa vykompenzujú (zákon akcie a reakcie) - výsledná sila je daná len silami pôsobiacimi zvonka

$$\vec{F}_i = \frac{d^2(m_i \vec{r}_i)}{dt^2}$$

(vonkajšia) sila pôsobiaca na daný bod telesa

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \frac{d^2(\sum_i m_i \vec{r}_i)}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(M\vec{R}) = M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$$

celková sila pôsobiaca na celé teleso (na všetky jeho body) = výsledná sila pôsobiaca na ťažisko

ak $\vec{F} = 0$, *ťažisko je v pokoji alebo PRP, teleso sa však môže otáčať okolo ťažiska*

$$\tau = \sum \tau_i = \sum_i \frac{dL_i}{dt} = \frac{dL}{dt}$$

výsledný moment sily pôsobiaci na teleso

$$\sum_i L_i = L$$

výsledný moment hybnosti telesa

$$L_i = m_i v_i r_i = m_i r_i^2 \omega$$

teleso nemení svoj pohybový stav (tj. zotrváva v pokoji, PRP alebo rovnomernom rotačnom pohybe) ak

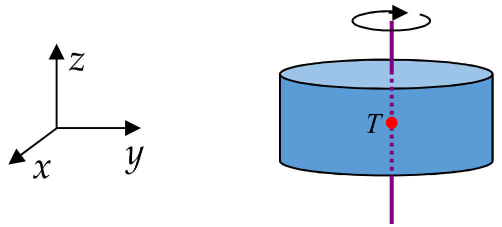
$$\boxed{\sum_i F_i = 0 \ , \ \sum_i \tau_i = 0}$$

moment zotrvačnosti celého telesa rotujúceho okolo danej osi je súčtom príspevkov všetkých rotujúcich hmotných bodov tvoriacich teleso

$$J = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i J_i$$

celkový moment zotrvačnosti telesa je súčtom momentov zotrvačnosti jednotlivých jeho častí vzhľadom na danú os otáčania

spojité teleso rotujúce okolo osi z



$$J = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \rightarrow \int (x^2 + y^2) dm$$

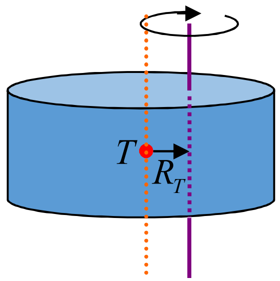
moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na os rotácie neprechádzajúcu ťažiskom je (Steinerova veta)

$$J = J_T + M R_T^2$$

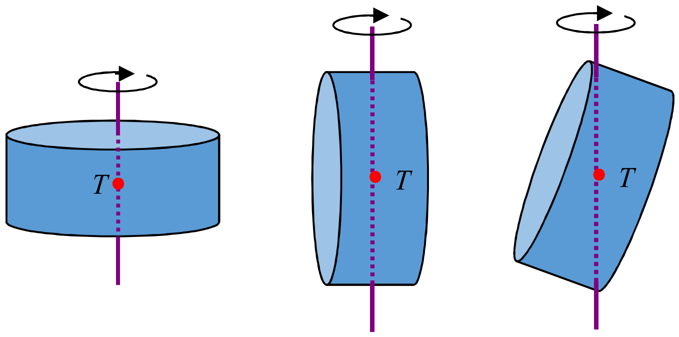
moment zotrvačnosti ako keby celá hmotnosť bola sústredená v R_T

moment zotrvačnosti vzhľadom na paralelnú os prechádzajúcu ťažiskom

poloha ťažiska vzhľadom na skutočnú os otáčania



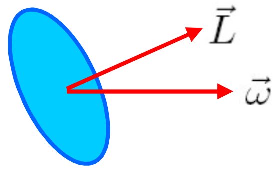
rotačné vlastnosti telies, ktoré nemajú dokonalú symetriu (homogénna guľa), závisia od smeru osi otáčania prechádzajúcej ťažiskom - rôznym smerom odpovedá rôzne rozloženie hmotnosti v priestore vzhľadom na os otáčania



každé tuhé teleso má 3 navzájom kolmé – hlavné – osi prechádzajúce ťažiskom, jednej z nich pripadá najväčší a jednej najmenší moment zotrvačnosti (spomedzi všetkých osí prechádzajúcich ťažiskom)

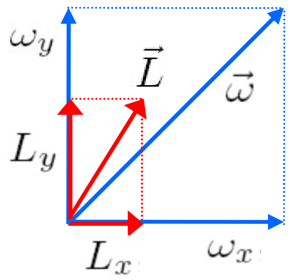
pre rotáciu okolo hlavných osí platí $\vec{L} = J\vec{\omega}$ *a teda* $\vec{L} \uparrow\uparrow \vec{\omega}$

vektory $\vec{L}$ *a* $\vec{\omega}$ *nemusia byť vždy paralelné !*



J *vtedy nie je skalár ale tenzor* $\bar{\bar{\mathrm{J}}}$
- zložitá funkcia smeru $\vec{L} = \bar{\bar{\mathrm{J}}}\vec{\omega}$

nech pre rotáciu telesa okolo osi x (prechádzajúcej ťažiskom) platí $L_x = J_{xx}\omega_x$ *a pre rotáciu okolo osi y* $L_y = J_{yy}\omega_y$ *, pri-čom* $\omega_x = \omega_y$ *ale* $J_{xx} \neq J_{yy}$ *, potom* $L_x \neq L_y$



ak teleso rotuje okolo osi ležiacej v rovine xy pod uhlom 45° voči x, potom možno vektor $\vec{\omega}$ *rozložiť na zložky* ω_x, ω_y
tým odpovedajú zložky L_x, L_y *vytvárajúce výsledný vektor* $\vec{L}$
z nerovnosti $J_{xx} \neq J_{yy}$ *ale vyplýva* $\vec{L} \not\uparrow\uparrow \vec{\omega}$

zarátaním z-ovej zložky dostávame $L_x = J_{xx}\omega_x$, $L_y = J_{yy}\omega_y$, $L_z = J_{zz}\omega_z$

čo možno zapísať aj v tvare:

$$
\begin{aligned}
L_x &= J_{xx}\cdot\omega_x + 0\cdot\omega_y + 0\cdot\omega_z\\
L_y &= 0\cdot\omega_x + J_{yy}\cdot\omega_y + 0\cdot\omega_z\\
L_z &= 0\cdot\omega_x + 0\cdot\omega_y + J_{zz}\cdot\omega_z
\end{aligned}
$$

alebo v maticovom zápise:

$$
\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}
$$

takáto matica 3×3 je matematickým vyjadrením vektoru 2. rádu - tenzoru

(pokračovanie)

takáto matica s nenulovými len diagonálnymi členmi sa navýva diagonalizovaná matica, a odpovedá prípadu, keď osi x,y,z sa zhodujú s hlavnými osami telesa

pri „nešikovne“ zvolenej súradnicovej sústave (osi x,y,z nie sú hlavnými osami telesa) sú nediagonálne členy tenzoru $\bar{\bar{J}}$ nenulové

$$\begin{aligned} L_x &= J_{xx}\cdot\omega_x + J_{xy}\cdot\omega_y + J_{xz}\cdot\omega_z \\ L_y &= J_{yx}\cdot\omega_x + J_{yy}\cdot\omega_y + J_{yz}\cdot\omega_z \\ L_z &= J_{zx}\cdot\omega_x + J_{zy}\cdot\omega_y + J_{zz}\cdot\omega_z \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

tenzor zotrvačnosti je symetrický, $J_{ij} = J_{ji}$

ak teleso vykonáva zotrvačný rotačný pohyb ($\tau = \sum_i \tau_i = 0$) okolo osi otáčania, $\vec{L} = const.$
ak $\vec{L} \not\uparrow\uparrow \vec{\omega}$ (os otáčania nie je hlavnou osou telesa), smer vektoru $\vec{\omega}$ sa v čase mení, („obieha“ okolo smeru vektoru $\vec{L}$)

kinetická energia rotujúceho telesa je súčtom kinetických energií všetkých jeho častí

$$W_k = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i (r_i\omega)^2 = \frac{1}{2}J\omega^2$$

($\vec{v}_i$ v tomto vzorci sú obvodové rýchlosti rotačného pohybu jednotlivých častí telesa)

ak x,y,z sú hlavné osi telesa, $\vec{L} = J_{xx}\omega_x\vec{i} + J_{yy}\omega_y\vec{j} + J_{zz}\omega_z\vec{k}$

$$W_k = \frac{1}{2}(J_{xx}\omega_x^2 + J_{yy}\omega_y^2 + J_{zz}\omega_z^2) = \frac{1}{2}\vec{L}\cdot\vec{\omega}$$

inak

$$W_k = \sum_{ij} J_{ij}\omega_i\omega_j$$

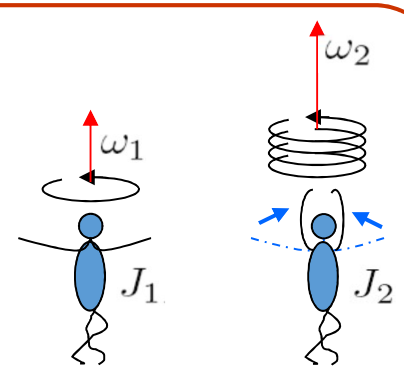
krasokorčuliarska pirueta

počas piruety $\tau = 0 \Rightarrow L_1 = L_2$ *- moment hybnosti sa zachováva*

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2 \qquad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{J_1}{J_2}$$

$\frac{1}{2}J_1\omega_1^2 < \frac{1}{2}J_2\omega_2^2$ *lebo* $\omega_1 < \omega_2$ *- kinetická energia sa nezachováva !*

zmena kinetickej energie = práca vykonaná stiahnutím rúk (proti odstredivej sile)



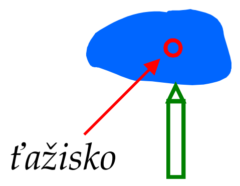
teleso v tiažovom poli

tiažová sila *tiažové zrýchlenie*

$\tau = \sum_i \boxed{m_i g} x_i = g \sum_i m_i x_i$ $\qquad \tau = 0$ *aby sa teleso nestočilo (a nespadlo)*

celková hmotnosť *poloha ťažiska*

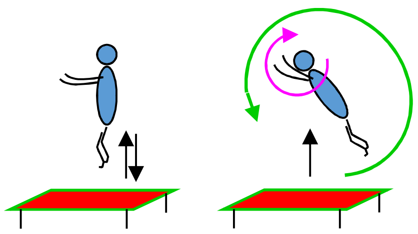
$\sum_i m_i x_i = MX = 0 \Rightarrow X = 0$ ⟵ *teleso musí byť podopreté v ťažisku*



skokan na trampolíne

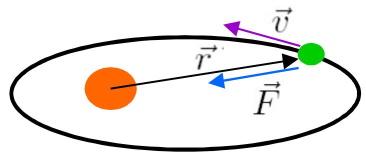
skokan vo vzduchu $\vec{L} = const.$

rotačný pohyb jedným smerom môže byť vyvolaný
len rotačným pohybom opačným smerom

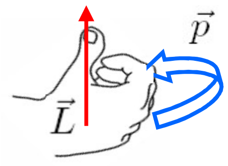


pohyb planét

$\vec{F} \| \vec{r} \Rightarrow \tau = 0 \Rightarrow \vec{L} = const. \Rightarrow \underline{vr = const.}$ *Keplerove zákony*



moment hybnosti určuje *rotáciu* hybnosti (smer *palca* pravej ruky) (smer *prstov* pravej ruky)



smer momentu *sily* určuje smer *zmeny* momentu *hybnosti*, $\vec\tau \uparrow\uparrow \Delta\vec L$

ak teleso predtým *nerotovalo* ($\vec L = 0$), moment sily vyvoláva rotáciu telesa – smer získaného momentu hybnosti je smerom jeho zmeny (nárastu), $\vec L \uparrow\uparrow \Delta\vec L \uparrow\uparrow \vec\tau$

ak teleso predtým *rovnomerne rotovalo* ($\vec L_0$), moment sily vyvoláva *dodatočnú* rotáciu, ktorej rovina vo všeobecnosti *nemusí byť zhodná* s rovinou pôvodnej rotácie - vtedy $\vec L_0 \cancel{\uparrow\uparrow} \Delta\vec L \uparrow\uparrow \vec\tau$

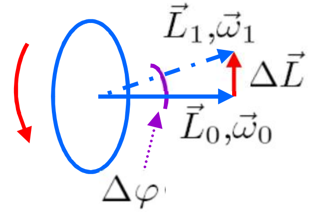
výsledný moment hybnosti je $\vec L_1 = \vec L_0 + \boxed{\Delta\vec L \uparrow\uparrow \vec\tau}$ - jeho smer je zložením dvoch (vo všeobecnosti) *rôznych* smerov

zotrvačník

zotrvačník je rotačné zariadenie, ktorého hmotnosť je rozložená *čo najďalej od osi otáčania*, čo zodpovedá *čo najväčšiemu momentu zotrvačnosti* (napr. koleso bicykla s odľahčeným vnútrom) pri dostatočnej rýchlosti otáčania ω je jeho moment hybnosti $\vec L = J\vec\omega$ natoľko veľký, že zabezpečuje stabilný smer osi otáčania ($\uparrow\uparrow \vec L$) – na jeho *zmenu* je potrebný *veľký moment sily*

aká sila je potrebná na *otočenie* osi otáčania o $\Delta\varphi$?

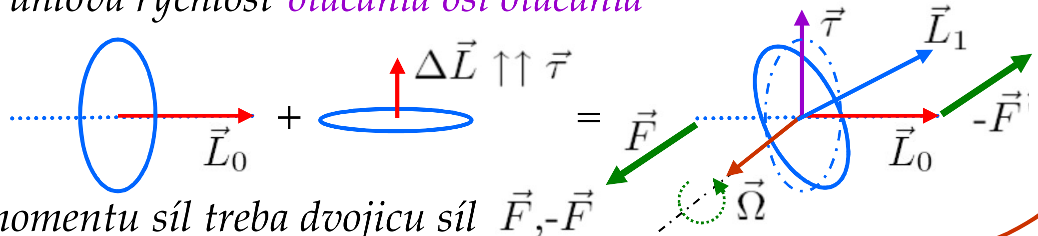
zmena momentu hybnosti za čas Δt:



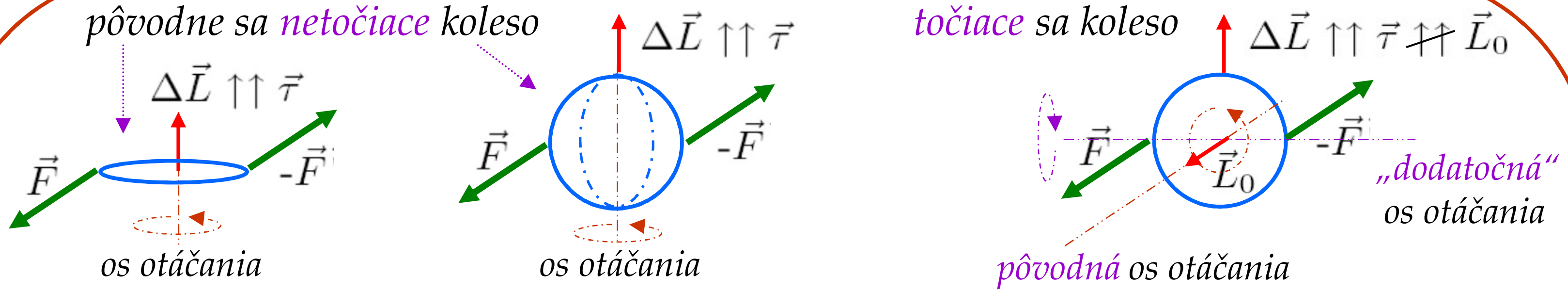
$$\vec L_1 = \vec L_0 + \Delta\vec L \qquad \Delta L = L_0 \sin\Delta\varphi \cong L_0\Delta\varphi$$

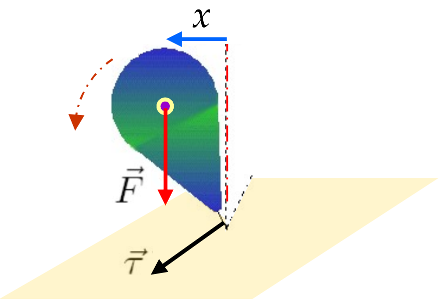
$$\tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} = L_0\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = L_0\Omega$$ ← uhlová rýchlosť *otáčania osi otáčania*

$$\underline{\vec\tau = \vec\Omega \times \vec L_0}$$



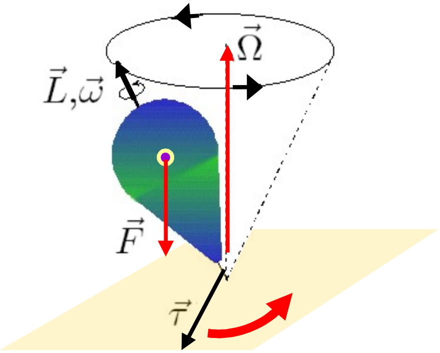
na vytvorenie takéhoto momentu síl treba dvojicu síl $\vec F$,-$\vec F$





vĺčok

ak sa nerotujúci vĺčok vychýli z rovnovážnej polohy (v ktorej je podopretý pod ťažiskom), tiažová sila $\vec{F}$ vyvolá točivý moment (moment sily $\vec{\tau}$) a vĺčok spadne



ak sa rotujúci vĺčok vychýli z rovnovážnej polohy, tiažová sila vytvára moment sily $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$

ktorý otáča rotačnú os vĺčka ($\vec{L}, \vec{\omega}$) okolo osi $\vec{\Omega}$ *- os precesie*

(uhlová) rýchlosť precesie

precesia – zložený rotačný pohyb, pri ktorom vektor roviny otáčania telesa ($\uparrow\uparrow \vec{\omega}$) opisuje kružnicu okolo inej osi – osi precesie

POHYB VO VEĽKOM SÚBORE ČASTÍC

Štatistika makroskopických systémov

vo fyzikálnych systémoch s obrovským počtom častíc (≈10^{25}) – makroskopických systémoch - sa pohyb každej častice riadi Newtonovými zákonmi (v klasickej fyzike), skúmať pohybový stav (polohu, rýchlosť, energiu, ...) každej častice je však nemožné

štatistickými metódami možno skúmať najpravdepodobnejšie správanie veľkých súborov častíc

mikrostav - náhodné rozdelenie N rovnakých prvkov súboru (podľa ich vlastností)
makrostav – stav systému s istými makroskopickými vlastnosťami (tj. popísaný merateľnými veličinami) bez ohľadu na konkrétnu konfiguráciu prvkov v ňom

hod dvoma hracími kockami

mikrostavom je v tomto prípade konkrétna kombinácia bodov na kockách
makrostavom je makroskopická vlastnosť - výsledok hodu oboma kockami (súčet bodov na oboch kockách), bez ohľadu na konkrétne hodnoty bodov na jednotlivých kockách

každá kombinácia bodov na kockách (hod) je mikrostav
$6 \times 6 = 6^2 = 36$ *mikrostavov*
súčet bodov pri hode je makrostav

kocka 1 \ kocka 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

najmenej pravdepodobné makrostavy sú 2 a 12 (sú tvorené jediným mikrostavom)
najpravdepodobnejší makrostav je 7 (vzniká najväčším počtom mikrostavov)

základy teórie pravdepodobnosti

skúmame makroskopický systém, ktorý sa môže nachádzať s rovnakou pravdepodobnosťou v obrovskom množstve mikrostavov (napr.hody kockami) hotvoriacich istý (veľký) počet makrostavov (napr. súčty bodov kociek)

zaujíma nás: - v akom (makro)stave najpravdepodobnejšie nájdeme náš systém?
- s akou pravdepodobnosťou nájdeme náš systém v určitom vybranom (makro)stave?

štatistický výsledok, tj. pravdepodobnosť, možno získať so štatistického súboru pozorovaných stavov systému (početností, s akými boli jednotlivé (makro)stavy pozorované)

počet pozorovaných stavov *pravdepodobnosť i-teho stavu*

$$N_1 + N_2 + \ldots + N_\alpha = \sum_{i=1}^{\alpha} N_i = N \qquad \mathcal{P}_i = \frac{N_i}{N} \qquad \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \ldots + \mathcal{P}_\alpha = \sum_{i=1}^{\alpha} \mathcal{P}_i = \mathbf{1}$$

početnosť daného stavu *počet všetkých pozorovaní*

(N-násobne opakované pozorovanie stavu daného systému je ekvivalentné súčasnému pozorovaniu stavov v súbore N identických systémov)

systém s 2 súbežnými, štatisticky nezávislými (nekorelovanými) dejmi (napr. charakterizovanie ľudí podľa veľkosti topánok a podľa farby topánok), s možnými stavmi $i = 1, 2, \ldots, \alpha$ *(napr. veľkosti topánok) a* $j = 1, 2, \ldots, \beta$ *(farby topánok)*

$\mathcal{P}_i = \frac{N_i}{N}$ *(pravdepodobnosť, resp. početnosť topánok danej veľkosti i)* $\mathcal{P}_j = \frac{N_j}{N}$ *(danej farby j)*

$N_{ij} = N_i \mathcal{P}_j = N_j \mathcal{P}_i = \frac{N_i N_j}{N}$ *(početnosť*

$\mathcal{P}_{ij} = \frac{N_{ij}}{N} = \frac{N_i N_j}{N^2} = \mathcal{P}_i \mathcal{P}_j$ *(pravdepodobnosť*

topánok danej veľkosti i a súčasne danej farby j)

$$\mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j \leq 1 \;\Rightarrow\; \mathcal{P}_{ij} \leq \mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j$$

binomické rozdelenie

systém N prvkov, z ktorých každý môže byť v jednom z 2 možných stavov (označ. + a -) (napr. hod N mincami), inak sú nerozlíšiteľné

N = 4

+ + + +	4/4 - 1	+ + - -, + - + -, - + + -, + - - +, - + - +, - - + +	2/4 - 6	+ - - -, - + - -, - - + -, - - - +	1/4 - 4
+ + + -, + + - +, + - + +, - + + +	3/4 - 4			- - - -	0/4 - 1

makrostav (n prvkov z N je +) → 2/4

počet kombinácií $C_n(N)$ (mikrostavov) → 6

$\mathcal{P}_+$, $\mathcal{P}_-$ *- pravdepodobnosť obsadenia danej polohy prvkom +, - (nezávisí od polohy prvku)*

pravdepodobnosť danej kombinácie:
(súčin pravdepodobností pre jednotlivé polohy)

$$\underbrace{\mathcal{P}_+ \cdot \mathcal{P}_+ \cdot \ldots \cdot \mathcal{P}_+}_{n} \cdot \underbrace{\mathcal{P}_- \cdot \mathcal{P}_- \cdot \ldots \cdot \mathcal{P}_-}_{N-n} = \mathcal{P}_+^n \mathcal{P}_-^{N-n}$$

(polohy obsadené +) *(polohy obsadené -)*

pravdepodobnosť daného makrostavu (n z N je +): $\mathcal{P}_n = C_n(N)\mathcal{P}_+^n \mathcal{P}_-^{N-n}$

(počet kombinácii dávajúcich daný makrostav × pravdepodobnosť kombinácie)

pri počte N rozlíšiteľných prvkov (napr. ak by každá minca bola iná) by bolo $N!$ možných permutácií (rôznych kombinácií vytvorených vzájomnou zámenou miest)
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ *(n-faktoriál,* $0! = 1$*)*

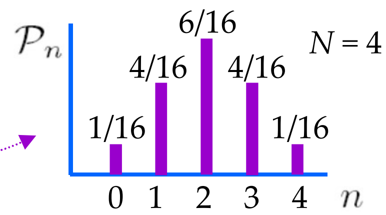
abcd	abdc	acbd	acdb	adbc	adcb
bacd	badc	bcad	bcda	bdac	bdca
cabd	cadb	cbad	cbda	cdab	cdba
dabc	dacb	dbac	dbca	dcab	dcba

ak sú ale prvky nerozlíšiteľné, vzájomná zámena miest 2 prvkov v rovnakých stavoch (napr. + +) nevytvorí nový mikrostav, tj. pri kombinácií „n z N je +“ je $n!$ bezvýznamných permutácií prvkov + (tj. takých, ktoré nevytvárajú nový mikrostav) a $(N-n)!$ bezvýznamných permutácií prvkov -

pre *nerozlíšiteľné* *prvky je teda počet* *rôznych* *mikrostavov tvoriacich daný makrostav (odlišný od počtu permutácií)* $C_n(N) = \frac{N!}{n!(N-n)!}$

$$\underline{\mathcal{P}_n = \frac{N!}{n!(N-n)!}\mathcal{P}_+^n\mathcal{P}_-^{N-n}}$$ - *binomické rozdelenie*

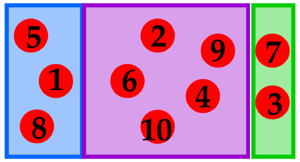
v mnohých prípadoch $\mathcal{P}_+ = \mathcal{P}_- = \frac{1}{2}$ *(napr. ak +,– sú strany mince)*
a $\mathcal{P}_n = \frac{N!}{n!(N-n)!}\frac{1}{2^N}$ *je* *symetrické* *vzhľadom na* $\frac{N}{2}$



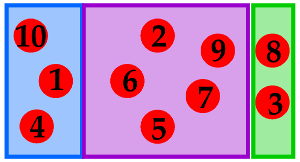
napr. makrostav „3 zo 4 je +" je tvorený 4 z celkových 16 možných kombinácií

$$n = 3\ ,\ N = 4\ ,\ C_n(N) = \frac{4!}{3!\cdot 1!} = \frac{24}{6\cdot 1} = 4\ ,\ \mathcal{P}_+^n = \mathcal{P}_-^{N-n} = \frac{1}{2}\ ,\quad \mathcal{P}_n = 4\cdot(\tfrac{1}{2})^4 = \underline{\frac{1}{4}}$$

rozdelenie 10 rovnakých loptičiek do 3 rôznych oddelení

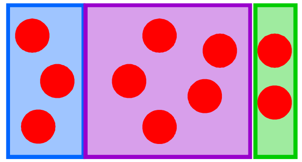


mikrostav

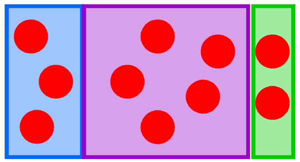


iný mikrostav

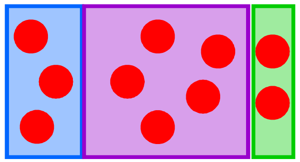
ak sú loptičky *rozlíšiteľné* *tvoria ten istý makrostav*



vzájomná zámena 2 *rozlíšiteľných* *loptičiek predstavuje 2* *rôzne* *mikrostavy (ten istý makrostav)*

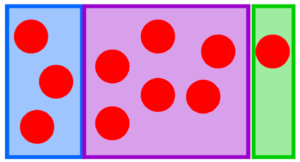


mikrostav



ten istý mikrostav

ak sú loptičky *nerozlíšiteľné*



iný makrostav

vzájomná zámena 2 *nerozlíšiteľných* *prvkov súboru predstavuje* *ten istý* *mikrostav* vznik určitého mikrostavu je náhodný (ako napr. vrh kockou) - štatistická pravdepodobnosť všetkých mikrostavov je rovnaká (v ustálenom stave izolovaného systému)

pri náhodnom (jednorázovom) pokuse sa s najväčšou pravdepodobnosťou zrealizuje taký makrostav, ktorý možno vytvoriť najväčším počtom mikrostavov

štatistická pravdepodobnosť určitého makrostavu (v izolovanom systéme) je daná počtom mikrostavov, ktoré môžu vytvoriť daný makrostav

$$\mathcal{P} = \frac{\text{počet mikrostavov tvoriacich makrostav}}{\text{počet všetkých dostupných mikrostavov}}$$

hod mincou

z celkového počtu N hodov padne n_1–krát rub a n_2–krát líc

výsledok 1 hodu: $n_1 = 1, n_2 = 0$ alebo $n_1 = 0, n_2 = 1$ (rub alebo líc)
výsledok 2 hodov: $n_1 = 1, n_2 = 1$ alebo $n_1 = 2, n_2 = 0$ alebo $n_1 = 0, n_2 = 2$
} pri malom počte hodov je výsledok náhodný

atď.

výsledok veľkého počtu hodov: $n_1, n_2 = \frac{N}{2} \pm \Delta n$ ← odchýlka od najpravdepodobnejšej hodnoty (fluktuácia)

najpravdepodobnejšia hodnota

pri malom počte hodov je $\Delta n \approx \frac{N}{2}$ (fluktuácie sú podstatné - prejavuje sa náhodnosť)
pri veľkom počte hodov $\Delta n \ll \frac{N}{2}$ (fluktuácie sú zanedbateľné – prejavujú sa „pravidlá náhodnosti“)

N rozlíšiteľných častíc v pomyselne rozpolenom objeme

n_1	n_2

problém identický hodu mincou (každá častica môže byť „vľavo“ alebo „vpravo“)
počet všetkých mikrostavov je 2^N (ak sú častice rozlíšiteľné)

najpravdepodobnejší makrostav $n_1, n_2 = \frac{N}{2}$
najnepravdepodobnejšie makrostavy $n_1 = N,\ n_2 = 0$ a naopak (jediný mikrostav), $\mathcal{P} = \frac{1}{2^N}$

jednotlivé prvky makroskopického fyzikálneho systému (napr. častice v plyne) sa môžu navzájom odlišovať nejakými vlastnosťami, vyjadrenými pomocou fyzikálnych veličín (napr. rýchlosť) – makroskopický fyzikálny systém je teda štatistickým súborom prvkov s rôznymi hodnotami danej veličiny

každá kombinácia (rozdelenie) hodnôt danej veličiny medzi prvky systému predstavuje mikrostav

makrostav systému je charakterizovaný makroskopickou veličinou, ktorá predstavuje celkovú hodnotu danej veličiny (tj. súčet hodnôt všetkých prvkov systému) alebo jej strednú hodnotu (tj. štatistický priemer hodnôt všetkých prvkov systému) - jednotlivé (makro)stavy toho istého systému sa navzájom odlišujú hodnotami tejto makroskopickej veličiny

štatistická stredná hodnota veličiny

nech veličina a nadobúda α diskrétnych hodnôt a_i (i = 1,2...α) a N_i je počet prvkov systému (z celkového počtu N) s hodnotou a_i, stredná hodnota veličiny a v celom systéme je

$$\langle a \rangle = \frac{N_1 a_1 + N_2 a_2 + \ldots + N_\alpha a_\alpha}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha} N_i a_i}{N} = \sum_{i=1}^{\alpha} \mathcal{P}_i a_i$$

pravdepodobnosť, že hodnota a pre daný prvok systému je a_i ($\sum_{i=1}^{\alpha} \mathcal{P}_i = 1$)

nech $f(a)$ je veličina (funkcia) závisiaca od veličiny a, stredná hodnota funkcie $f(a)$ v systéme je

$$\langle f(a) \rangle = \sum_{i=1}^{\alpha} \mathcal{P}_i f(a_i)$$

$\langle c f(a) \rangle = c \langle f(a) \rangle$

$\langle f(a) + g(a) \rangle = \langle f(a) \rangle + \langle g(a) \rangle$

$\langle f(a) g(b) \rangle = \langle f(a) \rangle \langle g(b) \rangle$

ak veličiny a,b sú štatisticky nezávislé

$\Delta a = a - \langle a \rangle$ - *fluktuácia - odchýlka hodnoty a daného prvku súboru od strednej hodnoty*

$\langle \Delta a \rangle = \langle a - \langle a \rangle \rangle = \langle a \rangle - \langle a \rangle = 0$ - *stredná odchýlka*

$\langle (\Delta a)^2 \rangle = \sum_{i=1}^{\alpha} \mathcal{P}_i (a_i - \langle a \rangle)^2$ - *stredná kvadratická odchýlka (disperzia)*

ak sa v infinitezimálnom intervale $(a, a + da)$ *nachádza veľké množstvo rôznych dostupných hodnôt* a_i, *môžeme veličinu a považovať za spojite sa meniacu,* $\mathcal{P}_i \rightarrow \mathcal{P}(a)da$ *je pravdepodobnosť, že daný prvok systému má hodnoty a z intervalu* $(a, a + da)$

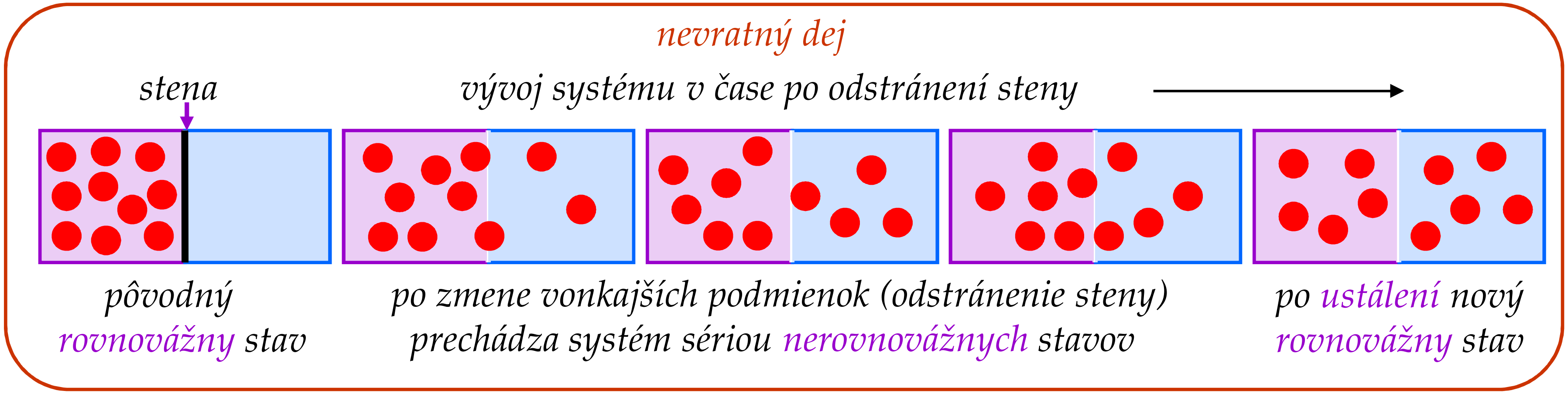
$$\sum_{i=1}^{\alpha} \mathcal{P}_i = 1 \rightarrow \int \mathcal{P}(a)da = 1 \qquad \langle f(a) \rangle = \sum_{i=1}^{\alpha} \mathcal{P}_i f(a_i) \rightarrow \int \mathcal{P}(a) f(a) da$$

rovnovážny stav izolovaného makroskopického systému je taký (makro)stav, pre ktorý je pravdepodobnosť nájdenia systému v ľubovoľnom dostupnom mikrostave rovnaká, nezávislá na čase, rovnovážny stav je najpravdepodobnejším makrostavom

stredné hodnoty makroskopických parametrov, popisujúcich systém v rovnovážnom stave, nezávisia na čase, okamžité hodnoty makroskopických parametrov fluktuujú v čase okolo stredných hodnôt (význam fluktuácií klesá s rastúcou veľkosťou systému, pre systémy s obrovským počtom prvkov je vplyv fluktuácií v rovnovážnom stave zanedbateľný)

rovnovážny stav „nemá pamäť“ (môže byť vytvorený najväčším množstvom mikrostavov – každý z nich má inú „históriu“)

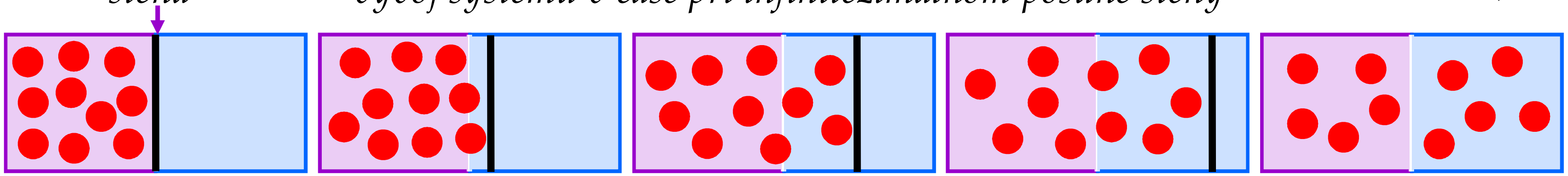
ak sa systém nachádza (v danom okamihu) mimo rovnovážneho stavu, spontánne sa vyvíja (v čase) nevratne smerom k rovnovážnemu stavu (systém sa spontánne vyvíja od menej pravdepodobných stavov k najpravdepodobnejšiemu) *nevratné* (*ireverzibilné*) *deje* sú také, pri ktorých systém prechádza *z menej pravdepodobného* (makro)stavu *do pravdepodobnejšieho*, *opačný dej* (prechod od pravdepodobnejšieho k menej pravdepodobnému stavu) *je možný ale málo pravdepodobný* (jeho pravdepodobnosť je *zanedbateľne* malá pre systémy s obrovským počtom prvkov)



daným vonkajším podmienkam odpovedá *po ustálení* systému *daný rovnovážny stav*
ak dôjde *zmenou vonkajších podmienok* k porušeniu rovnovážneho stavu systému, systém prechádza *nerovnovážnymi* stavmi až do *ustálenia nového rovnovážneho* stavu, odpovedajúceho *novým vonkajším podmienkam* – proces je *vždy nevratný*

vratné (*reverzibilné*) *deje* sú také, pri ktorých sa systém *neustále nachádza v rovnovážnom stave* (resp. „nekonečne málo“ vychýlený z rovnovážneho stavu) – pri „nekonečne pomalej“ zmene vonkajších podmienok systém *mení* svoj stav (prispôsobuje ho meniacim sa podmienkam) tak, že sa *nikdy nevychýli z rovnováhy* – prechádza *meniacimi sa rovnovážnymi* stavmi, *opačný* dej (keď systém prechádza tou istou sériou stavov *v opačnom poradí*) je *kedykoľvek možný* (vratné deje sú *idealizáciou*, ku ktorej sa môžeme len priblížiť) *vratný dej*

stena *vývoj systému v čase pri infinitezimálnom posune steny*



pôvodný rovnovážny stav

počas infinitezimálnych zmien vonkajších podmienok (posunov steny) systém prechádza sériou rovnovážnych stavov

na mikroskopickej úrovni je každý dej vratný - mechanický pohyb každej častice môže prebiehať aj naopak (ako film pustený naspäť) bez toho, aby bol v rozpore so zákonmi mechaniky

nevratnosť má len štatistický charakter (prechod od menej pravdepodobného k pravdepodobnejšiemu) – opačný dej je možný ale málo pravdepodobný (môže sa dym vypustený z nádoby do nej samovoľne vrátiť?)

relaxačná doba – charakteristická doba ustálenia rovnovážneho stavu (po zmene vonkajších podmienok)

kvázistatický dej - ak je rýchlosť zmeny vonkajších parametrov oveľa menšia než rýchlosť relaxácie - systém je prakticky stále v termodynamickej rovnováhe (jeho stav je stále jednoznačne určený vonkajšími parametrami)
pri spätnej (kvázistatickej) zmene vonkajších parametrov sa systém vracia do pôvodného stavu po tej istej postupnosti stavov (v opačnom poradí), – kvázistatický dej považujeme za vratný

Teplota systému, systémy v tepelnom kontakte

jednou z najčastejších veličín charakterizujúcich stav fyzikálneho objektu je energia

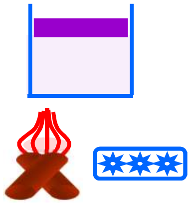
vnútorná energia systému je *súčet kinetických a potenciálnych energií všetkých prvkov* (častíc) *systému*, *okrem* kinetickej a potenciálnej energie systému ako *celku* (*zaujíma nás len pohyb vnútri systému, nie pohyb systému ako celku*) – *takáto celková energia systému charakterizuje jeho (makro)stav* - *je stavovou veličinou*

energia každého prvku systému (napr. každej molekuly plynu v danom objeme) nadobúda jednu z možných (dostupných) hodnôt (súbor diskrétnych hodnôt alebo spojité spektrum) – každý prvok systému sa nachádza v jednom z dostupných stavov
výsledná vnútorná energia systému teda nadobúda jednu z dostupných hodnôt U_i *– systém sa nachádza v jednom z* α *dostupných (makro)stavov*

stredná hodnota vnútornej energie $U = \sum_{i=1}^{\alpha} \mathcal{P}_i U_i$

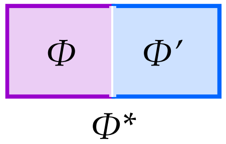
2 systémy (alebo časti jedného systému – podsystémy) sa nachádzajú v tepelnom kontakte, ak medzi nimi dochádza k mechanickej interakcii na mikroskopickej úrovni - odovzdávaniu energie medzi časticami oboch (pod)*systémov, tým sa v jednotlivých* (pod)*systémoch menia pravdepodobnosti výskytu častíc s danými hodnotami energie, a teda aj pravdepodobnosti existencie daných makrostavov* $\mathcal{P}_i$

teplo Q *je tá časť vnútornej energie, ktorá sa vymieňa medzi (pod)systémami v tepelnom kontakte (tj. „súčet“ všetkých výmen energie na mikroskopickej úrovni)*



dodávaním tepla do (pod)systému ($Q > 0$) sa *zvyšuje* jeho vnútorná energia
odoberaním tepla zo (pod)systému ($Q < 0$) sa *znižuje* jeho vnútorná energia

teplo nie je stavová veličina – necharakterizuje stav systému, iba jeho zmenu (nemá zmysel sa pýtať, koľko tepla systém obsahuje pred a po deji, iba koľko tepla prijal/odovzdal počas deja)



predpokladajme izolovaný systém Φ pozostávajúci z 2 podsystémov Φ ,Φ′ v tepelnom kontakte (tj. môžu si navzájom odovzdávať teplo), celková energia (izolovaného) systému* $U^* = U + U'$ *je konštantná*
$N(U)$ *je počet stavov podsystému Φ s energiami v intervale* $(U, U + dU)$
$N'(U')$ *je počet stavov podsystému Φ′ s energiami v intervale* $(U', U' + dU')$

pravdepodobnosť, že energia podsystému Φ v rovnováhe je v intervale $(U, U + dU)$, *je*

počet dostupných stavov s energiami podsystému Φ v intervale $(U, U + dU)$

$$\mathcal{P}(U) = \frac{N^*(U)}{N^*} = CN^*(U)\ ,\ C = \frac{1}{N^*}$$

počet všetkých dostupných stavov celého systému (konštanta)

ak energia podsystému Φ je U, *podsystém sa nachádza v ľubovoľnom z* $N(U)$ *stavov, súčasne sa podsystém Φ′ musí nachádzať v ľubovoľnom z* $N'(U')$ *stavov s energiou* $U' = U^* - U$, *možná je teda ľubovoľná kombinácia* $N(U)$ *a* $N'(U')$ *dostupných stavov)*

$$N^*(U) = N(U)N'(U^* - U) \Rightarrow \mathcal{P}(U) = CN(U)N'(U^* - U)$$

dá sa ukázať, že počet dostupných stavov každého systému (podsystému) rastie s jeho celkovou energiou,

ak rastie U *a teda aj* $N(U)$, *musí súčasne klesať* U' *a teda aj* $N'(U')$ *(pri nezmenenom* U^**), súčin* $N(U)N'(U')$ *aj* $\mathcal{P}(U)$ *majú teda maximum pri istej hodnote* U, *pri ktorej* $\frac{\partial \mathcal{P}(U)}{\partial U} = 0$

podmienka maximálnej pravdepodobnosti určuje najpravdepodobnejšiu hodnotu energie U *podsystému* Φ *v tepelnej rovnováhe s podsystémom* Φ'

na výpočet najpravdepodobnejšej hodnoty U *možno využiť vlastnosti funkcie* $\ln a$ *:*

$$\boxed{\ln(ab) = \ln a + \ln b \qquad \frac{\partial \ln a}{\partial a} = \frac{1}{a}\,, \quad \frac{\partial \ln f(a)}{\partial a} = \frac{\partial \ln f(a)}{\partial f(a)}\frac{\partial f(a)}{\partial a} = \frac{1}{f(a)}\frac{\partial f(a)}{\partial a}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \ln \mathcal{P}(U)}{\partial U} = \dfrac{1}{\mathcal{P}(U)}\dfrac{\partial \mathcal{P}(U)}{\partial U} \Rightarrow \dfrac{\partial \mathcal{P}(U)}{\partial U} = \dfrac{\partial \ln \mathcal{P}(U)}{\partial U}\mathcal{P}(U) \\ \textit{podmienka maxima } \mathcal{P}(U): \quad \dfrac{\partial \mathcal{P}(U)}{\partial U} = 0 \end{array}\right\} \quad \frac{\partial \ln \mathcal{P}(U)}{\partial U} = 0$$

$$\mathcal{P}(U) = CN(U)N'(U') \Rightarrow \ln \mathcal{P}(U) = \ln C + \ln N(U) + \ln N'(U')$$

po zderivovaní:

$$\frac{\partial \ln \mathcal{P}(U)}{\partial U} = \underbrace{\frac{\partial \ln C}{\partial U}}_{=0} + \frac{\partial \ln N(U)}{\partial U} + \frac{\partial \ln N'(U')}{\partial U'}\frac{\partial U'}{\partial U} = 0$$

(derivácia konštanty) $\qquad \frac{\partial (U^* - U)}{\partial U} = -1$

$$\frac{\partial \ln N(U)}{\partial U} = \frac{\partial \ln N'(U')}{\partial U'}$$

podmienka rovnováhy podsystémov Φ, Φ' *- určuje najpravdepodobnejšiu dvojicu hodnôt* U, U' *(pri zadanom* U^**)*

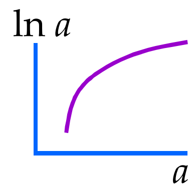
zaveďme označenie $\frac{\partial \ln N(U)}{\partial U} = \frac{1}{k_B T}$, $\frac{\partial \ln N'(U')}{\partial U'} = \frac{1}{k_B T'}$, $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} J K^{-1}$

(tj. zaveďme nové veličiny T, T') — *Boltzmannova konštanta*

$$T = \frac{1}{k_B}\left(\frac{\partial \ln N(U)}{\partial U}\right)^{-1} \qquad\qquad T' = \frac{1}{k_B}\left(\frac{\partial \ln N'(U')}{\partial U'}\right)^{-1}$$

veličiny T, T', vynásobené konštantou k_B, vyjadrujú prevrátené hodnoty funkcií $\frac{\partial \ln N(U)}{\partial U}$*, resp.* $\frac{\partial \ln N'(U')}{\partial U'}$ *, a majú rozmer energií*

s rastúcimi energiami U, U' *rastú počty dostupných stavov podsystémov N, N',*
s rastúcim argumentom však klesá strmosť logaritmov - $\frac{\partial \ln N(U)}{\partial U}$, $\frac{\partial \ln N'(U')}{\partial U'}$
sú teda klesajúcimi funkciami energií, a ich prevrátené hodnoty T,T' sú rastúcimi funkciami energií im príslušných (pod)systémov



ln *N*, ln *N'* *sú rastúcimi funkciami* U , U' *, ich strmosti (derivácie) sú kladné, teda aj T,T' > 0*

T,T' sú energetickými veličinami ($k_B T$ *je energia) a nazývajú sa absolútnymi teplotami (pod)systémov Φ,Φ'* [*K*]
rovnovážny (makro)stav systému je jednoznačne určený absolútnou teplotou – teplota je stavovou veličinou

absolútna teplota je mierou celkovej energie systému, nadobúda len kladné hodnoty (rastúce s energiou systému), je výlučnou vlastnosťou systému (rozdelenia dostupných stavov podľa energie)

určenie teploty telies v bežnej praxi (Celziova, Fahrenheitova stupnica) je vecou dohody (zvyklosti), takáto teplota môže nadobúdať kladné i záporné hodnoty

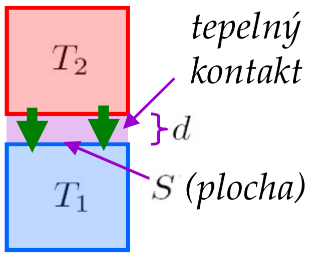
podmienku tepelnej rovnováhy 2 (pod)systémov v tepelnom kontakte možno vyjadriť pomocou ich absolútnych teplôt: $\frac{1}{k_B T} = \frac{1}{k_B T'}$ *alebo* $\boxed{T = T'}$

ak sa 2 systémy v tepelnom kontakte nachádzajú v rovnováhe, majú rovnaké teploty *ak boli podsystémy Φ,Φ′ na počiatku od seba* *tepelne izolované* *(nemohli si navzájom odovzdávať teplo), v* *ustálenom* *stave bol každý z nich v* *rovnovážnom stave* *pri teplote T, T′* ($T \neq T'$), *určenej* *najpravdepodobnejšou hodnotou energie stavu*, *rovnajúcej sa* *strednej* *(vnútornej) energii*

po vytvorení *tepelného kontaktu* *(tj. zmenou vonkajších podmienok) vznikne* *nový nerovnovážny* *stav (celého systému) vyvolávajúci* *prenos tepla* *(smerujúc k* *novému najpravdepodobnejšiemu* *stavu) – jeden podsystém teplo odovzdáva (na úkor svojej vnútornej energie) druhému*
vnútorná energia a tým aj teplota systému *odovzdávajúceho* *teplo* *klesajú*, *a vnútorná energia a teplota systému* *prijímajúceho* *teplo* *rastú*, *až* *do vyrovnania teplôt*, *kedy sa* *prenos tepla zastaví* *– systém sa ocitne v novom* *rovnovážnom* *stave (najpravdepodobnejšom pri daných (nových) podmienkach)*
podsystém, ktorý pred vyrovnaním teplôt teplo *odovzdával*, *mal teda* *vyššiu* *teplotu (bol „teplejší“) než podsystém, ktorý teplo* *prijímal* *(„chladnejší“)*

ak sa 2 systémy v tepelnom kontakte nenachádzajú v rovnováhe (majú rôzne teploty), deje sa medzi nimi prenos tepla z teplejšieho telesa k chladnejšiemu, až do vyrovnania teplôt

prenos tepla *vedením* *je prenos tepelnej energie* *bez prenosu látky* *(napr. postupné odovzdávanie kinetickej energie pri náhodných zrážkach molekúl v plyne)*



koeficient tepelnej vodivosti

teplo prenesené za časový interval $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\kappa \frac{T_2 - T_1}{d} S$ $\quad \frac{dT}{dx}$, $\frac{dQ}{dt}$

teplo tečie *v smere poklesu* *teploty* ($T_2 > T_1$)

hustota tepelného toku $j = \frac{1}{S}\frac{dQ}{dt} = -\kappa \frac{dT}{dx} \xrightarrow{3D} \boxed{\vec{j} = -\kappa \nabla T}$ *(gradient)*

$[Js^{-1}m^{-2} = Wm^{-2}]$

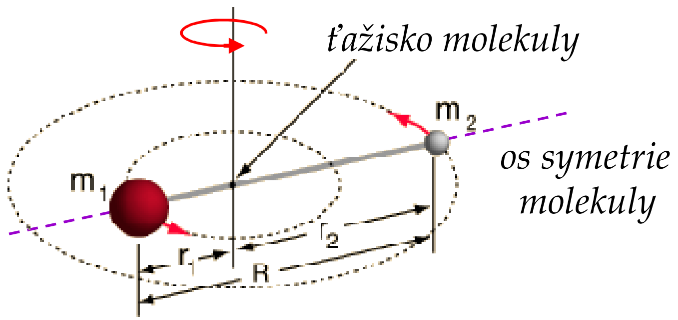
pohybový stav každého prvku (mikroskopickej častice) makroskopického systému (v ktorom prebieha tepelný pohyb) je určený jeho súradnicami a hybnosťami (vo všetkých smeroch pohybu), výsledný pohyb daného prvku pritom môže byť zložený z nezávislých pohybov

každý nezávislý pohyb nazývame stupňom voľnosti

translačný (posuvný) pohyb častice vo všeobecnom smere je superpozíciou 3 nezávislých pohybov v smeroch súradnicových osí (v smere x je popísaný súradnicou x a hybnosťou p_x, v smeroch y,z analogicky)

kinetická energia častice $W_k = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_z^2 + p_z^2)$ *teda závisí od 3 nezávislých hybností*

zložitejšie (viacatómové) molekuly môžu (okrem translačného pohybu) vykonávať aj rotačný pohyb okolo 1 alebo viacerých osí



dvojatómová molekula - rotácia okolo osi kolmej na os symetrie molekuly

moment zotrvačnosti molekuly $J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$

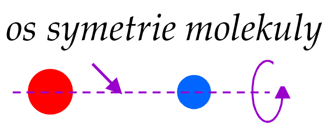
ťažisko molekuly: $m_1 r_1 = m_2 r_2 \qquad r_1 + r_2 = R$

$$J = \underbrace{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}_{m'}(r_1 + r_2)^2 = m' R^2$$

kinetická energia rotujúcej molekuly $W_k = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2}\frac{L^2}{J}$

pri lineárnych (napr. dvojatómových) molekulách možno rotáciu molekuly okolo svojej osi symetrie zanedbať (hmotnosť molekuly je sústredená v jadrách atómov - ležia na osi, moment zotrvačnosti pre túto rotáciu je malý,

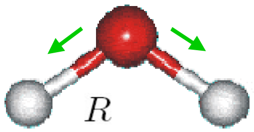
- uvažujeme teda len 2 nezávislé rotačné pohyby (okolo osí navzájom kolmých a kolmých na os symetrie lineárnej molekuly



u nelineárnych molekúl treba uvažovať o rotáciách okolo 3 navzájom kolmých osí x,y,z

$$W_k = \frac{1}{2}(J_x\omega_x^2 + J_y\omega_y^2 + J_z\omega_z^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{L_x^2}{J_x} + \frac{L_y^2}{J_y} + \frac{L_z^2}{J_z}\right)$$

ak $L_x \neq L_y \neq L_z$ *- asymetrický vĺčok* *ak* $L_x = L_y$ *- symetrický vĺčok*



viacatómové molekuly môžu navyše vykonávať vibračný (kmitavý) pohyb – periodickú zmenu medziatómovej vzdialenosti v molekule

okrem kinetickej energie je vibračný pohyb charakterizovaný aj potenciálnou energiou $W_p \sim R^2$ *(pozri Kmity)*

rotačné a vibračné pohyby molekuly nazývame vnútornými pohybmi, „navonok“ sa molekula prejavuje translačným pohybom celej molekuly (ťažiska)

energia každého z týchto nezávislých pohybov je kvadratickou funkciou nejakej nezávislej premennej (hybnosť resp. moment hybnosti, súradnica)

na určenie polohy každého atómu v molekule sú potrebné 3 súradnice – 3 stupne voľnosti, i-atómová molekula má teda 3i stupňov voľnosti

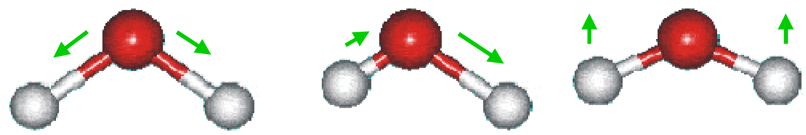
pri popise molekuly ako celku jej z celkového počtu 3i stupňov voľnosti priraďujeme:

- *3 translačné stupne (3 súradnice na určenie polohy ťažiska molekuly ako celku)*
- *3i-3 vnútorných stupňov voľnosti (2 alebo 3 uhlové súradnice na určenie rotácií okolo 2 alebo 3 navzájom kolmých osí prechádzajúcich ťažiskom molekuly, zvyšný počet vibračných stupňov voľnosti odpovedajúcich rôznym módom kmitania*

napr. lineárna dvojatómová molekula: $i = 2$, $3i = 6$ stupňov voľnosti

- *3 translačné stupne voľnosti - pohyb ťažiska*
- *2 rotačné stupne voľnosti – rotáciu okolo osi symetrie lineárnej molekuly zanedbávame*
- *1 vibračný stupeň voľnosti – kmity pozdĺž osi symetrie molekuly*

napr. nelineárna molekula $\mathrm{H_2O}$
$i = 3$, $3i = 9$ stupňov voľnosti
3 translačné, 3 rotačné, 3 vibračné



ekvipartičný teorém – každému nezávislému kvadratickému členu (tj. členu úmernému druhej mocnine nezávislej premennej) vo výraze pre celkovú (kinetickú aj potenciálnu) energiu pohybu častíc (molekúl, atómov) systému v rovnováhe pri teplote T odpovedá stredná energia $\frac{1}{2}k_BT$

energia súboru častíc (v rovnováhe pri teplote T) sa rozdeľuje rovnomerne medzi všetky stupne voľnosti - všetky druhy pohybu sú rovnocenné, každému stupňu voľnosti prislúcha stredná kinetická energia $\frac{1}{2}k_BT$

$$\boxed{\langle W_k \rangle = \frac{3i}{2}k_BT}$$

i – počet atómov v molekule

ak je s daným stupňom voľnosti spojená aj potenciálna energia (kvadratický člen), pripadá naň dodatočná stredná energia $\frac{1}{2}k_BT$

i-atómová molekula (3i stupňov voľnosti)

$$\langle W_k \rangle = \frac{3i}{2}k_BT \begin{cases} \frac{3}{2}k_BT & \text{- translačný pohyb ťažiska molekuly} \\ \frac{3}{2}(i-1)k_BT & \text{- vnútorné pohyby (rotačné a vibračné)} \end{cases}$$

$$\langle W \rangle = \langle W_k \rangle + \frac{n}{2}k_BT$$

počet kvadratických členov v potenciálnej energii

1-atómová molekula *(i = 1)* *3 translačné stupne voľnosti* $\langle W \rangle = \langle W_k \rangle = \frac{3}{2} k_B T$

pre plyn pozostávajúci z N rovnakých jednoatómových molekúl bez vzájomného silového pôsobenia (okrem zrážok) – tzv. ideálny jednoatómový plyn – platí

$$\underline{U = N\langle W \rangle = N\langle W_k \rangle = \tfrac{3}{2} N k_B T}$$

(pri súčte energii všetkých molekúl sme rozličné hodnoty energii jednotlivých molekúl nahradili ich strednou hodnotou cez celý súbor – ako keby všetky molekuly mali takúto energiu)

2-atómová molekula *(i = 2)*

$$\left\{\begin{array}{l} \text{3 stupne voľnosti na pohyb ťažiska, } \frac{3}{2} k_B T \\ \text{2 na rotáciu, } \frac{2}{2} k_B T \\ \text{1 na vibráciu, } \frac{1}{2} k_B T \text{ (kin.)} + \frac{1}{2} k_B T \text{ (pot.)} \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} \langle W_k \rangle = 3 k_B T \\ \langle W \rangle = \frac{7}{2} k_B T \end{array}$$

pozn.: platnosť ekvipartičného teorému je ohraničená klasickou fyzikou, v kvantovej fyzike neplatí

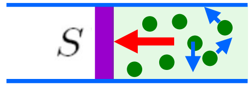
teplota je mierou strednej energie mikroskopického pohybu častíc

Tlak systému, systémy v mechanickom kontakte

tepelný pohyb je mechanický pohyb veľkého počtu častíc, na makroskopickej úrovni sa javí ako chaotický, na úrovni jednotlivých častíc je jednoznačne určený zákonmi mechaniky (*prejavmi tepelného pohybu sú Brownov pohyb, tlak plynu v nádobe (aj atmosferický), difúzia, a i.*)

Brownov pohyb – trhavý chaotický pohyb malých (tuhých) zrniečok v tekutinách, vzniká v dôsledku náhodných nárazov atómov a molekúl prostredia (konajúcich tepelný pohyb) na zrniečka, so zmenšujúcim sa rozmerom zrniečok klesá počet zrážok a zvýrazňuje sa ich náhodný (fluktuačný) charakter, pri veľkých zrnkách sa účinky veľkého počtu nárazov navzájom rušia

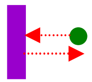
tlak $P = \frac{F}{S}$ ← *sila* ← *plocha* $[Pa = kgm^{-1}s^{-2}]$



tlak plynu na stenu je daný náhodnými nárazmi molekúl plynu, konajúcich tepelný pohyb

pri náraze molekuly menia svoju hybnosť (predpokladajme pružný odraz) o $\Delta p = 2mv_x$

hustota častíc $n = \frac{N}{V}$ ← *počet častíc* ← *objem*



$-mv_x$ *pred nárazom*
$+mv_x$ *po náraze*

za čas t môže na plochu S (v smere x) naraziť nv_xtS *častíc*

sila, ktorou narážajúce častice pôsobia na plochu $F = \frac{dp}{dt} = nv_xS \cdot 2mv_x = 2nSmv_x^2$

tlak častíc plynu na plochu $P = 2nmv_x^2$

len polovica sa pohybuje „sprava doľava“ (druhá polovica opačne)

častice nemajú rovnaké v_x *(ani smer)* $\Rightarrow$ $v_x^2 \to \frac{1}{2}\langle v_x^2 \rangle$

stredná rýchlosť molekúl v smere x

všetky smery sú ekvivalentné $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle \Rightarrow \langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3}\langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = \frac{\langle v^2 \rangle}{3}$

$$P = \frac{2}{3} n \langle \frac{mv^2}{2} \rangle \qquad PV = \frac{2}{3} N \langle \frac{mv^2}{2} \rangle = \frac{2}{3} N \langle W_k \rangle$$

(tlak plynu v nádobe je mierou strednej kinetickej energie častíc (molekúl) plynu)

plyn pozostávajúci z viacerých druhov molekúl *celkový počet molekúl* $N = \sum_i N_i$ *jednotlivé druhy*

$$P = \frac{1}{V} \sum_i \frac{2}{3} N_i \langle W_k \rangle_i = \sum_i P_i$$

celkový tlak je súčtom parciálnych tlakov jednotlivých zložiek plynu – Daltonov zákon

ideálny plyn – plyn pozostávajúci z identických častíc (molekúl) zanedbateľného objemu, bez vzájomného silového pôsobenia medzi časticami, pružné zrážky so stenami nádoby

jednoatómový ideálny plyn má 3 translačné stupne voľnosti (3 nezávislé smery pohybu častice)

$$\frac{3}{2} k_B T = \langle W_k \rangle \qquad \boxed{PV = \frac{2}{3} N \langle W_k \rangle = N k_B T}$$ *stavová rovnica ideálneho plynu*

pri danom tlaku, objeme a teplote je počet častíc ideálneho plynu daný (nezávisí od druhu plynu)

stavová rovnica dáva do súvisu stavové veličiny (P,V,T,N), určujúce rovnovážny stav systému (nezávisle od spôsobu akým sa systém do daného stavu dostal)

látkové množstvo $\mathcal{M}$ $[mol]$

$PV = \mathcal{M} N_A k_B T = \mathcal{M} R T$

$R = k_B N_A = 8,31 J K^{-1} mol^{-1}$

univerzálna plynová konštanta

počet molekúl $N = \mathcal{M} N_A$

$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} mol^{-1}$

Avogadrova konštanta

(počet molekúl v 1 móle)

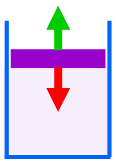
práca je energia vymieňaná medzi systémami pri zmene ich objemov

práca konaná vonkajšou silou pri posunutí hmotného bodu či tuhého telesa odpovedá zmene jeho mechanickej (kinetickej aj potenciálnej) energie
práca konaná vonkajšou silou na (makroskopickom) systéme mnohých častíc (ako hmotných bodov či drobných tuhých telies) odpovedá úhrnnej zmene mechanickej energie všetkých častíc posunutých touto silou
posunutie makroskopického systému ako celku neznamená zmenu jeho (makro)stavu (z hľadiska jeho vnútorného usporiadania) – nemá vplyv na jeho vnútornú energiu
zmena stavu systému (tj. zmena jeho vnútornej energie) nastane len pri vzájomnom posunutí jednotlivých prvkov systému, tj. zmene jeho objemu - zaujíma nás teda len práca konaná vonkajšou silou pri zmene objemu systému (z hľadiska makrostavu sa práca nekoná ak $dV = 0$)

tlak na ploche kolmú na smer sily (posunutia)

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = PSdr = PdV$$

$$\boxed{A = \int PdV}$$

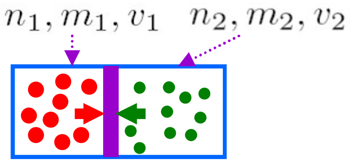


stláčaním piestu nadol ($dV < 0$) vonkajšia sila koná prácu ($dA < 0$) a dodáva systému energiu, vytláčaním piestu nahor ($dV > 0$) koná prácu systém ($dA > 0$) na úkor svojej vnútornej energie

práca (podobne ako teplo) nie je stavová veličina – necharakterizuje stav systému, iba jeho zmenu (nemá zmysel sa pýtať, koľko práce systém obsahuje pred a po deji, iba koľko práce vykonal alebo bolo na ňom vykonanej počas deja) *konanie mechanickej práce systému/na systéme je mechanickou interakciou systému s okolím na makroskopickej úrovni – dochádza k odovzdávaniu energie medzi systémom ako celkom (makrostavom) a okolím, pri zmene vonkajších podmienok (objemu systému)*

2 systémy (alebo podsystémy jedného systému) sa nachádzajú v mechanickom kontakte, ak medzi nimi dochádza k mechanickej interakcii na makroskopickej úrovni – konaniu práce jedným (pod)systémom na druhom, tým sa v jednotlivých (pod)systémoch menia dostupné hodnoty vnútornej energie ich makrostavov

systém (nádoba s plynom) pozostávajúci z 2 častí (podsystémov) oddelených pohyblivým piestom (tj. v mechanickom kontakte)



piest je v pokoji ak sú sily, ktorými naň pôsobí plyn z oboch strán vyrovnané, tj.

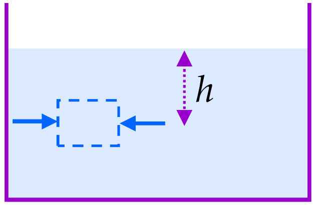
$$\boxed{P_1 = P_2} \Rightarrow \underline{n_1\langle \frac{m_1 v_1^2}{2}\rangle = n_2\langle \frac{m_2 v_2^2}{2}\rangle}$$

(piest pri pružných zrážkach v rovnováhe prijme a odovzdá rovnaké celkové množstvo energie)

ak sa 2 systémy v mechanickom kontakte nachádzajú v rovnováhe, majú rovnaké tlaky

hydrostatický tlak a Archimedov zákon

hydrostatický tlak je sila okolitej kvapaliny (tiaž kvapaliny a sily pôsobiace na povrch kvapaliny zvonka) pôsobiaca na kolmo jednotkovú plochu pomyselného telesa kdekoľvek v objeme kvapaliny

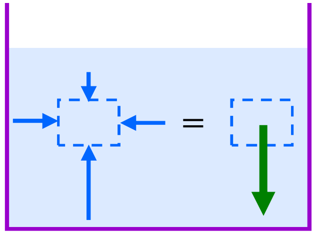


$$P = P_0 + \rho g h$$

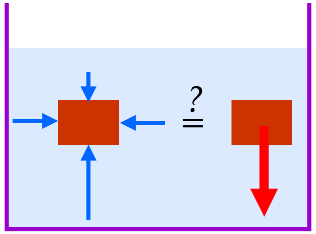
hĺbka pod hladinou

tlak na hladine (napr. atmosferický) — *hustota kvapaliny* — *tiažové zrýchlenie*

ak má byť ľubovoľná časť objemu kvapaliny v pokoji, musí výslednica všetkých síl pôsobiacich na túto časť objemu od okolia – vztlak - byť veľkosťou rovná jej tiaži a pôsobiť proti nej



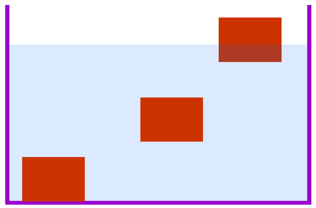
súčet síl od okolia = vlastná tiaž



ak túto časť objemu kvapaliny nahradíme predmetom rovnakého objemu aj tvaru, okolie pôsobí na tento predmet nezmenenou vztlakovou silou (ale tiaž predmetu nemusí byť rovnaká ako tiaž odpovedajúceho objemu kvapaliny)

teleso ponorené do kvapaliny je nadľahčované vztlakovou silou, ktorá sa rovná tiaži kvapaliny rovnakého objemu ako ponorený objem telesa

ak je teleso menšej hustoty než daná kvapalina úplne ponorené, pôsobí naň väčšia vztlaková sila než je jeho tiaž, je preto vytlačené na hladinu a veľkosť ponorenej časti objemu prispôsobí rovnováhe síl vztlaku a tiaže



teleso rovnakej hustoty ako kvapalina sa v nej vznáša, teleso väčšej hustoty klesá na dno

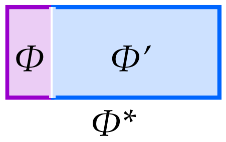
Kánonické a Maxwellovo rozdelenie

zavedením stredných hodnôt (rýchlosti, energie) výpočty nadobúdajú štatistický charakter

tepelný pohyb častíc v systéme je charakterizovaný strednou hodnotou kvadratickej rýchlosti (v^2), resp. kinetickej energie ($W_k \sim v^2$) – ako keby všetky častice systému mali túto hodnotu
v skutočnosti nadobúdajú hodnoty rýchlosti a energie častíc rôzne hodnoty na základe istého štatistického rozdelenia, a ich stredná hodnota je len najpravdepodobnejšou hodnotou ľubovoľnej (náhodne vybranej) častice súboru

v štatistickej fyzike je najčastejším rozdelením rozdelenie častíc podľa ich energie – celkový počet N častíc sa rozdelí do buniek, každú bunku tvorí súbor N_i častíc s určitou energiou W_i (v prípade spojitého rozdelenia energií je bunka charakterizovaná infinitezimálnym intervalom energií dW okolo W_i)

opäť predpokladajme izolovaný systém Φ pozostávajúci z 2 podsystémov Φ ,Φ′ v tepelnom kontakte v rovnováhe, pričom Φ << Φ′*
celková energia systému $U^* = U + U'$ (konštantná pre izolovaný systém)
je predovšetkým určená energiou U' (>> U) oveľa väčšieho podsystému Φ′
$N(U)$, $N'(U')$ sú počty stavov s energiami U, resp. U' v oboch podsystémoch



zaujíma nás pravdepodobnosť jedného konkrétneho stavu i podsystému Φ s energiou U_i (tejto energii odpovedá N_i stavov)
počet dostupných stavov celého systému v tomto prípade je $N^*(U_i) = 1 \cdot N'(U^* - U_i)$
jediný stav v podsystéme Φ

pravdepodobnosť tohto vybraného stavu i je $\mathcal{P}_i = CN'(U^* - U_i)$

$$U_i \ll U^* \quad \Rightarrow \quad \ln N'(U^* - U_i) = \ln N'(U^*) - \boxed{\frac{\partial \ln N'(U')}{\partial U'}} U_i + \dots$$

(rozvoj do Taylorovho radu)

$$\frac{1}{k_B T'} = \frac{1}{k_B T}$$

v rovnováhe $T' = T$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = x \ln e = \ln e^x \\ x + \ln y = \ln e^x + \ln y = \ln(ye^x) \end{array}}$$

po odlogaritmovaní $N'(U^* - U_i) = N'(U^*) e^{\frac{-U_i}{k_B T}}$

Boltzmannov faktor

$$\boxed{\mathcal{P}_i = Ce^{\frac{-U_i}{k_B T}}, \quad C = \frac{1}{\sum_i e^{\frac{-U_i}{k_B T}}}}$$

$\left(\sum_i \mathcal{P}_i = C \sum_i e^{\frac{-U_i}{k_B T}} = 1 \right)$

kánonické rozdelenie
(pravdepodobnosti stavov)

čím je energia rovnovážneho stavu systému pri danej teplote vyššia, tým je stav menej pravdepodobný

každý makroskopický systém sa snaží zaujať stav s čo najnižšou energiou
stav systému pri teplote T = 0 nazývame základným stavom
s narastajúcou teplotou systému (tj. s rastúcim tepelným pohybom) sa zvyšuje pravdepodobnosť nájdenia systému v niektorom z vyšších – tzv. vzbudených energetických stavov

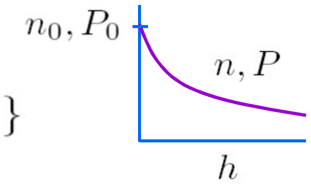
ľubovoľný parameter (veličina) y charakterizujúci systém v tepelnej rovnováhe pri teplote T má strednú hodnotu

$$\langle y \rangle = \sum_i \mathcal{P}_i y_i = \frac{\sum_i e^{\frac{-U_i}{k_B T}} y_i}{\sum_i e^{\frac{-U_i}{k_B T}}}$$

(všetky dostupné hodnoty y)

napr. $$\langle U \rangle = \sum_i \mathcal{P}_i U_i = \frac{\sum_i e^{\frac{-U_i}{k_B T}} U_i}{\sum_i e^{\frac{-U_i}{k_B T}}}$$

atmosférický tlak - zemská tiaž + tepelný pohyb formujú atmosféru
(bez tepelného pohybu by atmosféra spadla na zem, bez tiaže by sa rozplynula)



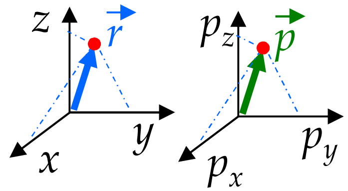
koncentrácia častíc vo výške h $\quad n = n_0 \exp\{\frac{-mgh}{k_B T}\}$ $\qquad$ tlak $\; P = P_0 \exp\{\frac{-mgh}{k_B T}\}$

n_0, P_0 - koncentrácia častíc a tlak vo výške $h = 0$ $\qquad$ potenciálna energia

integrál cez všetky hodnoty W_k je zahrnutý v konštante P_0 (vplyv zmeny teploty s rastúcou výškou sme v tomto prípade zanedbali)

celková energia častice je určená jej kinetickou a potenciálnou energiou

$$\underbrace{\text{hybnosť } p_x, p_y, p_z \qquad \text{poloha } x, y, z}$$



$\Rightarrow$ častica je určená bodom v 6-rozmernom fázovom priestore
stav celého súboru častíc je určený rozložením bodov vo fázovom priestore

hľadáme pravdepodobnosť, že daná častica sa nachádza v intervale $\vec{r}, \vec{r} + d\vec{r}$ a má hybnosť z intervalu $\vec{p}, \vec{p} + d\vec{p}$, ($x, x + dx$, y, z, p_x, p_y, p_z obdobne), tj. že sa nachádza v určitom elementárnom objeme fázového priestoru $d^3r d^3p$, kde $dxdydz = d^3r$, $dp_x dp_y dp_z = d^3p$

predpokladajme pritom, že celková energia častíc je určená len jej kinetickou energiou (napr. ideálny plyn navzájom neinteragujúcich častíc – $W_p = 0$)

$$\mathcal{P}(\vec{r}, \vec{p}) d^3r d^3p \sim \exp\{\frac{-\frac{p^2}{2m}}{k_B T}\} d^3r d^3p \qquad \text{resp.} \quad \mathcal{P}(\vec{r}, \vec{v}) d^3r d^3v \sim \exp\{\frac{-\frac{mv^2}{2}}{k_B T}\} d^3r d^3v$$

pre rýchlosť v intervale $\vec{v}, \vec{v} + d\vec{v}$

stredný počet častíc v jednotke objemu v intervale rýchlostí $\vec{v}, \vec{v} + d\vec{v}$ je

počet všetkých častíc systému

$$f(\vec{v}) d^3v = \frac{N}{d^3r} \mathcal{P}(\vec{r}, \vec{v}) d^3r d^3v = \underline{C \exp\{\frac{-mv^2}{2k_B T}\} d^3v}$$

element objemu

$$C\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{\frac{-mv^2}{2k_BT}\}d^3v = C\int\int_{-\infty}^{\infty}\int\exp\{\frac{-mv_x^2}{2k_BT}\}\exp\{\frac{-mv_y^2}{2k_BT}\}\exp\{\frac{-mv_z^2}{2k_BT}\}dv_xdv_ydv_z = n$$

koncentrácia častíc

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{\frac{-mv_x^2}{2k_BT}\}dv_x = \int_{-\infty}^{\infty}\exp\{\frac{-mv_y^2}{2k_BT}\}dv_y = \int_{-\infty}^{\infty}\exp\{\frac{-mv_z^2}{2k_BT}\}dv_z = \sqrt{\frac{2\pi k_BT}{m}}$$

$$\Rightarrow C = n\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{\frac{3}{2}}$$

(všetky smery sú ekvivalentné)

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\ ,\ a>0}$$

$$f(\vec{v})d^3v = n\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\{\frac{-mv^2}{2k_BT}\}d^3v$$

Maxwellovo rozdelenie molekúl ideálneho plynu podľa rýchlosti

(energie častíc je určená výlučne kinetickou energiou ich translačného pohybu, nezávisí od „vnútorného pohybu“ častíc (rotácie a vibrácie molekúl))
rozdelenie nezávisí od smeru (všetky smery tepelného pohybu sú ekvivalentné), $f(\vec{v}) = f(v)$

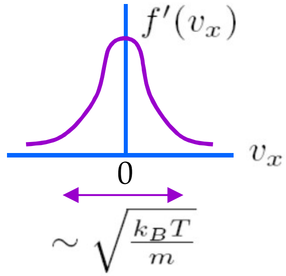
stredný počet častíc (v jednotkovom objeme) s rýchlosťou (v smere x) z intervalu $v_x, v_x + dv_x$ *je*

$$f'(v_x)dv_x = \int\int_{-\infty}^{\infty}f(\vec{v})dv_ydv_z = C\int\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{\frac{-m(v_y^2+v_z^2)}{2k_BT}\}dv_ydv_z\cdot\exp\{\frac{-mv_x^2}{2k_BT}\}dv_x = C'\exp\{\frac{-mv_x^2}{2k_BT}\}dv_x$$

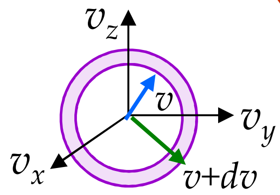
(pre všetky rýchlosti v smeroch y,z)

normovacia podmienka: $\int_{-\infty}^{\infty}f'(v_x)dv_x = n \quad \Rightarrow C' = n\sqrt{\frac{m}{2\pi k_BT}}$

rozdelenie je symetrické okolo $v_x = 0$ *(stredná rýchlosť v smere x je nulová, tj. výsledný pohyb systému ako celku je nulový) - chaotický tepelný pohyb sa deje s rovnakou pravdepodobnosťou v oboch smeroch osi x*



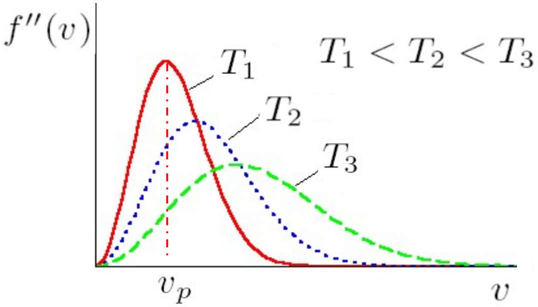
pre $|v_x| \gg \sqrt{\frac{k_BT}{m}}$ $(mv_x^2 \gg k_BT)$ *je* $f'(v_x) \to 0$ *- rýchlosti odpovedajúce kinetickým energiám výrazne prevyšujúcim strednú energiu tepelného pohybu* k_BT *sú málo pravdepodobné* *stredný počet častíc (v jednotkovom objeme) s veľkosťou rýchlosti (bez ohľadu na smer) v intervale* $v, v+dv$ *je* $f''(v)dv = \int_v^{v+dv} f(v)d^3v$



v 3D „rýchlostnom priestore" tento interval odpovedá (infinitezimálnemu) „objemu" medzi guľovými plochami o polomeroch v *a* $v+dv$, *v ktorom je hodnota f(v) prakticky konštantná, a ktorého veľkosť je* $4\pi v^2 dv$

$$f''(v) = f(v)\boxed{\int_v^{v+dv} d^3v} = 4\pi f(v)v^2dv = 4\pi C'' \exp\{\frac{-mv^2}{2k_BT}\}v^2dv \qquad C'' : \int_0^\infty f''(v)dv = n$$

najpravdepodobnejšia rýchlosť, daná podmienkou $\frac{df''(v)}{dv}|_{v=v_p} = 0$, *je* $v_p = \sqrt{\frac{2k_BT}{m}} \sim \sqrt{T}$



napr. pre plyn N_2 ($m \approx 4,6 \cdot 10^{-26}kg$) *pri* $T \approx 300K$ *je*

$$v_p \approx 420ms^{-1}$$

stredná rýchlosť je $v_s = \langle v \rangle = \int_0^\infty v f''(v)dv = \sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}}$

stredná kvadratická rýchlosť (odpovedajúca strednej energii) $\langle \frac{1}{2}mv^2 \rangle = \frac{3}{2}k_BT$ *pre jednoatómový plyn je*

$$v_{sk} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}} \qquad \qquad v_{sk} > v_s > v_p$$

z funkcie $f(\vec{v})$ *možno nájsť rozdelenie podľa hybnosti,* $f(\vec{p})$, *alebo podľa (kinetickej) energie,* $f(W_k)$

$$f(\vec{v})d^3v = f(\vec{p})d^3p = f(W_k)dW_k$$

$$W_k = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2}mv^2 \qquad d^3v = 4\pi v^2dv = \frac{d^3p}{m^3} = \frac{4\pi p^2}{m^3}dp = \frac{4\pi\sqrt{2W_k}}{m^{\frac{3}{2}}}dW_k$$

$$dW_k = \frac{p}{m}dp = mvdv$$

$$f(\vec{p})d^3p = n(\frac{1}{2\pi m k_B T})^{\frac{3}{2}} \exp\{\frac{-p^2}{2mk_BT}\}d^3p \qquad f(W_k)dW_k = \frac{2n}{\sqrt{\pi}}\sqrt{W_k}(\frac{1}{k_BT})^{\frac{3}{2}} \exp\{\frac{-W_k}{k_BT}\}dW_k$$

funkcie f nazývame rozdeľovacími funkciami hustoty pravdepodobnosti výskytu častíc vo fázovom priestore podľa rýchlosti, hybnosti, kinetickej energie

Premeny a zachovanie energie systému, systémy v materiálovom kontakte

stredná hodnota vnútornej energie $U = \sum_{i=1}^{\alpha} \mathcal{P}_i U_i$

jej (infinitezimálna) zmena $dU = \boxed{\sum_{i=1}^{\alpha} U_i d\mathcal{P}_i} + \boxed{\sum_{i=1}^{\alpha} \mathcal{P}_i dU_i}$

zmena vnútornej energie vplyvom zmeny pravdepodobností jednotlivých (makro)stavov - tzv. výmena tepla (medzi systémom a okolím)

$$dQ = \sum_{i=1}^{\alpha} U_i d\mathcal{P}_i$$

zmena vnútornej energie vplyvom zmeny vonkajších parametrov – konaním práce

$$dA = -\sum_{i=1}^{\alpha} \mathcal{P}_i dU_i$$

kladnú prácu koná systém na úkor svojej vnútornej energie

$$\boxed{\boxed{dU = đQ - đA}}$$

1. zákon termodynamiky
(zákon zachovania energie)

nemožno zostrojiť zariadenie, ktoré by konalo prácu bez toho, aby sa menila jeho energia alebo energia okolia (perpetuum mobile 1. druhu)

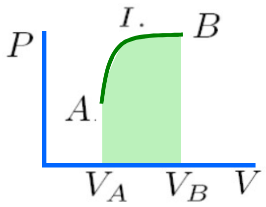
systém s konštantným počtom častíc môže konať prácu na úkor prijatého tepla alebo svojej vnútornej energie
systém môže zvýšiť/znížiť svoju vnútornú energiu prijatím/odovzdaním tepla alebo prijatím/konaním práce

đ predstavuje tzv. neúplný diferenciál, lebo $\int_A^B đf \neq f(B) - f(A)$
- hodnota integrálu nie je daná len koncovými bodmi ale závisí od výberu celej integračnej dráhy

neúplný diferenciál $\longrightarrow \text{đ}A = P\,dV \longleftarrow$ *úplný diferenciál*

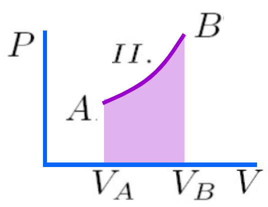
práca potrebná na zmenu objemu z V_A *na* V_B $\quad \Delta A = \int_A^B P\,dV \longleftarrow$ *plocha pod krivkou na PV diagrame*

po dráhe I. (a A do B)



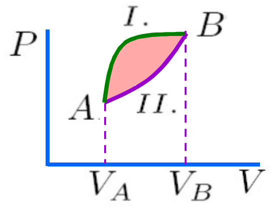
(dV > 0 , práca kladná)

a naspäť (z B do A) po dráhe II.



(dV < 0 , práca záporná)

výsledná práca pri cyklickom deji (A - B - A)



(rozdiel plôch)

$\text{đ}Q$ *a* $\text{đ}A$ *sú neúplné diferenciály, hoci ich súčet (resp. rozdiel) je úplným diferenciálom* dU

$\int_A^B dU = U(B) - U(A)$ $\qquad$ U *je stavová veličina, jednoznačne určujúca stav systému, bez ohľadu na spôsob (dráhu), akým sa systém do tohto stavu dostal (diferenciál stavovej veličiny musí byť úplným diferenciálom)*

$$\Delta Q = \overbrace{\boxed{U(B) - U(A)}}^{\Delta U} + \Delta A$$

U *je stavová veličina* $\Rightarrow \Delta U$ *je rovnaké pre dráhu I. aj II.*

$$\Rightarrow \Delta Q_{I.} - \Delta Q_{II.} = \Delta A_{I.} - \Delta A_{II.}$$

$$\underline{\Delta A_{I.} \neq \Delta A_{II.} \Rightarrow \Delta Q_{I.} \neq \Delta Q_{II.}}$$

pri cyklickom deji (systém sa prechodom sériou nových stavov vráti do pôvodného stavu) $\underline{\oint dU = 0}$

integrál po uzavretej dráhe popisuje cyklický dej, ktorého počiatočný (= konečný) stav je jednoznačne určený danou hodnotou stavovej veličiny, takýto integrál stavovej veličiny preto musí byť nulový (rozdiel konečnej a počiatočnej hodnoty)

výsledná (vykonaná a prijatá) práca a výsledné (prijaté a odovzdané) teplo však nemusia byť nulové

$\oint \text{đ}A \neq 0 \quad \oint \text{đ}Q \neq 0$ $\quad$ *(nie sú to stavové veličiny)* *ak sa v systéme mení počet častíc* N*, zmena vnútornej energie zmenou vonkajších parametrov,* $\sum_{i=1}^{\alpha} \mathcal{P}_i dU_i$ *, už nezahrňuje len mechanickú prácu (tj. zmenu objemu systému) ale aj zmenu vnútornej energie systému zmenou počtu častíc (objem i počet častíc sú vonkajšími parametrami systému)*

$$dU_i = \underbrace{\frac{\partial U_i}{\partial V}|_N}_{\text{pri konštantnom } N} dV + \underbrace{\frac{\partial U_i}{\partial N}|_V}_{\text{pri konštantnom } V} dN$$

zmena počtu častíc

$$\sum_{i=1}^{\alpha} \mathcal{P}_i dU_i = \overbrace{\boxed{\sum_{i=1}^{\alpha} \mathcal{P}_i \frac{\partial U_i}{\partial V}|_N}}^{-P} dV + \overbrace{\boxed{\sum_{i=1}^{\alpha} \mathcal{P}_i \frac{\partial U_i}{\partial N}|_V}}^{-\mu} dN$$

$$P = -\sum_{i=1}^{\alpha} \mathcal{P}_i \frac{\partial U_i}{\partial V}|_N$$

$$\mu = \sum_{i=1}^{\alpha} \mathcal{P}_i \frac{\partial U_i}{\partial N}|_V$$

μ - *chemický potenciál – miera zmeny energie systému pri zmene počtu častíc, tj. stredná energia, ktorú so sebou prinesie (odnesie) jedna častica do (zo) súboru* $[J]$

μ, N – *stavové veličiny*

$$dU = \sum_{i=1}^{\alpha} U_i d\mathcal{P}_i + \sum_{i=1}^{\alpha} \mathcal{P}_i dU_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{\alpha} U_i d\mathcal{P}_i}_{\text{výmena tepla}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{\alpha} \mathcal{P}_i \frac{\partial U_i}{\partial V}|_N dV}_{\text{mechanická práca}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{\alpha} \mathcal{P}_i \frac{\partial U_i}{\partial N}|_V dN}_{\text{zmena počtu častíc}}$$

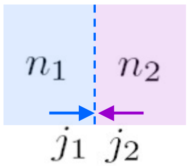
$$\boxed{dU = đQ - PdV + \mu dN}$$

ak systém pozostáva z i druhov častíc a ich počty N_i *sa menia*

$$dU = đQ - PdV + \sum_i \mu_i dN_i$$

μ_i - *chemický potenciál i-teho druhu častíc*

2 systémy (alebo podsystémy jedného systému) sa nachádzajú v materiálovom kontakte, ak medzi nimi môže prebiehať výmena častíc, tým sa v jednotlivých (pod)systémoch menia dostupné hodnoty vnútornej energie ich makrostavov



systém (nádoba s plynom) pozostávajúci z 2 častí s koncentráciami (rovnakých) častíc n_1,n_2 vo vzájomnom materiálovom kontakte

jednotlivé častice sa „chaoticky“ pohybujú (tepelný pohyb) všetkými smermi

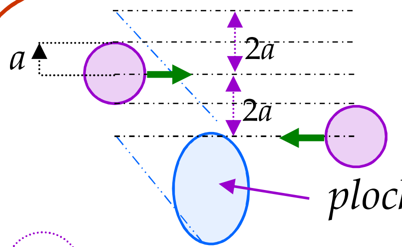
v oboch smeroch stredná rýchlosť

za čas Δt prejde jednotkovou plochou pomyselného rozhrania $n_{1,2} v_s \Delta t$ molekúl

výsledný tok molekúl (jednotkovou plochou rozhrania za jednotku času) $j = \frac{n_1 v_s \Delta t - n_2 v_s \Delta t}{\Delta t} = (n_1 - n_2) v_s$

stredná doba medzi dvoma zrážkami molekuly τ

stredná voľná dráha molekuly (tj. stredná dráha medzi dvoma zrážkami) $l = \tau v_s$



2 rovnaké molekuly o polomeroch a (vzájomne sa pohybujúce opačnými smermi) sa nezrazia, ak vzdialenosť ich stredov (kolmá na smer ich vzájomného pohybu) bude väčšia než 2a

plocha $\sigma = \pi (2a)^2$ - zrážkový prierez molekuly (molekuly, ktorých stredy ležia v zrážkovom prierezе danej molekuly, sa s ňou zrazia)

$(\sigma l) n \cong 1$ $\quad$ $\underline{l \sim \frac{1}{n}}$

objem pripadajúci na 1 molekulu

napr. N_2 pri atmosférickom tlaku a bežných teplotách ($a \approx 10^{-10} m$, $n \approx 2,5 \cdot 10^{25} m^{-3}$):

$\sigma \approx 1,2 \cdot 10^{-19} m^2$ $\quad l \approx 3 \cdot 10^{-7} m \; (\gg a)$ $\quad$ (vzájomná vzdialenosť molekúl mnohonásobne prevyšuje ich rozmery – ideálny plyn) *vo vzdialenosti* $\approx l$ *od rozhrania* $n_1 - n_2 \approx -\frac{dn}{dx} l$ *(v smere x)*

výsledný tok častíc (v smere x) $j_x = \boxed{-\frac{dn}{dx}} l v_s \rightarrow -\frac{1}{3}\frac{dn}{dx} l v_s$ *korekcia na aproximácie*

$\frac{dn}{dx} > 0$ *pre rastúcu koncentráciu molekúl (v kladnom smere x)* $\Rightarrow$ *výsledný tok častíc prebieha v smere klesajúcej koncentrácie*

koeficient difúzie $D = \frac{1}{3} l v_s$

výsledná hustota toku častíc $j_x = -D\frac{dn}{dx} \xrightarrow[3D]{} \boxed{\vec{j} = -D\nabla n}$ *(analógia s tepelným tokom)*

výslednicou „chaotického" tepelného pohybu jednotlivých častíc je ich usmernený výsledný tok – difúzia - v smere ich klesajúcej koncentrácie, až do vyrovnania koncentrácií

ak sa 2 systémy v materiálovom kontakte nachádzajú v rovnováhe, majú rovnaké koncentrácie častíc

aj po nastolení rovnováhy medzi dvoma (pod)systémami v materiálovom kontakte prebieha „chaotický" (mikroskopický) pohyb častíc naprieč rozhraním (z jedného (pod)systému do druhého), avšak celkový (makroskopický) tok častíc je nulový - pohyb častíc v oboch smeroch sa navzájom kompenzuje

chemický potenciál predstavuje akýsi podiel vnútornej energie systému pripadajúcu na jednu časticu, pri rovnakej koncentrácii častíc v rôznych častiach systému majú teda tieto časti systému rovnaký chemický potenciál

ak sa v oboch (pod)systémoch v materiálovom kontakte vyrovnajú koncentrácie rovnakých častíc, majú oba (pod)systémy rovnaký chemický potenciál

pozn.: materiálový kontakt (pod)systémov sa niekedy nazýva aj difúznym alebo chemickým kontaktom *termodynamická rovnováha* – stav systému (pri daných vonkajších parametroch), pri ktorom *neprebiehajú makroskopické toky* (tepelný tok, difúzia, elektrický prúd, a pod.), stav systému je *jednoznačne určený vonkajšími parametrami*

pri *rýchlych* zmenách vonkajších parametrov sa systém dostáva *mimo* rovnovážneho stavu, vznikajú makroskopické toky (dej je *nevratný*)
relaxačná doba (tj. charakteristická doba ustálenia nového rovnovážneho stavu) *je dobou trvania makroskopických tokov*, po jej uplynutí toky zaniknú (nastane nová rovnováha)

termodynamická rovnováha dvoch systémov

systémy v *tepelnom* kontakte (dochádza ku vzájomnej výmene *tepla*) - *vyrovnávajú* sa ich *teploty*
systémy v *mechanickom* kontakte (dochádza ku vzájomnej zmene *objemu*) - *vyrovnávajú* sa ich *tlaky*
systémy v *materiálovom* kontakte (dochádza ku vzájomnej *difúzii častíc*) - *vyrovnávajú* sa ich *chemické potenciály*

veličiny T, P, μ majú *štatistický charakter* - charakterizujú *makroskopický systém* (v rovnováhe), nemá zmysel priraďovať ich *jednotlivým prvkom* systému („teplota častice“ a pod.)

tepelná kapacita telesa $C = \frac{đQ}{dT}$ $[JK^{-1}]$ - množstvo tepla potrebné na jednotkovú zmenu jeho teploty (o 1 stupeň) – *extenzívna* veličina (závisí od veľkosti telesa), vyjadruje schopnosť telesa (látky) *akumulovať* tepelnú energiu

mólové teplo látky $C_m = \frac{C}{\mathcal{M}}$ $[JK^{-1}mol^{-1}]$ - *mólová* tepelná kapacita - teplo potrebné na jednotkovú zmenu teploty *jednotkového množstva látky* (1 mólu) látky - *intenzívna* veličina (nezávisí od veľkosti telesa) *merné teplo* *látky* $c = \frac{C}{m}$ $[JK^{-1}kg^{-1}]$ – *teplo potrebné na jednotkovú zmenu teploty jednotkovej hmotnosti látky - tepelná kapacita jednotkovej hmotnosti látky – intenzívna veličina*

tepelná kapacita pri konštantnom objeme $C_V = (\frac{đQ}{dT})_V = (\frac{dU}{dT})_V$ $(dV = 0 \Rightarrow dA = 0)$

tepelná kapacita ideálneho plynu

podľa ekvipartičného teorému na každý stupeň voľnosti pripadá tepelná energia $\frac{1}{2}k_BT$,
stredná kinetická energia molekúl plynu s i stupňami voľnosti je $\langle W_k \rangle = \frac{i}{2}k_BT$,
vnútorná energia systému N molekúl je $U = N\langle W_k \rangle = \frac{i}{2}Nk_BT$,
tepelná kapacita takéhoto plynu pri konštantnom objeme je teda $\underline{C_V = \frac{i}{2}Nk_B}$

tepelná kapacita pri konštantnom tlaku $C_P = (\frac{dQ}{dT})_P \neq (\frac{dU}{dT})_P$ $(dA \neq 0)$

$\underline{C_P = C_V + Nk_B}$ *Mayerova rovnica (pre id. plyn)* $\underline{C_P = C_V + R}$ *(pre 1 mól)*

ak sa má zachovať stály tlak, musí sa pri dodávaní tepla nechať plyn rozpínať (konať mech. prácu) - istá časť energie (tepla) sa teda mení na prácu – treba viac energie ako pri konštantnom objeme

Entropia systému

entropia systému $\boxed{S = k_B \ln N(U)}$ $[JK^{-1}]$

entropia je mierou počtu dostupných stavov makroskopického systému pri danej energii systému, tj. mierou pravdepodobnosti, že systém bude mať danú hodnotu celkovej (vnútornej) energie
rovnovážny stav je najpravdepodobnejším stavom (odpovedajúcim najväčšiemu počtu dostupných stavov) – stavom s maximálnou hodnotou S

v rovnovážnom stave je entropia systému maximálna

ak entropie podsystémov Φ ,Φ′ (izolovaného systému Φ*) v stavoch s energiami U, U' sú

$$S = k_B \ln N(U) \qquad S' = k_B \ln N'(U')$$

celková entropia celého systému Φ* je $S^* = k_B \ln N^* = k_B \ln N + k_B \ln N' = \underline{S + S'}$

entropia je aditívnou veličinou – výsledná entropia systému tvoreného podsystémami je súčtom entropii podsystémov

konštanta

$$S^* = k_B \ln \frac{\mathcal{P}(U)}{C} = k_B \underline{\ln \mathcal{P}(U)} - k_B \ln C$$

dokonalý poriadok – každý prvok súboru má svoje (jediné) miesto – jediný mikrostav tvorí daný makrostav – veľmi málo pravdepodobný stav
neporiadok – mnoho mikrostavov odpovedá danému makrostavu – oveľa pravdepodobnejší stav
pravdepodobnosť makrostavu $\mathcal{P} \sim N_i$ (počet mikrostavov tvoriacich makrostav) $S \sim \ln \mathcal{P}$

entropia je mierou neusporiadanosti systému, vývoj systému od nerovnovážneho stavu k rovnovážnemu je procesom nárastu entropie - neusporiadanosti (rovnovážny stav je naj-neusporiadanejším stavom)

ak (pod)systém prijme (kvázistaticky) malé množstvo tepla ΔQ, zmení sa jeho vnútorná energia aj odpovedajúci počet dostupných stavov $N(U) \to N(U+\Delta Q)$

$$\underbrace{\ln N(U+\Delta Q) - \ln N(U)} = \boxed{\frac{\partial \ln N(U)}{\partial U}}\Delta Q + \cancel{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \ln N(U)}{\partial U^2}(\Delta Q)^2} + \ldots \quad \textit{(Taylorov rad)}$$

$$\Delta(\ln N) = \frac{\Delta Q}{k_B T} \qquad \frac{1}{k_B T} \qquad \Delta(k_B \ln N) = \Delta S = \frac{\Delta Q}{T} \xrightarrow[\Delta Q \to 0]{} dS = \frac{đQ}{T}$$

$$\boxed{dS = \frac{đQ}{T}}$$ *- (úplný) diferenciál entropie (rovnosť platí len pre kvázistatické deje)*

entropia je stavová veličina $$S(A) = \int_0^A \frac{đQ}{T}$$

pre vratný proces z referenčného stavu 0 do stavu A

jednoznačne určuje rovnovážny stav systému (s presnosťou na aditívnu konštantu $S(0)$)

$$S(B) - S(A) = \int_A^B \frac{đQ}{T}$$

rozdiel entropii dvoch stavov (A,B) je jednoznačný

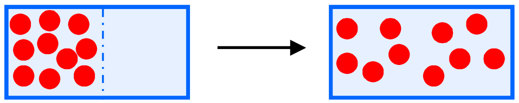
pre vratný proces zo stavu A do stavu B

stav systému v rovnováhe je jednoznačne určený jeho entropiou (bez ohľadu na spôsob, akým sa do tohto stavu dostal – vratne alebo nevratne), vypočítať túto entropiu možno integrovaním $\frac{đQ}{T}$ pozdĺž trajektórie vratného procesu (diferenciál stavovej veličiny musí byť úplným diferenciálom) *pre každý (vratný aj nevratný) cyklický dej* $\boxed{\oint dS = 0}$ *(S je stavová veličina)*

pre vratné procesy $dS = \frac{\text{đ}Q}{T}$ ⟶ *pre vratné procesy* $\oint \frac{\text{đ}Q}{T} = 0$

počas nevratného deja systém prechádza nerovnovážnymi stavmi medzi počiatočným a konečným rovnovážnym stavom, prechodom z nerovnovážneho (tj. usporiadanejšieho) „medzistavu“ do konečného rovnovážneho (tj. najmenej usporiadaného) stavu entropia systému vždy narastá (aj keď nedochádza k výmene tepla)

napr. spontánny proces (vyrovnávanie koncentrácie)



v izolovanom systéme ($\text{đ}Q = 0$) *je procesom nárastu entropie* ($dS > 0$)

(stav po odstránení prehradenia je nerovnovážnym stavom)

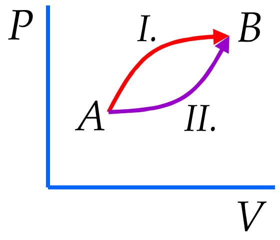
vyrovnávanie teploty v jednotlivých častiach systému (napr. pri prudkom dodaní tepla do jednej časti systému a následnom zastavení dodávky tepla) je nerovnovážnym dejom (v už izolovanom systéme), pri ktorom entropia neustále rastie až do vyrovnania teploty

pri nerovnovážnych (nevratných) dejoch teda neplatí rovnosť $dS = \frac{dQ}{T}$

pre nevratné procesy

$$\boxed{dS > \frac{\text{đ}Q}{T}}$$

$$\left.\begin{aligned} (S(B) - S(A) =) \int_A^B dS &> \int_A^B \frac{dQ}{T} \\ (0 =) \oint dS &> \oint \frac{dQ}{T} \end{aligned}\right\} \qquad \oint \frac{\text{đ}Q}{T} < 0$$



ak I. aj II. sú vratné deje $\int\limits_{A,\,\mathrm{I.}}^{B} \frac{\text{đ}Q}{T} = \int\limits_{A,\,\mathrm{II.}}^{B} \frac{\text{đ}Q}{T}$ $\qquad \int_A^B \frac{\text{đ}Q}{T} = -\int_B^A \frac{\text{đ}Q}{T}$

$$\oint dS = \oint \frac{\text{đ}Q}{T} = \int\limits_{A,\,\mathrm{I.}}^{B} \frac{\text{đ}Q}{T} + \int\limits_{B,\,\mathrm{II.}}^{A} \frac{\text{đ}Q}{T} = 0$$

ak I. je nevratný dej
a II. je vratný dej $\int\limits_{A,\,\mathrm{I.}}^{B} \frac{\text{đ}Q}{T} < \int\limits_{A,\,\mathrm{II.}}^{B} \frac{\text{đ}Q}{T} = S(B) - S(A)$ $\qquad \oint \frac{\text{đ}Q}{T} = \int\limits_{A,\,\mathrm{I.}}^{B} \frac{\text{đ}Q}{T} + \int\limits_{B,\,\mathrm{II.}}^{A} \frac{\text{đ}Q}{T} \underline{< 0}$

$\left(\int_A^B \frac{\text{đ}Q}{T} \neq -\int_B^A \frac{\text{đ}Q}{T} \right.$ *pre nevratný dej)* $\qquad \oint dS \underline{= 0}$

pre ľubovoľný proces
(vratný aj nevratný) $\qquad \boxed{dS \geq \frac{\text{đ}Q}{T}} \qquad S(B) - S(A) \geq \int_A^B \frac{\text{đ}Q}{T}$ $\qquad \underline{\oint dS = 0}$

2. zákon termodynamiky $\qquad \underline{\oint \frac{\text{đ}Q}{T} \leq 0}$

nemožno zostrojiť trvale pracujúci tepelný stroj, ktorý by nič iné nespôsoboval, len odoberal teplo a konal mechanickú prácu (perpetuum mobile 2. druhu)

dve telesá (alebo časti jedného telesa) o teplotách T_1 *a* T_2 ($T_1 < T_2$) *sú v tepelnom kontakte,*
teplo Q *prechádza kvázistaticky (tj. vratne) z teplejšieho telesa na chladnejšie*
entropia chladnejšieho telesa sa zmení o $\Delta S_1 = \frac{Q}{T_1}$ (> 0, *prijíma teplo)*
entropia teplejšieho telesa sa zmení o $\Delta S_2 = -\frac{Q}{T_2}$ (< 0, *odovzdáva teplo)*
celková zmena entropie je $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{Q}{T_1} - \frac{Q}{T_2} \underline{\geq 0}$ *(lebo* $T_1 < T_2$ *) – celková entropia systému narastá, odovzdávaním tepla sa vyrovnávajú teploty telies, po vyrovnaní teplôt sa rast entropie zastaví – entropia je v tepelnej rovnováhe maximálna*

entropia môže spontánne klesať len v časti systému, a to na úkor jej väčšieho nárastu v inej časti systému, celková entropia (izolovaného systému) nikdy neklesá

ak má systém pracovať ako tepelný stroj, musí premeniť teplo (alebo jeho časť), odobrané teplejšiemu telesu, na mechanickú prácu

mechanická práca konaná tepelným strojom $A = Q_2 - Q_1$

teplo odobrané z teplejšieho telesa (T_2)

teplo prijaté chladnejším telesom (T_1)

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = \underbrace{\frac{Q_2}{T_1} - \frac{A}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2}}\geq 0$$

v prípade $T_1 = T_2$

účinnosť tepelného stroja (= pomer vykonanej práce k odobranému teplu) $\eta = \frac{A}{Q_2} \leq 1 - \frac{T_1}{T_2} < 1$

účinnosť akéhokoľvek tepelného stroja je vždy menšia ako 1, lebo $0 < \frac{T_1}{T_2} \leq 1$

účinnosť je nulová ak $T_1 = T_2$ - tepelný stroj musí pozostávať z 2 časti na rôznych teplotách - rezervoára tepla a chladiča, pričom časť tepla odobraného rezervoáru musí vždy odovzdať chladiču (inak „nepracuje“)

tepelný stroj môže pracovať aj v „spätnom chode“ – konaním práce A (< 0) na systéme možno odoberať teplo Q_1 (< 0) z chladnejšieho telesa (T_1) a dodávať teplo Q_2 (> 0) teplejšiemu telesu (T_2) - chladnička

teplo odobrané z chladeného telesa $Q_1 \leq A\frac{T_1}{T_2 - T_1}$ klesá s jeho klesajúcou teplotou (T_1), pre $T_1 \to 0$ by bola potrebná nekonečne veľká práca na odobratie nenulového množstva tepla – žiadne teleso nemožno schladiť na $T = 0$!

$\boxed{S \to 0 \text{ pre } T \to 0}$ 3. zákon termodynamiky nemožno ochladiť teleso na $T = 0$

entropia ako miera neusporiadanosti systému klesá s klesajúcou teplotou (zmenšuje sa tepelný pohyb, ktorý „narušuje“ usporiadanosť, pri $T = 0$ tepelný pohyb „zamrzne“)

$S = k_B \ln N$ pre $T = 0$ je $S = 0 \Rightarrow \ln N = 0 \Rightarrow \underline{N = 1!}$ (absolútne usporiadanie)

teplote $T = 0$ odpovedá jediný mikrostav – stav s najnižšou energiou – základný stav systému

s nárastom energie (a teda aj teploty) voči základnému stavu prudko narastá počet dostupných stavov pre danú energiu systému $\frac{\partial \ln N(U)}{\partial U} = \frac{1}{k_B T} \xrightarrow[T \to 0]{} \infty$ (strmosť nárastu počtu dostupných stavov a teda aj entropie s rastom energie je obrovská)

$dS = \frac{đQ}{T} \sim \frac{1}{T}$ (vratné deje) - pri nižšej teplote spôsobí to isté $đQ$ oveľa väčšie dS !

(„porucha“ usporiadania je oveľa „viditeľnejšia“ v usporiadanom systéme než v neusporiadanom)

symetria zákonov termodynamiky

podľa 1. zákona termodynamiky možno pri konštantnej teplote premeniť ľubovoľné množstvo práce na teplo a naopak $đA = đQ$ T, U = konšt,

podľa 2. zákona termodynamiky platí „a naopak“ v 1. zákone termodynamiky s obmedzením!

(napr. energiu elektrického prúdu možno úplne premeniť na teplo, naopak to úplne neplatí)

2. zákon termodynamiky nie je univerzálnym fyzikálnym zákonom – platí len v izolovaných makroskopických systémoch - v nich je rovnovážny stav systému určený takými (makroskopickými) parametrami, aby entropia bola maximálna, a následkom ich zmeny neklesala

(tj. v prírode prebiehajú len také deje, pri ktorých entropia neklesá)

makroskopické zákony termodynamiky nezávisia na štruktúre systému, ich súvis s mikroskopickou (atómovou) štruktúrou fyzikálnych systémov je určený vzťahom $S = k_B \ln N(U)$, pričom funkcia $N(U)$ je určená zákonmi kvantovej mechaniky

kombináciou 1. a 2. zákona termodynamiky
pre vratné procesy

$$\overset{\text{đ}Q}{TdS} = dU + \overset{\text{đ}A}{PdV}$$

po zarátaní nevratných procesov
a možnosti výmeny častíc s okolím

$$TdS \geq dU + PdV - \sum_i \mu_i dN_i$$

intenzívne

stavové veličiny sú združené do konjugovaných párov P - V, T - S, μ – N *s rozmerom energie*

extenzívne

extenzívne veličiny - závisia od stavu a veľkosti systému, sú aditívne (hodnota pre celý systém je súčtom hodnôt pre jeho časti - podsystémy)

intenzívne veličiny – závisia len od stavu systému (nie od jeho veľkosti), v každej časti systému majú v rovnováhe rovnakú hodnotu

Termodynamické deje

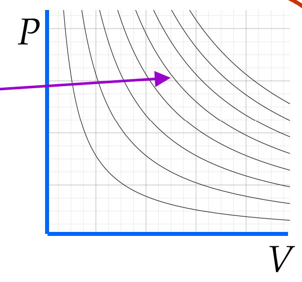
reálne termodynamické procesy - popisujeme (modelujeme) ich pomocou ideálnych procesov, pri ktorých jeden z parametrov (teplota, tlak, objem, a pod.) ostáva konštantný:

izotermický dej – dej pri ktorom sa nemení teplota systému

zo stavovej rovnice id. plynu: $PV = Nk_BT =$ konšt.

$P = \frac{Nk_BT}{V}$

izotermy



teplota systému (id. plynu) je určená jeho vnútornou energiou

$$\frac{3}{2}k_BT = \langle W_k \rangle \qquad U = N\langle W_k \rangle$$

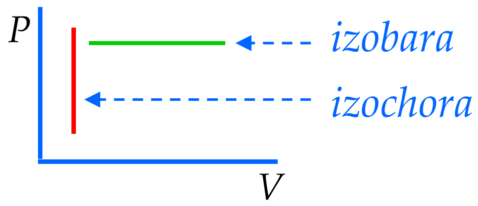
(pri zanedbaní vnútorných stupňov voľnosti molekúl plynu)

z 1. zákona TD: $dU = 0 \Rightarrow \underline{đQ = dA}$

typický izotermický dej nastáva v systéme, ktorý je v tepelnom kontakte s rezervoárom (= systémom, ktorého teplota sa nemení pri výmene konečného množstva tepla)
zmeny P,V systému sú dostatočne pomalé na to aby sa jeho teplota prostredníctvom výmeny tepla s rezervoárom neustále vyrovnávala teplote rezervoáru (tj. aby sa nemenila)

izobarický dej – dej, pri ktorom sa nemení tlak systému

izochorický dej – dej, pri ktorom sa nemení objem systému
(nekoná sa práca)



adiabatický dej – dej, pri ktorom nedochádza k výmene tepla s okolím zo stav. rovnice: $U = N\langle W_k\rangle \Rightarrow PV = \frac{2}{3}N\langle W_k\rangle = \frac{2}{3}U$

(ideálny plyn) $dU = \frac{3}{2}d(PV) = \frac{3}{2}(VdP + PdV)$

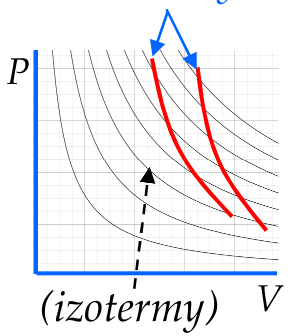
z 1. zákona TD: $đQ = 0 \Rightarrow dU = -dA = -PdV$

$$\overset{\gamma}{\frac{5}{3}}\frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0$$

riešenie:

$PV^{\gamma} = konst.$

adiabaty



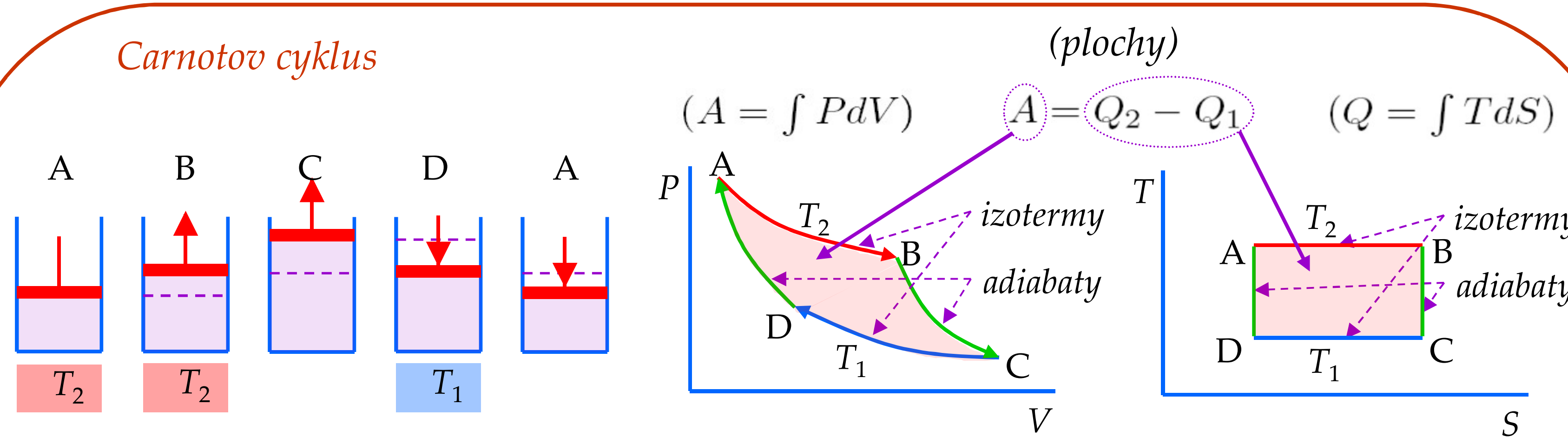
typický adiabatický dej nastáva v systéme, ktorý je tepelne izolovaný od okolia (výmena tepla nemôže nastať)

adiabatickým nazývame aj taký dej, ktorý prebieha tak rýchlo (vzhľadom na relaxačné doby makroskopických tepelných tokov), že výmena tepla s okolím „nestihne“ prebehnúť

$\gamma > 1$ - adiabaty sú strmšie než izotermy

(pre rôzne plyny môže byť $\gamma \neq \frac{5}{3}$, podľa počtu stupňov voľnosti molekúl)

Carnotov cyklus



všetky fázy cyklu sú vratné procesy, systém je v termodynamickej rovnováhe

A *(počiatočný stav): ideálny plyn v nádobe, zohriaty na teplotu* T_2*, má vyšší tlak než okolie*

AB: *izotermická expanzia – plyn koná prácu zväčšovaním objemu (vytláča piest) na úkor tepla* Q_2 *prijatého z rezervoáru* T_2 *(vnútorná energia a teda aj teplota sa nemenia), tlak pomaly klesá*

BC: *adiabatická expanzia – po odstránení rezervoáru je systém izolovaný (neprebieha výmena tepla s okolím), piest sa zotrvačnosťou posúva ďalej, objem sa zväčšuje, plyn koná prácu na úkor vnútornej energie, plyn sa ochladzuje (nie je prísun tepla), tlak prudko klesá*

CD: *izotermická kompresia – plyn v tepelnom kontakte s chladičom* T_1*, vonkajšie prostredie (stroj) tlačí na piest – koná na plyne prácu, ktorá je odvádzaná do chladiča ako teplo* Q_1 *(vnútorná energia a teplota sa nemenia)*

DA: *adiabatická kompresia – po odstránení rezervoáru je systém izolovaný, vonkajšie prostredie koná na plyne prácu, ktorá sa mení na nárast vnútornej energie, (teplota rastie)*

pre uzavretý cyklus platí $\oint dU = 0 \Rightarrow A = Q_2 - Q_1 \Rightarrow$ *výmenou tepla možno získať prácu*

Termodynamické potenciály

vnútorná energia - energia „neviditeľného“ mikroskopického pohybu molekúl v systéme (mimo pohybu systému ako celku)

- energia potrebná na vznik daného stavu systému v danom objeme

$$\boxed{U = TS - PV + \mu N}$$

entalpia - energia potrebná na vznik daného stavu systému a „vytvorenie“ objemu preňho

$$\boxed{H = U + PV} \quad \underline{= TS + \mu N}$$

napr. v chemických reakciách, pri ktorých vzniká plynný produkt, je potrebná dodatočná práca PV na vytvorenie priestoru – expanziu - tohto plynného produktu

pri exo- alebo endotermických reakciách (pri konštantnom tlaku) sa entalpia systému zmení o vnútornú energiu systému (odovzdaním alebo prijatím tepelnej energie) a prácu potrebnú na expanziu do okolia alebo získanú kompresiou od okolia

$$dU = đQ - PdV \leq \underline{TdS - PdV} \qquad \left(+\textstyle\sum_i \mu_i dN_i\right)$$

$$dH = dU + d(PV) \leq TdS - \cancel{PdV} + \cancel{PdV} + VdP = \underline{TdS + VdP} \qquad \left(+\textstyle\sum_i \mu_i dN_i\right)$$

pri izobarickom procese $(dP = 0)$ $\quad dH = đQ \leq TdS$ *maximálna získateľná tepelná energia (pri izobarickom procese)*

pri izobarickom izoentropickom $(dS = 0)$ *deji* $\quad dH \leq 0$ *podmienka rovnovážneho stavu!*

v mechanickom systéme možno získať prácu len na úkor vnútornej energie, $A = -\Delta U$

v termodynamickom systéme možno získať prácu na úkor vnútornej energie a prijatého tepla, $A = -\Delta U + \Delta Q$

Helmholtzova voľná energia $\boxed{F = U - TS} \; \underline{= -PV + \mu N}$

$$dF = dU - d(TS) \le TdS - PdV - SdT - TdS = \underline{-SdT - PdV} \quad (+\textstyle\sum_i \mu_i dN_i)$$

$$dF = dU - d(TS) \le \cancel{TdS} - PdV - SdT - \cancel{TdS} = \underline{-SdT - PdV}$$

pri izotermickom procese $(dT = 0)$ $\quad dF \le -PdV \qquad -dF \ge dA \; (= PdV)$

úbytok Helmholtzovej voľnej energie predstavuje maximálnu získateľnú prácu

(pri izotermickom procese) (pri nevratnom deji je získateľná práca vždy menšia)

pri izotermickom izochorickom $(dV = 0)$ *deji* $\quad dF \le 0$ *podmienka rovnovážneho stavu!*

Gibbsova voľná energia (voľná entalpia) $\boxed{G = U - TS + PV = F + PV} \; \underline{= \mu N}$

$$dG = dF + d(PV) \le -SdT - \cancel{PdV} + \cancel{PdV} + VdP = \underline{-SdT + VdP} \; (+\textstyle\sum_i \mu_i dN_i)$$

pri izotermickom izobarickom deji $(dT = 0 \,,\, dP = 0)$ $\quad dG \le 0$ *podmienka rovnovážneho stavu!*

	termodynamické potenciály pre ich prirodzené nezávislé parametre	závislé parametre
$dU \le T\,\underline{dS} - P\,\underline{dV}$	$U(S,V)$	$T(S,V),\ P(S,V)$
$dH \le T\,\underline{dS} + V\,\underline{dP}$	$H(S,P)$	$T(S,P),\ V(S,P)$
$dF \le -S\,\underline{dT} - P\,\underline{dV}$	$F(T,V)$	$S(T,V),\ P(T,V)$
$dG \le -S\,\underline{dT} + V\,\underline{dP}$	$G(T,P)$	$S(T,P),\ V(T,P)$

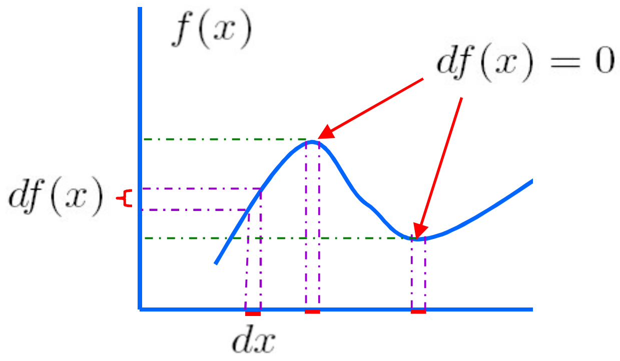
pri fyzikálnych a chemických dejoch (reakciách) môžeme nezávisle ovplyvňovať (regulovať) vždy len niektoré stavové veličiny (podľa typu procesu, napr. teplotu T a tlak P) – tzv. nezávislé parametre, hodnoty ku ním konjugovaných stavových veličín (napr. S a V) sú potom výsledkom daného procesu (spejúcemu k nastoleniu TD rovnováhy) – tzv. závislé parametre

veličiny U, H, F, G sú stavové veličiny rozmeru energie, každá z nich je termodynamickým potenciálom pre odpovedajúcu dvojicu nezávislých premenných (napr. G pre T,P)

príslušný TD potenciál pre daný dej predstavuje množstvo energie, ktoré systém počas daného deja uvoľní (vo forme práce alebo tepla), resp. ktoré musíme systému dodať aby daný dej prebehol

pre spontánne prebiehajúci dej, spejúci k nastoleniu TD rovnováhy (tj. nerovnovážny – nevratný dej) pri daných (nemeniacich sa, resp. „nekonečne pomaly“ sa meniacich) hodnotách nezávislých parametrov (teda napr. $dT = 0$, $dP = 0$), je TD potenciál klesajúcou funkciou (napr. $dG < 0$)
- systém hľadá stav s najnižšou energiou – TD potenciálom
po ustálení TD rovnováhy pri daných (napr. $dT = 0$, $dP = 0$) hodnotách nezávislých parametrov nadobúda príslušný TD potenciál (napr. G) minimálnu hodnotu ($dG = 0$)

Minimum funkcie



diferenciál funkcie (jednej alebo viacerých premenných) predstavuje zmenu funkčnej hodnoty (hodnoty funkcie) pri infinitezimálnej (nekonečne malej) zmene premennej (premenných)

ak funkcia v danom bode (pre danú hodnotu premennej) nadobúda extrém – minimum alebo maximum – jej hodnota sa v infinitezimálnom okolí tohto bodu nemení, tj.

$$\underline{df(x) = 0}$$

rozlíšiť, či podmienka $df(x) = 0$ *predstavuje minimum alebo maximum funkcie, možno z krivosti funkcie (tj. zo znamienka 2. derivácie) v danom bode, resp. posúdením znamienka* df *v jeho okolí*

(z fyzikálneho kontextu je zrejmé, že podmienka d(TD potenciál) = 0 určuje jeho minimum)

FYZIKÁLNE POLIA

Gravitačné pole

fyzikálne pole v širšom zmysle slova je ľubovoľná veličina f(x,y,z,t) definovaná v priestore a čase

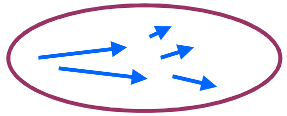
zobrazovanie fyzikálnych polí

fyzikálne polia sú:

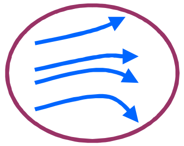
- *vektorové - definujú rozloženie (v priestore a čase) vektorovej veličiny (rýchlosť, sila ...)*
- *skalárne - definujú rozloženie skalárnej veličiny (teplota, hustota, ...)*

zobrazovanie vektorových polí:

- *šípkami - určujú smer vektora poľa v danom bode, dĺžka šípky určuje veľkosť vektora*

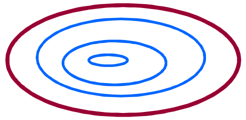


- *točiarami (siločiarami) - veľkosť vektora poľa je daná hustotou tokočiar v danom mieste, smer vektora je dotyčnicou k tokočiare v danom bode*



zobrazovanie skalárnych polí:

- *ekviskalárne plochy (3D), resp. krivky (2D) - množiny bodov s rovnakou hodnotou skalárnej veličiny*



fyzikálne pole v užšom zmysle slova je súborom veličín popisujúcich základné fyzikálne interakcie (gravitačné, elektromagnetické, jadrové), existencia takéhoto poľa je vyjadrením vzájomného silového pôsobenia fyzikálnych objektov na diaľku

vzájomné silové pôsobenie dvoch fyzikálnych objektov (napr. hmotných telies) na diaľku možno chápať ako pohyb jedného telesa v silovom poli druhého telesa (tj. poli, ktoré druhé teleso vytvára okolo seba) *gravitačné pole* – *silové pole, vytvárané každým hmotným objektom, má silové účinky na každý iný hmotný objekt nachádzajúci sa v ňom*

gravitačná sila vzájomného pôsobenia objektov o hmotnostiach M a m

$$\boxed{\vec{F} = -\kappa \frac{Mm}{r^2} \vec{r^o}}$$

Newtonov gravitačný zákon

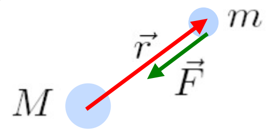
$$\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-1}$$

Newtonova gravitačná konštanta

$$F = \kappa \frac{Mm}{r^2}$$

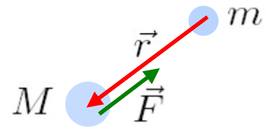
$\vec{r^o} = \frac{\vec{r}}{r}$ *jednotkový polohový vektor*

polohový vektor určuje polohu určitého hmotného objektu vzhľadom na hmotný objekt, ktorý je „zdrojom“ popisovanej gravitačnej sily
(poloha m vzhľadom na M a teda sila, ktorou M pôsobí na m)



znamienko $-$ *vyjadruje* $\vec{r} \uparrow\downarrow \vec{F}$ - *gravitačná sila je príťažlivá*

platí zákon akcie a reakcie (situácia „z pohľadu“ m je analogická)
- priťahovanie je vzájomné



výsledná gravitačná sila pôsobiaca na objekt nachádzajúci sa v gravitačných poliach viacerých objektov $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ – *superpozícia síl*

intenzita gravitačného poľa objektu o hmotnosti M

$$\boxed{\vec{E} = -\kappa \frac{M}{r^2} \vec{r^o}} \qquad \boxed{\vec{F} = m\vec{E}}$$

intenzita poľa, vytváraného hmotným objektom (M), je mierou „sily tohto poľa“ v danom mieste, tj. mierou gravitačnej sily, ktorá by v tomto mieste pôsobila na iný hmotný objekt (m)

intenzita poľa v danom mieste závisí len od hmotnosti objektu, ktorý toto pole vytvára !
(vektor intenzity smeruje k objektu, ktorý pole vytvára)

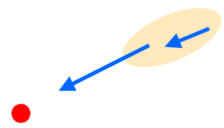
výsledná intenzita gravitačného poľa, vytváraného *viacerými* hmotnými objektmi m_i je $\vec{E}(\vec{r}) = -\kappa \sum_i \frac{m_i}{r_i^2} \vec{r_i^o}$ - *princíp superpozície polí* - intenzity jednotlivých polí sa (vektorovo) sčítavajú

teleso s *celkovou* hmotnosťou m, *rozloženou* s hustotou ρ v objeme V, vytvára gravitačné pole o intenzite (v mieste danom polohovým vektorom $\vec{r}$)

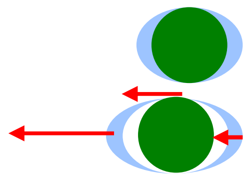
$$\vec{E}(\vec{r}) = -\kappa \int \frac{\vec{r^o}}{r^2} dm = -\kappa \int \frac{\vec{r}}{r^3} \rho dV$$

intenzita gravitačného poľa *klesá so vzdialenosťou* od zdroja tohto poľa, teleso nenulových rozmerov, vložené do gravitačného poľa (iného telesa), „pociťuje" *v rôznych častiach svojho objemu rôznu gravitačnú silu*

(na „privrátenej" strane voči zdroju poľa je sila väčšia než na odvrátenej)



slapové sily - rozdiel gravitačných síl medzi rôznymi miestami telesa v gravitačnom poli, spôsobujú *rozťahovanie* telesa v smere intenzity gravitačného poľa (príliv – odliv morí v gravitačnom poli Mesiaca)



potenciálna energia objektu o hmotnosti m v gravitačnom poli objektu o hmotnosti M = práca potrebná na premiestnenie tohto objektu z ∞ do $\vec{r}$

$$\boxed{W_p = -\int_\infty^r \vec{F} \cdot d\vec{r} = \kappa M m \int_\infty^r \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{r} = \kappa M m \int_\infty^r \frac{dr}{r^2} = -\kappa \frac{Mm}{r}}$$

gravitačné pole je *konzervatívne* a $W_p(\infty) = 0$ ($\frac{1}{r} \to 0$ pre $r \to \infty$) – potenciálna energia objektu závisí *len od jeho konečnej* polohy r, *nie od dráhy*, po ktorej sa objekt do tejto polohy dostal (môžeme teda zvoliť dráhu, na ktorej $\vec{r} \cdot d\vec{r} = r dr$)

potenciál gravitačného poľa telesa o hmotnosti M $\boxed{\varphi = \frac{W_p}{m} = -\kappa \frac{M}{r}}$

potenciálna energia hmotného objektu v gravitačnom poli iného hmotného objektu závisí od hmotností oboch objektov a ich vzájomnej vzdialenosti – je „vlastnosťou" daného objektu v danom poli
potenciál gravitačného poľa, vytváraného hmotným objektom (M), je mierou potenciálnej energie, ktorú by v tomto mieste mal iný hmotný objekt (m), potenciál poľa v danom mieste závisí len od hmotnosti objektu, ktorý toto pole vytvára – je „vlastnosťou" poľa

potenciál výsledného poľa vytvoreného sústavou hmotných objektov $\varphi = -\kappa \sum_i \frac{m_i}{r_i}$

teleso s celkovou hmotnosťou m, rozloženou s hustotou ρ v objeme V, vytvára gravitačné pole s potenciálom $\varphi = -\kappa \int \frac{dm}{r} = -\kappa \int \frac{\rho}{r} dV$

pôsobenie gravitačného poľa na hmotný objekt

$$W_p = m\varphi$$
$$\vec{F} = m\vec{E}$$

gravitačné pole

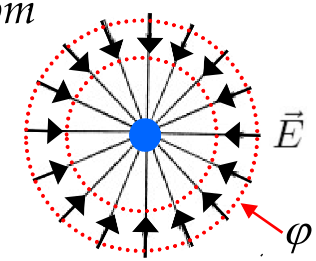
hmotný objekt v gravitačnom poli

$$\boxed{W_p(\vec{r}) = -\int_\infty^r \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}} \qquad \boxed{\varphi(\vec{r}) = -\int_\infty^r \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}}$$

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = -\text{grad } W_p(\vec{r})} \qquad \boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } \varphi(\vec{r})}$$

$$\vec{F} = -\text{grad}W_p = -\text{grad}(-\kappa \frac{Mm}{r}) = \kappa Mm \text{ grad}\frac{1}{r} = -\kappa \frac{Mm}{r^2}\vec{r^o}$$
$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi = -\text{grad}(-\kappa \frac{M}{r}) = \kappa M \text{ grad}\frac{1}{r} = -\kappa \frac{M}{r^2}\vec{r^o}$$

gravitačné pole je úplne charakterizované vektorom intenzity alebo potenciálom



intenzitu zobrazujeme siločiarami (určujú smer sily) smerujúcimi do zdroja poľa – tzv. žriedla (v prípade sféricky symetrického žriedla majú siločiary tvar zbiehajúcich sa priamok), smerom ku žriedlu sa siločiary zhusťujú – pole „silnie"

potenciál zobrazujeme uzavretými ekvipotenciálnymi plochami (3D), resp. krivkami (2D), obklopujúcimi žriedlo poľa (v prípade sféricky symetrického žriedla majú ekvipotenciálne plochy/krivky tvar koncentrických guľových plôch/kružníc so stredom v žriedle)

siločiary poľa sú v každom bode kolmé na ekvipotenciálne plochy/krivky - siločiary ukazujú smer najstrmšieho poklesu potenciálu, sila pôsobí na hmotný objekt v smere najstrmšieho poklesu jeho potenciálnej energie v poli

$$\left.\begin{array}{l}\vec{F} = m\vec{E} \\ \vec{F} = m\vec{a}(= m\vec{g})_{Zem}\end{array}\right\} \qquad \vec{E} = \vec{a}(= \vec{g})_{Zem} \qquad g = \frac{\kappa M_{Zem}}{(R_{Zem}+h)^2}$$

gravitačné zrýchlenie

M_{Zem} - hmotnosť Zeme
R_{Zem} - polomer Zeme
h - výška nad zemským povrchom

voľný pád telesa

potenciálna energia je vždy určená až na konštantu ($W_p(\infty)$), ktorú možno zvoliť ľubovoľne, napr. tak, aby na povrchu Zeme $h = 0$ bola $W_p = 0$, potom $W_p(h) = mgh$ - odpovedá práci (konanej proti gravitačnej sile $F = mg$) potrebnej na vynesenie hmotnosti m do výšky h

$$W_k = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \frac{dW_k}{dt} = mv\frac{dv}{dt} = Fv = -mg\frac{dh}{dt} = -\frac{dW_p}{dt}$$

pri voľnom páde koná prácu gravitačné pole na úkor potenciálnej energie padajúceho objektu, a premieňa ju na jeho kinetickú energiu - mechanická energia objektu sa zachováva

Elektrostatické pole vo vákuu

elektrický náboj Q , q $[C = As]$

elektrický náboj je mierou schopnosti látky zúčastňovať sa elektromagnetických interakcií

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} C$$

elementárny elektrický náboj

elektrón ($q_e = -e$) *považujeme za bodový náboj, protón* ($q_p = e$) *má priestorové rozloženie náboja*

elektrostatická sila vzájomného pôsobenia nábojov Q, q

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\vec{r^o}}$$

Coulombov zákon

$$\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} F m^{-1}$$

dielektrická konštanta (permitivita vákua)

$\vec{F}$ { *príťažlivá, ak* $Q > 0$, $q < 0$ *alebo naopak* ($Qq < 0$)
odpudivá, ak $Q, q > 0$ *alebo* $Q, q < 0$ ($Qq > 0$)

elektrón a protón sa elektrostaticky aj gravitačne príťahujú (gravitačná sila je vždy príťažlivá)

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\kappa}\frac{e^2}{m_p m_e} \approx 10^{39} \quad !!!$$

$$(m_e \approx 10^{-30} kg,\ m_p \approx 10^{-27} kg)$$

výsledná elektrostatická sila pôsobiaca na náboj od sústavy nábojov $\vec{F} = \sum_i \vec{F_i}$

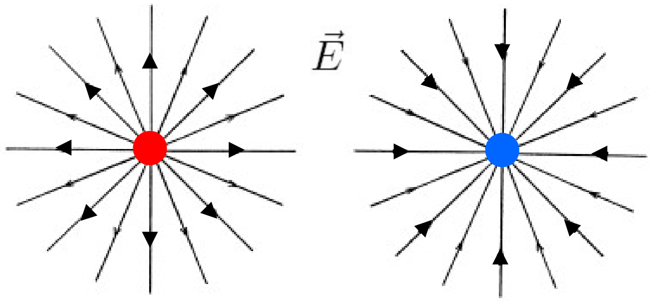
elektrostatické pole – v čase nemenné silové pole, vytvárané elektrickými nábojmi, má silové účinky na každý iný elektrický náboj nachádzajúci sa v ňom

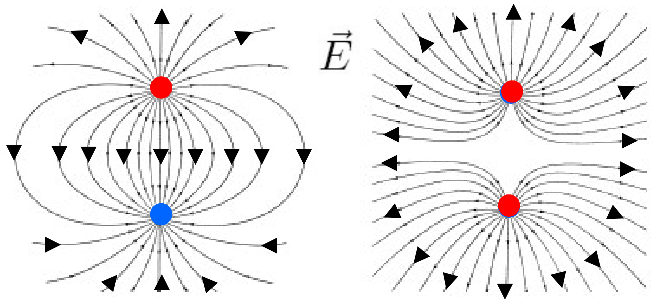
intenzita elektrostatického poľa náboja Q

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{r^o}} \quad [Vm^{-1} = kgmA^{-1}s^{-3}]$$

$\boxed{\vec{F} = q\vec{E}}$ *(podobne ako* $\vec{F} = m\vec{E}$ *pre gravitačné pole)* *pre sústavu bodových nábojov (princíp superpozície polí)* $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{Q_i}{r_i^2}\vec{r_i^o}$

pre spojité rozloženie náboja v objeme s hustotou ρ $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\vec{r}}{r^3}dq = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\vec{r}}{r^3}\rho dV$





potenciálna energia náboja q v elektrostatickom poli náboja Q

= *práca potrebná na premiestnenie tohto telesa z ∞ do $\vec{r}$*

$$W_p = -\int_\infty^r \vec{F}\cdot d\vec{r} = -q\int_\infty^r \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\int_\infty^r \frac{\vec{r}}{r^3}\cdot d\vec{r} = -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\int_\infty^r \frac{dr}{r^2} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

potenciál elektrostatického poľa náboja Q

$$\varphi = \frac{W_p}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

$[V = JC^{-1} = kgm^2s^{-3}A^{-1}]$

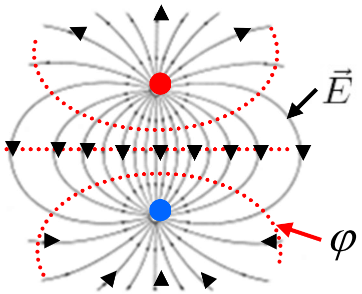
$$W_p = q\varphi$$

(podobne ako $W_p = m\varphi$ pre gravitačné pole)

$1eV = 1{,}602\cdot 10^{-19}J$

elektrónvolt

(často používaná jednotka energie)



+q,-q

pre *sústavu bodových* *nábojov* $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{r_i}$

pre *spojité* *rozloženie náboja v* *objeme* *s hustotou* ρ $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho}{r} dV$

pre *spojité* *rozloženie náboja na* *ploche* *s hustotou* σ $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\sigma}{r} dS$

pre *spojité* *rozloženie náboja na* *čiare* *s hustotou* τ $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\tau}{r} dl$

pôsobenie elektrostatického poľa na náboj

$$W_p = q\varphi$$

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

elektrostatické pole

náboj v elektrostatickom poli

$$\boxed{W_p(\vec{r}) = -\int_\infty^r \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}} \qquad \boxed{\varphi(\vec{r}) = -\int_\infty^r \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}}$$

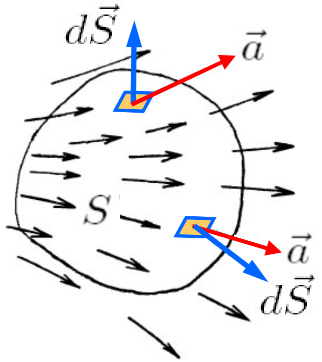
$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = -\mathrm{grad}\ W_p(\vec{r})} \qquad \boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\mathrm{grad}\ \varphi(\vec{r})}$$

elektrické napätie $\boxed{U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r}}$ $[V]$

elektrické napätie je rozdiel potenciálov

$$\varphi_{1,2} = -\int_\infty^{1,2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \qquad \int_\infty^1 - \int_\infty^2 = \int_2^\infty + \int_\infty^1 = \int_2^1$$

tok vektora plochou



tok vekora $\vec{a}$ infinitezimálnou plôškou dS je $\vec{a} \cdot d\vec{S} = a \cdot dS \cdot \cos\vartheta$ (vektor $d\vec{S}$ je kolmý na plôšku dS - určuje veľkosť aj orientáciu plôšky)

tok vektora plochou zohľadňuje orientáciu vektora voči ploche

plošný integrál $\int_S dS = S$ je súčtom nekonečného počtu infinitezimálnych plôšok dS, z ktorých sa skladá celková plocha S

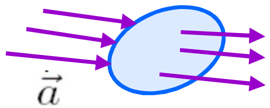
plošný integrál $\int_S \vec{a} \cdot d\vec{S}$ je súčtom nekonečného počtu tokov vektora $\vec{a}$ infinitezimálnymi plôškami dS a udáva tok vektora $\vec{a}$ celou plochou S

výtok vektora

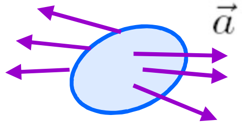
tok vektora uzavretou plochou (napr. povrch guľe) nazývame tiež výtokom vektora z objemu uzavretého plochou S (operátor integrovania cez uzavretú plochu označujeme $\oint_S$)

ak cez uzavretú plochu S vytečie práve to, čo cez ňu vtečie, potom

$$\oint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = 0$$



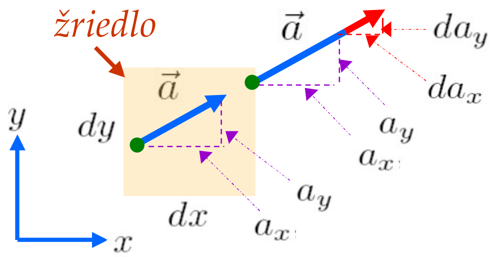
ak výtok $\oint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} \neq 0$, vnútri objemu uzavretého plochou S sa nachádza žriedlo vektora $\vec{a}$



$\oint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} > 0$ výtok je kladný, žriedlo produkuje vektor $\vec{a}$

$\oint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} < 0$ výtok je záporný („vtok“), žriedlo (záporné) pohlcuje vektor $\vec{a}$

nekonečným zmršťovaním uzavretej plochy S zmrštíme ňou uzavretý objem V „do bodu“ (tj. do infinitezimálneho objemu dV), $\oint_S \vec{a} \cdot d\vec{S}$ pre $S \to 0$ je potom výtokom vektora $\vec{a}$ „z bodu“ (z elementu dV) - divergenciou vektora



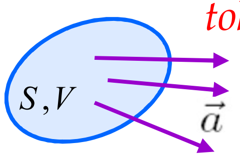
pokiaľ sa v objemovom elemente $dV = dxdydz$ nachádza žriedlo vektora $\vec{a}$, potom sa vektor $\vec{a}$ (jeho zložky a_x, a_y, a_z) v tomto elemente musí meniť
zložka a_x sa na úseku dx zmení o da_x, atď.
tj. niektoré z derivácií $\frac{\partial a_x}{\partial x}, \frac{\partial a_y}{\partial y}, \frac{\partial a_z}{\partial z}$ musia byť nenulové

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right) = \nabla \cdot \vec{a}$$

divergencia vektora je skalárny súčin nabla operátora s daným vektorom – výsledkom je skalár
(naproti tomu $\operatorname{grad} a = \nabla a = \frac{\partial a}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial a}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial a}{\partial z}\vec{k}$ *je vektor)*

celkový objem V uzavretý plochou S je daný nekonečným súčtom infinitezimálnych objemových elementov dV, teda $V = \int_V dV = \int\int\int dxdydz$ *- objemový integrál (resp. trojný integrál)*

celkový výtok vektora $\vec{a}$ z objemu V je súčtom (integrálom) výtokov z infinitezimálnych objemov dV (infinitezimálne výtoky môžu byť kladné i záporné – môžu sa navzájom kompenzovať)



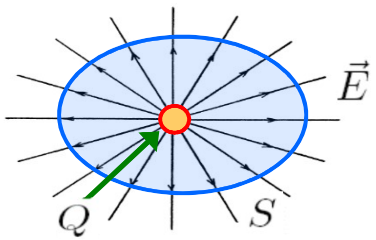
tok vektora uzavretou plochou S = výtok vektora z objemu V uzavretého plochou S

$$\boxed{\oint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{a} \cdot dV}$$ *Gaussova veta*

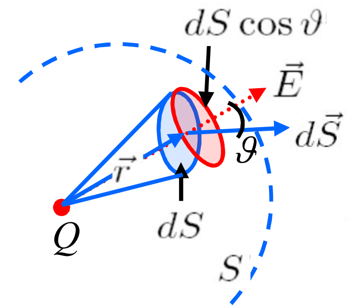
$$\boxed{\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}$$ *Laplaceov operátor (laplacián)*

$$\operatorname{div} \overbrace{\operatorname{grad} a}^{\text{vektor}} = \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} = \nabla \cdot \nabla a = \nabla^2 a = \Delta a$$ *- skalár*

vektor intenzity elektrostatického poľa vyteká z plochy uzatvárajúcej v sebe náboj



priestorový uhol



$$d\Omega = \frac{dS\cos\vartheta}{r^2}$$

$$\int d\Omega = \int \frac{dS\cos\vartheta}{r^2} = 4\pi$$

napr. plocha gule:

$$S = \int dS = \int r^2 d\Omega = r^2 \int d\Omega = 4\pi r^2$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\vec{r}}{r^3}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int \overbrace{\frac{dS\cos\vartheta}{r^2}}^{d\Omega} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$$

Gaussov zákon (integrálny tvar)

elektrostatické pole je žriedlové, jeho žriedlami sú elektrické náboje

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_V \operatorname{div}\,\vec{E}\cdot dV = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

pre náboj Q spojite rozložený v objeme V s hustotou ρ: $Q = \int_V \rho dV$

$$\int_V \operatorname{div}\,\vec{E}\cdot dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV$$

$$\boxed{\operatorname{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Gaussov zákon (diferenciálny tvar)

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{div}\,\vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}\\ E &= -\operatorname{grad}\,\varphi\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\operatorname{div}\,\operatorname{grad}\,\varphi = \Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Poissonova rovnica

ak $\rho = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla^2\varphi = 0}$

Laplaceova rovnica

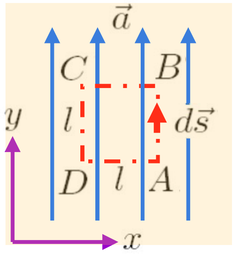
intenzita a potenciál poľa sú veličiny rovnocenne popisujúce elektrostatické pole, Poissonova rovnica a Gaussov zákon sú teda ekvivalentné

cirkulácia vektora

dráhový integrál $\int_A^B \vec{a}\cdot d\vec{s}$ *zohľadňuje orientáciu vektora* $\vec{a}$ *voči dráhe,* $\vec{a}\cdot d\vec{s} = a ds\cos\vartheta$

dráhový integrál vektora $\vec{a}$ *po uzavretej dráhe (označenie* $\oint_L$ *) nazývame* *cirkuláciou vektora*

napr. *homogénne* *pole* $\vec{a}$



$$\oint_L ds = \left(\int_A^B + \int_B^C + \int_C^D + \int_D^A\right) ds = L(=4l)$$

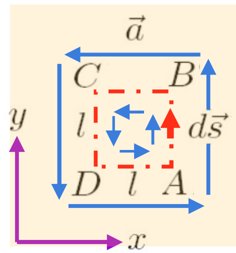
$$\int_A^B \vec{a}\cdot d\vec{s} = \int_A^B a ds = al \qquad (\vec{a} \uparrow\uparrow d\vec{s}) \qquad \int_B^C \vec{a}\cdot d\vec{s} = 0$$

$$\int_C^D \vec{a}\cdot d\vec{s} = -\int_C^D a ds = -al \qquad (\vec{a} \uparrow\downarrow d\vec{s}) \qquad \int_D^A \vec{a}\cdot d\vec{s} = 0$$

$$\left.\begin{matrix} \int_B^C \vec{a}\cdot d\vec{s} = 0 \\ \int_D^A \vec{a}\cdot d\vec{s} = 0 \end{matrix}\right\} (\vec{a} \perp d\vec{s})$$

$\oint_L \vec{a}\cdot d\vec{s} = al + 0 - al + 0 = \underline{0}$ *- cirkulácia vektora homogénneho poľa je* *nulová*

napr. *vírové* *pole* $\vec{a}$



$$\int_A^B \vec{a}\cdot d\vec{s} = \int_A^B a ds = l = \int_B^C \vec{a}\cdot d\vec{s} = \int_C^D \vec{a}\cdot d\vec{s} = \int_D^A \vec{a}\cdot d\vec{s}$$

$\oint_L \vec{a}\cdot d\vec{s} = \underline{4al}$ *- cirkulácia vírového poľa je* *nenulová*

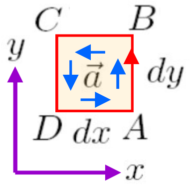
ak $\oint_L \vec{a}\cdot d\vec{s} \neq 0$*, vnútri plochy obopnutej uzavretou integračnou dráhou L sa nachádza* *vír vektora* $\vec{a}$

$\oint_L \vec{a}\cdot d\vec{s} > 0$ *- vír sa „točí“* *v smere* *integrovania*

$\oint_L \vec{a}\cdot d\vec{s} < 0$ *- vír sa „točí“* *proti smeru* *integrovania*

nekonečným zmršťovaním uzavretej krivky L zmršťujeme ňou uzavretú plochu S „do bodu“, (tj. do infinitezimálnej plôšky dS), $\oint_L \vec{a}\cdot d\vec{s}$ *pre* $L \to 0$ *je potom* *cirkuláciou vektora* $\vec{a}$ *„v bode“* *-* *rotáciou vektora* *pokiaľ sa v plošnom elemente dS nachádza vír vektora $\vec{a}$, potom sa jeho zložky musia v tomto elemente meniť*

vír v rovine xy:



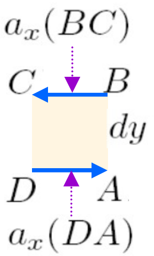
na úseku dx sa musí meniť zložka a_y o parciálny diferenciál $\frac{\partial a_y}{\partial x}dx$

$$a_y(AB) = a_y(CD) + \frac{\partial a_y}{\partial x}dx$$

na úseku dy sa musí meniť zložka a_x o parciálny diferenciál $\frac{\partial a_x}{\partial y}dy$

$$a_x(BC) = a_x(DA) + \frac{\partial a_x}{\partial y}dy$$

derivácie $\frac{\partial a_y}{\partial x}$, $\frac{\partial a_x}{\partial y}$ *teda musia byť nenulové*

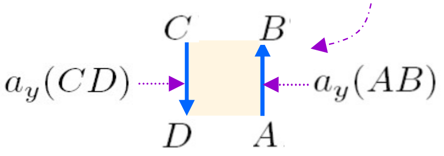


$$(\vec{a}\cdot d\vec{s})_{DA} + (\vec{a}\cdot d\vec{s})_{BC} = a_x(DA)dx + a_x(BC)(-dx) = (a_x(DA) - a_x(BC))dx = -\frac{\partial a_x}{\partial y}dxdy$$

$ds = dx$ $\qquad ds = -dx$

$$(\vec{a}\cdot d\vec{s})_{AB} + (\vec{a}\cdot d\vec{s})_{CD} = a_y(AB)dy + a_y(CD)(-dy) = (a_y(AB) - a_y(CD))dy = \frac{\partial a_y}{\partial x}dxdy$$

$ds = dy$ $\qquad ds = -dy$



$$(\vec{a}\cdot d\vec{s})_{ABCD} = \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)dxdy$$

- rotácia vektora $\vec{a}$ na infinitezimálnej plôške dS

vír v rovine yz: $\qquad (\vec{a}\cdot d\vec{s})_{ABCD} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)dydz$

vír v rovine zx: $\qquad (\vec{a}\cdot d\vec{s})_{ABCD} = \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)dzdx$

rotáciu vektora na všeobecne orientovanej plôške $d\vec{S}$ možno rozložiť na 3 zložky - jej priemety do rovín xy, yz a zx, čo odpovedá 3 navzájom kolmým zložkám vektora rotácie vektora (*vektor (infinitezimálnej) plôšky dxdy (kolmý na plôšku) má smer osi z, je teda z-ovou zložkou vektora plôšky* $d\vec{S}$*, atď.)*

$$\mathrm{rot}\vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \times \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right) = \nabla \times \vec{a}$$

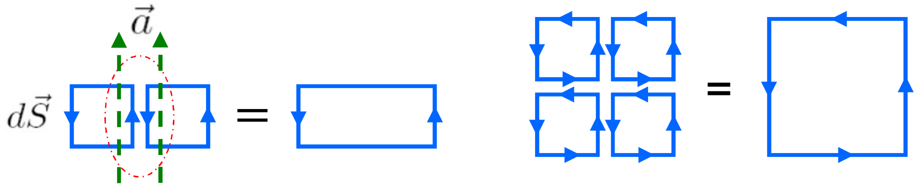
rotácia vektora je vektorový súčin nabla operátora a daným vektorom – výsledkom je vektor

celková plocha S obopnutá uzavretou krivkou L je nekonečným súčtom infinitezimálnych plôšok $d\vec{S}$ *(všeobecnej orientácie)*

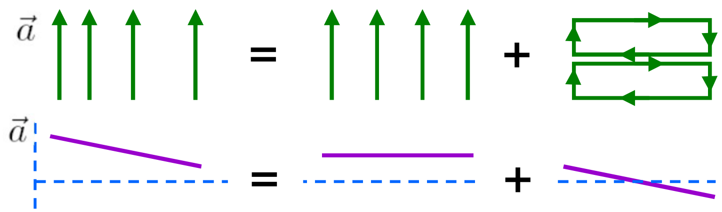
celková cirkulácia vektora $\vec{a}$ *po krivke L je nekonečným súčtom rotácií vektora* $\vec{a}$ *na plôškach* $d\vec{S}$*, tj. plošným integrálom vektora rotácie vektora* $\vec{a}$ *cez všetky plôšky* $d\vec{S}$

$$\boxed{\oint_L \vec{a}\cdot d\vec{s} = \int_S \mathrm{rot}\vec{a}\cdot d\vec{S}}$$ *Stokesova veta*

príspevky ku cirkulácii od priľahlých strán susediacich plôšok sa kompenzujú, ak je na nich vektor poľa rovnaký



pole môže byť vírovým, aj keď v ňom víry nie sú bezprostredne viditeľné

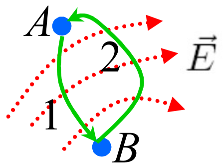


práca v elektrostatickom poli - premiestňujeme náboj q z miesta A do miesta B v poli $\vec{E}$:

$$A = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} = q\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} = W_p(A) - W_p(B)$$

práca je kladná ak ju koná pole - premiestňuje náboj do miesta s nižšou potenciálnou energiou
práca je záporná, ak ju konáme proti sile poľa - zvyšujeme potenciálnu energiu náboja v poli

elektrostatické pole je konzervatívne – práca nezávisí od tvaru dráhy, len od koncových bodov, premiestnenie náboja q z miesta a do miesta b po dráhe 1 a naspäť po dráhe 2:



$$A = q\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} + q\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{s} = q\oint \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

$$\{W_p(A) - W_p(B)\} + \{W_p(B) - W_p(A)\} = 0$$

$$\boxed{\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0}$$

$$\boxed{\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_S \mathrm{rot}\ \vec{E}\cdot d\vec{S}} \qquad \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \int_S \mathrm{rot}\ \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \boxed{\mathrm{rot}\ \vec{E} = 0}$$

(Stokesova veta)

elektrostatické pole nie je vírové, je žriedlové ($\mathrm{div}\ \vec{E} \neq 0$)
- jeho siločiary začínajú a končia v nábojoch (alebo v ∞), nikdy sa nepretínajú

podmienkou konzervatívnosti poľa je $\mathrm{rot}\vec{F} = 0$ *pre silové účinky tohto poľa – len pre takéto pole má zmysel definovať potenciálnu energiu* $W_p(\vec{r}) = -\int_\infty^r \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$
elektrostatické pole túto podmienku spĺňa, $\mathrm{rot}\vec{F} = q\mathrm{rot}\vec{E} = 0$

základné rovnice elektrostatiky vo vákuu

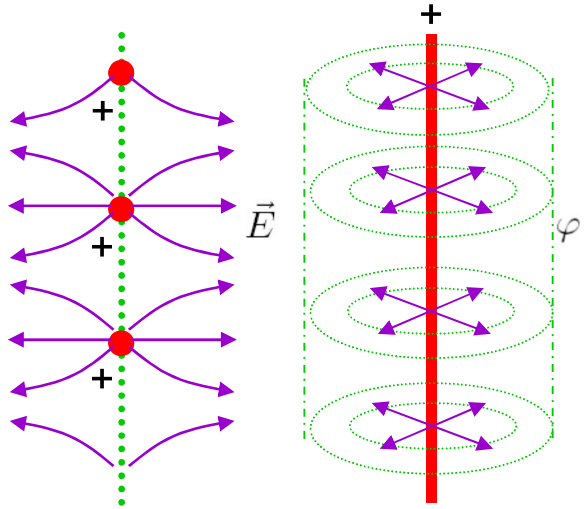
základné rovnice elektrostatiky vo vákuu	*diferenciálny tvar*	$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$	*integrálny tvar*	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$
elektrostatická sila		$\vec{F} = q\vec{E}$		

kvalitatívny odhad tvaru elektrostatického poľa v niektorých prípadoch

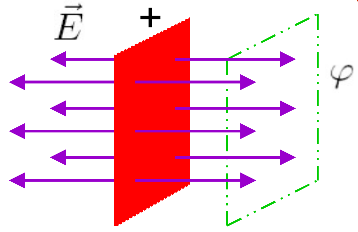
- *dlhá nabitá tyč*

vzájomným približovaním bodových nábojov na priamke postupne zaniká zložka intenzity pozdĺž priamky - siločiary sa „odtláčajú“, a zväčšuje sa radiálna zložka intenzity (kolmá na priamku) – radiálne siločiary sa „zahusťujú“

výsledkom je cylindricky symetrické pole, ekvipotenciálne plochy sú valcové plochy s osou na nabitej priamke

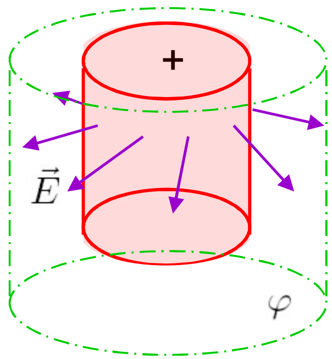


• *veľká nabitá rovinná plocha*



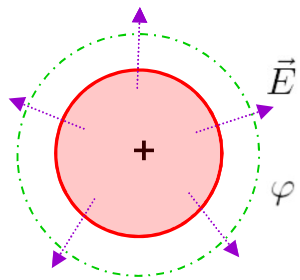
vzájomným približovaním dlhých nabitých tyčí postupne zaniká tangenciálna zložka (tj. zložka pozdĺž roviny) intenzity a zväčšuje sa normálová (kolmá na rovinu) zložka intenzity - výsledkom je homogénne normálové pole v blízkosti plochy (v celom priestore pre nekonečnú plochu), ekvipotenciálne plochy sú roviny paralelné s nabitou plochou

• *dlhá nabitá valcová plocha*



„zrolovaním" nabitej rovinnej platne do tvaru valca sa siločiary vo vnútri valca navzájom zrušia (zvýši sa „výtok poľa" na vonkajšej strane valcovej plochy) – výsledkom je cylindricky symetrické pole, ekvipotenciálne plochy sú valcové plochy s osou na osi valca

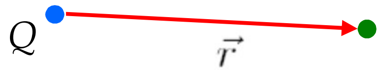
• *nabitá guľová plocha*



„zakrivením" nabitej rovinnej platne do tvaru gule sa siločiary vo vnútri valca navzájom zrušia (zvýši sa „výtok poľa" na vonkajšej strane guľovej plochy) – výsledkom je sfericky symetrické pole, ekvipotenciálne plochy sú koncentrické guľové plochy

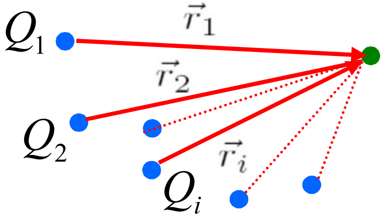
výpočet intenzity elektrostatického poľa

- *bodový náboj*



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{r^o}$$

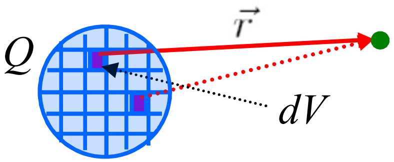
- *sústava bodových nábojov*



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r_1^2}\vec{r_1^o} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{r_2^2}\vec{r_2^o} + \ldots \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i}{r_i^2}\vec{r_i^o} + \ldots = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{Q_i}{r_i^2}\vec{r_i^o}$$

superpozícia polí jednotlivých nábojov (sčítanie)

- *spojité rozloženie náboja*

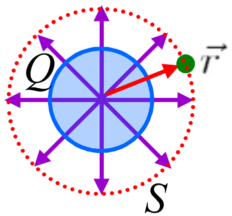


$$Q = \int \rho dV \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\vec{r^o}}{r^2}\rho dV$$

superpozícia polí elementárnych nábojov (integrovanie)

- *s použitím Gaussovho zákona*

Gaussovu vetu môžeme použiť vtedy, ak nám symetria úlohy (tj. rozloženia nábojov) umožňuje zostrojiť takú vhodnú plochu, na ktorej je veľkosť intenzity poľa konštantná



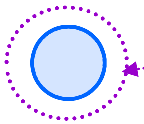
$$\oint_S \vec{E}(r)\cdot d\vec{S} = E(r)\oint_S dS = E(r)S = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{S\varepsilon_0}$$

použitie tejto metódy teda predpokladá, že túto symetriu poľa poznáme
(na základe fyzikálnej úvahy)

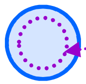
(ak takúto plochu zostrojiť nevieme, musíme pole počítať podľa predchádzajúcich prípadov)

elektrostatické pole gule o polomere R rovnomerne nabitej nábojom Q

objem gule $\frac{4}{3}\pi R^3$*, objemová hustota náboja* $\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$

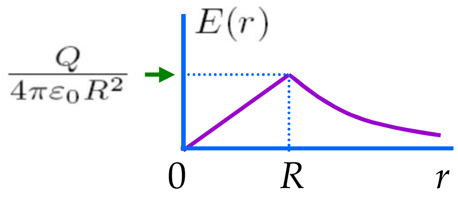


$r > R: \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \sim \frac{1}{r^2}$ *- ako bodový náboj*



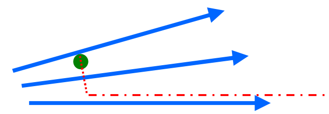
$r < R: \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E = \frac{Q'}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}\frac{r^3}{R^3}$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \sim r$$



$\varphi(r) = -\int_\infty^r \vec{E}(r)\cdot d\vec{r}$

integračnú dráhu z ∞ *do r vedieme tak aby* $\vec{E}$ *a* $d\vec{r}$ *boli buď paralelné (* $\vec{E}\cdot d\vec{r} = Edr$ *) alebo navzájom kolmé (* $\vec{E}\cdot d\vec{r} = 0$ *)*



$r > R:$ *ako pre bodový náboj* $E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

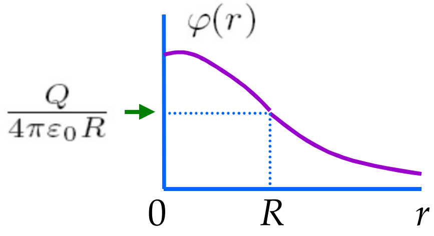
$$\varphi(r) = -\int_\infty^r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_\infty^r \frac{dr}{r^2} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_\infty^r = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}+\frac{1}{\infty}\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \sim \frac{1}{r}$$

$$r < R: \quad \varphi(r) = -\int_\infty^r \vec{E}(r)\cdot d\vec{r} = -\int_\infty^R \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr - \int_R^r \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}dr =$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int_\infty^R \frac{dr}{r^2} - \frac{1}{R}\int_R^r r\,dr\right) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\left[-\frac{1}{r}\right]_\infty^R + \frac{1}{R^3}\left[\frac{r^2}{2}\right]_R^r\right) =$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\left[-\frac{1}{R}+0\right] + \frac{1}{R^3}\left[\frac{r^2}{2}-\frac{R^2}{2}\right]\right) =$$

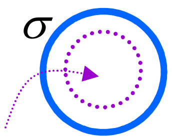
$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left[R^2 + \frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right] = \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left[R^2 - \frac{r^2}{3}\right]$$

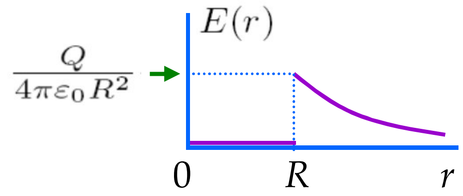


elektrostatické pole guľovej plochy o polomere R rovnomerne nabitej nábojom Q

plocha gule $4\pi R^2$; *plošná hustota náboja* $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$

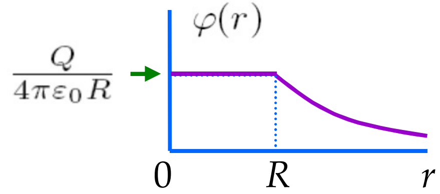
$r > R:$ *ako bodový náboj – to isté ako guľa*





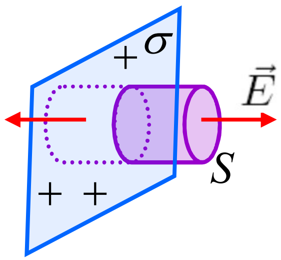
$r < R: \quad \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E = 0 \;\Rightarrow\; E = 0$

žiaden náboj vnútri gule



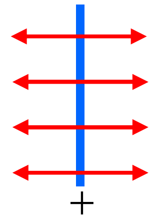
$$\varphi(r) = \overbrace{\boxed{-\int_\infty^R \vec{E}(r)\cdot d\vec{r}}}^{\text{z predchádzajúcej úlohy}} - \underbrace{\boxed{\int_R^r \vec{E}(r)\cdot d\vec{r}}}_{E=0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

nekonečná nabitá rovina s plošnou nábojovou hustotou σ



$\vec{E}$ *aj os valca sú kolmé na rovinu* $\Rightarrow$ *bočné steny valca* $\parallel \vec{E}$
$\Rightarrow$ *žiaden výtok z bočných stien valca*

E je homogénne, nezávisí od vzdialenosti od roviny (siločiary musia byť pre nekonečnú rovinu navzájom rovnobežné)

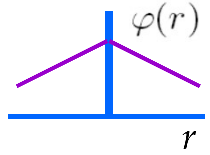


$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2SE = \frac{S\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ - *nezávisí od r*

dve základne valca

lineárny pokles

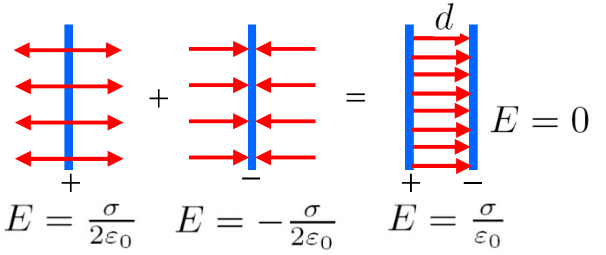
$$\varphi(r) = -\int_\infty^r \vec{E}(r)\cdot d\vec{r} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_\infty^r dr = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[r-\infty] = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}r + \infty \;\; \textbf{!!!}$$

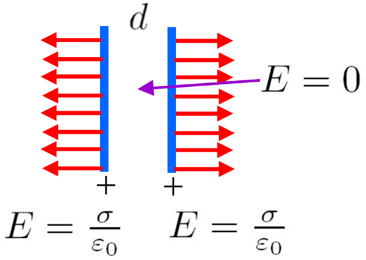


nekonečný člen v potenciáli nás nemusí trápiť, potenciál je vždy určený až na konštantu (hodnota potenciálu v nekonečne), ktorú môžeme zvoliť ľubovoľne (krivku $\varphi(r)$ *môžeme ľubovoľne „dvíhať“ alebo „spúšťať“), dôležitý nie je potenciál ale rozdiel potenciálov*

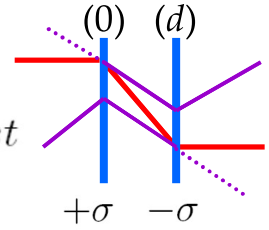
dve nekonečné paralelné nabité roviny

superpozícia polí od oboch rovín - zdvojnásobenie poľa medzi rovinami a vykompenzovanie polí (vynulovanie) mimo priestoru medzi rovinami v prípade opačne nabitých rovín, resp. naopak v prípade rovnako nabitých rovín





$$\varphi_+(0) = 0 + konst$$
$$\varphi_+(d) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} d + konst$$



$$\varphi_-(d) = 0 - konst$$
$$\varphi_-(0) = -\frac{(-\sigma)}{2\varepsilon_0} d - konst$$

$$\varphi(0) = \varphi_+(0) + \varphi_-(0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} d \qquad \varphi(d) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} d$$

mimo platní ϕ = konst
(ϕ_+ a ϕ_- sa navzájom kompenzujú)

$U = \varphi(0) - \varphi(d) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d = Ed$ - *napätie medzi platňami*

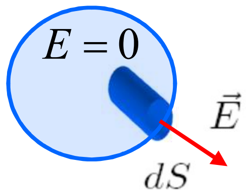
Elektrostatické pole v prítomnosti vodičov

vodič – látka s vysokou koncentráciou voľných nosičov náboja (s veľkou pohyblivosťou), po akejkoľvek zmene nábojového rozloženia sa rýchlo ustáli nový rovnovážny stav s minimálnou energiou

odpudivé sily medzi voľnými nábojmi rovnakej polarity spôsobujú, že náboje nemôžu uniknúť z telesa, rozmiestnia sa „čo najďalej od seba“ - na povrchu vodiča, v objeme $\rho = 0$ *!*

v objeme vodiča $\quad \mathrm{div}\ E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \qquad \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = 0 \qquad \underline{E = 0}$

na povrchu vodiča je $\vec{E}$ *kolmé na povrch (inak by sa náboje pohybovali po povrchu)*



$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E_n dS$ *vonkajšia základňa valca tesne nad povrchom vodiča*

zložka poľa kolmá na povrch (tzv. normálová zložka) $\qquad$ *(pre vnútornú E = 0)*

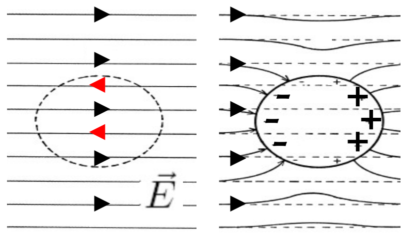
bočné steny valca $\vec{E} \perp d\vec{S}$ *(nulový príspevok do integrálu)*

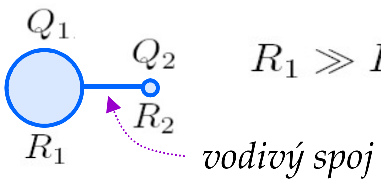
$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma dS}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_n dS = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dS \Rightarrow \underline{E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

náboj na povrchovej plôške dS

ϕ *je konštantné v celom objeme, povrch vodiča je ekvipotenciálna plocha*

ak vložíme nenabitý vodič do elektrostatického poľa, na jeho povrchu sa vytvoria (indukujú) ± náboje (súčet + a – nábojov je nulový) tak aby v objeme $E = 0$ *– elektrostatická indukcia*





$R_1 \gg R_2$

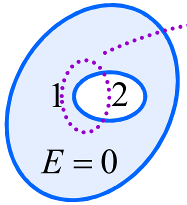
vodivo spojené gule musia mať rovnaký potenciál

$$\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \Rightarrow Q_2 = Q_1 \frac{R_2}{R_1}$$

$$E_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} \qquad E_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}\frac{R_1}{R_2} = E_1 \frac{R_1}{R_2} \underline{\gg E_1}$$

intenzita elektrického poľa na povrchu vodiča závisí od krivosti povrchu – v miestach s veľkou krivosťou (napr. ostré hroty) dochádza k mnohonásobnému zosilneniu poľa

vodič s dutinou vo vonkajšom elektrostatickom poli

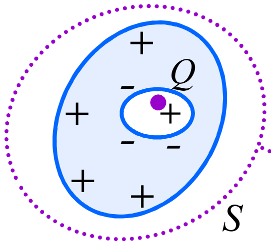


$$\underbrace{\int_1 \vec{E}\cdot d\vec{s}}_{0\text{ v objeme vodiča}} + \underbrace{\int_2 \vec{E}\cdot d\vec{s}}_{=0} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow$$

$\underline{E = 0 \text{ v dutine}}$

elektrostatické tienenie
(Faradayova klietka)

náboj v dutine vodiča



$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$ *- ako bodový náboj*

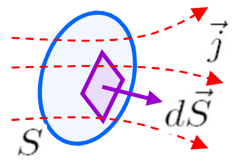
náboje vo vodiči sa preskupia na povrchy (vonkajší aj vnútorný), navonok je vodič neutrálny, celková elektrostatická energia je minimálna

Elektrický prúd

elektrický prúd – usmernený pohyb (tok) nábojov $\boxed{I = \frac{dq}{dt}}$ $[A]$

prúdová hustota – prúd jednotkovou plochou $\vec{j} = \frac{dI}{dS}\vec{n}^{o}$ $[Am^{-2}]$

$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$



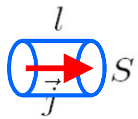
$$\vec{j} = \rho\vec{v} = nq\vec{v}$$

objemová hustota náboja; rýchlosť pohybu náboja; objemová koncentrácia nosičov náboja

$$\left.\begin{array}{l} q > 0 \ , \ \vec{j} \uparrow\uparrow \vec{v} \\ q < 0 \ , \ \vec{j} \uparrow\downarrow \vec{v} \end{array}\right\}$$

smer prúdu je smerom toku kladného náboja (konvencia, prúd I je skalár)

element valcového vodiča



$$I = jS = \rho v S = \rho\frac{dl}{dt}S = \rho\frac{dV}{dt} = \frac{dq}{dt} \qquad \left(q = \int_V \rho dV \right)$$

ak prúd uzavretou plochou $I = \oint_s \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$ (za daný čas do objemu uzavretého plochou S vtečie a vytečie rovnaké množstvo náboja), potom $\frac{dq}{dt} = 0$ (množstvo náboja v objeme sa nemení)

$$\boxed{\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}}$$

rovnica kontinuity (spojitosti)
(zákon zachovania elektrického náboja)

$$q = \int_V \rho dV \Rightarrow \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_V \mathrm{div}\vec{j} dV = -\frac{dq}{dt} = -\int_V \frac{d\rho}{dt} dV$$

(dif. tvar)

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{j} = -\frac{d\rho}{dt}}$$

stacionárny prípad $\frac{d\rho}{dt} = 0$: $\mathrm{div}\vec{j} = 0$

Magnetické pole vo vákuu

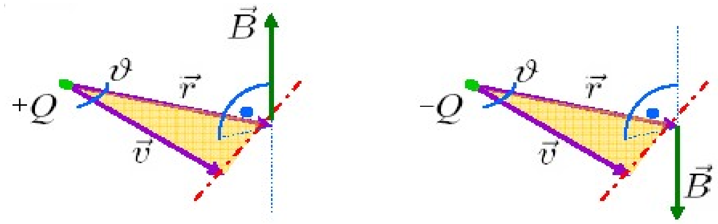
magnetické pole vzniká v dôsledku pohybu elektrických nábojov – elektrického prúdu

magnetická indukcia magnetického poľa, vyvolaného nábojom Q pohybujúcim sa rýchlosťou $\vec{v}$, vo vzdialenosti $\vec{r}$ od náboja

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}} \qquad B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q}{r^2}v\sin\vartheta \quad (\sim \frac{1}{r^2}) \qquad [T = kgs^{-2}A^{-1}]$$

$$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,Hm^{-1} \qquad (E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2})$$

magnetická konštanta (permeabilita vákua)



zdrojom elektrického poľa $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\vec{r}}{r^3}$ je každý náboj, zdrojom magnetického poľa $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}$ sú len pohybujúce sa náboje

pre magnetické pole platí princíp superpozície

tok rovnakých nábojov q rýchlosťou $\vec{v}$, celkový náboj v elementárnom objeme dV je $dQ = nqdV$
hustota prúdu je $\vec{j} = nq\vec{v}$
magnetické pole generované týmto prúdom v objeme dV je $dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{dQ\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}$

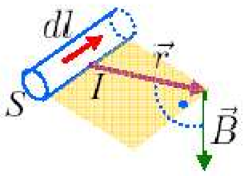
počet nábojov v jedn. objeme

výsledné magnetické pole z celého objemu V pretekaného prúdom je superpozíciou príspevkov z elementárnych objemov dV

$$dQ\vec{v} = nq\vec{v}dV = \vec{j}dV \Rightarrow dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}\times\vec{r}}{r^3}dV$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}\times\vec{r}}{r^3}dV \qquad (\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{nq\vec{r}}{r^3}dV)$$

magnetické pole vo vákuu v okolí valcového vodiča pretekaného ustáleným prúdom I



príspevok k magnetickému poľu v danom mieste ($\vec{r}$) *od dĺžkového elementu dl:*

$$dB\vec{} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$(j dV = j S dl = I dl)$$

Biotov – Savartov - Laplaceov zákon

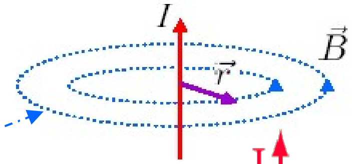
výsledné pole je superpozíciou príspevkov od dĺžkových elementov pozdĺž celého vodiča

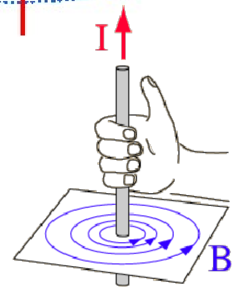
výsledné pole „nekonečne“ dlhého priameho vodiča

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

(viď napr. Tirpák: Elektromagnetizmus, kap. 6.1.4)

magnetické pole (indukciu $\vec{B}$ *) znázorňujeme indukčnými čiarami*

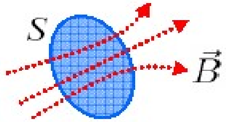




tok magnetickej indukcie (magn. indukčný tok)

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \qquad [Wb = Tm^2 = kgm^2 s^{-2} A^{-1}]$$

B – (plošná) hustota magnetického toku (hustota indukčných čiar)



výtok vektora $\vec{B}$ *z uzavretej plochy*

$$\boxed{\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0}$$

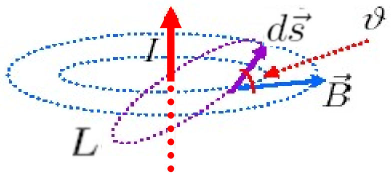
$$\left(\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \right)$$

Gaussov zákon pre magnetické pole

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{B} = 0}$$

(dif. tvar)

magnetické pole je nežriedlové – neexistujú magnetické náboje *cirkulácia vektora magnetickej indukcie*

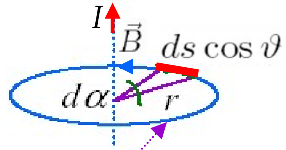


uzavretá integračná dráha L obopína („nekonečne“) dlhý priamy vodič pretekaný prúdom I, pole v okolí vodiča je $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$$\underbrace{\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{s}}_{= B ds \cos\vartheta} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_L \frac{ds \cos\vartheta}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha = \mu_0 I$$ - *nezávisí od r !*

$= B ds \cos\vartheta$ - *priemet* $d\vec{s}$ *do smeru* $\vec{B}$

$ds \cos\vartheta = r \sin d\alpha \cong r d\alpha$



uhol, ktorý vytína priemet $d\vec{s}$ *na indukčnej čiare*

$$\boxed{\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I}$$ *Ampéreov zákon*

cirkulácia $\vec{B} = \mu_0 \times$ *celkový obopnutý prúd*
(bez ohľadu na tvar uzavretej krivky)

$(\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0)$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_S \mathrm{rot}\vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

$$\boxed{\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$$ *Ampéreov zákon (dif. tvar)*

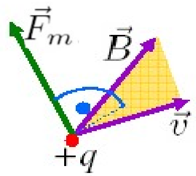
magnetické pole je vírové – indukčné čiary nikde nezačínajú ani nekončia (pole nemá žriedla), sú uzavreté do seba (tvoria víry okolo prúdovodičov)

sila, ktorou magnetické pole o indukcii $\vec{B}$ *pôsobí na náboj q, pohybujúci sa rýchlosťou* $\vec{v}$

$$\boxed{\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}}$$

$(\vec{F}_e = q\vec{E})$

ak $\vec{v} \parallel \vec{B}$: $F_m = 0$
ak $\vec{v} \perp \vec{B}$: $F_m = qvB$



$\vec{F}_m$ *nemá smer* $\vec{B}$ $(\vec{F}_m \perp \vec{B}, \vec{F}_e \parallel \vec{E})$ – *magnetické indukčné čiary nie sú siločiarami !!*

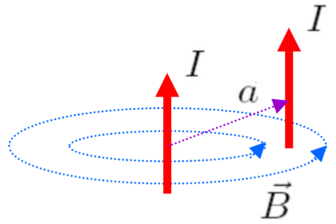
výkon magnetickej sily, ktorou magnetické pole pôsobí na pohybujúce sa náboje

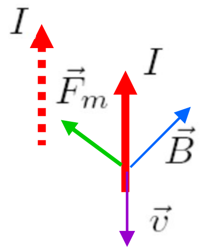
$$\mathcal{P} = \vec{F}_m \cdot \vec{v} = q\underbrace{(\vec{v} \times \vec{B})}_{\perp \vec{v}} \cdot \vec{v} = 0$$ - *magnetické pole nekoná prácu !!!*

definovanie magnetickej potenciálnej energie $W_p(\vec{r}) = -\int_\infty^r \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ *nemá fyzikálny zmysel - magnetické pole v tomto zmysle nie je konzervatívnym poľom*

vzájomné silové pôsobenie prúdovodičov

dva paralelné dlhé vodiče vo vzájomnej vzdialenosti a, pretekané súhlasným prúdom I





(elektróny, $q < 0$ *!)*

sila, ktorou pôsobí magnetické pole vodiča 1 na náboj dq (pohybujúci sa rýchlosťou v) prenášajúci prúd I v dĺžkovom elemente dl vodiča 2

$$d\vec{F}_m = dq\vec{v} \times \vec{B} = dq\frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{B} = \frac{dq}{dt}d\vec{l} \times \vec{B} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

magnetické pole vodiča 1 v mieste vodiča 2 je $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$

$$\underline{dF_m = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} dl}$$

pre súhlasné prúdy sa prúdovodiče priťahujú (pre nesúhlasné odpudzujú)

magnetická sila pôsobiaca na dĺžke l (vodičov) $F_m = IlB = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} l \sim I^2$

(pre porovnanie $F_e \sim q^2$*)*

silové pôsobenie prúdovodiča 2 na 1 (teda naopak) je analogické s opačným znamienkom – zákon akcie a reakcie

paradox: ak aspoň jeden z prúdovodičov je voľný (nie je „pripevnený“ na mieste), dochádza k jeho pohybu v smere pôsobiacej sily – koná sa mechanická práca (magnetické pole však prácu nekoná !?)

vysvetlenie: magnetické pole (vytvárané prúdom v jednom vodiči) pôsobí silovo na pohybujúce sa elektróny v druhom vodiči – ak by tieto elektróny boli voľné (nepôsobili by na ne elektrické sily v materiáli vodiča), mohli by svoj vodič opustiť a pohybovať sa voľne v priestore (pozri: Pohyb nabitých častic v elektromagnetickom poli) a nekonala by sa pritom práca – v dôsledku elektrických síl väzby elektrónov na „zvyšok“ vodiča však celý vodič „nasleduje svoje“ elektróny v smere magnetickej sily, prácu pri takomto premiestňovaní však treba pripísať týmto elektrickým silám

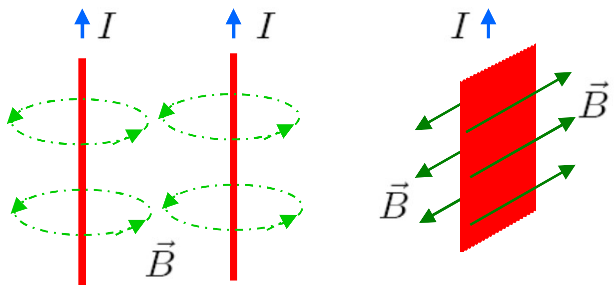
poznámka: dodatočná vynaložená práca (okrem vyššie uvedenej) elektrických síl súvisí s javmi elektromagnetickej indukcie vo vodiči pohybujúcom sa v nehomogénnom magnetickom poli a s požiadavkou udržania konštantného prúdu vo vodičoch (pozri Lenzov zákon v: Elektromagnetická indukcia)

magnetostatické pole – v čase nemenné silové pole, vytvárané stacionárnymi (ustálenými, v čase nemennými) elektrickými prúdmi, má silové účinky na každý iný elektrický prúd (tj. pohybujúce sa náboje) nachádzajúci sa v ňom

základné rovnice magnetostatiky vo vákuu	*diferenciálny tvar*	$\mathrm{div}\vec{B} = 0$ $\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$	*integrálny tvar*	$\oint \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$ $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I$
magnetostatická sila		$\vec{F}_m = q\vec{v}\times\vec{B}$		

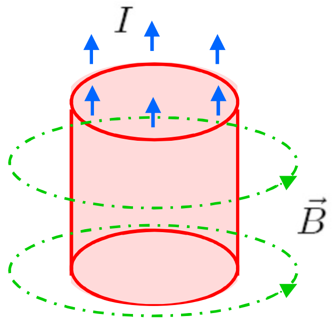
kvalitatívny odhad tvaru magnetostatického poľa v niektorých prípadoch

- *veľká rovinná platňa pretekaná plošným prúdom*



vzájomným približovaním priamkových vodičov pretekaných prúdom rovnakého smeru postupne zaniká zložka magnetického poľa kolmá na rovinu vodičov (príspevky magnetického poľa od susedných vodičov sa navzájom rušia), a zväčšuje sa tangenciálna zložka poľa (pozdĺž roviny vodičov) výsledkom je homogénne tangenciálne pole v blízkosti platne s opačnou polaritou na oboch jej stranách (v celom priestore pre nekonečnú platňu)

- *dlhá valcová plocha pretekaná plošným prúdom*

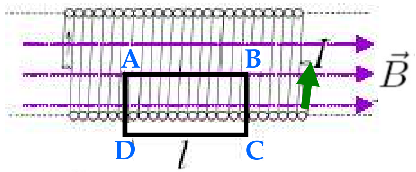


„zrolovaním" rovinnej platne do tvaru valca sa indukčné čiary vo vnútri valca pozdĺžne pretekaného prúdom navzájom zrušia – výsledkom je nulové magnetické pole vo vnútri valca a cylindricky symetrické pole (s osou na osi valca) mimo valca

výpočet intenzity magnetostatického poľa

výpočet B pomocou Ampéreovho zákona je možný vtedy, ak vieme zostrojiť takú dráhu L, *pozdĺž ktorej je pole konštantné, inak výpočet realizujeme pomocou Biotovho - Savartovho - Laplaceovho zákona*

magnetické pole v „nekonečne“ dlhom solenoide

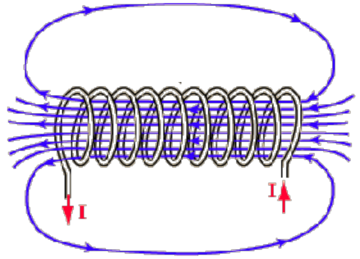


$$\oint_{ABCD} \vec{B}\cdot d\vec{s} = Bl = \mu_0 n l I \Rightarrow B = \mu_0 n I$$

prúd tečúci solenoidom

počet závitov na jedn. dĺžky

celkový prúd obopnutý uzavretou krivkou ABCD



$\vec{B}\cdot d\vec{s} = B ds \cos\vartheta \neq 0$ *len na úseku* AB

mimo „nekonečného“ solenoidu je $\vec{B} = 0$

(indukčné čairy „idú do nekonečna“)

magnetické pole v toroide

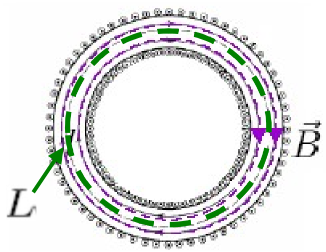
$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{s} = 2\pi r B = \mu_0 N I$$

prúd tečúci toroidom

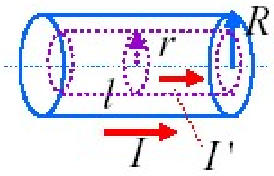
počet závitov toroidu

$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$ *v dutine toroidu,* $B = 0$ *mimo dutiny*

(indukčné čiary sú uzavreté do seba v dutine toroidu)



magnetické pole vnútri valcového vodiča



prúd vodičom $I = \pi R^2 j$ *polomer vodiča*

$I' = \pi r^2 j$ *prúd pomyselným valcom*

polomer pomyselného valca vo vnútri vodiča

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{s} = 2\pi r B = \mu_0 I' = \mu_0 \pi r^2 j \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \quad (\sim r) \; r < R$$

mimo vodiča $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{s} = 2\pi r B = \mu_0 I \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (\sim \frac{1}{r})$

Posuvný prúd

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \\ \mathrm{div}\vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}\end{array}\right\} \qquad \mathrm{div}\ \mathrm{rot}\vec{a} = 0 \Rightarrow \mathrm{div}\ \mathrm{rot}\vec{B} = 0 = \mu_0 \mathrm{div}\vec{j} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

platí vždy

neplatí vo všeobecnosti
(len pre statické pole)

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \mathrm{div}\vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}\end{array}\right\} \qquad \mathrm{div}\vec{j} = -\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \mathrm{div}\vec{E}) \Rightarrow \mathrm{div}(\vec{j} + \underbrace{\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\vec{j}_D}) = 0$$

$\vec{j}_D$ - *hustota posuvného (Maxwellovho) prúdu*

$$\boxed{\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$ *zákon celkového prúdu (dif. tvar)*

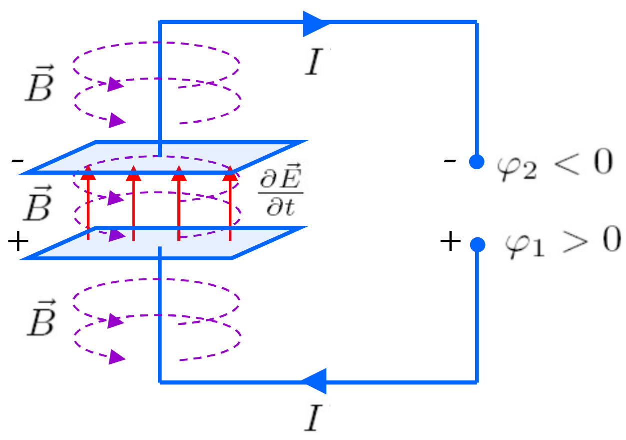
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \varepsilon_0 \mu_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \mu_0 (I + I_D)$$

posuvný prúd

$$\boxed{I_D = \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}}$$

$$\boxed{\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (I + I_D)}$$ *zákon celkového prúdu (integrálny tvar)*

vodivostný aj posuvný prúd sa podieľajú na produkcii magnetického poľa:
- vo vákuu (nie sú voľné náboje) je $\vec{B}$ generované časovou zmenou $\vec{E}$, t.j. posuvným prúdom I_D
- vo vodičoch (pohyblivé nosiče náboja) je $\vec{B}$ generované vodivostným prúdom voľných nábojov I



po pripojení nenabitého kondenzátora ($\varphi = 0$) na zdroj napätia (póly φ_1, φ_2) sa kondenzátor nabíja prúdom I, okolo prívodných vodičov vzniká magnetické pole $\vec{B}$ (prúd i pole zanikne po vyrovnaní potenciálov spojených pólov kondenzátora a zdroja)

počas nabíjania kondenzátora v jeho vnútri netečie vodivostný prúd (je to nevodivé prostredie – bez voľných nosičov náboja), narastá však elektrické pole - tečie posuvný prúd ($\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \neq 0$), ktorý produkuje rovnaké magnetické pole

Elektromagnetická indukcia

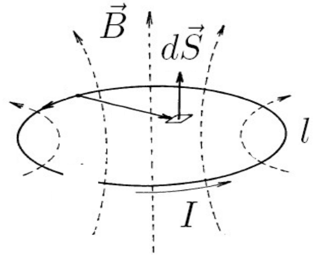
magnetický tok (uzavretou) slučkou $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$

indukované elektromotorické napätie na slučke $\boxed{U_i = -\frac{d\Phi}{dt}}$ *Faradayov zákon elektro-magnetickej indukcie*

indukované napätie v slučke vyvoláva prúd slučkou, ktorý svojim magnetickým účinkom (magnetickým poľom, ktoré sám vytvára) pôsobí proti príčine (zmene indukčného toku), ktorá ho vyvolala – Lenzov zákon

napätie na elemente slučky $U_i = \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$

v celej slučke $\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$



časová zmena magnetického toku plochou obopnutou uzavretou slučkou nastáva ak sa v čase mení
- *magnetické pole (pri nezmenenej slučke)*
- *veľkosť či tvar slučky (pri nezmenenom magnetickom poli)*
- *vzájomná orientácia poľa a slučky (pri nezmenenom poli, tvare a veľkosti slučky)*
- *súčasne viacero týchto faktorov*

ak sa v čase mení
iba magnetické pole

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_S \mathrm{rot}\vec{E} \cdot d\vec{S}$$

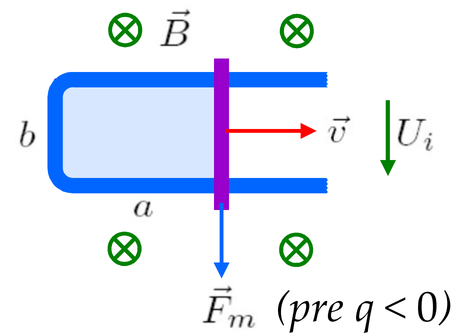
$$\int_S \mathrm{rot}\vec{E} \cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

zákon elektromagnetickej indukcie
(dif. tvar)

elektrické (nie elektrostatické) pole je vírové – víry sú tvorené v čase premenným magnetickým poľom

ak sa v čase mení iba plocha slučky
(v homogénnom statickom magnetickom poli)



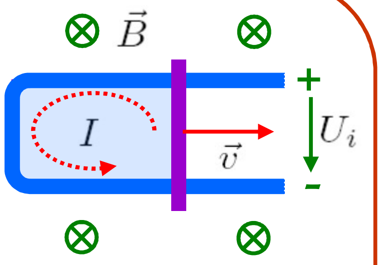
indukované napätie na slučke $U_i = \frac{d\Phi}{dt} = B\frac{da}{dt}b = \underline{vBb}$
(„chýbajúce" znamienko „–" určuje len polaritu indukovaného napätia a dá sa určiť aj dodatočne na základe Lenzovho zákona)

iný pohľad:
na voľné náboje v pohybujúcej sa časti slučky (tj. elektróny pohybujúce sa v magnetickom poli) pôsobí magnetická sila $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$ *pozdĺž pohybujúcej sa časti slučky*
práca konaná pri premiestnení nábojov spôsobí rozdiel potenciálov – indukované elektromotorické napätie $\int \vec{F}_m \cdot d\vec{l} = qvBb = qU_i \Rightarrow U_i = \underline{vBb}$

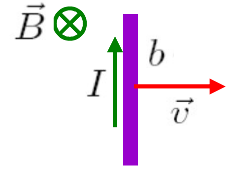
$$U_i = \varphi_1 - \varphi_2 = -\int_1^2 \nabla\varphi \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad \boxed{\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}}$$

(vírové) elektrické pole indukované vo vodivom obvode pohybujúcom sa v magnetickom poli

práca konaná pri premiestňovaní nábojov v pohybujúcej sa časti obvodu je konaná týmto elektrickým poľom (nie magnetickým poľom) *indukované elektromotorické napätie, vzniknuté premiestnením náboja v pohyblivej časti vodivého obvodu, je zdrojom cirkulujúceho prúdu v obvode, ktorý vytvára dodatočný magnetický tok (na obrázku smerujúci von z nákresne) orientovaný proti smeru vonkajšieho magnetického poľa, pôsobiaci proti nárastu magnetického toku slučkou (následkom nárastu jej plochy) – Lenzov zákon*



na pohybujúcu časť obvodu (dĺžky b), pretekanú indukovaným prúdom I, pôsobí magnetické pole silou $\vec{F} = \int_0^b I d\vec{l} \times \vec{B}$ *o veľkosti* $F = IbB$ *proti smeru jej pohybu – pohyb je brzdený*



Faradayov zákon $U_i = -\frac{d\Phi}{dt}$ *je teda súčasným vyjadrením dvoch fundamentálnych zákonov elektromagnetizmu*

$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ *pre časovo premenné magnetické pole*

$\boxed{\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})}$ *pre silu pôsobiacu na pohybujúce sa náboje*

otáčaním rozopnutej slučky v magnetickom poli sa na jej koncoch indukuje napätie, meniace polaritu po každom otočení o 180° - generátor striedavého napätia
brzdná indukovaná sila spôsobuje nerovnomerné otáčanie (a teda mechanické namáhanie hriadeľa), v praxi sa preto na spoločný hriadeľ umiestňujú 3 slučky navzájom pootočené o 120° (postačujúce na zabezpečenie plynulého otáčania) – 3-fázové napätie

Výkon elektrického prúdu, energia elektrického a magnetického poľa

elektrický odpor

merný odpor ρ $[\Omega m]$
merná vodivosť σ $[Sm^{-1}]$

závisia od vlastností materiálu, nie od jeho množstva (môžu závisieť aj od veľkosti pretekajúceho prúdu)

$$\boxed{\begin{array}{c}\vec{E} = \rho\vec{j} \\ \vec{j} = \sigma\vec{E}\end{array}}$$

Ohmov zákon (dif. tvar)

$\vec{j} \uparrow\uparrow \vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi \Rightarrow$ prúd tečie v smere klesajúceho potenciálu (potenciálového spádu)

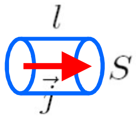
$$U = \int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad I = \int_S \vec{j}\cdot d\vec{S}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}U = RI \\ I = GU\end{array}}$$

Ohmov zákon (int. tvar)

R – elektrický odpor $[\Omega = VA^{-1} = kgm^2s^{-3}A^{-2}]$
G – elektrická vodivosť $[S = \Omega^{-1}]$

závisia od vlastností materiálu aj množstva a tvaru vodiča !

valcový vodič 

$$dU = Edl = \rho j dl = \rho\frac{I}{S}dl \qquad U = I\rho\int_0^l \frac{dl}{S} \qquad R = \rho\frac{l}{S}$$

$\vec{j} = \sigma\vec{E} = -\sigma\mathrm{grad}\varphi$ - prúd tečie v dôsledku potenciálového spádu $\vec{j} \sim$ -gradφ, zdroj potenciálového spádu (tj. napätia) koná prácu (premiestňovaním kladného náboja) na úkor potenciálnej energie náboja $dA = Udq$ $\quad dq = Idt$ $\quad dA = UIdt$

výkon elektrického prúdu
(resp. zdroja el. napätia)

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{dA}{dt} = UI}$$

(práca za jedn. času)

Jouleov zákon

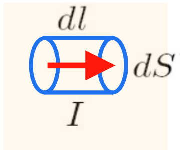
$[W = VA]$

R – prvok disipujúci energiu, tj. premieňajúci ju na iné formy – teplo (podobne ako trenie pri mechanickom pohybe)

pre kovové vodiče (odpor nezávisí od prúdu)

$$\mathcal{P} = UI = U\frac{U}{R} = \frac{U^2}{R} = \underline{U^2 G}$$
$$= IRI = \underline{I^2 R}$$

prúd I cez elementárny valcový vodič o dĺžke dl a prierezе dS



$$d\mathcal{P} = dU\,dI = E\,dl\,j\,dS = jE\,dl\,dS = jE\,dV$$

objemová hustota výkonu
(výkon na jedn. objemu)

$$\boxed{p = \frac{d\mathcal{P}}{dV} = jE = \sigma E^2 = \rho j^2}$$

$[Wm^{-3}]$

výkon sily elektrického poľa, premiestňujúcej náboj q, je
pre n nábojov v jedn. objemu je objemová hustota výkonu

$$\mathcal{P} = \vec{F}\cdot\vec{v} = q\vec{E}\cdot\vec{v}$$
$$p = nq\vec{v}\cdot\vec{E} = \vec{j}\cdot\vec{E}$$

$$\boxed{p = \vec{j}\cdot\vec{E}}$$

Jouleov zákon (dif. tvar)

elektrická kapacita

vodič je schopný prijať náboj ΔQ, *zvýši sa tým jeho potenciál o* $\Delta\varphi$

kapacita vodiča $C = \frac{\Delta Q}{\Delta \varphi}$ $[F = CV^{-1} = kg^{-1}m^{-2}s^{4}A^{2}]$

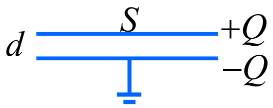
kapacita vodiča je množstvo náboja potrebné na jednotkovú zmenu jeho potenciálu (o 1 volt)

potenciál vo vnútri nabitej vodivej gule $\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

pridaním náboja Δq *sa potenciál zvýši o* $\Delta\varphi = \frac{\Delta q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

$\Rightarrow$ *kapacita vodivej gule je* $C = 4\pi\varepsilon_0 R$

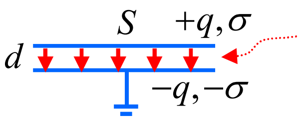
paralelné roviny (doskový kondenzátor)



indukovaný náboj

$\sigma = \pm\frac{Q}{S}$ $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$ *(homogénne)* $U = \frac{Q}{C}$

$U = \int_0^d \vec{E}\cdot d\vec{s} = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S}$ $\leftarrow 1/C$ $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$



$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0 S}$

$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$

práca potrebná na premiestnenie náboja dq medzi doskami kondenzátora: $dA = dq\int_0^d \vec{E}\cdot d\vec{s} = dqEd = \frac{d}{\varepsilon_0 S}qdq$

práca potrebná na nabitie kondenzátora nábojom Q (tj. premiestnenie náboja Q medzi doskami kondenzátora) **=** *elektrostatická energia naakumulovaná v kondenzátore*

$$A = \frac{d}{\varepsilon_0 S}\int_0^Q qdq = \frac{d}{\varepsilon_0 S}\frac{Q^2}{2} = \boxed{\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2 = W_e}$$

elektrostatická energia „naakumulovaná v kondenzátore" predstavuje rozdiel potenciálnych energií nábojového rozloženia v nabitom a v prázdnom kondenzátore – voľné náboje sú sústredené vo vodivých častiach (dosky kondenzátora) a energia je sústredená v elektrostatickom poli tvorenom týmito nábojmi (v prípade doskového kondenzátora je to priestor medzi doskami, vo všeobecnosti je to priestor s nenulovou hodnotou elektrostatického poľa)

hustota (objemová) elektrostatickej energie

$$w_e = \frac{W_e}{V} = \frac{CU^2}{2Sd} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \qquad [Jm^{-3}] \qquad \boxed{w_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}}$$

indukčnosť

prúd I v slučke dĺžky l vytvára v jej okolí magnetické pole,
každý jej úsek dl prispieva k magnetickému poľu v mieste $\vec{r}$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

výsledné pole v tomto mieste je súčtom príspevkov pozdĺž celej slučky

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_l \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

magnetický tok plochou slučky

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \boxed{\frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \oint_l \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S}} I = LI$$

indukčnosť obvodu

$$L = \frac{\Phi}{I} \qquad [H = kgm^2 s^{-2} A^{-2}] \qquad L = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \oint_l \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S}$$

indukčnosť obvodu (slučky) je mierou veľkosti magnetického poľa generovaného prúdom v obvode, závisí len od jeho geometrie a materiálu

„nekonečne dlhý" solenoid

$B = \mu_0 n I$ - *pole je homogénne*

počet závitov na jedn. dĺžky

$\Phi = \int BdS = BS = \mu_0 nIS$ - *tok každým závitom*

tok na jedn. dĺžky solenoidu $n\Phi = L'I$, $\underline{L' = \mu_0 n^2 S}$

„reálny" dlhý solenoid

dĺžka l, celkový počet závitov $N = nl$: $L = lL' = \underline{\mu_0 n^2 S l} = \mu_0 \pi R^2 \frac{N^2}{l}$ $\quad S = \pi R^2$

dva obvody (1 a 2) vo vzájomnej blízkosti – prúd v 1 vyvoláva magnetický tok Φ_1 , *časť tohto toku,* Φ_{12} , *pôsobí na obvod 2, vzájomná indukčnosť sústavy* $\underline{L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1}}$

$U_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI) = -L\frac{dI}{dt}$ *napätie na indukčnosti vzniká pri časovej zmene prúdu*

(ak sa geometria slučky nemení)

v okamihu zapnutia prúdu v obvode s indukčnosťou L (pripojením zdroja napätia U*) sa v obvode indukuje napätie* $U_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$ *, podľa Lenzovho zákona pôsobí proti príčine, ktorá ho vyvolala, teda* $\underline{U = -U_i}$

výkon zdroja napätia vyvolávajúceho prúd v obvode

$$\mathcal{P} = UI = -U_i I = I\frac{d\Phi}{dt} = LI\frac{dI}{dt} = \frac{dW_m}{dt}$$

energia magnetického poľa vytváraného prúdom I v indukčnosti L

$$dW_m = \mathcal{P}dt = LIdI \qquad W_m = L\int IdI = \frac{1}{2}LI^2 \qquad \boxed{W_m = \frac{1}{2}LI^2}$$

„veľmi dlhý“ solenoid $\quad L = \mu_0 n^2 S l \quad\quad B = \mu_0 n I \Rightarrow I = \frac{B}{\mu_0 n}$

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \boxed{\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}} \underbrace{Sl}_{V}$$

objemová hustota magnetickej energie $\quad \boxed{w_m = \frac{B^2}{2\mu_0}}$

kinetická energia telesa s hybnosťou p = práca potrebná na udelenie tejto hybnosti telesu

$$W_k = \int F ds = \int \frac{dp}{dt} v dt = \int v dp = m \int v dv = \underline{\frac{1}{2} m v^2} \quad \text{(m je konšt.)}$$

(rotačný pohyb $W_k = \underline{\frac{1}{2} J \omega^2}$ *)*

potenciálna energia telesa na deformovanej pružine tuhosti k = práca potrebná na deformáciu pružiny

$$W_p = \int F ds = \int k s ds = \underline{\frac{1}{2} k s^2}$$

práca pri posune náboja (nabíjanie kondenzátora kapacity C) = rozdiel potenciálnych energii v počiatočnej a konečnej polohe = energia elektrického poľa v kondenzátore

$$W_e = \int U dQ = C \int U dU = \underline{\frac{1}{2} C U^2}$$

práca konaná pri vytváraní prúdu v cievke indukčnosti L = energia magnetického poľa v cievke

$$W_m = L \int I dI = \underline{\frac{1}{2} L I^2}$$

m (J), k, C, L – veličiny reprezentujúce schopnosť akumulovať energiu, majú zotrvačný charakter

analógie vo fyzike

hustota toku náboja (tj. el.prúdu) $j = \frac{1}{S}\frac{\Delta q}{\Delta t}$ $\quad \vec{j} = -\sigma \nabla \varphi$ $\quad C = \frac{dq}{d\varphi}$

hustota toku tepla (tepelného toku) $j = \frac{1}{S}\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ $\quad \vec{j} = -\kappa \nabla T$ $\quad C = \frac{dQ}{dT}$

hustota toku častíc (tj. difúzneho toku) $j = \frac{1}{S}\frac{\Delta N}{\Delta t}$ $\quad \vec{j} = -D \nabla n$ $\quad (C =)\frac{dN}{dn} = V$

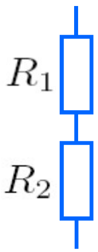
koeficient vodivosti elektrickej/tepelnej/„časticovej“

skalárne veličiny φ, T, n reprezentujú (elektrické, teplotné, hustotné) polia (pole v zmysle veličiny rozpriestranenej v priestore) - ak existujú medzi bodmi v priestore „napätia“ (elektrické, teplotné, difúzne), prebiehajú makroskopické toky v smere najstrmšieho spádu napätia

skladanie pasívnych prvkov elektrických obvodov

pasívnymi prvkami elektrických obvodov sú odporník s elektrickým odporom R, kondenzátor s elektrickou kapacitou C a cievka s indukčnosťou L

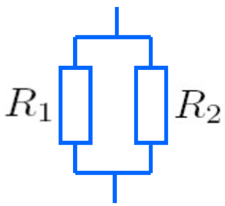
sériové skladanie odporov



$$R = R_1 + R_2$$

výsledný odpor sa zväčší

paralelné skladanie odporov



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

výsledný odpor sa zmenší

(pokračovanie)

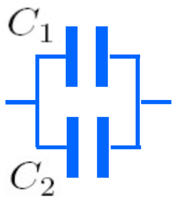
vysvetlenie pravidiel skladania možno nájsť v energetických úvahách:

majme 2 rovnaké odpory R – *pri sériovom zapojení oboma preteká rovnaký prúd I a vyvoláva na každom z nich napätie* $U = RI$ *a stratový výkon* $\mathcal{P} = UI = I^2R$

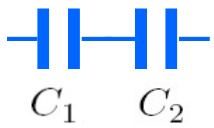
výsledné napätie je $U_v = 2U$ *a stratový výkon* $\mathcal{P}_v = U_vI = 2\mathcal{P} = I^2R_v$ *- odtiaľ pre výsledný odpor platí* $R_v = 2R$

pri paralelnom radení rovnakých odporov R *sa prúd I delí na 2 rovnaké časti* $\frac{I}{2}$ *, na každom z odporov je pritom rovnaké napätie* $U = R\frac{I}{2}$ *a stratový výkon* $\mathcal{P} = U\frac{I}{2} = R(\frac{I}{2})^2$

celkový stratový výkon je $\mathcal{P}_v = 2\mathcal{P} = R\frac{I^2}{2} = I^2R_v$ *a odtiaľ* $R_v = \frac{R}{2}$



$$C = C_1 + C_2$$



$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

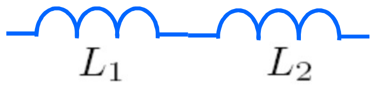
pri paralelnom zapojení rovnakých kondenzátorov s kapacitou C a nábojom Q *je na oboch kondenzátoroch rovnaké napätie* $U = \frac{Q}{C}$ *a energia akumulovaná v každom z nich je* $W = \frac{1}{2}CU^2$

celková akumulovaná energia je $W_v = 2W = CU^2 = \frac{1}{2}C_vU^2$ *a odtiaľ* $C_v = 2C$

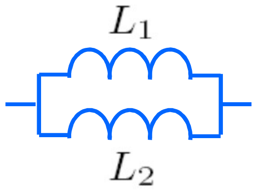
pri sériovom zapojení rovnakých kondenzátorov nabitých nábojom Q *je napätie na každom z nich* $U = \frac{Q}{C}$ *a výsledné napätie je* $U_v = 2U$

celková akumulovaná energia je $W_v = 2W = CU^2 = \frac{1}{2}C_vU_v^2 = 2C_vU^2$ *a odtiaľ* $C_v = \frac{C}{2}$

(pokračovanie)



$L = L_1 + L_2$

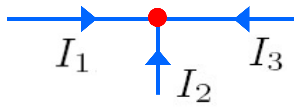


$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$

akumulovaná energia v cievke je $W = \frac{1}{2}LI^2$ *, podobne ako stratový výkon na odpore* $\mathcal{P} = RI^2$ *- argumentácia je teda rovnaká*

Kirchhoffove zákony pre elektrické obvody

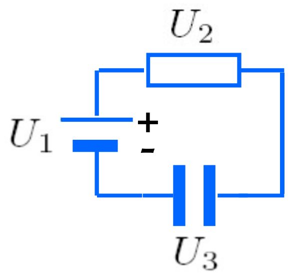
1. Kirchhoffov zákon: v ľubovoľnom uzle elektrickej siete, tj. mieste kde sa stýkajú viaceré vodiče, je súčet všetkých prúdov tečúcich do uzla rovný súčtu všetkých prúdov vytekajúcich z uzla („čo vtečie, to vytečie" – je to priamy dôsledok rovnice kontinuity)



$\sum_i I_i = 0$

2. Kirchhoffov zákon: v ľubovoľnom uzavretom elektrickom obvode je súčet všetkých napätí (s ohľadom na ich polaritu) nulový (priamy dôsledok konzervatívnosti elektrostatického poľa $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$*)*

ak sa v obvode nachádza indukčnosť, elektrické pole v obvode má aj vírovú zložku $\mathrm{rot}\,\vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ *, takže do schémy treba pripočítať ekvivalentný zdroj indukovaného napätia* $U_i = -\frac{d\Phi}{dt}$*, aby 2. Kirchhoffov zákon ostal platný*



$\sum_i U_i = 0$

Elektromagnetické pole vo vákuu

- elektrické náboje vytvárajú elektrické pole
- pohybujúce sa elektrické náboje (vodivostný elektrický prúd) vytvárajú magnetické pole
- meniace sa (v čase) elektrické pole (posuvný prúd) vytvára magnetické pole
- meniace sa (v čase) magnetické pole vytvára (indukované) elektrické pole

elektrické a magnetické pole sú súčasťami (čiastkovými prípadmi, navzájom spätými zložkami) elektromagnetického poľa

základné rovnice elektromagnetického poľa – Maxwellove rovnice (pre vákuum)

Faradayov zákon	$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$	$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Ampéreov zákon	$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$	$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
Gaussove zákony	$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$	$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	$\mathrm{div}\vec{B} = 0$

ďalšie dôležité rovnice elektromagnetického poľa

Ohmov zákon $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

rovnica spojitosti $\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dQ}{dt}$ $\quad \mathrm{div}\vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

elektromagnetická (Lorentzova) sila $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$

hustota elektromagnetickej energie $w_{em} = w_e + w_m = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$

Pohyb nabitých častíc v elektromagnetickom poli

voľná nabitá častica v elektrickom poli:

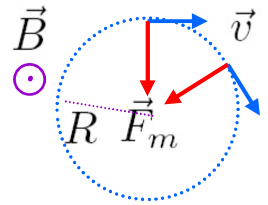
$\vec{F}_e = q\vec{E} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ $\quad\quad \vec{F}_e \parallel \vec{E}$ $\quad\quad$ *zrýchlenie* $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{q\vec{E}}{m}$

voľná nabitá častica v statickom magnetickom poli:

$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$ *(ak m = konšt.)* $\quad\quad \vec{F}_m \perp \vec{v}, \vec{B}$

nech $\vec{v} \perp \vec{B}$

(von z nákresne)



F_m *je dostredivou silou* $F = m\frac{v^2}{R}$

$F_m = qvB = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv}{qB}$

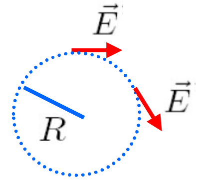
$R \sim m$ *- nabité častice s rôznymi hmotnosťami vykonávajú v danom magnetickom poli pohyb po kružniciach s rôznymi polomermi - využitie ako separátor hmotnosti (hmotnostná spektrometria)*

$\omega = \frac{v}{R} = \underline{\frac{q}{m}B = \omega_c}$ *- cyklotrónová frekvencia*

$\vec{v}$ *a* $\vec{B}$ *pod ľubovoľným uhlom* $\quad \vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp} \longrightarrow$ *pohyb po kružnici,* $F_m = qvB = m\frac{v^2}{R}$

$\vec{F}_m = 0$, *priamočiary rovnomerný pohyb* $\longrightarrow$ *výsledný zložený pohyb je pohybom po špirále* magnetické pole (jeho zložka) kolmé na pohyb nabitej častice vyvoláva dostredivé zrýchlenie – zakrivuje jej dráhu do kružnice, uhlová rýchlosť pohybu odpovedá cyklotrónovej frekvencii, obvodová rýchlosť častice v sa nemení (pri konštantnom B) a jej hybnosť je $p = qRB$

ak sa magnetické pole (kolmé na rovinu kruhového pohybu) mení v čase (napr. narastá), pozdĺž kruhovej dráhy nabitej častice sa indukuje elektrické pole, ktoré vyvoláva tangenciálne zrýchlenie nabitej častice– mení sa (napr. narastá) jej obvodová rýchlosť a hybnosť



$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \Rightarrow 2\pi R E = \frac{\partial}{\partial t}(B_{str}\pi R^2) \Rightarrow E = \frac{R}{2}\frac{dB_{str}}{dt}$$

stredné pole na ploche obopnutej kruhovou dráhou

$$\frac{dp}{dt} = qE = \frac{qR}{2}\frac{dB_{str}}{dt} \longrightarrow \Delta p = \frac{qR}{2}\Delta B_{str}$$

ak sa pri zmene (obvodovej) hybnosti nemá zmeniť polomer kruhovej dráhy, musí pre zmenu hodnoty magnetického poľa pozdĺž dráhy (tj. v mieste nabitej častice) B ($\neq B_{str}$) platiť $\Delta p = qR\Delta B$

pre pomer zmeny stredného magnetického poľa na ploche obopnutej dráhou ΔB_{str} a zmeny poľa na dráhe ΔB vtedy platí

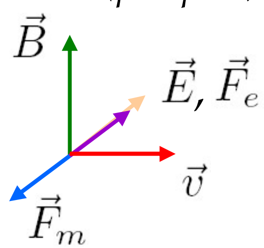
$$\frac{qR}{2}\Delta B_{str} = qR\Delta B \Rightarrow \underline{\Delta B_{str} = 2\Delta B}$$

takto možno v tzv. betatrónoch urýchliť nabité častice na konštantnej kruhovej dráhe na veľmi vysoké rýchlosti (kinetické energie)

voľná nabitá častica v elektromagnetickom poli:

$$\vec{F}_m = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

(pre $q > 0$)



ak $\vec{v} \perp \vec{E}, \vec{B}$ a súčasne $\vec{E} \perp \vec{B}$ - „skrížené" polia, $\vec{v} \times \vec{B} = vB$

$\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ (nepôsobí žiadna sila) ak $q(E - vB) = 0 \Rightarrow \underline{E = vB}$

ak $v = \frac{E}{B}$ - nabitá častica nemení smer - separátor rýchlostí

Elektromagnetické potenciály

ak $\int_1^2 \vec{a}\cdot d\vec{s}$ *nezávisí od integračnej dráhy, len od hraničných bodov 1, 2, potom* $\oint \vec{a}\cdot d\vec{s} = 0$ *a teda aj* $\mathrm{rot}\vec{a} = 0$ *- pole* $\vec{a}$ *môžeme vyjadriť ako* $\vec{a} = \mathrm{grad}\psi$, *lebo* $\mathrm{rot\ grad}\psi = 0$ *(* ψ *je skalárna funkcia)*

v elektrostatike platí:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0 \;\;,\;\; \mathrm{rot}\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = \text{-grad}\varphi$$ ← *skalárny elektrostatický potenciál*

v elektrodynamike (tj. v elektromagnetizme s časovo premennými poľami) vo všeobecnosti platí $\mathrm{rot}\vec{E} \neq 0$ $(\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t})$ *, rovnica* $\vec{E} = \text{-grad}\varphi$ *teda vo všeobecnosti neplatí*

v magnetostatike:

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} \neq 0 \Rightarrow \vec{B} \neq \text{-grad}\varphi_m$$

vo všeobecnosti

nemožno vo všeobecnosti zaviesť skalárny potenciál magnetického poľa

ak $\mathrm{div}\vec{b} = 0$, *pole* $\vec{b}$ *môžeme vyjadriť ako* $\vec{b} = \mathrm{rot}\vec{a}$, *lebo* $\mathrm{div\ rot}\vec{a} = 0$ *(* $\vec{a}$ *je vektorová funkcia)*

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \;,\; \mathrm{div}\vec{B} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}}$$ ← *vektorový potenciál magnetického poľa*

$$\left.\begin{aligned} \vec{B} &= \mathrm{rot}\vec{A} \\ \mathrm{rot}\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \end{aligned}\right\} \mathrm{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \;\left\{\begin{aligned} &\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\ &\textit{alebo} \\ &\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\mathrm{grad}\varphi \quad (\mathrm{rot\ grad}\varphi = 0) \end{aligned}\right.$$

$$\boxed{\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}$$

definičný vzťah $\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$ *pripúšťa istú vôľu definovania vektorového potenciálu* $\vec{A}$ *- magnetické pole sa nezmení, ak vektorový potenciál transformujeme na* $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{C}$*, kde* $\mathrm{rot}\vec{C} = 0$*, a teda* $\mathrm{rot}\vec{A}' = \mathrm{rot}\vec{A}$

vektorovú funkciu $\vec{C}$ *môžeme vyjadriť aj ako* $\vec{C} = \mathrm{grad}\Lambda$ $(\mathrm{rot}\ \mathrm{grad}\Lambda = 0)$*, kde* Λ *je ľubovoľná skalárna funkcia, výber tejto skalárnej funkcie sa nazýva kalibrácia*

transformačný vzťah pre vektorový potenciál $\underline{\vec{A}' = \vec{A} + \mathrm{grad}\Lambda}$

(tj. prechod od jednej kalibrácie k inej)

pri ľubovoľnej transformácii $\vec{A}' = \vec{A} + \mathrm{grad}\Lambda$ *sa elektrické pole* $\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ *nesmie meniť, preto sa aj skalárny potenciál musí transformovať na* $\varphi' = \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$ *skalárna funkcia*

$$\left(-\mathrm{grad}\varphi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\mathrm{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

transformačný vzťah pre skalárny potenciál $\underline{\varphi' = \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}}$

pre statické (v čase nemenné, nulové časové derivácie) polia často volíme tzv. Londonovu kalibráciu, pre ktorú $\underline{\mathrm{div}\vec{A} = 0}$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{rot}\vec{B} &= \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\vec{A} = \underbrace{\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\vec{A}}_{=0} - \Delta\vec{A} \\ \mathrm{rot}\vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned}\right\} \qquad \boxed{\boxed{\Delta\vec{A} = -\mu_0 \vec{j}}} \qquad \left(\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)$$

(dôvod výberu Londonovej kalibrácie)

ekvivalentné vyjadrenie Ampéreovho zákona v magnetostatike *pre spojité rozloženie prúdu* $\vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}}{r}dV$ $A_x(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{j_x}{r}dV$, A_y, A_z

$$\left(\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho}{r}dV \right)$$

podmienka $\mathrm{div}\vec{A} = 0$ *vyplýva z rovnice kontinuity pre stacionárny prúd (magnetostatické pole)*

$$\mathrm{div}\vec{j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

potenciál $\vec{A}$ *v homogénnom poli* $\vec{B}$ $\begin{cases} \oint \vec{A}\cdot d\vec{s} = \int_S \mathrm{rot}\vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} \\ 2\pi r A = B\pi r^2 \text{ pre kruhovú dráhu/plochu} \end{cases}$ $\begin{cases} A = \frac{Br}{2} \\ \vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r} \end{cases}$

pomocou elektromagnetických potenciálov možno s použitím tzv. Lorentzovej kalibrácie

$$\nabla\cdot\vec{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

vyjadriť Maxwellove rovnice v tvare

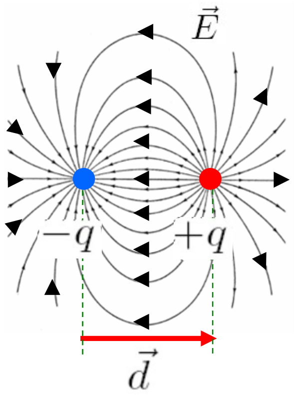
$$\boxed{\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}\ ,\ \vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla^2\varphi - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon} \\ \nabla^2\vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu\vec{j} \end{aligned}}$$

pre statické polia (nulové časové derivácie) tieto rovnice prejdú na základné rovnice elektrostatiky a magnetostatiky $\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ $\nabla^2\vec{A} = -\mu\vec{j}$

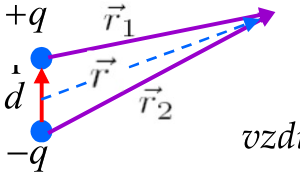
Elektrický dipól

elektrický dipól – *dvojica rovnako veľkých, navzájom opačných nábojov $\pm q\ (q>0)$ v pevnej vzájomnej vzdialenosti d*



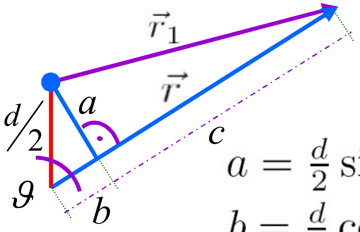
elektrický dipólový moment $\qquad \vec{p}=q\vec{d} \qquad [Cm]$

vektory $\vec{d},\vec{p}$ *smerujú od* $-q$ *k* $+q$, *tj. proti smeru* $\vec{E}$



$$\varphi(\vec{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

vzdialenosť stredu dipólu od bodu, v ktorom skúmame pole dipólu



$$a=\frac{d}{2}\sin\vartheta$$

$$b=\frac{d}{2}\cos\vartheta$$

$$c=r-b=r-\frac{d}{2}\cos\vartheta$$

$$r_1=\sqrt{a^2+c^2}=\sqrt{(\tfrac{d}{2})^2\sin^2\vartheta+r^2-rd\cos\vartheta+(\tfrac{d}{2})^2\cos^2\vartheta}=$$

$$=\sqrt{r^2+(\tfrac{d}{2})^2-rd\cos\vartheta}=r\sqrt{1+(\tfrac{d}{2r})^2-\tfrac{d}{r}\cos\vartheta}$$

$$r_2=\cdots=r\sqrt{1+(\tfrac{d}{2r})^2+\tfrac{d}{r}\cos\vartheta}$$

$\frac{d}{r}\ll 1\Rightarrow(\frac{d}{2r})^2$ *zanedbáme*

$$\frac{1}{r_1}\cong\frac{1}{r\sqrt{1-\frac{d}{r}\cos\vartheta}}\cong\frac{1}{r}\left(1+\frac{d}{2r}\cos\vartheta+\cdots\right)$$

$$\frac{1}{r_2}\cong\frac{1}{r\sqrt{1+\frac{d}{r}\cos\vartheta}}\cong\frac{1}{r}\left(1-\frac{d}{2r}\cos\vartheta+\cdots\right)$$

$$\boxed{x\ll 1:\ (1+x)^\alpha=(1+\alpha x+\cdots)}$$

$\frac{d}{r}\ll 1\Rightarrow$ *členy vyššieho rádu zanedbáme*

$$\boxed{\varphi(\vec{r})=\frac{qd\cos\varphi}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{p\cos\varphi}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$$

$\varphi(r)\sim\frac{1}{r^2}\qquad(\varphi(r)\sim\frac{1}{r}$ *pre bodový náboj)*

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad}\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\text{grad}\left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}\right) \qquad E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\text{, atď.}$$

$$\boxed{\text{grad}(ab) = b\,\text{grad}\,a + a\,\text{grad}\,b} \qquad a = \vec{p}\cdot\vec{r} \qquad b = \frac{1}{r^3}$$

$$\text{grad}(\vec{p}\cdot\vec{r}) = p\,\text{grad}(r\cos\varphi) = p\cdot\vec{p^o} = \vec{p}$$

$$\text{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3}{r^4}\vec{r^o} = -3\frac{\vec{r}}{r^5}$$

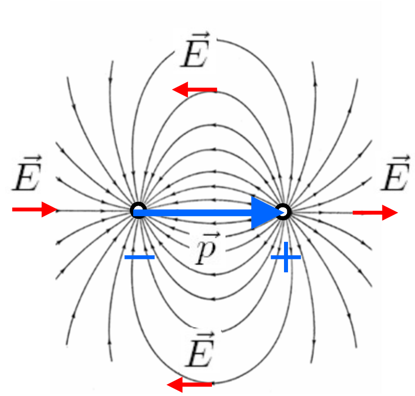
jedn. vektory

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3\vec{r}(\vec{p}\cdot\vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right]}$$

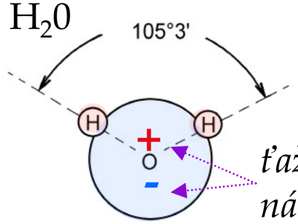
$E(r) \sim \frac{1}{r^3}$ ($E(r) \sim \frac{1}{r^2}$ *pre bodový náboj)*

ak $\vartheta = 0, \pi$: $\vec{p} \parallel \vec{r}$ $(\vec{p}\cdot\vec{r} = pr)$ $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}}{r^3}$ $(\vec{E} \uparrow\uparrow \vec{p})$

ak $\vartheta = \pi/2$: $\vec{p} \perp \vec{r}$ $(\vec{p}\cdot\vec{r} = 0)$ $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{-\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ $(\vec{E} \uparrow\downarrow \vec{p})$



H_20



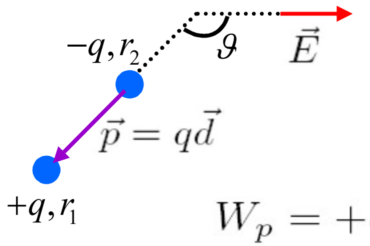
ťažiská nábojov

$p = 6{,}14.10^{-30}$ *Cm*

vo veľkej vzdialenosti $r \gg d$ *považujeme dipól za bodový*

vo veľkej vzdialenosti od bodového dipólu je elektrostatické pole takmer nulové (je superpozíciou polí od +q a –q) – klesá rýchlejšie, než pole bodového náboja, určuje však silové pôsobenie medzi molekulami látok

dipól vo vonkajšom elektrostatickom poli

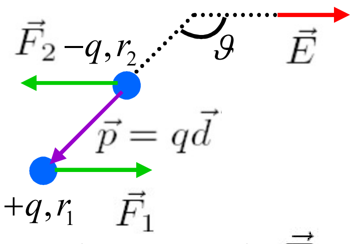


potenciály nábojov, tvoriacich dipól, v homogénnom vonkajšom elektrickom poli $\vec{E}$

$$\left.\begin{cases} \varphi(r_1) = -\int_\infty^{r_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} \\ \varphi(r_2) = -\int_\infty^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \end{cases}\right\} W_p = q\varphi$$

$$W_p = +q\varphi(r_1) + (-q)\varphi(r_2) = q(\varphi(r_1) - \varphi(r_2)) = q(-\int_\infty^{r_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_\infty^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}) =$$

$$= q\int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = q\vec{E} \cdot \int_{r_1}^{r_2} d\vec{r} = -q\vec{E} \cdot \int_{r_2}^{r_1} d\vec{r} = -q\vec{E} \cdot \vec{d} = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE\cos\vartheta$$



$$\boxed{W_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}}$$

ak $\vartheta = \pi$ $(\vec{E} \uparrow\downarrow \vec{p})$, $W_p = pE$ (*maximálne*)
ak $\vartheta = 0$ $(\vec{E} \uparrow\uparrow \vec{p})$, $W_p = -pE$ (*minimálne*)
ak $\vartheta = \pi/2$ $(\vec{E} \perp \vec{p})$, $W_p = 0$

vonkajšie pole $\vec{E}$ *pôsobí na obidva náboje dipólu elektrostatickými silami* $\begin{cases} \vec{F}_1 = +q\vec{E} \\ \vec{F}_2 = -q\vec{E} \end{cases}$

táto dvojica síl vyvolá moment sily $\tau = Fd\sin\vartheta = qEd\sin\vartheta = pE\sin\vartheta$

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}}$$

ak $\vartheta = \pi/2$, $\tau = pE$ (*maximálne*)
ak $\vartheta = 0, \pi$, $\tau = 0$ ($\vartheta = \pi$ – *vratká* poloha)

moment sily natočí dipól do smeru (intenzity) vonkajšieho poľa, tým sa potenciálna energia dipólu minimalizuje
ak $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{E}$, *dvojica síl vonkajšieho poľa „rozťahuje“ dipól, čím ďalej minimalizuje jeho potenciálnu energiu* $W = -pE = -qdE$

príroda vždy hľadá stav s minimálnou energiou!!!

v nehomogénnom elektrickom poli sa potenciálna energia dipólu (pri danej orientácii dipólového momentu voči smeru vonkajšieho poľa) mení v priestore v závislosti od zmeny poľa – na dipól pôsobí dodatočná sila $\vec{F} = -\mathrm{grad} W_p$ *v smere najstrmšieho poklesu potenciálnej energie* $W_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$*, tj. v smere nárastu intenzity poľa – dipól je vťahovaný do oblasti silnejšieho poľa*

Elektrostatické pole v dielektriku

dielektrikum (izolant) – elektricky nevodivá látka, neobsahuje voľné nosiče náboja, náboje sú viazané na atómy – presúvajú sa len na atomárnych rozmeroch

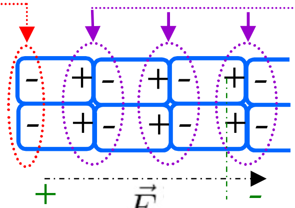
v elektrickom poli sa ťažiská kladných atómových jadier a elektrónových obalov navzájom posúvajú – vznikajú elektrické dipóly – elektrónová polarizácia látky

látky: - nepolárne – bez elektrického poľa nemajú dipólový moment
- polárne – vlastné dipóly aj bez vonkajšieho poľa - vo vonkajšom poli sa natáčajú

elektrická polarizácia $\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum \vec{p}}{\Delta V}$ $[Cm^{-2}]$

elektrická polarizácia určuje objemovú hustotu dipólového momentu v látke

nevykompenzované plošné náboje dipólov na povrchu dielektrika

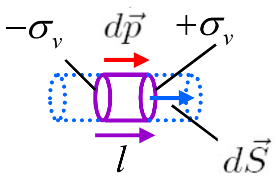


vykompenzované plošné náboje dipólov v objeme dielektrika

$\vec{P} \uparrow\uparrow \vec{E}$

vonkajšie pole $\vec{E}$

σ_v - *plošný viazaný náboj ľubovoľnej roviny v dielektriku*

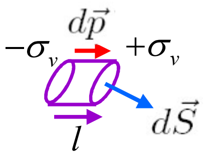


$dp = PdV$ - *dipólový moment objemu dV*

$dp = \sigma_v dSl = \sigma_v dV$

viazaný náboj v objemovom elemente

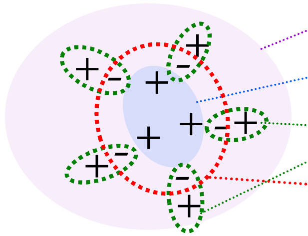
$P = \frac{dp}{dV} = \sigma_v$



$\sigma_v = \vec{P} \cdot \vec{n^o}$

jednotkový vektor plôšky dS

$\sigma_v = P \cos \vartheta$



dielektrikum

vodič nabitý (kladným) voľným nábojom Q

viazané dipóly v polarizovanom dielektriku

integračná plocha S, obopína voľný náboj Q a $\underbrace{\text{viazaný náboj } Q_v \text{ na povrchu}}$ dielektrika

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q+Q_v}{\varepsilon_0} = \frac{Q - \oint \sigma_v dS}{\varepsilon_0} = \frac{Q - \oint \vec{P} \cdot d\vec{S}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_S \underbrace{(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P})} \cdot d\vec{S} = Q$$

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$$ *elektrická indukcia* $[Cm^{-2}]$

$$\boxed{\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q}$$ *Gaussov zákon zovšeobecnený pre dielektriká (Q – voľný náboj!!!)*

látky, ktoré sa v elektrickom poli nepolarizujú (napr. vákuum): $\vec{P} = 0 \Rightarrow \underline{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}}$

pre priestorovo rozložený voľný náboj $Q = \int \rho dV$

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{D} = \rho}$$ *(dif. forma zovšeobecneného Gaussovho zákona)*

$$\rho_{celk} = \varepsilon_0 \mathrm{div}\vec{E} = \mathrm{div}(\vec{D} - \vec{P}) = \rho + \rho_v$$

voľný viazaný náboj

$$\boxed{\rho_v = -\mathrm{div}\vec{P}}$$

$\rho_v = 0$ *v objeme homogénnych dielektrík*

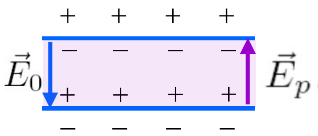
žriedlami vektora $\vec{E}$ *sú všetky náboje*
žriedlami vektora $\vec{D}$ *sú voľné náboje*
žriedlami vektora $\vec{P}$ *sú viazané náboje*

vzťah $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ *je tzv. materiálovým vzťahom pre dielektriká*

$D = \sigma$ - hustota voľného náboja na vodivej ploche (na povrchu vodiča)

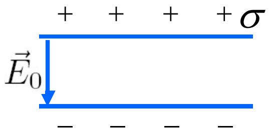
$P = \sigma_v$ - hustota viazaného náboja na pomyselnej ploche v dielektriku

doskový kondenzátor s dielektrikom



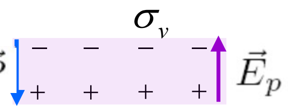
v dielektriku $\vec{P} \uparrow\uparrow \vec{E}_0$, polarizačné pole $\vec{E}_p = \frac{\sigma_v}{\varepsilon_0} \uparrow\downarrow \vec{E}_0$ $\quad \vec{E}_p \uparrow\downarrow \vec{P}$

(vytvorené viazaným nábojom na povrchu dielektrika)



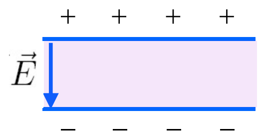
$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$+\ \vec{P}$



$E_p = \frac{\sigma_v}{\varepsilon_0}$

$=$



$E = E_0 - E_p = \frac{\sigma - \sigma_v}{\varepsilon_0}$

výsledné pole v dielektriku $\quad E < E_0 \quad$ vonkajšie pole

výsledné pole v kondenzátore s dielektrikom je menšie ako bez dielektrika

relatívna permitivita dielektrika $\quad \boxed{\varepsilon_r = \frac{E_0}{E}} = \frac{\sigma}{\sigma - \sigma_v} > 1$ $\quad$ [bezrozmerná]

permitivita dielektrika $\quad \boxed{\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r}$ $\quad E = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ $\quad$ [Fm^{-1}]

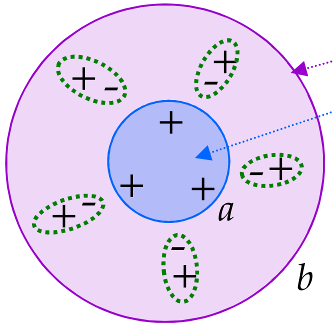
elektrická susceptibilita dielektrika $\quad \boxed{\chi = \varepsilon_r - 1}$ $\quad$ [bezrozmerná]

$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$ $\quad \boxed{\vec{D} = \varepsilon \vec{E}}$ $\quad \vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_r)\vec{E} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$

permitivita, resp. susceptibilita, je mierou polarizovateľnosti dielektrika

pre bežné dielektriká $\varepsilon_r > 1, \chi > 0$ (čísla), pre zložitejšie nehomogénne látky ε_r, χ nie sú čísla ale zložité funkcie polohy, pre anizotropné látky aj funkcie smeru

$$\boxed{\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon}} \longleftarrow \text{ Gaussov zákon v dielektriku pre } \vec{E} \longrightarrow \boxed{\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}}$$

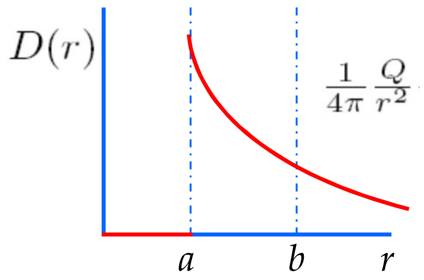


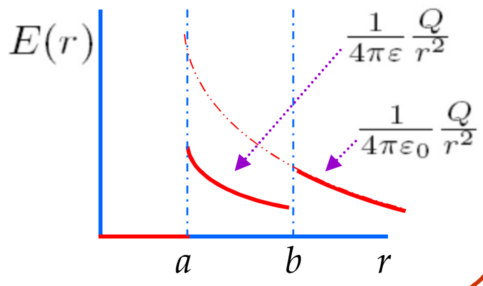
dielektrická guľa polomeru b, do nej koncentricky vnorená
vodivá guľa polomeru a nabitá (kladným) voľným nábojom Q

vákuum

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon}$$

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q$$





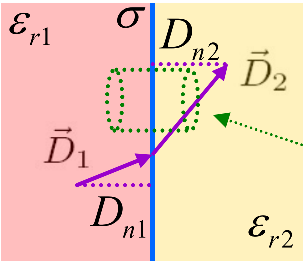
energia elektrického poľa voľných nábojov v dielektriku

$$\boxed{W = \int w_e dV = \frac{1}{2}\int \vec{E}\cdot\vec{D}dV} \qquad \boxed{w_e = \frac{\vec{E}\cdot\vec{D}}{2}}$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \quad \Rightarrow \quad \underline{w_e = \frac{\varepsilon E^2}{2}} \qquad \text{vo vákuu} \quad \underline{w_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}}$$

okrajové podmienky na rozhraní dielektrík

rozhranie materiálov s odlišným ε_r, voľný náboj na rozhraní s plošnou hustotou σ



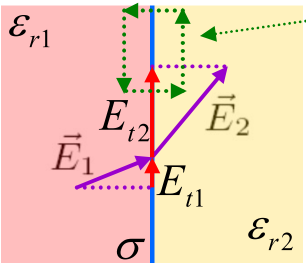
„nekonečne nízka“ valcová plocha

dS

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q$$

$$(D_{n2} - D_{n1})dS = \sigma dS \Rightarrow \underline{D_{n2} - D_{n1} = \sigma}$$

zložky kolmé (normálové) voči rozhraniu (rovnobežné s $d\vec{S}$)



dl

„nekonečne úzka“ obdĺžniková dráha

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

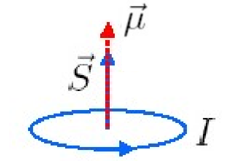
$$(E_{t2} - E_{t1})dl = 0 \Rightarrow \underline{E_{t2} = E_{t1}}$$

zložky rovnobežné (tangenciálne) s rozhraním

pre P: $\underline{P_{n2} - P_{n1} = -\sigma_v}$ *okrajové podmienky pre vektory elektrického poľa*

Magnetické pole prúdovej slučky – magnetický dipól

magnetický moment prúdovej slučky $\vec{\mu} = I\vec{S}$ $[Am^2]$

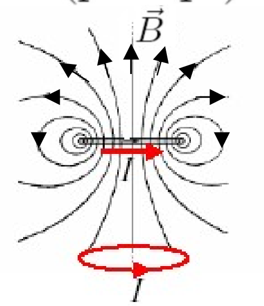


magnetické pole v okolí prúdovej slučky $(\vec{p} = q\vec{d})$

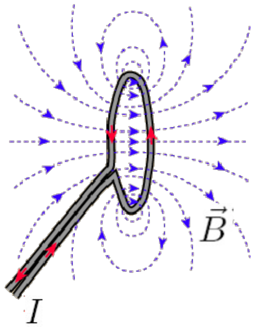
$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}[\frac{3\vec{r}(\vec{\mu}\cdot\vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{\mu}}{r^3}]}$$

$$(\,\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{3\vec{r}(\vec{p}\cdot\vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}])$$

$$(\frac{1}{\varepsilon_0} \to \mu_0,\, \vec{p} \to \vec{\mu}\ )$$



(viď napr. Tirpák: Elektromagnetizmus, kap. 6.1.9)

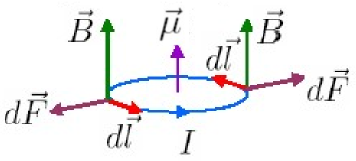


prúdová slučka = magnetický dipól, $\vec{\mu}$ - magnetický dipólový moment

magnetický dipól v homogénnom (vonkajšom) poli $\vec{B}$

potenciálna energia dipólu $\boxed{W = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}}$ $(W = -\vec{p}\cdot\vec{E})$

vonkajšie pole pôsobí na magnetický dipól momentom sily $\boxed{\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B}}$ $(\vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E})$
ktorý „má snahu natočiť" dipólový moment do smeru vonkajšieho poľa (minimalizovať jeho potenciálnu energiu)



ak $\vec{\mu} \uparrow\uparrow \vec{B}$, magnetická sila vonkajšieho poľa „rozťahuje" dipól – zväčšuje plochu slučky a teda aj $\mu = IS$, čím minimalizuje jeho potenciálnu energiu $W = -\mu B$

v nehomogénnom magnetickom poli sa potenciálna energia dipólu (pri danej orientácii dipólového momentu voči smeru vonkajšieho poľa) mení v priestore v závislosti od zmeny poľa – na dipól pôsobí dodatočná sila $\vec{F} = -\mathrm{grad} W_p$ *v smere najstrmšieho poklesu potenciálnej energie* $W_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$, *tj. v smere nárastu intenzity poľa – dipól je vťahovaný do oblasti silnejšieho poľa*

analógia medzi správaním elektrického dipólu v homogénnom elektrickom poli a magnetického dipólu v homogénnom magnetickom poli nie je úplná:

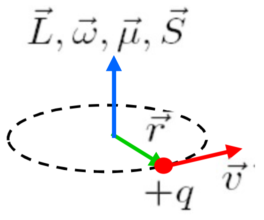
výkon elektrickej sily, otáčajúcej elektrický dipól do smeru poľa, je $\frac{dA}{dt} = \mathcal{P} = \vec{F}_e \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v}$,
túto prácu počas otáčania dipólu koná elektrické pole na úkor potenciálnej energie dipólu v poli,
$W_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$, *ktorá sa zmení o* $\Delta W_p = -pE(1 - \cos\vartheta_0)$
uhol pôvodného natočenia $\vec{p}$ *voči* $\vec{E}$

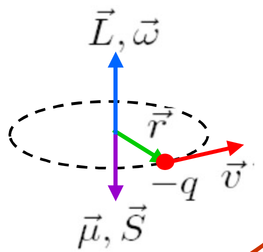
podobne je tomu pri pohybe elektrického dipólu v nehomogénnom elektrickom poli

výkon magnetickej sily, ktorou magnetické pole pôsobí na náboje pohybujúce sa v prúdovej slučke, je
$\mathcal{P} = \vec{F}_m \cdot \vec{v} = q\underbrace{(\vec{v} \times \vec{B})}_{\perp \vec{v}} \cdot \vec{v} = 0$ - *magnetické pole nekoná prácu,* $A = 0$, $W_p = konst.$
(magnetické pole nemôže natočiť magnetický dipól do svojho smeru ani ho premiestňovať v nehomogénnom poli a tým zmeniť jeho potenciálnu energiu v poli) **!**

magnetický dipól je tvorený pohybom nabitých častíc (tj. elektrickým prúdom) v slučke, tieto častice sú súčasne nositeľmi hmotnosti – kruhový pohyb hmotných objektov je charakterizovaný momentom hybnosti $\vec{L}$

pre tok kladných nábojov $+q : \vec{L} \uparrow\uparrow \vec{\omega} \uparrow\uparrow \vec{\mu}$
pre tok záporných nábojov $-q : \vec{L} \uparrow\uparrow \vec{\omega} \uparrow\downarrow \vec{\mu}$

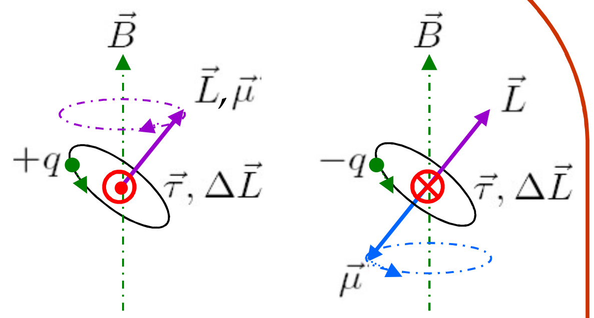




(pokračovanie)

moment sily, ktorým pôsobí vonkajšie homogénne magnetické pole na magnetický dipól, vyvoláva *prírastok* (zmenu) jeho *momentu hybnosti* $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} \perp \vec{\mu},\vec{L}$ - *kolmý* na pôvodný moment hybnosti (i magnetický moment), čo vedie k *precesii* momentu hybnosti aj *magnetického momentu okolo smeru magnetického poľa* – pri precesii sa *uhol* medzi $\vec{\mu}$ a $\vec{B}$ *nemení*, preto

$$W_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = konst.$$



prípad makroskopickej prúdovej slučky

hmotnosť elektrónov pohybujúcich sa v makroskopickej slučke je nepatrná v porovnaní s hmotnosťou samotnej (netočiacej sa) slučky, mechanický moment hybnosti spojený s týmto pohybom je teda nedostatočný na vyvolanie precesie slučky - slučka sa natočí do smeru „vonkajšieho“ poľa

v makroskopickej prúdovej slučke existujú elektrické sily medzi elektrónmi prenášajúcimi prúd a atómami tvoriacimi materiál slučky – tieto sú zodpovedné (podobne ako v prípade vzájomného silového pôsobenia dvoch prúdovodičov) za mechanickú prácu konanú pri natáčaní a premiestňovaní slučky - definovanie potenciálnej energie slučky ako práce konanej pri jej pohybe má teda fyzikálny zmysel

navyše sme pri minimalizovaní potenciálnej energie slučky $W_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ *predpokladali nemeniacu sa veľkosť jej magnetického momentu* $\vec{\mu}$ *- počas pohybu vo „vonkajšom“ magnetickom poli sa však vo vodivej slučke indukuje prúd pôsobiaci proti zmene (Lenzov zákon), tj. proti zosilňovaniu magnetického toku slučkou – takýto prúd by mal za následok pokles veľkosti* $\vec{\mu}$ *- na udržanie jej konštantnej hodnoty je potrebné vynaložiť dodatočnú energiu (zdroj prúdu v slučke) – celková energia slučky sa teda pri takomto pohybe (natáčaní, premiestňovaní) nezníži (!)*

(pokračovanie)

rovnaká úvaha povedie aj k nárastu celkovej energie zdroja udržiavajúceho konštantné „vonkajšie“ magnetické pole, ktorý je vystavený v čase sa meniacemu magnetickému poľu pohybujúcej sa slučky

pravidlo o minimalizácii energie pri spontánnych procesoch v prírode ostáva v platnosti, príslušnou energiou (termodynamickým potenciálom) však v prípade makroskopickej slučky nie je uvažovaná potenciálna ani celková energia slučky (resp. celková energia slučky aj zdroja „vonkajšieho“ poľa)

prípad mikroskopického magnetického dipólu

na atomárnej úrovni existujú magnetické dipóly tvorené „rotačným pohybom“ jednotlivých elektrónov – predpokladajme pre jednoduchosť elektrón obiehajúci po pomyselnej kruhovej orbite, pričom stabilita takejto orbity a s ňou spojeného magnetického momentu sú zabezpečené bližšie neurčenými silami (ktorých pôvod je mimo rámec klasickej fyziky) – celá hmotnosť dipólu (tj. elektrónu) koná rotačný pohyb, moment sily vonkajšieho magnetického poľa teda vyvolá precesný pohyb okolo smeru $\vec{B}$ *pri nezmenenej potenciálnej energii dipólu v poli (tj. pri nezmenenom uhle medzi* $\vec{\mu}$ *a* $\vec{B}$ *)*

v nehomogénnom poli dochádza k premiestňovaniu mikroskopického dipólu, pričom prácu (rovnú rozdielu potenciálnych energií) konajú („neklasické“) sily zabezpečujúce stabilitu dipólu – žiadna „klasická“ dodatočná práca nie je potrebná, energia takéhoto dipólu vo vonkajšom poli $W_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ *sa minimalizuje*

prípad makroskopickej sústavy mikroskopických magnetických dipólov

interakcia elementárnych dipólov so svojim okolím sprostredkováva (oproti predchádzajúcemu prípadu) konanie práce potrebnej na natočenie dipólov do smeru vonkajšieho poľa – celý proces má štatistický charakter (permanentné magnety, kompas)

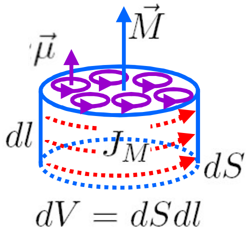
Magnetické pole v magnetiku

magnetikum – látka obsahujúca vlastné cirkulačné prúdy - magnetické momenty

magnetizácia $\vec{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum \vec{\mu}_i}{\Delta V}$ $[Am^{-1}]$ $(\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V})$

$\vec{M} = n\vec{\mu}$ - *objemová hustota magnetických momentov*

počet magn. momentov v jedn. objeme



v objemovom elemente dV sa prúdy susediacich dipólov „kompenzujú“, „nevykompenzovaný“ je plošný prúd po povrchu elementu dV,

ak vnímame element dV ako jediný dipól tvorený plošným prúdom J_M :

$$d\mu = dIdS = J_M dl dS = J_M dV \qquad M = \frac{d\mu}{dV} = J_M$$

$M = J_M \ (P = \sigma_v)$ *hustota viazaných plošných cirkulačných prúdov*

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0(I + \oint_L \vec{M}\cdot d\vec{s}) = \mu_0(I + I_M) \qquad I_M = \oint_L J_M ds = \oint_L \vec{M}\cdot d\vec{s}$$

voľný prúd

celkový viazaný (cirkulačný) magnetizačný prúd

intenzita magnetického poľa $\boxed{\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}}$ $[Am^{-1}]$

$\boxed{\oint_L (\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}) \cdot d\vec{s} = \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{s} = I}$ *Ampéreov zákon zovšeobecnený pre magnetiká*

vzťah $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ *je tzv. materiálovým vzťahom pre magnetiká* *v dif. tvare* $\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \mathrm{rot}\vec{M})$ $\boxed{\vec{j}_M = \mathrm{rot}\vec{M}}$ *prúdová hustota viazaných magnetizačných prúdov*

hustota voľných prúdov $\boxed{\vec{j} = \mathrm{rot}\vec{H}}$ *(dif. tvar zovšeobecneného Ampéreovho zákona)*

v nemagnetickom prostredí $M = 0$ $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$

magnetická susceptibilita $\boxed{\chi = \frac{M}{H}}$ [*bezrozmerná*]

relatívna permeabilita $\boxed{\mu_r = 1 + \chi}$ [*bezrozmerná*]

permeabilita magnetika $\boxed{\mu = \mu_0\mu_r}$ [Hm^{-1}]

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi\vec{H}) = \\ = \mu_0\mu_r\vec{H} = \mu\vec{H}$$

$\chi < 0\ ,\ \mu_r < 1\ (\mu_r \to 1)$ *diamagnetiká*

$\chi > 0\ ,\ \mu_r > 1\ (\mu_r \to 1)$ *paramagnetiká*

$\chi = 0\ ,\ \mu_r = 1\ ,\ \mu = \mu_0$ *nemagnetické látky*

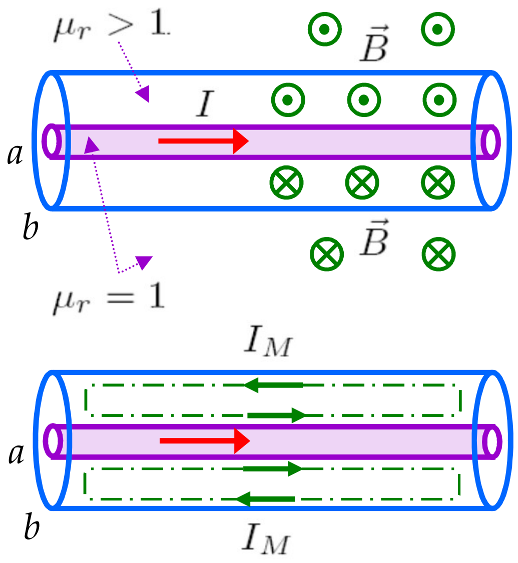
$\chi, \mu_r \gg 0\ (\sim 10^3 - 10^5)$ *feromagnetiká*

permeabilita, resp. susceptibilita, sú mierou magnetizovateľnosti látky

pre zložitejšie nehomogénne látky nie sú čísla ale zložité funkcie polohy, pre anizotropné látky aj funkcie smeru

$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu I}$ $\longleftarrow$ *Ampéreov zákon v magnetiku pre* $\vec{B}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\mathrm{rot}\vec{B} = \mu\vec{j}}$

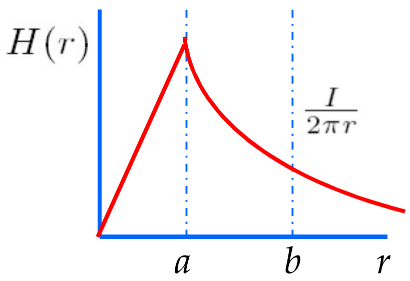
valcový nemagnetický ($\mu_r = 1$) vodič polomeru a pretekaný prúdom I súoso vnorený do magnetického valca ($\mu_r > 1$) polomeru b

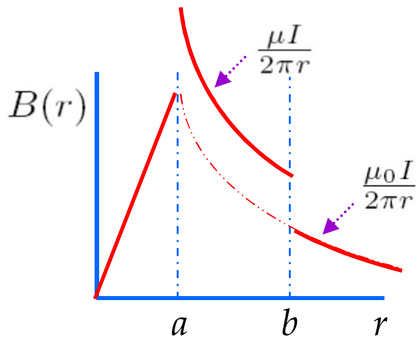


$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu I$ $\qquad$ $\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = I$

magnetizačné prúdy v magnetiku s $\mu_r > 1$ *zosilňujú magnetickú indukciu*

$M = \chi H = (\mu_r - 1)H$ $\qquad$ $I_M = (\mu_r - 1)I$





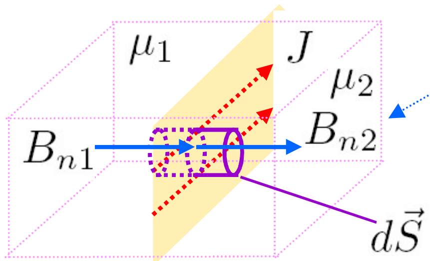
energia magnetického poľa v magnetiku

$$\boxed{W = \int w_m dV = \frac{1}{2}\int \vec{H} \cdot \vec{B} dV} \qquad \boxed{w_m = \frac{\vec{H}\cdot\vec{B}}{2}} \qquad \text{vo vákuu} \quad w_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

(v analógii s $w_e = \frac{\varepsilon E^2}{2}$ *)*

okrajové podmienky na rozhraní magnetík

rozhranie materiálov s odlišným μ, voľný plošný prúd J tečúci plochou rozhrania

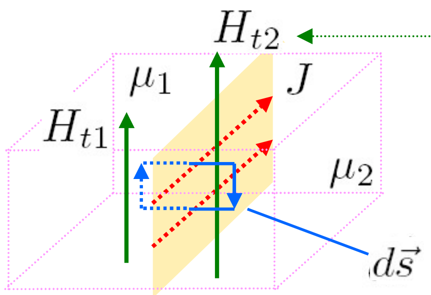


„nekonečne nízka" valcová plocha

normálové zložky magnetického poľa (kolmé na rozhranie)

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow B_{n2}dS - B_{n1}dS = 0$$

$$\underline{B_{n1} = B_{n2}} \qquad \vec{n^o}\cdot(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$



„nekonečne úzka"
obdĺžniková dráha

tangenciálne zložky magnetického poľa (rovnobežné s rozhraním)

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{s} = I \Rightarrow H_{t2}dl - H_{t1}dl = Jdl$$

$$\underline{H_{t2} - H_{t1} = J} \qquad \vec{n^o}\times(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}$$

okrajové podmienky pre vektory magnetického poľa *fyzikálny zmysel vektora $\vec{H}$ (podobne ako $\vec{D}$) nie je vždy zrejmý, v niektorých prípadoch sa však dá interpretovať nasledovne:*

H má zmysel vonkajšieho poľa (vzhľadom na magnetikum), jeho zdrojom sú vonkajšie voľné prúdy, ktoré vyvolávajú magnetizáciu látky – je to pole, „ktoré by bolo v materiáli, keby nebol magnetický"
M má zmysel poľa vytváraného magnetikom, jeho zdrojom sú viazané cirkulačné prúdy v látke ako odozva na vonkajšie pole

B má zmysel výsledného magnetického poľa v magnetiku – je to skutočné pole v materiáli, má silové účinky (na pohybujúce sa náboje)

elektrickým analógom magnetickej indukcie B je intenzita elektrického poľa E (nie elektrická indukcia D!) – veličina so silovými účinkami (na všetky náboje)
elektromagnetická (Lorentzova) sila je vždy (vo vákuu i v látkach) určená týmito základnými vektormi elektromagnetického poľa, $\vec{F} = q\underline{\vec{E}} + q\vec{v} \times \underline{\vec{B}}$!!!
(asymetria v terminológii má len historické dôvody)

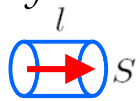
viazané prúdy v magnetickom materiáli môžu výsledné magnetické pole B v látke zosilniť ($\mu_r > 1$) alebo zoslabiť ($\mu_r < 1$) v porovnaní s vonkajším poľom $\mu_0 H$, naproti tomu viazané náboje v dielektrikách výsledné elektrické pole E v látke vždy zoslabujú ($\varepsilon_r \geq 1$) v porovnaní s poľom voľných nábojov $\frac{D}{\varepsilon_0}$
konvenciou určený smer vektora $\vec{P}$ (resp. vektora dipólového momentu $\vec{p}$) spôsobuje $\vec{P} \uparrow\uparrow \vec{E} \uparrow\uparrow \vec{D}$ a teda $|\vec{E}| = \frac{|\vec{D}-\vec{P}|}{\varepsilon_0} \leq \frac{|\vec{D}|}{\varepsilon_0}$
naproti tomu vektor $\vec{M}$ môže nadobúdať obe orientácie voči vektoru $\vec{H}$, a teda $|\vec{B}| = \mu_0|\vec{H} + \vec{M}|$ môže byť menšie i väčšie než $\mu_0|\vec{H}|$

analógie vo fyzike

tok náboja (el. prúd) $I = \int \vec{j} \cdot d\vec{S} = \sigma \int \vec{E} \cdot d\vec{S}$ $\quad (\vec{j} = \sigma \vec{E})$

magnetický tok $\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu \int \vec{H} \cdot d\vec{S}$ $\quad (\vec{B} = \mu \vec{H})$

tok veličiny valcom



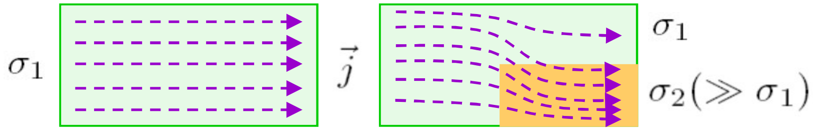
elektromotorické napätie $U = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$

elektrický odpor (rezistancia) $R = \frac{U}{I} = \frac{\int \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\sigma \int \vec{E} \cdot d\vec{S}} = \frac{l}{\sigma S}$

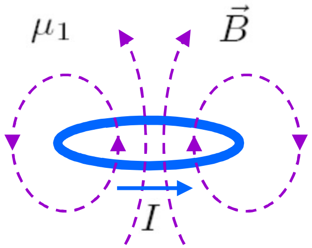
magnetomotorické napätie $\mathcal{F} = \int \vec{H} \cdot d\vec{l}$

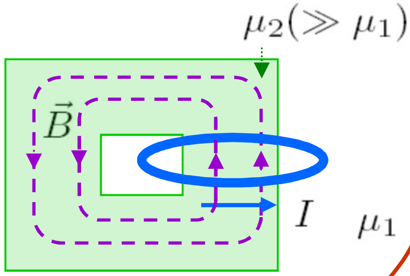
magnetický odpor (reluktancia) $R_m = \frac{\mathcal{F}}{\Phi} = \frac{\int \vec{H} \cdot d\vec{l}}{\mu \int \vec{H} \cdot d\vec{S}} = \frac{l}{\mu S}$

hustota tokočiar elektrického prúdu je úmerná elektrickej vodivosti materiálu – prúd tečie v materiáli (elektrickom obvode) cestou menšieho odporu



permeabilita magnetika je analógom elektrickej vodivosti – je mierou priepustnosti materiálu voči magnetickému toku) – magnetické indukčné čiary si v priestore („magnetickom obvode“) „razia cestu“ menšieho odporu





Maxwellove rovnice v látkovom prostredí

Faradayov zákon	$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$	$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Ampéreov zákon	$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{s} = I + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$	$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
Gaussove zákony	$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$	$\mathrm{div}\vec{D} = \rho$
	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	$\mathrm{div}\vec{B} = 0$

materiálové vzťahy $\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$ $\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r}\vec{B}$

hustota elektromagnetickej energie $w_{em} = w_e + w_m = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} + \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2}$

Michal Maheľ
FYZIKA I.
Pohyb
Pohyb vo veľkom súbore častíc
Fyzikálne polia

Vydavateľ:
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK
Knižničné a edičné centrum
Bratislava 2022
1. vydanie

ISBN:
978-80-8147-118-6