Michal Maheľ

FYZIKA II.

Kmity

Vlny

Elektromagnetické vlny

Teória relativity

Bratislava 2022

FYZIKA II.
Kmity
Vlny
Elektromagnetické vlny
Teória relativity

Autor:
Michal Maheľ
Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra experimentálnej fyziky

Vydavateľ:
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK
Knižničné a edičné centrum
Bratislava 2022
1. vydanie

ISBN:
978-80-8147-120-9

Úvod

Cyklus publikácii Fyzika I.-III. predstavuje súhrn poznatkov na úrovni bakalárskeho štúdia fyziky, a je určený ako sprievodný učebný materiál študentom fyziky a príbuzných prírodných a technických vied. Poslúži však aj ako stručný prehľad pre absolventov a praktizujúcich odborníkov. Nejde o štandardnú učebnicu so súvislým textom, ale o súhrn výrokov (matematických aj verbálnych) podstatných pre danú tému, podľa potreby rozšírených o stručný komentár či matematické odvodenie. V tomto zmysle zhruba odpovedá „zápisu“ prednášok na jednotlivé témy. Výber a poradie tém sú zvolené tak, aby navodili syntetizujúci pohľad na fyziku, ktorý mnohým (najmä starším) štandardným učebniciam chýba.

Fyzika I. sa v prvej časti zaoberá základnými formami newtonovského pohybu – translačným a rotačným. Tieto poznatky aplikuje v druhej časti na systémy s veľkým počtom častíc, a formuluje základy molekulovej fyziky, štatistickej fyziky a termodynamiky. V tretej časti ponúka základný opis fundamentálnych klasických polí – gravitačného a elektromagnetického.

Fyzika II. sa venuje kmitom a vlnám, pričom prelínaním sa mechanických a elektromagnetických kmitov/vĺn v texte sa zdôrazňujú univerzálne fyzikálne zákonitosti tohto druhu pohybu. Posledná časť tohto dielu sa venuje relativistickým aspektom pohybu.

Fyzika III. v prvej časti formuluje základy kvantovej mechaniky, atómovej a jadrovej fyziky. Druhá časť ponúka prehľad základných fyzikálnych mechanizmov určujúcich mechanické, elektrické, magnetické a optické vlastnosti látok.

Text dodržuje istý „farebný kód“: Nové pojmy sú zvýraznené modrým textom. Dôležitosť tvrdení je vyjadrená (vo vzostupnom poradí) fialovým/červeným zvýraznením textu alebo modrým/červeným podčiarknutím/orámovaním. Doplňujúce komentáre a odvodenia sú ohraničené hnedými oválnymi rámčekmi, a matematické vsuvky zelenými hranatými rámčekmi.

Pri najlepšej snahe autora nie je možné vylúčiť nepresnosti či nejasné tvrdenia, za ktoré sa autor ospravedlňuje.

Obsah

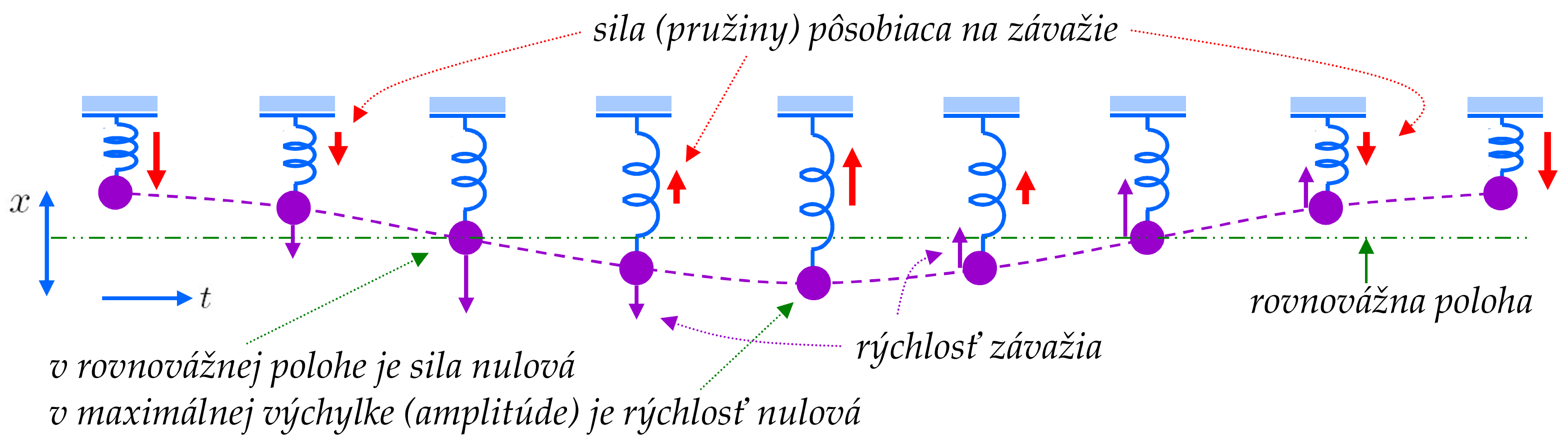
KMITY

Harmonický oscilátor

kmitavý (oscilačný) pohyb je periodický pohyb telesa (hmotného bodu) okolo rovnovážnej polohy

najjednoduchším príkladom kmitavého pohybu je pohyb závažia (hmotného bodu o hmotnosti m) upevneného na pružine, vychýlenie tohto závažia z jeho rovnovážnej (kľudovej) polohy vyvolá spätnú silu (stlačenej alebo natiahnutej) pružiny, pôsobiacu proti vychýleniu
pre malé výchylky z rovnovážnej polohy je spätná sila pružiny lineárna - priamo úmerná výchylke

pohybová rovnica lineárnej pružiny $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$ *koeficient tuhosti pružiny*



pri riešení diferenciálnych rovníc vo fyzike namiesto exaktných matematických postupov často používame metódu „uhádnutia“ riešenia (správneho aj z fyzikálneho hľadiska, tj. takého riešenia, ktoré v prírode naozaj nastáva)

hľadajme riešenie v tvare harmonických kmitov $x = x_0 \cos(\omega_0 t)$

funkcie sinα, cosα *nazývame harmonickými funkciami, riešenia tohto typu predstavujú periodicky sa opakujúci dej (v tomto prípade v čase), dosadením takéhoto riešenia do diferenciálnej rovnice vypočítame neznáme parametre riešenia* x_0 *a* ω_0 *(ak existujú), pri zadaných počiatočných podmienkach*

$$\frac{dx}{dt} = x_0 \frac{d(\cos(\omega_0 t))}{d(\omega_0 t)} \cdot \frac{d(\omega_0 t)}{dt} = x_0(-\sin(\omega_0 t)) \cdot \omega_0 = -x_0\omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x_0\omega_0 \frac{d(\sin(\omega_0 t))}{dt} = -x_0\omega_0 \frac{d(\sin(\omega_0 t))}{d(\omega_0 t)} \cdot \frac{d(\omega_0 t)}{dt} = -x_0\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) = -\omega_0^2 x$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x = -kx \Rightarrow m\omega_0^2 \cancel{x} = k\cancel{x}$$

$$m\omega_0^2 = k \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$ *vlastná uhlová frekvencia* $[rad\, s^{-1}]$

výsledné riešenie - vlastné harmonické kmity s vlastnou uhlovou frekvenciou

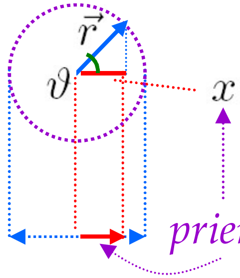
$$\underline{x = x_0 \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t)}$$

amplitúda kmitov, určená počiatočnými podmienkami (počiatočná výchylka pre $t = 0$*)*

jednorozmerný harmonický oscilátor = priemet rovnomerného kruhového pohybu

rovnomerný pohyb po kružnici

kmitavý pohyb



$$x = r\cos\vartheta \qquad \vartheta = \frac{d\vartheta}{dt}t = \omega_0 t \qquad x = r\cos(\omega_0 t)$$

uhlová rýchlosť

$$\omega_0 = \frac{v}{r} = \frac{d\vartheta}{dt}$$

priemet kruhového pohybu do smeru x

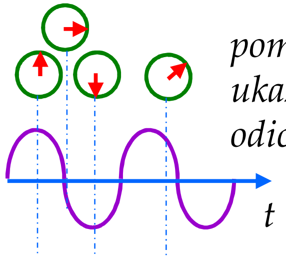
uhlová rýchlosť pohybu po kružnici odpovedá uhlovej frekvencii kmitavého pohybu

dostredivé zrýchlenie pohybu po kružnici $a = \frac{v^2}{r} = \omega_0^2 r$

priemet do smeru x $a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 r\cos\vartheta = -a\cos\vartheta = -\omega_0^2 x$ *- zrýchlenie kmitavého pohybu* *všeobecnejšie riešenie* $x = x_0 \cos(\omega_0(t - t_0)) = x_0 \cos(\underbrace{\omega_0 t + \varphi_0}_{\text{fáza oscilácií}})$, $\varphi_0 = -\omega_0 t_0$ *počiatočná fáza*

(s posunutým počiatkom – max. výchylka x_0 bola v čase t_0)

výchylka oscilátora ako funkcia času



pomyselné hodiny ukazujú fázu periodických kmitov

fáza cyklického (periodického) deja predstavuje štádium tohto deja vzhľadom na jeho (pomyselný) začiatok

fáza cyklického deja, vyjadrená v uhlovej alebo oblúkovej miere, je uhol „natočenia ručičky pomyselných hodín“ voči zvolenému počiatku deja, $\varphi = 0°$ (0) odpovedá počiatku cyklu a $\varphi = 360°$ (2π) jeho zavŕšeniu (počiatku nového cyklu), počiatok – počiatočnú fázu φ_0 (počiatočný uhol „natočenia ručičky pomyselných hodín“ v čase $t = 0$) - možno zvoliť ľubovoľne

okamžitá rýchlosť kmitavého pohybu $v = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$

počiatočné podmienky v čase $t = 0$: výchylka x_p , rýchlosť v_p

na jednoznačné určenie riešenia diferenciálnej rovnice je potrebných toľko počiatočných podmienok, koľkého rádu je daná dif. rovnica (rád dif. rovnice je určený najvyšším rádom derivácie prítomnej v rovnici), pohybová rovnica harmonického oscilátora je dif. rovnicou 2. rádu – vyžaduje 2 počiatočné podmienky, z nich sa vypočítajú parametre riešenia (x_0, φ_0)

$$t = 0:\ x = x_p = x_0 \cos\varphi_0\ ,\ v = v_p = -\omega_0 x_0 \sin\varphi_0 \Rightarrow v_p = -\omega_0 x_p \tan\varphi_0$$

$$\varphi_0 = \arctan\frac{-v_p}{\omega_0 x_p}$$

$$x_0 = \frac{x_p}{\cos\varphi_0}$$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$ $\quad$ $y = \sin\alpha$ $\quad$ $y = \cos\alpha$ $\quad$ *to isté pre* tan,cot

$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$ $\quad$ $\alpha = \arcsin y$ $\quad$ $\alpha = \arccos y$ $\quad$ *(tiež* tg , cotg*)* *potenciálna energia závažia na napätej pružine = práca vykonaná na vychýlenie závažia (proti sile pružiny) z rovnovážnej polohy 0 do polohy x:*

$$W_p = -\int_0^x \vec{F}\cdot d\vec{s} = -\int_0^x F\,dx = k\int_0^x x\,dx = \frac{1}{2}kx^2 \qquad \boxed{W_p = \frac{1}{2}kx^2}$$

$$W_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_0^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi_0) \qquad W_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2x_0^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi_0)$$

pri maximálnej výchylke - amplitúde $x = x_{max} = x_0\ ,\quad v = 0$

$$\cos(\omega_0 t+\varphi_0) = 1 \Rightarrow (\omega_0 t+\varphi_0) = 0 \ \Rightarrow v = -\omega_0 x_0\sin(\omega_0 t+\varphi_0) = -\omega_0 x_0 \sin 0 = 0$$

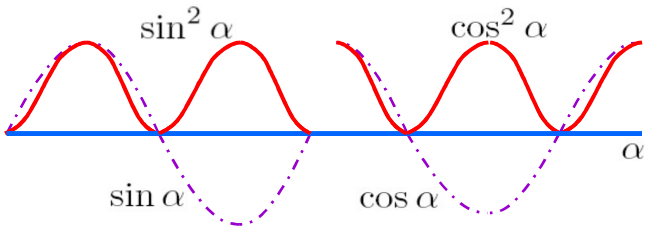
$$W_p = \frac{1}{2}kx_0^2 = \underline{W_{pmax}} \qquad W_k = \underline{0}$$

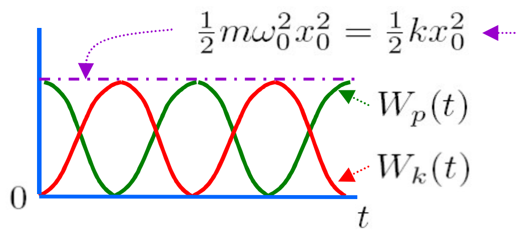
pri prechode rovnovážnou polohou $x = 0\ ,\ v = v_{max}$

$$\cos(\omega_0 t+\varphi_0) = 0 \Rightarrow (\omega_0 t+\varphi_0) = \pi/2 \ \Rightarrow v = -\omega_0 x_0\sin(\pi/2) = -\omega_0 x_0 = v_{max}$$

$$W_p = \underline{0} \qquad W_k = \frac{1}{2}m\omega_0^2x_0^2 = \underline{W_{kmax}}$$

$$\frac{1}{2}m\omega_0^2x_0^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 \Rightarrow \underline{W_{kmax} = W_{pmax}}$$





celková energia oscilátora

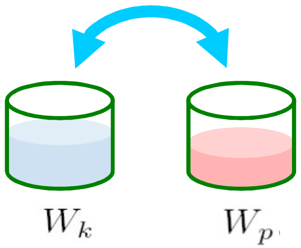
$$W = W_p + W_k = \frac{1}{2}kx_0^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) =$$

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

$$= \frac{1}{2}kx_0^2\underbrace{(\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0))}_{1} = \underset{W_{pmax}}{\frac{1}{2}kx_0^2} = \underset{W_{kmax}}{\frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2}$$

$$W = W_p + W_k = W_{kmax} = W_{pmax}$$

pri harmonických kmitoch závažia na pružine dochádza k cyklickej premene potenciálnej energie závažia (v dôsledku deformácie pružiny) na jeho kinetickú energiu a naopak (2-krát za periódu kmitov) - ich súčet sa zachováva



ak nedochádza k stratám energie tlmením, závažie na pružine nepotrebuje na udržanie vlastných harmonických kmitov prísun energie zvonka – celková mechanická energia, nazhromaždená v oscilátore počiatočným vychýlením závažia (tj. prácou potrebnou na presun závažia proti spätnej sile pružiny), sa zachováva a jej cyklická premena z jednej formy na druhú zabezpečuje cyklické netlmené kmity na vlastnej frekvencii

Vynútené kmity harmonického oscilátora

vynútené kmity oscilátora sú kmity vyvolané pretrvávajúcou periodickou vonkajšou silou

pohybová rovnica harmonického oscilátora s budením $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F(t)$ *budiaca sila*

nech $F(t) = F_0 \cos \omega t$ *(harmonické budenie)* $\omega \neq \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

riešenie hľadáme v tvare $x(t) = x_0 \cos \omega t$ *- vynútené kmity s frekvenciou budiacej sily*

$-m\omega^2 x_0 \cancel{\cos \omega t} = -m\omega_0^2 x_0 \cancel{\cos \omega t} + F_0 \cancel{\cos \omega t}$ *amplitúda kmitov* $x_0 = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{F_0}{\mathcal{Z}}$

výraz $\mathcal{Z} = m(\omega_0^2 - \omega^2) = k - m\omega^2$ *predstavuje akýsi „odpor“ (impedanciu) systému voči zmene jeho pohybového stavu, je určený tuhosťou pružiny a zotrvačnosťou (hmotnosťou a rýchlosťou) závažia, budiaca sila musí prekonávať tento odpor aby menila výchylku či rýchlosť závažia, s rastúcou impedanciou klesá amplitúda výchylky*

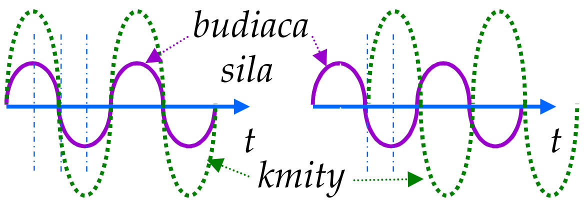
dosadením úplného riešenia do pohybovej rovnice dostávame

$$\overbrace{\boxed{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}F(t)} = \boxed{-\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2}F(t)}}^{\text{sily predstavujúce impedanciu voči budeniu}} + \boxed{F(t)}$$

„zotrvačná sila“ pohybujúceho sa závažia — *spätná sila deformovanej pružiny* — *budiaca sila zdroja budenia*

$\omega \ll \omega_0$: $x \uparrow\uparrow F$, $x_0 > 0$, *kmity sú vo fáze s budením*
(výchylka závažia sleduje budiacu silu)

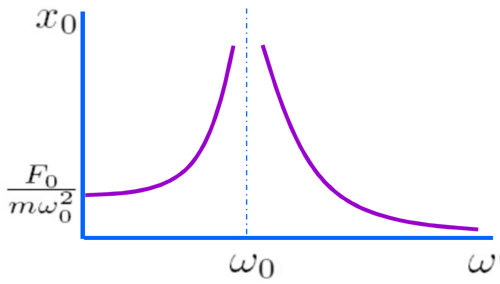
$\omega \gg \omega_0$: $x \uparrow\downarrow F$, $x_0 < 0$, *kmity sú v protifáze voči budeniu*
(výchylka závažia má opačný smer voči budiacej sile)



pre $\omega \ll \omega_0$ je "zotrvačná sila" závažia zanedbateľne malá (malé rýchlosti závažia) a impedancia oscilátora je daná prevažne spätnou silou pružiny, impedancia a teda ani amplitúda kmitov prakticky nezávisia na frekvencii ($k \gg \cancel{m\omega^2}$)
deformáciu pružiny vyvoláva najmä budiaca sila pôsobiaca proti (v protifáze, $\omega_0^2 - \omega^2 > 0$) spätnej sile pružiny (ktorá je vždy v protifáze voči výchylke) – výchylka je teda vo fáze s budením

pre $\omega \gg \omega_0$ rýchlosť závažia mení smer skôr než sa závažie „stihne" (kvôli zotrvačnosti) dostatočne vychýliť z rovnovážnej polohy (tj. výchylky sú malé) – spätná sila pružiny (úmerná výchylke) je zanedbateľná voči zotrvačnej sile závažia (veľké rýchlosti) a impedancia oscilátora je tvorená prevažne zotrvačnosťou závažia ($\cancel{k} \ll m\omega^2$), s rastúcou frekvenciou impedancia rastie (v absolútnej hodnote, $\mathcal{Z} < 0$) a amplitúda výchylky klesá
zotrvačná sila (v smere výchylky) teda prakticky kompenzuje budiacu silu ($\omega_0^2 - \omega^2 < 0$), ktorá je v protifáze s výchylkou (čo je vyjadrené zápornou hodnotou $\mathcal{Z}$)

$\omega \approx \omega_0$: $\underline{x_0 \rightarrow \infty}$ - amplitúda kmitov oscilátora prudko rastie - nastáva rezonancia (vlastná frekvencia oscilátora sa preto tiež nazýva rezonančnou)



pri $\omega \rightarrow \omega_0$ sú spätná sila pružiny a zotrvačnosť závažia vykompenzované navzájom, budiaca sila teda „nepociťuje" žiaden odpor ($\mathcal{Z} = k - m\omega^2 \rightarrow 0$) a spôsobuje „neohraničený" nárast amplitúdy (vlastných) kmitov

naša pohybová rovnica platí pre malé kmity (tj. $\omega_0^2-\omega^2$ dostatočne veľké), kedy je spätná sila pružiny lineárna ($-kx$)
pre veľké amplitúdy kmitov je táto sila nelineárna, $-kx - k_1x^2 - \dots$, a naša pohybová rovnica prestáva platiť - kmity nie sú harmonické

$$W_k = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{F_0^2}{2m}\frac{\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2}\sin^2\omega t \qquad W_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{F_0^2}{2m}\frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2}\cos^2\omega t$$

pri $\omega \neq \omega_0$ sa súčet kinetickej a potenciálnej energie sústredenej v oscilátore nezachováva

budený oscilátor nie je uzavretým systémom – do jeho energetickej bilancie treba prirátať výmenu energie s „vonkajším" zdrojom budenia (tj. prácu konanú budiacou silou)

práca konaná budiacou silou je $A = \int F(t)dx$, *pričom* $F(t) = F_0\cos\omega t$, $x(t) = x_0\cos\omega t$

$$dx = x_0 d(\cos\omega t)$$

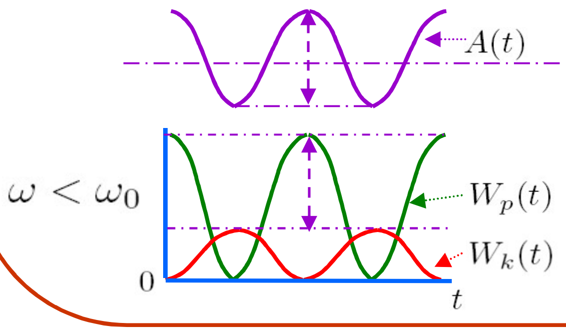
$$A = F_0x_0\int(\cos\omega t)d(\cos\omega t) = \boxed{\frac{F_0x_0}{2}}\cos^2\omega t + C = \boxed{\frac{F_0^2}{2m(\omega_0^2-\omega^2)}}\cos^2\omega t + C$$

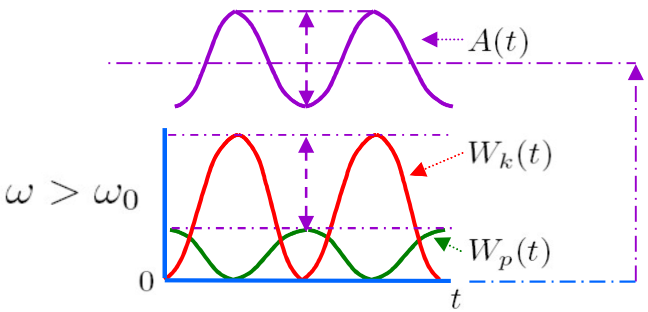
integračná konštanta (neurčitý integrál)

$$\underbrace{\frac{F_0^2}{2m}\frac{\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2}\sin^2\omega t}_{W_k} + \underbrace{\frac{F_0^2}{2m}\frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2}\cos^2\omega t}_{W_p} = \underbrace{\boxed{\frac{F_0^2}{2m}\frac{(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2}}\cos^2\omega t + C}_{A}$$

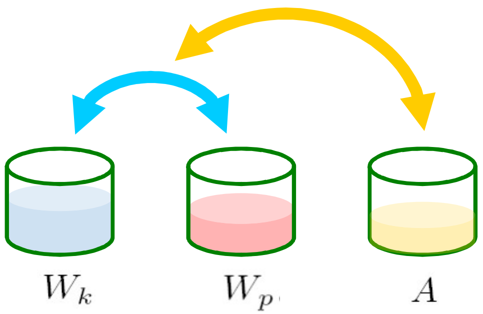
$$\frac{F_0^2}{2m}\frac{\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2}\overbrace{(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t)}^{1} = C$$

- celková energia (vrátane energie budenia) je konštantná





absolútna „poloha" práce budiacej sily závisí od hodnoty C



stredná hodnota funkcie periodickej v čase

$$\langle f(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)d\alpha$$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ - *perióda funkcie* $\alpha = \omega t + \varphi$, $d\alpha = \omega dt$

napr.
$$\langle \sin\alpha\rangle = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin\alpha d\alpha = 0$$
$$\langle \sin^2\alpha\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2\alpha d\alpha = \frac{1}{2}$$

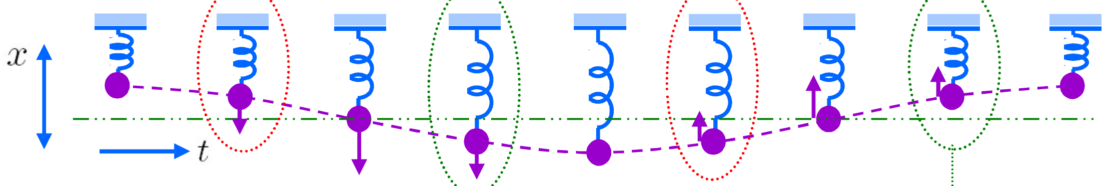
stredné hodnoty energií sústredených v oscilátore za periódu (resp. niekoľko periód) kmitov

$$\langle W_k\rangle = \frac{F_0^2}{4m}\frac{\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2} \qquad \langle W_p\rangle = \frac{F_0^2}{4m}\frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2} \qquad \langle A\rangle = \frac{F_0^2}{4m(\omega_0^2-\omega^2)} = \frac{F_0^2}{4m}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2}$$

(stredné hodnoty energií závisia od frekvencie budenia)

$$\overbrace{\langle W_k\rangle + \langle W_p\rangle}^{\langle W\rangle} - \langle A\rangle = \frac{F_0^2}{2m}\frac{\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2} = C$$
- *stredná hodnota celkovej energie a práce v oscilátore*

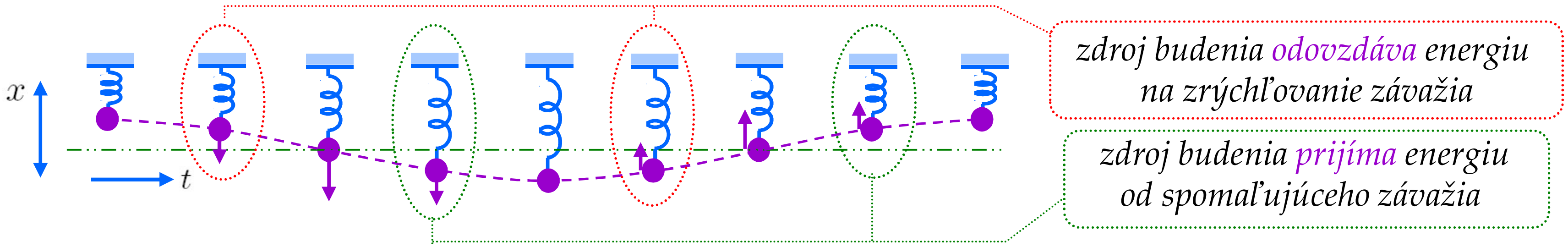
pre $\omega \ll \omega_0$ je $\langle W_p\rangle \gg \langle W_k\rangle$ (malé rýchlosti závažia), zdroj budenia odovzdáva oscilátoru energiu v podobe práce konanej budiacou silou na deformáciu pružiny (proti spätnej sile pružiny), deformovaná pružina odovzdáva prijatú (potenciálnu) energiu späť zdroju budenia tým, že koná prácu pri spätnom premiestnení závažia (proti budiacej sile)



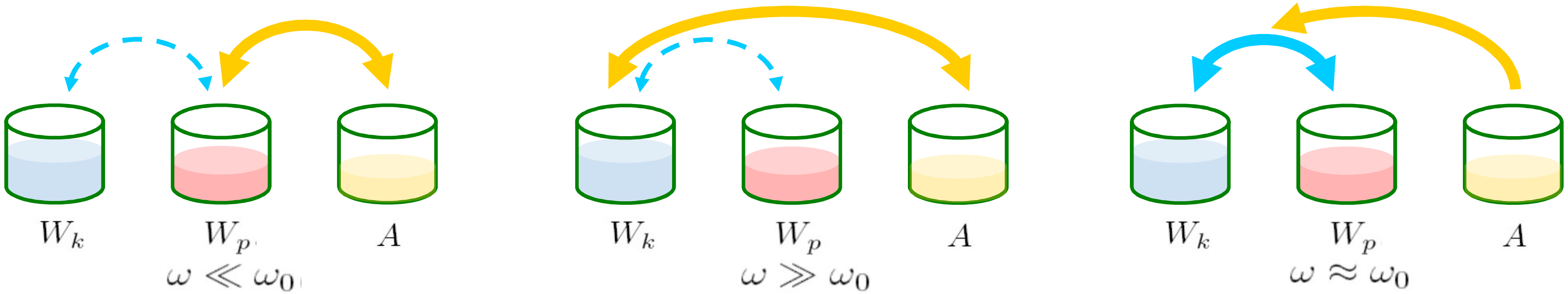
zdroj budenia prijíma prácu konanú stlačenou/natiahnutou pružinou

zdroj budenia koná prácu naťahovaním/stláčaním pružiny

počas jednej periódy kmitov dochádza k dvom cyklickým výmenám energie medzi zdrojom a oscilátorom (prevažne vo forme potenciálnej energie stlačenej a natiahnutej pružiny) *pre $\omega \gg \omega_0$ je $\langle W_k \rangle \gg \langle W_p \rangle$ (malé výchylky, veľké rýchlosti), zdroj budenia odovzdáva oscilátoru energiu v podobe práce konanej budiacou silou na zrýchlenie závažia, závažie odovzdáva prijatú (kinetickú) energiu späť zdroju budenia pri spomaľovaní závažia (proti brzdnej budiacej sile)*



počas jednej periódy kmitov dochádza k dvom cyklickým výmenám energie medzi zdrojom a oscilátorom (prevažne vo forme kinetickej energie závažia)



v okolí rezonančnej frekvencie sa amplitúdy kinetickej a potenciálnej energie vyrovnávajú (pri vlastných kmitoch sa „prelievajú“ jedna do druhej) a relatívny podiel práce konanej zdrojom na celkovej výmene energií počas cyklu (periódy) klesá (pri $\omega \to \omega_0$ síce $A \sim \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$ neobmedzene rastie, $W_k, W_p \sim \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}$ však „rastú rýchlejšie“)

v rezonancii ($\omega \to \omega_0$) je budiaca sila vo fáze s vlastnými kmitmi oscilátora, ktorý jej „nekladie nijaký odpor“ ($\mathcal{Z} \to 0$), práca konaná zdrojom v rezonancii spôsobuje neobmedzený nárast energie nahromadenej v oscilátore a teda neobmedzený nárast amplitúdy kmitov

komplexné čísla

existencia komplexných čísel vyplýva z potreby riešiť rovnicu $x^2 = -1$ *, jej riešením je* $x = \pm i$

$\boxed{i^2 = -1}$ *i – imaginárna jednotka*

$a = x + iy$ *komplexné* číslo

$\Re\{a\} = x$ *reálna časť* komplex. čísla

$\Im\{a\} = y$ *imaginárna časť* komplex. čísla

exponenciálny tvar komplexného čísla

$$a = x + iy = r\cos\vartheta + ir\sin\vartheta = re^{i\vartheta}$$

$$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$$

$$e^{-i\vartheta} = \cos\vartheta - i\sin\vartheta$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

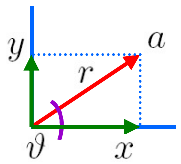
veľkosť (absolútna hodnota, modul) komplexného čísla

$\tan\vartheta = \frac{y}{x}$

$\vartheta = \arctan\frac{y}{x}$

uhol komplexného čísla

e ≅ 2,718 – *základ prirodzeného logaritmu* ($\ln e = 1$)



komplexné číslo pripomína polohový vektor bodu v rovine, pričom zložky tohto vektora (priemety vektora na súradnicové osi) odpovedajú reálnej a imaginárnej časti komplexného čísla

komplexne združené číslo k číslu a

$$a^* = x - iy = r\cos\vartheta - ir\sin\vartheta = re^{-i\vartheta}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy) = aa^*$$

sčítavanie komplexných čísel $(p+iq) + (r+is) = (p+r) + i(q+s)$

násobenie komplexných čísel $(p+iq)(r+is) = \ldots = (pr - qs) + i(qr + sp)$

$b^{(r+is)} = b^r b^{is}$ $\frac{1}{b^{is}} = (b^{is})^{-1} = b^{-is}$ $\boxed{a = b \Leftrightarrow \Re\{a\} = \Re\{b\}\ ,\ \Im\{a\} = \Im\{b\}}$

použitie komplexných veličín vo fyzike

matematická rovnosť $e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$ *umožňuje ľubovoľnú fyzikálnu veličinu, ktorá je harmonickou funkciou premennej,* $f(\varphi) = f_0\cos\varphi$, *vyjadriť ako* $f(\varphi) = \Re\{f_0 e^{i\varphi}\} = \Re\{\tilde{f}(\varphi)\}$, *kde* $\tilde{f}(\varphi)$ *je komplexná veličina, reálnej veličine teda priraďujeme odpovedajúcu komplexnú veličinu,* $f(\varphi) \to \tilde{f}(\varphi)$, *pričom fyzikálny zmysel má iba jej reálna časť*

zmysel používania komplexných veličín namiesto reálnych spočíva v jednoduchosti derivácií e^x:

$$\frac{de^x}{dx} = e^x \qquad \frac{de^y}{dx} = \frac{de^y}{dy}\frac{dy}{dx} = e^y\frac{dy}{dx} \qquad \text{napr.:}\quad \frac{de^{(2x+3)}}{dx} = e^{(2x+3)}\frac{d(2x+3)}{dx} = 2e^{(2x+3)}$$

fyzikálne veličiny s harmonickým časovým priebehom preto často nahrádzame ich komplexným tvarom, $f_0\cos\omega t \to f_0 e^{i\omega t}$, *a pri riešení diferenciálnych rovníc využívame jednoduché výrazy pre derivácie*

$$\frac{d}{dt}e^{i\omega t} = i\omega e^{i\omega t} \qquad \frac{d^2}{dt^2}e^{i\omega t} = \frac{d}{dt}(i\omega e^{i\omega t}) = -\omega^2 e^{i\omega t}$$

(časová derivácia takejto funkcie znamená teda len vynásobenie pôvodnej funkcie faktorom iω)

formálnym riešením diferenciálnej rovnice je potom tiež komplexná veličina, za fyzikálne riešenie však považujeme len jej reálnu časť

pozor! $(\tilde{a})^2 = (a_r + ia_i)^2 = a_r^2 - a_i^2 + 2ia_ra_i \qquad \Re\{(\tilde{a})^2\} = a_r^2 - a_i^2$ *nemá fyzikálny zmysel!!!*

prechod od komplexných veličín naspäť ku reálnym jednoduchým vzatím reálnej časti komplexnej veličiny možno použiť len u veličín v 1. mocnine

analýza vynútených kmitov pomocou komplexných veličín

harmonickú budiacu silu nahradíme jej komplexným tvarom $F_0 \cos \omega t \to F_0 e^{i\omega t}$

(fyzikálny zmysel má len reálna časť)

vo všeobecnosti môže mať budiaca sila fázový posun ϕ *(voči pomyselnému počiatku deja)*

$$F_0 \cos(\omega t + \varphi) \to F_0 e^{i(\omega t+\varphi)} = F_0 e^{i\omega t} e^{i\varphi} = \tilde{F}_0 e^{i\omega t}$$

komplexná amplitúda sily

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = F = F_0 e^{i\omega t} e^{i\varphi}$$

riešenie v tvare $x = \tilde{x}_0 e^{i\omega t}$ *(F aj x komplexné)*

$$-\omega^2 m\tilde{x}_0 \cancel{e^{i\omega t}} + k\tilde{x}_0 \cancel{e^{i\omega t}} = \tilde{F}_0 \cancel{e^{i\omega t}} \qquad -\omega^2 m\tilde{x}_0 + k\tilde{x}_0 = \tilde{F}_0$$

komplexné amplitúdy

$$\tilde{x}_0 = \frac{\tilde{F}_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)} = \frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)} e^{i\varphi} \qquad \left(\omega_0^2 = \frac{k}{m} \right)$$

ϕ *je fázový posun medzi budiacou silou a výchylkou oscilátora*

$\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}$ *reálne* $\Rightarrow$ $\tilde{x}_0$ *a* $\tilde{F}_0$ *sú vo fáze* ($\phi = 0°$, *ak* $\omega_0 > \omega$)
alebo v protifáze ($\phi = 180°$, *ak* $\omega_0 < \omega$)

skutočné kmity $$x(t) = \Re\{\tilde{x}_0 e^{i\omega t}\} = \frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)} \cos(\omega t + \varphi)$$

riešenie vynútených kmitov harmonického oscilátora nevyžaduje zadanie počiatočných podmienok, amplitúda a fáza nie sú určené počiatočnými podmienkami (ako pri vlastných kmitoch) – systém si „nepamätá" začiatok deja (tj. nezáleží na ňom), kmity sú pretrvávajúcim riešením úplne určeným charakterom budiacej harmonickej sily

Tlmené kmity harmonického oscilátora

tlmiaca sila (napr. trenie) $F_t = -m\gamma \frac{dx}{dt}$ budiaca sila $F = F_0 e^{i\omega t}$

koeficient tlmenia

pohybová rovnica budeného tlmeného harmonického oscilátora

$$\underbrace{m\frac{d^2x}{dt^2}}_{\text{časová zmena hybnosti}} = \underbrace{\overbrace{-kx}^{\text{sila pružiny}} \overbrace{- m\gamma\frac{dx}{dt}}^{\text{tlmiaca sila}} + \overbrace{F}^{\text{budiaca sila}}}_{\text{celková sila pôsobiaca na teleso}}$$

sily pôsobiace proti budeniu

časová zmena hybnosti = celková sila pôsobiaca na teleso

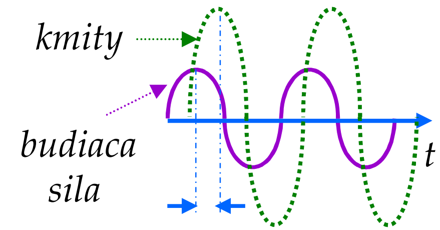
$$m\frac{d^2x}{dt^2} + m\gamma\frac{dx}{dt} + kx = F$$

hľadáme riešenie v tvare $x = \tilde{x}_0 e^{i\omega t}$ komplexná amplitúda

$$-\omega^2 m\tilde{x}_0 + i\omega m\gamma\tilde{x}_0 + k\tilde{x}_0 = F_0$$

$$\tilde{x}_0 = \frac{F_0}{\underbrace{m(\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega)}_{\text{komplexné!}}}$$

$\tilde{x}_0$ a F_0 nie sú vo fáze ani v protifáze

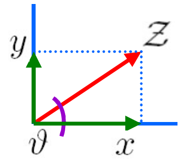


$$\frac{1}{m(\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega)} = \frac{1}{\mathcal{Z}} = \frac{1}{\mathcal{Z}_0 e^{i\vartheta}} = \frac{1}{\mathcal{Z}_0}e^{-i\vartheta}$$

fázový posun (spôsobený tlmením) medzi budiacou silou a kmitmi

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_0 e^{i\vartheta} = m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)$$

funkcia (frekvencie budenia) predstavujúca (komplexnú) „impedanciu“ (odpor) oscilátora voči budeniu



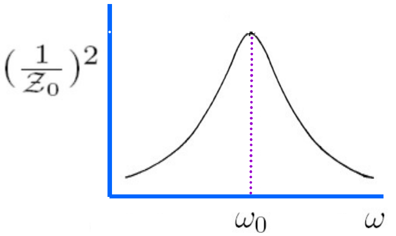
komplexné číslo zobrazené v komplexnej rovine (jeho priemety na súradnicové osi odpovedajú jeho reálnej a imaginárnej časti) určuje jeho fázu ϑ (fázový posun voči reálnej osi)

funkcia $\mathcal{Z}$ charakterizuje odozvu systému (oscilátora) na vonkajšie budenie, komplexnosť $\mathcal{Z}$ znamená, že odozva (vynútené kmity) nie je vo fáze (ani v protifáze) s budením
pri použití komplexnej analýzy systémov majú fyzikálny zmysel len reálne časti veličín popisujúcich budenie (v našom prípade budiaca sila) i odozvu (v našom prípade výchylka), u funkcií charakterizujúcich systém, tj. určujúcich vzťah medzi budením a odozvou (v našom prípade $\mathcal{Z}$) majú však konkrétny fyzikálny zmysel reálna i imaginárna časť (v našom prípade fázový posuv medzi budiacou silou a výchylkou)

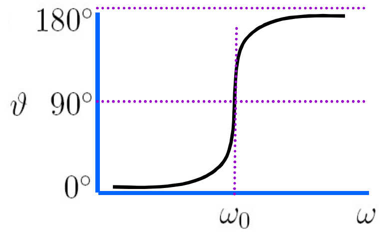
$\tilde{x}_0 = \frac{1}{\mathcal{Z}_0} F_0 e^{-i\vartheta}$ *(komplexná amplitúda kmitov)*

reálne kmity $x(t) = \Re\{\tilde{x}_0 e^{i\omega t}\} = \underline{\frac{1}{\mathcal{Z}_0} F_0 \cos(\omega t - \vartheta)}$

$$\left(\frac{1}{\mathcal{Z}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\mathcal{Z}_0}\right)^2 = \left(\frac{1}{\mathcal{Z}}\right)\left(\frac{1}{\mathcal{Z}}\right)^* = \frac{1}{m(\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega)} \cdot \frac{1}{m(\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega)} =$$
$$= \frac{1}{m^2[(\omega_0^2-\omega^2)^2 \cancel{+i\gamma\omega(\omega_0^2-\omega^2)} \cancel{-i\gamma\omega(\omega_0^2-\omega^2)} + i(-i)(\gamma\omega)^2]} =$$
$$= \frac{1}{m^2(\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega)(\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega)} = \underline{\frac{1}{m^2[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2]}}$$



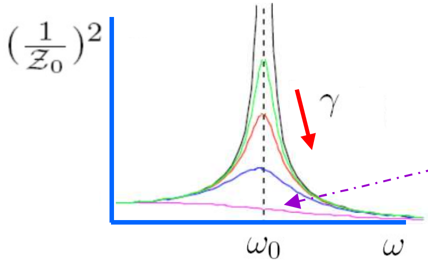
$$\vartheta = \arctan\frac{\Im\{\mathcal{Z}\}}{\Re\{\mathcal{Z}\}} = \underline{\arctan\left(\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)}$$



pre $\omega \to \omega_0$ *dosahuje* $\frac{1}{\mathcal{Z}_0}$ *výrazné maximum – rezonancia*

$\frac{1}{\mathcal{Z}_0(\omega_0)} = \frac{1}{m\gamma\omega_0}$ *(pre oscilátor bez tlmenia,* $\gamma \to 0$, $\frac{1}{\mathcal{Z}_0} \to \infty$, $\mathcal{Z}_0 \to 0$)

$\left(\frac{1}{\mathcal{Z}_0(\omega)}\right)^2$ - *rezonančná krivka* $\left(\frac{1}{\mathcal{Z}_0(\omega\to\infty)}\right)^2 \to 0$, $\left(\frac{1}{\mathcal{Z}_0(\omega\to 0)}\right)^2 \to \frac{1}{m^2\omega_0^4}$



pri dostatočne veľkom tlmení zaniká rezonančný charakter kmitov pri budení v okolí vlastnej frekvencie

použitie komplexných čísel je výhodné pri výpočte výchylky či rýchlosti (fyzikálny význam majú ich reálne časti), pri výpočte energií ($W_p \sim x^2$, $W_k \sim v^2$) však použitie komplexných čísel môže viesť k nesprávnym výsledkom (pozri: použitie komplexných veličín vo fyzike) – preto treba prejsť opäť k reálnym častiam komplexných veličín

$$\tilde{x} = \frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega)}e^{i\omega t} =$$

$$\boxed{\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}}$$

$$= \underbrace{\frac{F_0}{m[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2]}}_{X}\{[(\omega_0^2-\omega^2)\cos\omega t + \gamma\omega\sin\omega t] + i[(\omega_0^2-\omega^2)\sin\omega t - \gamma\omega\cos\omega t]\}$$

$$\Re\{\tilde{x}\} = x(t) = X[(\omega_0^2-\omega^2)\cos\omega t + \gamma\omega\sin\omega t] \qquad (\omega_0^2-\omega^2)X = X_d \ , \quad \gamma\omega X = X_a$$

$$\underline{x(t) = X_d\cos\omega t + X_a\sin\omega t} \qquad v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega X_a\cos\omega t - \omega X_d\sin\omega t$$

okamžitá výchylka oscilátora má teda zložku vo fáze s budením ($F_0\cos\omega t$) a zložku posunutú vo fáze o $\frac{\pi}{2}$ voči budeniu (kombinácia takýchto dvoch zložiek, navzájom kolmých v komplexnej rovine v závislosti od ich amplitúd dáva akýkoľvek fázový posun)

výkon budiacej sily $\quad \mathcal{P}(t) = Fv = F_0\cos\omega t(\omega X_a\cos\omega t - \omega X_d\sin\omega t)$

(práca vykonaná budiacou silou za jedn. času)

stredný výkon budenia $\quad \underline{\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{\omega F_0}{2}X_a = \frac{F_0^2\gamma\omega^2}{2m[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2]}}$

(stredná hodnota za periódu)

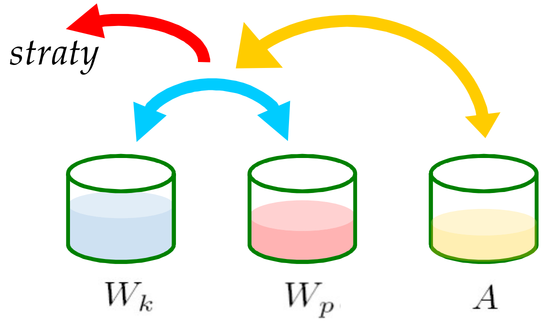
$$\boxed{\langle\sin^2\alpha\rangle = \langle\cos^2\alpha\rangle = \frac{1}{2} \qquad \langle\sin\alpha\cos\alpha\rangle = 0}$$

výkon tlmiacej sily $\quad \mathcal{P}_t(t) = F_t v = m\gamma v^2 = m\gamma(\omega X_a \cos\omega t - \omega X_d \sin\omega t)^2$

stredný výkon (tlmiacej sily) $\quad \langle \mathcal{P}_t \rangle = m\gamma\omega^2\left(\frac{X_a^2}{2} + \frac{X_d^2}{2}\right) = \frac{F_0^2\gamma\omega^2}{2m[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2]}$

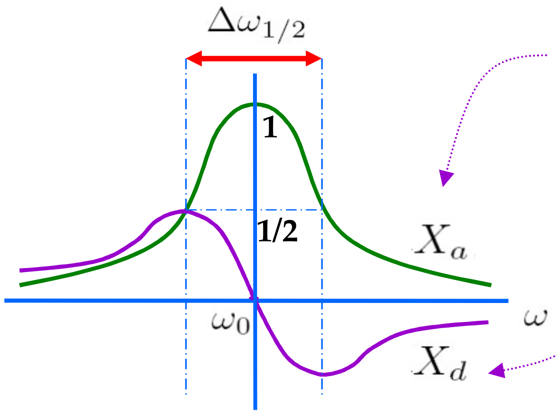
$$\mathcal{P}(t) \neq \mathcal{P}_t(t) \quad \textit{ale} \quad \langle \mathcal{P} \rangle = \langle \mathcal{P}_t \rangle$$

počas periódy kmitov dochádza k cyklickým výmenám energie medzi zdrojom a oscilátorom, časť energie dodanej zdrojom sa však nevratne spotrebuje na neustále prekonávanie tlmiacej sily



stredná energia sústredená v oscilátore

$$\langle W \rangle = \langle W_k \rangle + \langle W_p \rangle = \frac{m\langle v^2 \rangle}{2} + \frac{k\langle x^2 \rangle}{2} = \frac{m(\omega_0^2+\omega^2)}{2}\left(\frac{X_a^2}{2} + \frac{X_d^2}{2}\right) = \frac{F_0^2(\omega^2+\omega_0^2)}{4m[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2]}$$



amplitúda absorpčnej zložky výchylky – absorpčná zložka je „kolmá“ na budenie (tj. posunutá vo fáze o $\frac{\pi}{2}$) a reprezentuje straty energie – energiu jednostranne dodávanú zdrojom

amplitúda disperznej zložky výchylky – disperzná zložka je vo fáze s budením a reprezentuje energiu, ktorá sa cyklicky vymieňa medzi oscilátorom a zdrojom budenia

v rezonancii ($\omega = \omega_0$ *) je* $\langle \mathcal{P} \rangle = \gamma \langle W \rangle$ *- celá energia dodávaná zdrojom sa premieňa na straty* *pri netlmenom oscilátore budenom do rezonancie ($\omega \to \omega_0$) sa energia dodávaná budením spotrebováva na zväčšovanie amplitúdy kmitov a teda na zrýchľovanie pohybu závažia ($v \sim x_0$)*

v reálnom oscilátore vždy existuje tlmenie, tlmiaca sila $-m\gamma \frac{dx}{dt} = -m\gamma v$ narastá s rýchlosťou kmitov – pri rezonančnom náraste rýchlosti kmitov sa teda pri istej rýchlosti tlmiaca sila vyrovná budiacej (výsledná sila bude nulová) a ďalší rezonančný nárast sa zastaví

čím väčšie je tlmenie oscilátora, tým viac energie dodávanej budiacou silou sa „utlmí" (tj. premení na iné – „nemechanické" – formy energie – teplo) a tým menšie sú kmity oscilátora

kvalita (faktor kvality) oscilátora $\boxed{Q = \frac{2\pi}{T} \frac{\langle W \rangle}{\langle \mathcal{P} \rangle}} = \omega \frac{\langle W \rangle}{\langle \mathcal{P} \rangle} = \frac{\omega^2 + \omega_0^2}{2\gamma\omega} \underset{\omega \to \omega_0}{\longrightarrow} \frac{\omega_0}{\gamma}$ *[bezrozmerná]*

$\underline{Q \sim \frac{1}{\gamma}}$ *, ak* $\gamma \to 0$ *, potom* $Q \to \infty$

s narastajúcimi stratami (tlmením) klesá výška a narastá šírka rezonančnej krivky $\left(\frac{1}{\mathcal{Z}_0(\omega)}\right)^2$ *v okolí rezonancie (šírka rezonančnej krivky je definovaná bodmi, v ktorých krivka dosahuje hodnotu ½, pre ne platí* $\omega_{1/2}^2 = \omega_0^2 \pm \gamma\omega$ *, a teda* $\Delta\omega_{1/2} = \gamma$ *)*

pre amplitúdu kmitov v rezonancii platí $x_0(\omega = \omega_0) = Q x_0(\omega \to 0)$

pohybové rovnice harmonického oscilátora sme doteraz riešili „uhádnutím riešenia" a overením jeho správnosti, táto metóda však nevylučuje existenciu aj iných (rovnako správnych) riešení tej istej pohybovej rovnice

výsledný pohyb oscilátora je potom superpozíciou jednotlivých pohybov (popísaných jednotlivými čiastkovými riešeniami)

superpozícia riešení lineárnych diferenciálnych rovníc

dif. rovnica pre danú premennú je lineárna, ak sa v nej táto premenná vyskytuje len v 1. mocnine,
pre jej riešenia platí $\mathcal{L}(ax) = a\mathcal{L}(x) \qquad \mathcal{L}(x_1 + x_2 + \ldots) = \mathcal{L}(x_1) + \mathcal{L}(x_2) + \ldots$

napr. $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$ *má riešenia* x_1, x_2: $m\frac{d^2x_{1,2}}{dt^2} = -kx_{1,2}$ $\qquad m\frac{d^2(x_1+x_2)}{dt^2} = -k(x_1+x_2)$

(lineárna dif. rovnica)

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} + m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -kx_1 - kx_2$$

nelineárna dif. rovnica

$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - k'x^2$ *má riešenia* x_1, x_2 $\qquad m\frac{d^2(x_1+x_2)}{dt^2} \neq -k(x_1+x_2) - k'(x_1+x_2)^2$

$m\frac{d^2x_{1,2}}{dt^2} = -kx_{1,2} - k'x_{1,2}^2$ $\qquad m\frac{d^2x_1}{dt^2} + m\frac{d^2x_2}{dt^2} \neq -kx_1 - kx_2 - k'x_1^2 - k'x_2^2 - k'2x_1x_2$

$\mathcal{L}(x) = 0$ *- lineárna dif. rovnica homogénna (tj. bez pravej strany - budiacej sily), riešenia* x_1, x_2

aj ax_1 *je riešením, lebo* $\mathcal{L}(ax_1) = a\mathcal{L}(x_1) = a \cdot 0 = 0$

aj $(x_1 + x_2)$ *je riešením, lebo* $\mathcal{L}(x_1 + x_2) = \mathcal{L}(x_1) + \mathcal{L}(x_2) = 0 + 0 = 0$

$\mathcal{L}(x) = F_a(t)$ *- lineárna dif. rovnica nehomogénna (tj. s budiacou silou), riešenie* x_3

aj $(x_1 + x_3)$ *je riešením, lebo* $\mathcal{L}(x_1 + x_3) = \mathcal{L}(x_1) + \mathcal{L}(x_3) = 0 + F_a(t) = F_a(t)$

riešenie homogénnej rovnice

$\mathcal{L}(x) = F_a(t) + F_b(t)$ *- dve rôzne budiace sily,* $\mathcal{L}(x) = F_a(t)$ *má riešenie* x_3

$\mathcal{L}(x) = F_b(t)$ *má riešenie* x_4

aj $(x_3 + x_4)$ *je riešením, lebo* $\mathcal{L}(x_3 + x_4) = \mathcal{L}(x_3) + \mathcal{L}(x_4) = F_a(t) + F_b(t)$

pohybové rovnice harmonického oscilátora sú lineárnymi dif. rovnicami, riešením pohybovej rovnice budeného harmonického oscilátora sú teda okrem vynútených kmitov vždy aj vlastné kmity (riešenie homogénnej rovnice bez pravej strany – budenia), výsledný pohyb je teda zložený z oboch kmitov

Prechodové javy

prechodovými javmi nazývame také deje, ktoré nastanú v systéme pri náhlej zmene vonkajších podmienok (napr. vypnutie budenia oscilátora) a po istom čase doznejú – nastane nový ustálený stav

typickým prechodovým javom je zánik vlastných kmitov tlmeného oscilátora (vyvolaných počiatočným vychýlením závažia) – energia (vlastných kmitov) nazhromaždená v oscilátore sa postupne spotrebuje na stratách tlmením

v prípade tlmeného oscilátora s budením sú budené kmity pretrvávajúcim riešením pohybovej rovnice (po dobu trvania budenia), zatiaľ čo vlastné kmity sú v dôsledku tlmenia v čase zanikajúcim riešením - prechodovým javom

po „vypnutí“ budenia sú riešením pohybovej rovnice oscilátora už len zanikajúce vlastné kmity – prechodový jav

tlmený harmonický oscilátor bezprostredne po vypnutí budenia, $F(t) = 0$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + m\gamma\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

hľadáme riešenie v tvare $x = x_0 e^{i\alpha t}$

$$(-\alpha^2 + i\gamma\alpha + \omega_0^2)x_0 e^{i\alpha t} = 0 \quad \begin{cases} x_0 = 0 \text{ - oscilátor v pokoji (triviálne riešenie)} \\ -\alpha^2 + i\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \alpha = i\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \end{cases}$$

$$\underline{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} = \omega_\gamma^2}$$

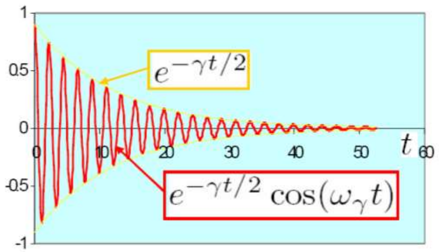
(predpokladáme malé tlmenie $\omega_0^2 > \frac{\gamma^2}{4}$ $(Q > \frac{1}{4})$)

$$i\alpha = -\frac{\gamma}{2} + i\omega_\gamma$$

riešenie: $x_1 = x_0 e^{-\gamma t/2} e^{i\omega_\gamma t} \rightarrow x_0 e^{-\gamma t/2} \cos(\omega_\gamma t)$

kmity s frekvenciou $\omega_\gamma \neq \omega_0$

amplitúda exponenciálne klesajúca v čase



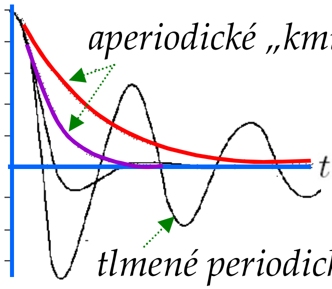
riešením sú tlmené vlastné kmity s „modifikovanou“ vlastnou frekvenciou $\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} = \omega_\gamma^2$ *(závisiacou od tlmenia), ktorých amplitúda exponenciálne klesá s časom (kmity zanikajú)*

alternatívne riešenie $x_2 = x'_0 e^{-\gamma t/2} e^{-i\omega_\gamma t}$ *(rovnako vyhovuje pohybovej rovnici,* $\Re\{e^{i\omega t}\} = \Re\{e^{-i\omega t}\} = \cos(\omega t)$*)*

všeobecné riešenie $x = e^{-\gamma t/2}(x_0 e^{i\omega_\gamma t} + x'_0 e^{-i\omega_\gamma t})$ *(superpozícia riešení)*

veľké tlmenie $\frac{\gamma^4}{4} > \omega_0^2$, $\omega_\gamma^2 < 0 \Rightarrow \omega_\gamma = i \mid \omega_\gamma \mid \Rightarrow \underbrace{i\omega_\gamma}_{\text{reálne}} = - \mid \omega_\gamma \mid$

riešenie má tvar $e^{-\gamma t/2} e^{-|\omega_\gamma| t}$ - *aperiodický pohyb - zaniká za čas kratší než perióda kmitov*



Striedavý prúd, impedancia

striedavý prúd (napätie, a pod.) – veličina periodicky sa meniaca v čase, s periódou T

frekvencia $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ $[Hz = s^{-1}]$

Fourierova analýza

ak je funkcia $f(x)$ *periodická s periódou T,* $f(x+T) = f(x)$, *možno ju rozvinúť do Fourierovho radu*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

jednosmerná zložka (stredná hodnota za periódu)

základná (n = 1) a vyššie (n > 1) harmonické zložky

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \end{aligned}\right\}$$

Fourierove koeficienty

alternatívny zápis Fourierových zložiek

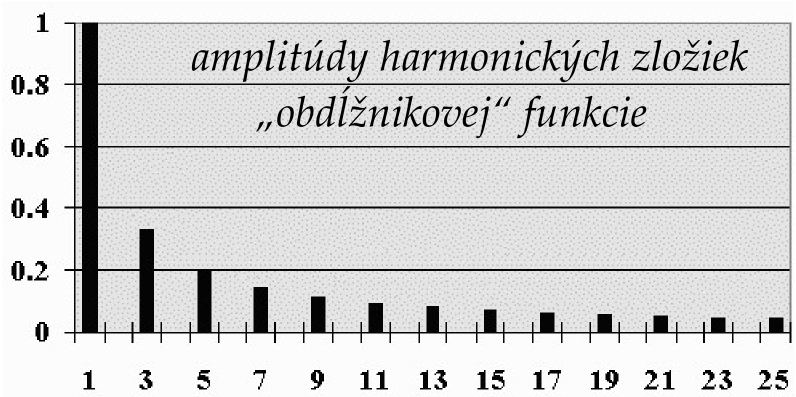
$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = A_n \cos(nx + \varphi)$$

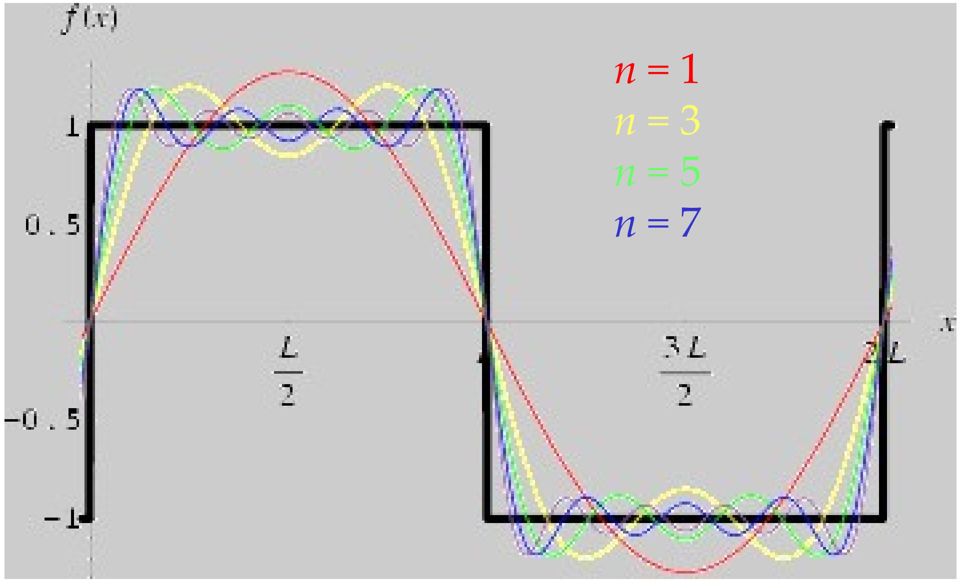
$$a_n = A_n \cos\varphi \qquad b_n = -A_n \sin\varphi$$

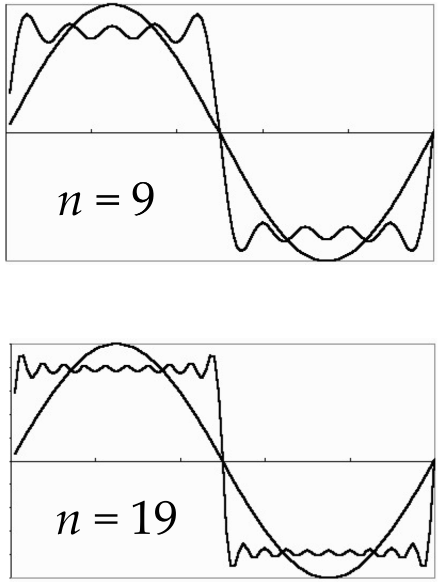
ľubovoľnú periodickú funkciu času možno teda rozložiť do radu harmonických funkcii, frekvencie vyšších harmonických sú celočíselnými násobkami frekvencie základnej harmonickej, určenej periódou funkcie

ľubovoľný periodický dej je teda superpozíciou (nekonečného počtu) harmonických dejov *príklad: „obdĺžniková“ funkcia*

nech „obdĺžniková“ funkcia začína *nábehovou* *hranou (tak ako* sin*x),*
z dôvodov symetrie obsahuje len *nepárne* *harmonické (priebeh v* 0, *π)*







rozklad striedavého prúdu do Fourierovho radu harmonických zložiek:

$$I(t) = \bar{I} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

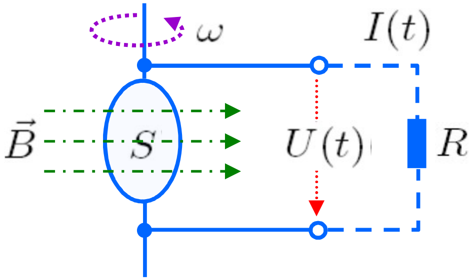
$n = 0$ – *jednosmerná zložka* $\quad \bar{I} = \frac{1}{T}\int_0^T I(t)dt$ *(stredná hodnota za periódu)*

$n = 1$ – *základná harmonická* $\quad a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t = A_1 \cos(\omega t + \varphi)$

$n = 2, 3, \ldots$ – *vyššie harmonické* $\quad$ *frekvencie* $nf = \frac{n\omega}{2\pi}$

striedavý prúd (napätie, atď.), obsahujúci len základnú harmonickú zložku nazývame harmonickým

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow I_0 e^{i\omega t} e^{i\varphi}$$



generátor striedavého napätia / prúdu

$$U(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(\vec{B}\cdot\vec{S}) = -\frac{d}{dt}(B\underbrace{S\cos\omega t}) = BS\sin\omega t$$

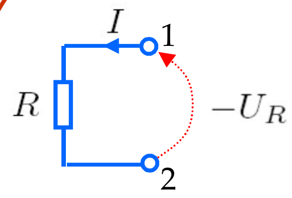
okamžitý priemet plochy slučky do roviny $\perp \vec{B}$

pre slučku s N závitmi

$$U(t) = \underbrace{\boxed{NBS}}_{U_0}\sin\omega t$$

$$I(t) = \frac{U(t)}{R} = \frac{U_0}{R}\sin\omega t = \overset{I_0}{\frac{U_0}{R}}\cos(\omega t \overset{\varphi}{- \frac{\pi}{2}})$$

(ideálny) odporník

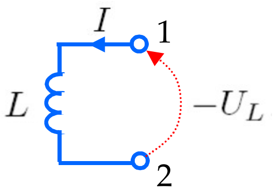


$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = \underbrace{\int \vec{E}\cdot d\vec{l}}_{\substack{\text{cez odpor}\\ =RI}} + \underbrace{\int \vec{E}\cdot d\vec{l}}_{\substack{\text{cez prívody}\\ =0}} + \underbrace{\int_2^1 \vec{E}\cdot d\vec{l}}_{\substack{\text{mimo obvod}\\ =-U_R}} = 0 \quad \Rightarrow \quad U_R = RI$$

(ideálny vodič) *(B = 0, integrál nezávisí od integračnej dráhy)*

Z_R - *odpor voči prúdu - reálny*

(ideálna) cievka



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = \underbrace{\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l}}_{\substack{\text{cez cievku}\\ =0}} + \underbrace{\int_2^1 \vec{E}\cdot d\vec{l}}_{\substack{\text{mimo cievky}\\ =-U_L}} = -U_L$$

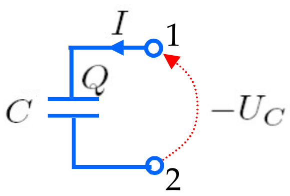
($\neq 0$ *v prítomnosti meniaceho sa magnetického poľa v cievke)*

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \longrightarrow U_L = L\frac{dI}{dt}$$

$$I = I_0 e^{i\omega t} \Rightarrow U_L = i\omega L I$$

Z_L - *„odpor" cievky voči prúdu - imaginárny*

(ideálny) kondenzátor



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = \underbrace{\int \vec{E}\cdot d\vec{l}}_{\substack{\text{kondenzátor}\\ =\frac{Q}{C}}} + \underbrace{\int \vec{E}\cdot d\vec{l}}_{\substack{\text{cez prívody}\\ =0}} + \underbrace{\int_2^1 \vec{E}\cdot d\vec{l}}_{\substack{\text{mimo obvod}\\ =-U_C}} = 0$$

Z_C - *„odpor" kondenzátora voči prúdu - imaginárny*

$$\Rightarrow U_C = \frac{Q}{C} \qquad \frac{dQ}{dt} = I = I_0 e^{i\omega t} \qquad \Rightarrow U_C = \frac{1}{i\omega C} I$$

$$\frac{U_R}{I} = R$$ *prúd vo fáze s napätím na odpore*

$$\frac{U_L}{I} = i\omega L = \omega L e^{i\frac{\pi}{2}}$$ *prúd zaostáva za napätím na cievke o* $\frac{\pi}{2}$

$$\frac{U_C}{I} = -\frac{i}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-i\frac{\pi}{2}}$$ *prúd predbieha napätie na kondenzátore o* $\frac{\pi}{2}$

$$\boxed{e^{\pm i\frac{\pi}{2}} = \pm i}$$

veličiny Z_R, Z_L, Z_C sa nazývajú sa impedanciami a predstavujú odpor prvku (R,L,C) voči prúdu (pomer napätia na prvku ku prúdu pretekajúceho prvkom), impedancia je vo všeobecnosti komplexnou veličinou

$$\tilde{Z} = \Re\{\tilde{Z}\} + i\Im\{\tilde{Z}\} \qquad [\Omega]$$

impedancia rezistancia reaktancia

rezistancia – reálna časť impedancie, reprezentuje straty elektromagnetickej energie (na odpore) premenou na teplo
reaktancia – imaginárna časť impedancie, reprezentuje fázový posun medzi prúdom a napätím v dôsledku akumulovania energie (v cievke, kondenzátore) – má konkrétny fyzikálny zmysel! (imaginárne časti napätia a prúdu nemajú fyzikálny zmysel, sú len matematickou pomôckou)

$$I = I_0 \cos\omega t \rightarrow I_0 e^{i\omega t}$$

$$U = \tilde{Z} I = I_0(\Re\{\tilde{Z}\} + i\Im\{\tilde{Z}\})e^{i\omega t} = \underbrace{I_0(\Re\{\tilde{Z}\}\cos\omega t - \Im\{\tilde{Z}\}\sin\omega t)}_{\Re\{U\}} + $$
$$+ iI_0(\Re\{\tilde{Z}\}\sin\omega t + \Im\{\tilde{Z}\}\cos\omega t)$$

zložka reálneho napätia úmerná rezistancii (cos) je vo fáze s prúdom (cos), zložka úmerná reaktancii (sin) je posunutá voči prúdu o π/2, celkové napätie je posunuté voči prúdu o všeobecný uhol ϕ

okamžitý výkon prúdu $\mathcal{P} = UI$

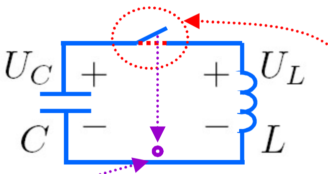
stredný výkon (za periódu)

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T UIdt = \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T I_0^2 \Re\{\tilde{Z}\}\cos^2\omega t dt}_{\frac{1}{2}I_0^2\Re\{\tilde{Z}\}} - \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T I_0^2 \Im\{\tilde{Z}\}\cos\omega t \sin\omega t dt}_{0}$$

stredný výkon závisí iba od rezistancie – na rezistívnom prvku obvodu sa energia (dodávaná zo zdroja prúdu) mení na teplo – tzv. užitočný výkon (zdroja)
na reaktancii sa (elektromagnetická) energia „nestráca“, iba sa cyklicky vymieňa medzi daným reaktívnym prvkom a zdrojom – tzv. jalový (neužitočný) výkon

Vlastné kmity v LC obvode

harmonickým oscilátorom je aj elektrický obvod pozostávajúci z cievky (s indukčnosťou L) a kondenzátora (s kapacitou C), v ktorom cyklickou zmenou polarity prúdu a napätia dochádza k cyklickej premene magnetickej energie (akumulovanej v cievke) na elektrickú (v kondenzátore) a naopak



počiatočné podmienky $t = 0:\ U_C = U_0\ ,\ I = 0$

(nabitý kondenzátor)

po zopnutí spínača $Q(t) = U_0 C - \int_0^t I(t)dt$

(vybíjanie kondenzátora)

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = U_0 - \frac{1}{C}\int_0^t I(t)dt \qquad\qquad U_L = L\frac{dI(t)}{dt}$$

$$\underline{U_C = U_L} \Rightarrow\ U_0 - \frac{1}{C}\int_0^t I(t)dt - L\frac{dI(t)}{dt} = 0 \quad \xrightarrow[\frac{d}{dt}]{} \quad \frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{LC}I = 0$$

dif. rovnica pre časový priebeh prúdu v LC obvode je formálne identická s pohybovou rovnicou vlastných kmitov závažia na pružine ($x \to I\ ,\ m \to L\ ,\ k \to \frac{1}{C}$), pre rovnaké rovnice očakávame rovnaké riešenia

hľadáme riešenie v tvare $I(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ $\qquad -\omega_0^2 + \frac{1}{LC} = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$

$$U_L = L\frac{dI}{dt} = -\omega_0 LA\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Thomsonov vzťah

konštanty A, φ_0 *určíme z počiatočných podmienok*

$$t = 0:\ I = A\cos\varphi_0 = 0 \Rightarrow \cancel{A = 0} \quad \textit{alebo} \quad \underline{\varphi_0 = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}}$$

$$U_L = -\omega_0 LA\sin\varphi_0 = -\omega_0 LI_0 \Rightarrow \underline{A = -\frac{U_0}{\omega_0 L}}$$

$$I = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -\frac{U_0}{\omega_0 L}\underbrace{\cos(\omega_0 t + \tfrac{\pi}{2})}_{-\sin\omega_0 t} = \frac{U_0}{\omega_0 L}\sin\omega_0 t = \underline{I_0\sin\omega_0 t} \qquad (I_0 = -A)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\alpha + \tfrac{\pi}{2}) &= \cos\alpha \\ \cos(\alpha + \tfrac{\pi}{2}) &= -\sin\alpha\end{aligned}}$$

$$U_L = -\omega_0 L A\underbrace{\sin(\omega_0 t + \tfrac{\pi}{2})}_{} = \underline{U_0\cos\omega_0 t}$$

$$\int_0^t I(t)dt = \frac{U_0}{\omega_0 L}\int_0^t \sin(\omega_0 t)dt = \frac{U_0}{\omega_0^2 L}\int_0^t \sin(\omega_0 t)d(\omega_0 t) = U_0 C[-\cos\omega_0 t]_0^t = U_0 C[1 - \cos\omega_0 t]$$

$$U_C = U_0 - \frac{1}{C}\int_0^t I(t)dt = U_0 - U_0 + U_0\cos\omega_0 t = U_L$$

energia nazhromaždená v obvode

$$W_e = \tfrac{1}{2}CU^2 = \tfrac{1}{2}CU_0^2\,\underline{\cos}^2\,\omega_0 t \qquad W_m = \tfrac{1}{2}LI^2 = \tfrac{1}{2}\frac{U_0^2}{\omega_0^2 L}\sin^2\omega_0 t = \tfrac{1}{2}CU_0^2\,\underline{\sin}^2\,\omega_0 t$$

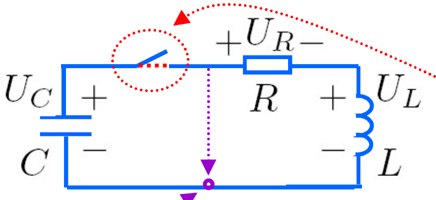
$$W_e + W_m = \tfrac{1}{2}CU_0^2\underbrace{(\sin^2\omega_0 t + \cos^2\omega_0 t)}_{1} = \tfrac{1}{2}CU_0^2 = \tfrac{1}{2}LI_0^2$$

periodická zmena (každú 1/4 periódu) elektrickej energie na magnetickú a naopak
(funkcie sin *a* cos *sú navzájom posunuté o 1/4 periódy)*

$$\frac{U_0}{I_0} = R_0 = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \underline{\sqrt{\frac{L}{C}}}$$ - *charakteristický odpor obvodu*

prúd zaostáva za napätím o $\frac{\pi}{2}$ *(1/4 periódy)* $\Rightarrow$ *na tomto odpore nevznikajú straty*

Tlmené vlastné kmity v RLC obvode



počiatočné podmienky $t=0: U_C = U_0\ ,\ I=0$

po zopnutí spínača $U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = U_0 - \frac{1}{C}\int_0^t I(t)dt$

$U_L = L\frac{dI(t)}{dt}$ $\qquad U_R = RI(t)$

$$U_C = U_R + U_L \Rightarrow U_0 - \frac{1}{C}\int_0^t I(t)dt - RI(t) - L\frac{dI(t)}{dt} = 0 \xrightarrow[\frac{d}{dt}]{} L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = 0$$

dif. rovnica pre prúd v RLC obvode je formálne zhodná s pohybovou rovnicou vlastných tlmených harmonických kmitov závažia na pružine – elektrický odpor predstavuje tlmiaci prvok

hľadáme riešenie v tvare $I = Ae^{i\alpha t}$ $\qquad -\alpha^2 LI + i\alpha RI + \frac{1}{C}I = 0$

$$\alpha^2 - i\underbrace{\frac{R}{L}}_{\gamma}\alpha - \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2} = 0 \Rightarrow \alpha = i\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}_{\omega_\gamma^2}}$$

$\gamma = \frac{R}{L}$ *koeficient útlmu* [s^{-1}]

$$\omega_\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

frekvencia kmitov

predpokladáme $\omega_0^2 > \frac{\gamma^2}{4}$ (*malý útlm*)
(ω_γ^2 kladné, ω_γ *reálne*)

$$I(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(Ae^{i\omega_\gamma t} + Be^{-i\omega_\gamma t})$$

tlmené kmity (*riešenie ako superpozícia 2 riešení*)

$t=0: I(0) = 0 \Rightarrow$
(*počiatočné podmienky*)

$$\begin{cases} A + B = 0 \Rightarrow A = -B \\ U_R(0) = 0 \Rightarrow U_L(0) = \overbrace{L\left(\frac{dI(t)}{dt}\right)_{t=0}}^{i\omega_\gamma L(A-B) = 2i\omega_\gamma LA = U_0} = U_C(0) = U_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \frac{U_0}{2i\omega_\gamma L} = -B$$

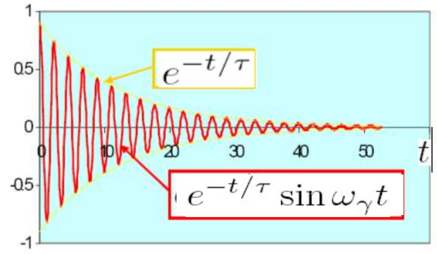
$$I(t) = \underbrace{\frac{U_0}{\omega_\gamma L}}_{I_\gamma} e^{-\overbrace{\frac{\gamma}{2}}^{\frac{1}{\tau}} t} \frac{e^{i\omega_\gamma t} - e^{-i\omega_\gamma t}}{2i} = I_\gamma e^{-t/\tau} \sin \omega_\gamma t$$

$$\sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$
$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

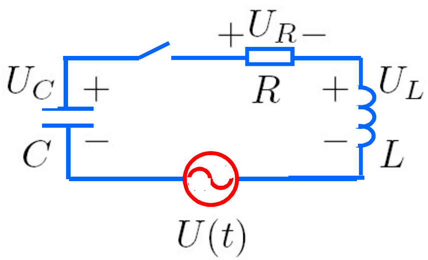
$\tau = \frac{2}{\gamma} = \frac{2L}{R}$ *charakteristická doba (časová konštanta) útlmu* [s]

(za čas $t = \tau$ klesne amplitúda kmitov na 1/e pôvodnej hodnoty)

amplitúdy prúdu a napätia v obvode klesajú s časom (zanikajú - prechodový jav) v dôsledku strát na odpore R - nevratnej premeny elektromagnetickej energie (pôvodne naakumulovanej v nabitom kondenzátore) na teplo, rýchlosť útlmu rastie s hodnotou R



Vynútené kmity v RLC obvode



$U(t) = U_0 \cos \omega t$ - *budiaca „sila“ (napätie)*

$$L\frac{dI(t)}{dt} + RI(t) + \frac{1}{C}\int_0^t I(t)dt = U(t) = U_0 \cos \omega t$$

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = -\omega U_0 \sin \omega t$$

riešením je superpozícia riešenia homogénnej rovnice (bez budenia, prechodový jav) a nehomogénnej rovnice (s budením, vynútené kmity – pretrvávajú po doznení prechodového javu)

hľadajme riešenie pre vynútené kmity v tvare $I(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi_0)$

prechodom ku komplexným veličinám $\tilde{U}(t) = U_0 e^{i\omega t}$ $\tilde{I}(t) = I_0 e^{i\omega t} e^{-i\varphi}$

$$(-\omega^2 L + i\omega R + \tfrac{1}{C})\underbrace{\boxed{I_0 e^{-i\varphi} e^{i\omega t}}}_{\tilde{I}(t)} = i\omega \underbrace{\boxed{U_0 e^{i\omega t}}}_{\tilde{U}(t)}$$

$$\frac{\tilde{U}(t)}{\tilde{I}(t)} = \frac{U_0}{I_0}e^{i\varphi} = R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = \tilde{Z}$$ *impedancia*

$\Re\{\tilde{Z}\} = R$ *rezistancia* $\Im\{\tilde{Z}\} = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ *reaktancia*

$$|\tilde{Z}| = Z = \frac{U_0}{I_0} = \sqrt{\Re^2\{\tilde{Z}\} + \Im^2\{\tilde{Z}\}} = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{\Im\{\tilde{Z}\}}{\Re\{\tilde{Z}\}} = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

komlpexná impedancia systému reprezentuje odozvu systému (prúd) na vonkajšie budenie (napätie), jej veľkosť určuje pomer napätia a prúdu a jej fáza určuje fázový posun medzi prúdom a napätím

$$\tilde{Z} = R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R + i\omega L(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega}) \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$\omega < \omega_0$: $\varphi < 0$: *prúd predbieha budiace napätie (kapacitný charakter impedancie)*

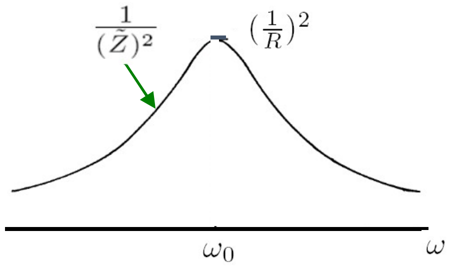
$\omega > \omega_0$: $\varphi > 0$: *prúd zaostáva za budiacim napätím (induktívny charakter impedancie)*

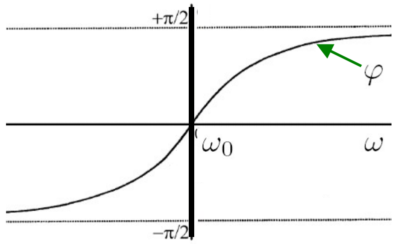
$\omega \to \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$: $\tilde{Z} \to R$ *čisto reálna,* $\varphi \to 0$ *, prúd vo fáze s budiacim napätím*

- rezonancia

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{U}_C \text{ zaostáva za budiacim napätím o } \frac{\pi}{2} \\ \tilde{U}_L \text{ predbieha budiace napätie o } \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \tilde{U}_C \text{ a } \tilde{U}_L \text{ sú v protifáze (posun o } \pi) \\ \text{- ich súčet je nulový} \end{array}\right.$$

$$(\frac{I_0}{U_0})^2 = \frac{1}{(\tilde{Z})^2} = \frac{1}{R^2+\omega^2 L^2 (1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2})^2}$$



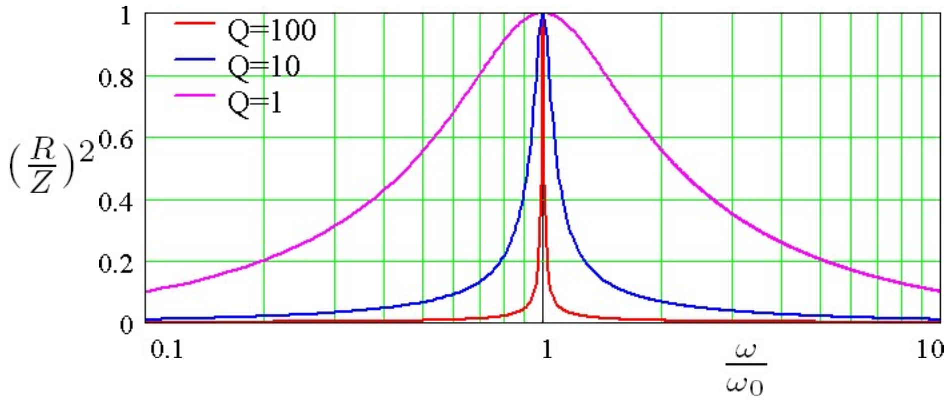


veľkosť impedancie je najmenšia v rezonancii – pri danej amplitúde budiaceho napätia prúd rezonančne narastá

kvalita oscilátora

$$Q = \frac{2\pi}{T}\frac{\langle W\rangle}{\langle \mathcal{P}\rangle} = \frac{\omega^2+\omega_0^2}{2\gamma\omega} \underset{\omega\to\omega_0}{\longrightarrow} \frac{\omega_0}{\gamma} = \frac{\omega_0 L}{R}$$

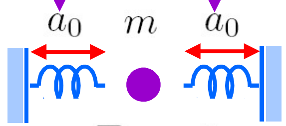
univerzálna (normovaná) rezonančná krivka



Dvojrozmerné kmity

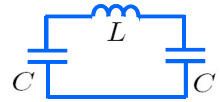
závažie m na 2 identických pružinách s tuhosťou k

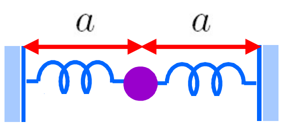
dĺžka voľných pružín



$$F_x = 0$$

elmag. analóg

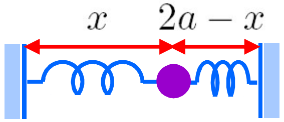




$$F_x = \overbrace{-k\underbrace{(a-a_0)}}^{\text{ľavá pružina}} + \overbrace{k\underbrace{(a-a_0)}}^{\text{pravá pružina}} = 0$$

rovnovážne natiahnutia oproti pôvodnej dĺžke voľných pružín

kmity pozdĺž pružín



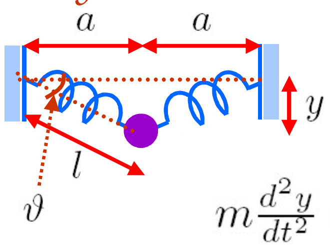
$$F_x = -k(x-a_0) + k((2a-x)-a_0) = -2k\boxed{(x-a)}$$

deformácia oproti rovnovážnemu natiahnutiu

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x = -2k(x-a) \qquad \left(x' = x-a \; , \; \frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \right) \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

pohybová rovnica odpovedá rovnici pre harmonické kmity závažia na jednej pružine s dvojnásobnou tuhosťou

kmity kolmé na rovnovážnu os pružín



$$F_\vartheta = k(l-a_0) \quad \textit{v smere pružiny} \qquad y = l\sin\vartheta \qquad l = l(y)$$

od oboch pružín

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y = -2\underbrace{F_\vartheta \sin\vartheta}_{\text{priemet do smeru } y} = -2k(l-a_0)\frac{y}{l} = -2ky\left(1-\frac{a_0}{l}\right)$$

nie je to rovnica harmonického oscilátora!

linearizácia úlohy:

a) priblíženie $a_0 \ll a < l = \sqrt{a^2+y^2} \Rightarrow \frac{a_0}{l}$ *zanedbáme,* $F_y \cong -2ky$

- *harmonické priečne (transverzálne) kmity (v smere y) s tou istou frekvenciou* ω_0 *ako pozdĺžne (longitudinálne) kmity (v smere osi x)*

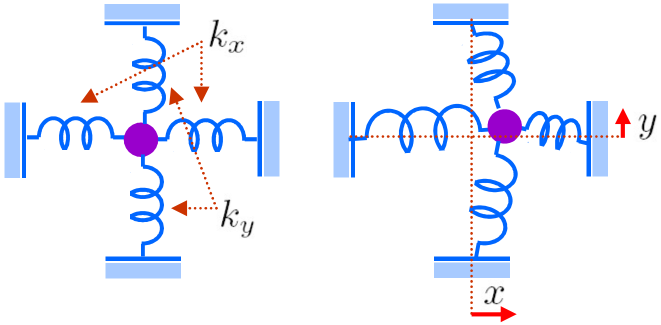
b) priblíženie malých priečnych kmitov $l^2 = a^2 + y^2 \Rightarrow \frac{1}{l} = \frac{1}{a}(1+\underbrace{\frac{y^2}{a^2}}_{\ll 1})^{-1/2}$

$\frac{1}{l} = \frac{1}{a}(1+\frac{y^2}{a^2})^{-1/2} \cong \frac{1}{a}(1-\frac{1}{2}\frac{y^2}{a^2}+\ldots)$ *(rozvoj do Taylorovho radu)*

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{2ky}{m}(1-\frac{a_0}{l}) = -\frac{2ky}{m}(1-\frac{a_0}{a}[1-\cancel{\frac{y^2}{2a^2}}+\ldots]) \cong -\frac{2k(a-a_0)}{ma}y \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega_{0t}^2 y$$

priečne harmonické kmity s frekvenciou $\omega_{0t} = \sqrt{\frac{2k(a-a_0)}{ma}}$ *odlišnou od frekvencie pozdĺžnych kmitov (priečne a pozdĺžne kmity sú v tomto priblížení navzájom nezávislé)*

dvojrozmerný harmonický oscilátor



malé kmity – zanedbávame členy $(\frac{x}{a})^2$, $(\frac{y}{a})^2$, $\frac{xy}{a^2}$ *atď.*

výchylka v smere x: $F_x = -2k_x x$ *, v smere y analog.*

výchylka závažia v smere x spôsobí aj malé natiahnutie pružín v smere y, pri malých výchylkách je tento efekt zanedbateľný a kmity v smeroch x a y považujeme v tomto priblížení za navzájom nezávislé

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -2k_x x \qquad \omega_x = \sqrt{\frac{2k_x}{m}}$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -2k_y y \qquad \omega_y = \sqrt{\frac{2k_y}{m}}$$

amplitúdy a fázy kmitov závisia od počiatočných podmienok $x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt}$ *v čase* $t = 0$

vo všeobecnosti:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -a_{11}x - a_{12}y \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -a_{21}x - a_{22}y \end{aligned}\right\}$$

sústava viazaných dif. rovníc

riešenie:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ y(t) &= B_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned}\right\}$$

kmity sú navzájom závislé

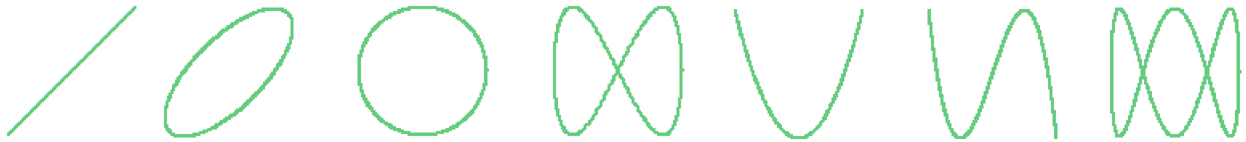
$A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2$ *sú dané počiatočnými podmienkami,* $B_1, B_2, \omega_1, \omega_2$ *sa vypočítajú*

Skladanie kmitov

- 2 rôzne kmity s rovnakou ω a rôznymi A a ϕ
  výsledné kmity majú tú istú frekvenciu ω, amplitúda závisí od A_1, A_2, ϕ_1, ϕ_2
- 2 navzájom kolmé kmity s rovnakou ω
  výsledné kmity sú eliptické (kruhové pre $A_1 = A_2$, priamkové pre $\varphi_1 - \varphi_2 = 0, \pi$)
- 2 navzájom kolmé kmity s rôznymi ω
  pri celočíselnom pomere frekvencii vznikajú tzv. Lissajousove obrazce

$\omega_1 : \omega_2$, $\varphi_1 - \varphi_2$ 1:1 , 0   1:1 , π/4   1:1 , π/2   1:2 , 0   1:2 , π/4   1:3 , 0   1:3 , π/2

$A_1 = A_2$



$x(t) = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t$ - superpozícia 2 harmonických kmitov

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= A_2 = A \\ \omega_1 &= \omega_n + \omega_m \\ \omega_2 &= \omega_n - \omega_m \end{aligned}\right\} \quad x(t) = \boxed{2A\cos\omega_m t}\cos\omega_n t = A_m \cos\omega_n t \qquad A_m = 2A\cos\omega_m t$$

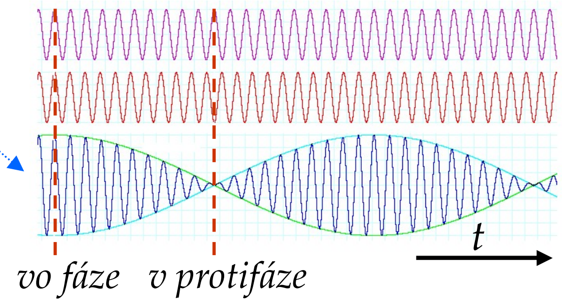
$(\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta)$

amplitúdová modulácia

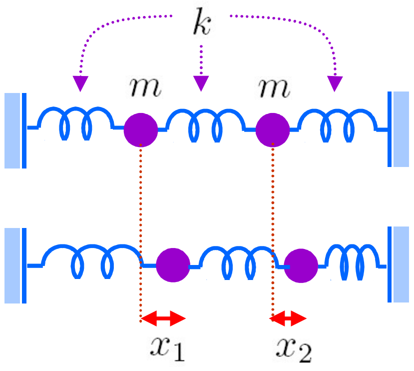
$\omega_n = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ - nosná frekvencia $\omega_m = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ - modulačná frekvencia

pri amplitúdovej modulácii spravidla platí $\omega_m \ll \omega_n$, oscilátor kmitá s nosnou frekvenciou ω_n,
pričom amplitúda kmitov osciluje s modulačnou frekvenciou ω_m,
amplitúdová modulácia je jeden zo základných spôsobov spracovania a šírenia informácií (signálov)
- informácia je zakódovaná v meniacej sa amplitúde kmitov

ak $\omega_1 \approx \omega_2 \Rightarrow \omega_m \ll \omega_n$ - *zázneje* (*rázy*) - *periodické* (*s* ω_m) *zosilňovanie a zoslabovanie* *kmitov* (*s* ω_n)



Viazané oscilátory



sčítaním a odčítaním rovníc

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x_1}{dt^2} &= -kx_1 + k(x_2 - x_1) \\ m\frac{d^2x_2}{dt^2} &= -kx_2 - k(x_2 - x_1) \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} m\frac{d^2(x_1+x_2)}{dt^2} &= -k(x_1 + x_2) \\ m\frac{d^2(x_1-x_2)}{dt^2} &= -3k(x_1 - x_2) \end{aligned}\right.$$

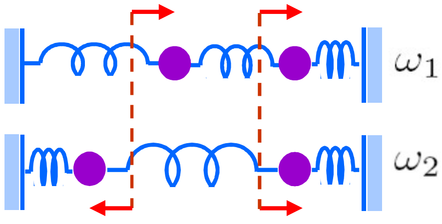
riešenia:

$$x_1 + x_2 = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$
$$x_1 - x_2 = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}\{A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \pm A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)\}$$

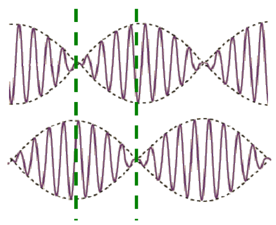
ak sú počiatočné výchylky rovnaké ($x_1 = x_2$, $A_2 = 0$) alebo symetrické ($x_1 = -x_2$, $A_1 = 0$) - synchrónne kmity – tzv. vlastné (normálne) módy na frekvencii ω_1 alebo ω_2 (vlastné frekvencie) – oba oscilátory kmitajú na rovnakej frekvencii, nenastáva výmena energie medzi oscilátormi

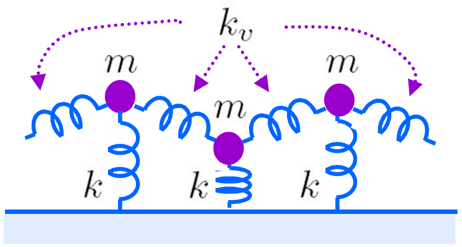


vo všeobecnom prípade (ľubovoľne zvolené počiatočné podmienky) sú kmity viazaných oscilátorov lineárnou superpozíciou vlastných módov – dochádza k periodickej výmene energie medzi oscilátormi - zázneje

nech $\varphi_1, \varphi_2 = 0,\ A_1 = A_2 = A:$ $\left\{\begin{aligned} x_1 &= A\cos(\tfrac{\omega_1-\omega_2}{2}t)\cos(\tfrac{\omega_1+\omega_2}{2}t) \\ x_2 &= A\sin(\tfrac{\omega_1-\omega_2}{2}t)\sin(\tfrac{\omega_1+\omega_2}{2}t) \end{aligned}\right.$

(počiatočné podmienky)





sústava viazaných oscilátorov, pozdĺžne aj priečne kmity

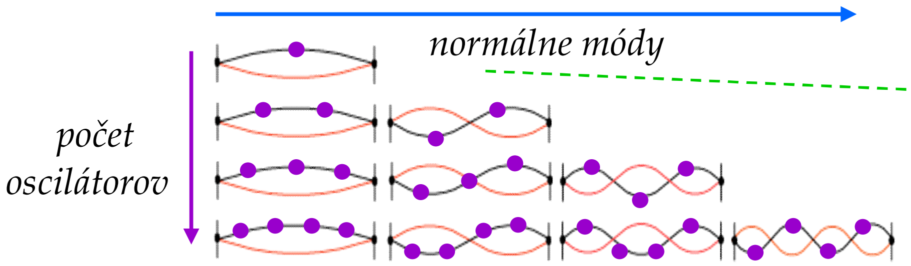
$$m\frac{d^2y_n}{dt^2} = -ky_n - k_v(y_n - y_{n+1}) - k_v(y_n - y_{n-1})$$

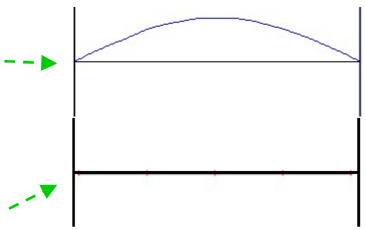
(kmity n-tého oscilátora sú ovplyvnené kmitmi susedných oscilátorov)

$$\frac{d^2y_n}{dt^2} = -\omega_0^2 y_n + \omega_v^2(y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}) \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega_v = \sqrt{\frac{k_v}{m}}$$

podrobné riešenie viď napr. Š. Veis, J. Maďar, V. Martišovitš: Mechanika a molekulová fyzika, kap. 19

voľné (priečne) kmity majú charakter normálnych módov s vlastnými frekvenciami - ich počet je daný počtom oscilátorov a ich existencia je daná počiatočnými podmienkami





v systéme N viazaných oscilátorov teda existuje N rôznych módov vlastných kmitov s frekvenciami ω_1, ω_2,... ω_N, akékoľvek kmity v takejto sústave sú lineárnou kombináciou vlastných kmitov s týmito frekvenciami

vynútené tlmené kmity (napr. budený krajný oscilátor) – pre frekvencie budenia rôzne od vlastných frekvencií kmity postupne zanikajú so vzdialenosťou od zdroja budenia , pre budiace frekvencie rovné vlastným frekvenciám nastáva rezonančné zosilnenie – kmity sa šíria smerom od zdroja *v limite spojitého prostredia (napr. struna) sú rozdiely* y_{n-1}, y_n, y_{n+1} *veľmi malé, výchylku môžeme považovať sa spojitú funkciu polohy v prostredí (na strune)* $y_n(t) = y(x,t)$

$$y_{n-1}(t) = y(x-\Delta x, t) = y(t) - \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}(\Delta x)^2 - \ldots$$

$$y_{n+1}(t) = y(x+\Delta x, t) = y(t) + \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + \ldots$$

(rozvoj do Taylorovho radu, $\Delta x \to 0$ *)*

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -\omega_0^2 y(x,t) + \omega_v^2 \boxed{\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}(\Delta x)^2}$$

nahrádza „rozdiel rozdielov“ diskrétnych hodnôt $(y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1})$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = -\omega_0^2 y(x,t) \xrightarrow[\omega_0 \to 0]{} 0$$

vlnová rovnica – rovnica šírenia vlny v priestore

$v = \omega_v \Delta x$ *(fázová) rýchlosť šírenia vlny*

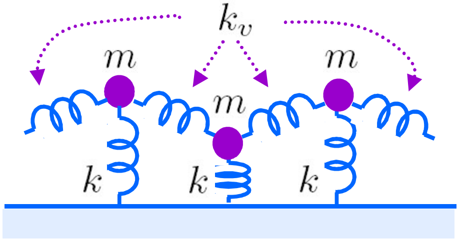
VLNY

Postupujúca vlna

sústava (infinitezimálnych) viazaných oscilátorov v tesnej blízkosti je ekvivalentná kmitajúcemu spojitému prostrediu, v ktorom môžeme definovať okamžitú výchylku ako funkciu polohy, $\psi(x)$

$$\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2} = \underbrace{\frac{k_v}{m}}_{\omega_v^2}(\Delta x)^2\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} - \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2}\psi(x,t)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega_v = \sqrt{\frac{k_v}{m}}$$



(platí pre malé kmity, pozri Viazané oscilátory)

riešenie hľadáme v tvare harmonických kmitov s amplitúdou závislou od polohy (x)

$$\psi(x,t) = A(x)\cos(\omega t + \varphi)$$

frekvencia vynútených kmitov

dosadením predpokladaného riešenia do dif. rovnice:

$$-\omega^2 A(x)\cancel{\cos(\omega t+\varphi)} = -\omega_0^2 A(x)\cancel{\cos(\omega t+\varphi)} + \omega_v^2(\Delta x)^2\frac{d^2A(x)}{dx^2}\cancel{\cos(\omega t+\varphi)}$$

dostávame dif. rovnicu pre A(x): $\quad \dfrac{d^2A(x)}{dx^2} = \dfrac{(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_v\Delta x)^2}A(x)$

ak $\omega > \omega_0$: $\quad \dfrac{d^2A(x)}{dx^2} = -K^2A(x) \qquad K^2 = \dfrac{(\omega^2-\omega_0^2)}{(\omega_v\Delta x)^2}$ *(K je reálne)*

tejto dif. rovnici vyhovuje riešenie v tvare $A(x) = A_1\sin Kx$

(koeficient A_1 *je určený okrajovými podmienkami)*

úplné (časovo závislé) riešenie $\quad \psi(x,t) = \underbrace{A_1\sin Kx}\,\underbrace{\cos(\omega t+\varphi)}$

výchylka kmitov (v danom časovom okamihu) sa mení v priestore (v smere x) ako harmonická vlna

každý bod prostredia vykonáva harmonické kmity s frekvenciou ω *vlna – prenášanie kmitov medzi viazanými oscilátormi (diskrétnymi kmitavými prvkami alebo v spojitom prostredí, napr. struna, hadica, a pod.) s oneskorením (voči referenčnému okamihu)*

výchylka harmonických kmitov sa (v danom časovom okamihu) periodicky mení v priestore (v smere x) s periódou $\lambda = \frac{2\pi}{K}$

v danom mieste (x): $\psi(t) = \psi(t+T) = \psi(t+nT)$ *perióda časovej zmeny výchylky*

frekvencia $\nu = \frac{1}{T}$ $[Hz = s^{-1}]$ *uhlová frekvencia* $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ $[rad\ s^{-1}]$

vlnová dĺžka $\lambda = \frac{2\pi}{K}$ $[m]$ *perióda zmeny výchylky v smere šírenia (x) v danom čase (t)*

uhlový (kruhový) vlnočet $K = \frac{2\pi}{\lambda}$ $[rad\ m^{-1}]$ *(tiež vlnové číslo)*

pre vlnu šíriacu sa vo všeobecnom smere (rôznom od x) $Kx \to \vec{K}\cdot\vec{r}$

$\vec{K}$ *- vlnový vektor – určuje smer šírenia vlny*

pre dané frekvencie je vlnové číslo reálne a charakterizuje postupujúcu vlnu – prenášanie kmitov prostredím bez útlmu v smere vlnového vektora

ak $\omega < \omega_0$: $\frac{d^2A(x)}{dx^2} = -K^2A(x) = \kappa^2 A(x)$ $\kappa^2 = \frac{(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_v \Delta x)^2}$ $K = i\kappa$ *(K je imaginárne!)*

tejto dif. rovnici vyhovuje riešenie v tvare $A(x) = A_1 e^{-\kappa x}$ *(* A_1 *je určené okrajovými podmienkami)* *úplné* (*časovo závislé*) *riešenie* $\psi(x,t) = \underbrace{A_1 e^{-\kappa x}}\,\underbrace{\cos(\omega t + \varphi)}$

výchylka kmitov exponenciálne zaniká v priestore (v smere x)

každý bod prostredia vykonáva harmonické kmity s frekvenciou ω

výchylka harmonických kmitov exponenciálne zaniká v priestore (*v smere x*), $\delta = \frac{1}{\kappa}$ *je charakteristickou hĺbkou vniku kmitov do prostredia v danom smere, κ je koeficient útlmu*

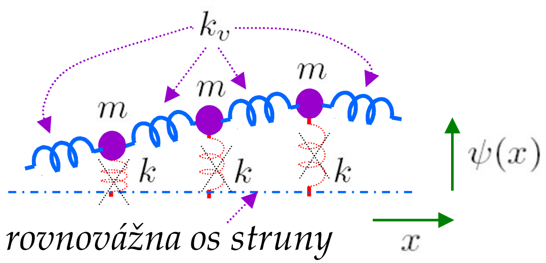
pre dané frekvencie je vlnové číslo imaginárne a charakterizuje tlmenú vlnu – prenášanie kmitov prostredím s postupne zanikajúcou výchylkou (na vzdialenosti ~ δ)

pohybová rovnica kmitajúceho prostredia – tzv. vlnová rovnica - má pre určité frekvencie riešenia, ktoré odpovedajú postupujúcej vlne s reálnym vlnovým číslom, pre iné frekvencie má riešenia odpovedajúce tlmenej vlne s imaginárnym vlnovým číslom
závislosti vlnového čísla od frekvencie $K(\omega)$ *sa nazývajú disperznými vzťahmi*

schopnosť prostredia prenášať, resp. tlmiť vlnu danej frekvencie závisí od vlastností prostredia, vyjadrených v našom modeli parametrom ω_0 (*tj. či je ω väčšie, resp. menšie než* ω_0)

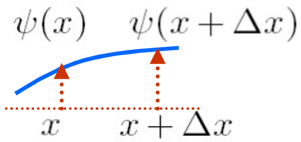
pre niektoré prostredia $\omega_0 \to 0$ *- typickým príkladom je struna (napr. na gitare), ktorej každý bod kmitá kolmo na rovnovážnu os struny, pričom spätná sila priečnych kmitov je spôsobená len deformáciou struny v pozdĺžnom smere (pri priečnom napnutí struny dochádza k jej pozdĺžnemu natiahnutiu) – koeficient tuhosti v smere kmitov (tj. priečne k rovnovážnej osi struny)*

$k \to 0$, *a teda* $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \to 0$



(pozri Viazané oscilátory)

$$\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2} - (\omega_v \Delta x)^2 \frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} = -\omega_0^2 \psi(x,t) \xrightarrow[\omega_0 \to 0]{} 0 \qquad \omega_v = \sqrt{\frac{k_v}{m}}$$



segment struny ($\Delta x \to 0$) o hmotnosti $m = m' \Delta x$ *hmotnosť jednotkovej dĺžky struny*

$$m' \Delta x \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = k_v \underbrace{\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)(\Delta x)^2} = k' \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right) \Delta x \qquad k' = k_v \Delta x$$

rozdiel „napnutí" koncov segmentu *koeficient tuhosti jednotkovej dĺžky struny*

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{k'}{m'} \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = v_f^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$ *vlnová rovnica*

$$v_f = \sqrt{\frac{k'}{m'}}$$ *rýchlosť šírenia vlny*

rýchlosť prenosu kmitov, tj. rýchlosť šírenia vlny, rastie s tuhosťou kmitajúceho prostredia (struny) a klesá s jeho hmotnosťou, nezávisí od frekvencie vlny

možné riešenie (superpozícia riešení)

$$\psi = C e^{i\underbrace{(\omega t - Kx)}} + C' e^{-i\underbrace{(\omega t - Kx)}}$$

$C' = C^*$ *aby* ψ *bolo reálne*

$$\boxed{ab + a^* b^* = \text{reálne číslo}}$$

okamžitá výchylka *amplitúda* *fáza*

ekvivalentné riešenie

$$\psi = A \cos\underbrace{(\omega t - Kx + \varphi)}$$

$$\begin{cases} A\cos\varphi = 2\Re\{C\} \\ A\sin\varphi = 2\Im\{C\} \end{cases}$$

dosadením do vlnovej rovnice $\omega^2 = v_f^2 K^2 \ , \quad \omega = \pm v_f K$

disperzný vzťah

šíri sa v kladnom (+) alebo zápornom (-) smere osi x

$\psi = Ce^{\pm i\underbrace{(\omega t - Kx)}_{\text{fáza vlny}}}$ - *rovinná monochromatická harmonická postupujúca vlna* šíriaca sa v *kladnom* smere osi x

v danom čase je fáza vlny rovnaká pre dané x, *tj. v rovine* yz

vlna sa šíri na jedinej frekvencii

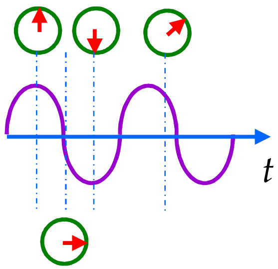
pre dané x *je fáza vlny harmonickou funkciou času*

fáza periodického deja charakterizuje štádium, počítané od pomyselného počiatku periodického deja (napr. „počiatku periódy“) v ktorom sa systém (napr. kmitajúci bod) práve nachádza

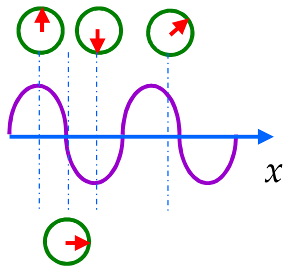
fáza postupujúcej monochromatickej vlny je periodická v priestore a čase

kmity sa prenášajú medzi viazanými oscilátormi (diskrétnymi kmitavými prvkami alebo v spojitom prostredí, napr. struna, hadica, a pod.) s oneskorením - fázovým posunom v čase i priestore (voči referenčnej fáze)

výchylka daného miesta ako funkcia času



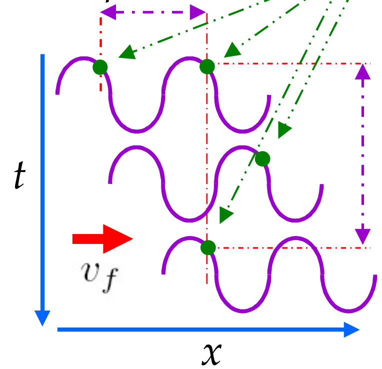
výchylka v danom čase ako funkcia polohy



pomyselné hodiny ukazujú fázu periodických kmitov daného miesta

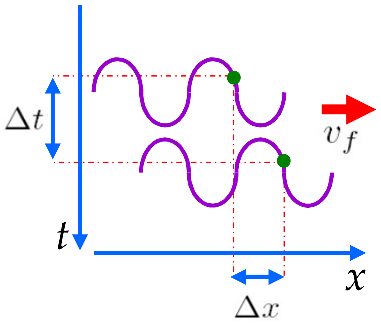
perióda v priestore

body s rovnakou fázou



perióda v čase (čas, za ktorý sa na dané miesto opäť dostane výchylka danej fázy) *pre postupujúcu monochromatickú vlnu ψ platí* $\quad \psi(x,t) = f(\underbrace{\omega t - Kx}_{\text{fáza vlny}}) = f(\underbrace{t - \frac{x}{v_f}}_{\text{fáza vlny}})$

v smere osi x



tá istá fáza

$$\psi(x+\Delta x, t+\Delta t) = \psi(x,t) \Rightarrow \overbrace{\omega(t+\Delta t) - K(x+\Delta x)}^{\text{tá istá fáza}} = \overbrace{\omega t - Kx}^{\text{tá istá fáza}}$$

($\omega t - Kx$ sa nemení - prírastky $\omega\Delta t$ a $K\Delta x$ sa kompenzujú)

$$\Rightarrow \omega\Delta t - K\Delta x = 0 \Rightarrow \underline{\frac{\omega}{K} = v_f = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow \frac{dx}{dt}} \quad (\Delta x, \Delta t \rightarrow 0)$$

v_f *je fázová rýchlosť vlny - rýchlosť pohybu bodu s rovnakou fázou výchylky*

$$\underline{v_f = \frac{\omega}{K} = \frac{\lambda\omega}{2\pi} = \frac{\lambda}{T}}$$

perióda v priestore
perióda v čase

$\omega t - Kx = \omega(t - \frac{x}{v_f})$, *ak* $t - \frac{x}{v_f} = konst.$ *bez ohľadu na* ω, *tj.* v_f *nezávisí na* ω*), vlna vyhovuje bezdisperznej vlnovej rovnici ktorej odpovedá disperzný vzťah* $\quad \underline{\omega^2 = v_f^2 K^2}$

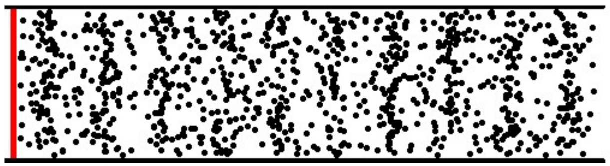
$$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v_f^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}}$$

bezdisperznej vlnovej rovnici vyhovujú monochromatické vlny všetkých frekvencií, pričom všetky sa šíria rovnakou fázovou rýchlosťou

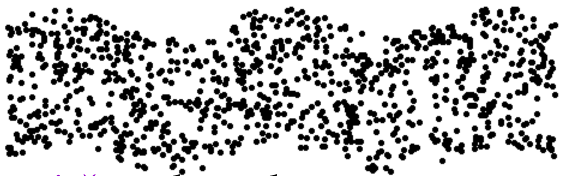
bezdisperzná vlnová rovnica popisuje (tj. je pohybovou rovnicou pre) kmitajúce prostredie, v ktorom frekvencia šíriacej sa vlny a jej vlnové číslo sú navzájom zviazané koeficientom (fázovou rýchlosťou) nezávislým na frekvencii
bezdisperznú vlnovú rovnicu sme v našom modeli získali z pôvodnej disperznej vlnovej rovnice zanedbaním člena s ω_0*, ktorý spôsoboval disperziu – frekvenčnú závislosť fázovej rýchlosti*

vlnová rovnica platí pre ľubovoľnú postupujúcu vlnu – nemusí byť monochromatická, harmonická ani periodická (môže to byť ľubovoľná porucha - rozruch, jednorázový zákmit, impulz rôzneho tvaru)

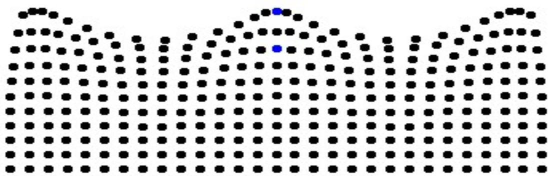
priečna (transverzálna) vlna – smer výchylky (ψ) je kolmý na smer šírenia vlny ($\vec{K}$)
pozdĺžna (longitudinálna) vlna – smer výchylky je zhodný so smerom šírenia vlny



pozdĺžna vlna v hmotnom prostredí interagujúcich častíc (atómov, molekúl)



priečna vlna v hmotnom prostredí interagujúcich častíc



vlna na vodnej hladine

Charakteristická impedancia, odraz a prechod vlny rozhraním

každý bod prostredia, v ktorom sa šíri vlna, kmitá v dôsledku väzby na „susedný“ kmitajúci bod (zo strany „prichádzajúcej“ vlny - prenos kmitov medzi viazanými oscilátormi), tento susedný bod sa teda javí ako „zdroj“ vlnenia pre daný bod (ktorý je zas „zdrojom“ vlnenia pre „opačný susedný“ bod, atď.)

odozva každého bodu (oscilátora) na vonkajšie budenie (kmity prenášané „od suseda“) závisí od jeho zotrvačnosti (tj. hmotnosti m - v prípade mechanického oscilátora, indukčnosti L – v prípade elektrického oscilátora) a väzby na rovnovážnu polohu (koeficient väzby k – v mech. prípade, el.ekvivalentom je prevrátená hodnota kapacity 1/C)

zotrvačnosť a väzba kmitajúceho bodu predstavujú akýsi „odpor“, ktorý musí budiaca sila „prekonávať, aby vyvolala kmity

pre ľubovoľnú vlnu $\psi(\omega t \mp Kx) = \psi(v_f t \mp x)$ *postupujúcu v kladnom, resp. zápornom smere osi x platí:*

$$v_f = \frac{\omega}{K}$$

(horné znamienko odpovedá vlne postupujúcej v kladnom smere osi x a dolné v zápornom)

$$\frac{\partial\psi(v_f t\mp x)}{\partial t} = \frac{\partial\psi(v_f t\mp x)}{\partial(v_f t\mp x)}\frac{\partial(v_f t\mp x)}{\partial t} = v_f\frac{\partial\psi(v_f t\mp x)}{\partial(v_f t\mp x)}$$

$$\frac{\partial\psi(v_f t\mp x)}{\partial x} = \frac{\partial\psi(v_f t\mp x)}{\partial(v_f t\mp x)}\frac{\partial(v_f t\mp x)}{\partial x} = \mp\frac{\partial\psi(v_f t\mp x)}{\partial(v_f t\mp x)}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} \pm v_f\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \qquad v_f = \sqrt{\frac{k'}{m'}}$$

spätná sila (ktorá pôsobí proti vychýleniu z rovnovážnej polohy) „pružiny“

$$F = -k\underbrace{(\psi(x+\Delta x) - \psi(x))}_{\text{rozdiel výchyliek pružiny v dvoch bodoch vzdialených o } \Delta x} = -k\Delta x\frac{\psi(x+\Delta x)-\psi(x)}{\Delta x} = -k'\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{k'}{v_f}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \sqrt{k'm'}\frac{\partial\psi}{\partial t} = Z_0\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

koeficient tuhosti

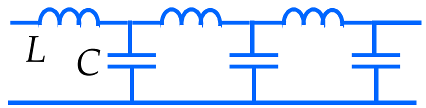
rozdiel výchyliek pružiny v dvoch bodoch vzdialených o Δx

(pre vlnu postupujúcu v kladnom smere osi x)

$Z_0 = \sqrt{k'm'}\ (= \sqrt{km})$ *charakteristická impedancia (prostredia)* $[\Omega]$

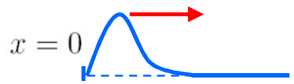
charakteristická impedancia prostredia je „odpor“ (každého bodu – oscilátora) kladený budiacej sile (od „susedného“ bodu) – „odpor“ prostredia voči vlne („prichádzajúca“ vlna v danom bode „cíti“ odpor prostredia, ktoré má „pred sebou“) – impedancia sa vzťahuje na daný bod (v homogénnom prostredí je všade rovnaká) - nezávisí od tvaru vlny, len od vlastností prostredia (hmotnosti a tuhosti) – tento „odpor“ neznamená straty (tj. tlmenie vlny), určuje len schopnosť daného prostredia prenášať vlnu ($v_f = \sqrt{\frac{k'}{m'}}$*)*

elektrickým analógom sústavy spriahnutých oscilátorov je reťazec LC obvodov, ktorý charakterizuje bezstratovú dvojvodičovú prenosovú linku (L reprezentuje indukčnosť vodičov a C kapacitnú väzbu medzi nimi)

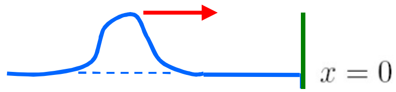


zámenou $m' \to L'$, $k' \to \frac{1}{C'}$ *dostávame* $Z_0 = \sqrt{k'm'}(= \sqrt{km}) \to \sqrt{\frac{L'}{C'}}(= \sqrt{\frac{L}{C}})$

(′ = veličina jedn. dĺžky, resp. na jedn. dĺžky) $v_f = \sqrt{\frac{k'}{m'}} \to \sqrt{\frac{1}{L'C'}}$



- *struna ohraničená na jednom konci (* $x = 0$*, druhý koniec v* ∞*)*
  vyvoláme výchylku („rozruch“) pôsobením sily v $x = 0$ *(proti sile struny)*
  zdroj výchylky (sila) „pociťuje odpor“ – charakteristickú impedanciu struny Z_0



- *struna zakončená v* $x = 0$*, rozruch prichádzajúci z* $-\infty$

  ak zakončenie má impedanciu $Z = Z_0$ *(tzv. prispôsobená impedancia), rozruch ako keby sa bez zmeny tvaru šíril ďalej (ako keby struna pokračovala bez zmeny vlastností), tj. zmizne za zakončením (* $x > 0$ *)*

ak zakončenie má impedanciu $Z \neq Z_0$ *, vzniká odrazená vlna (rozruch)* ψ_r *, ktorá sa superponuje na dopadajúcu vlnu* ψ_i*, výsledná vlna je* $\psi(x,t) = \psi_i(x,t) + \psi_r(x,t)$

$$(v_f t - x) \qquad (v_f t + x)$$

$$x = 0 : -k'\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_r}{\partial x}\right)_{x=0} = Z\left(+\frac{\partial \psi_i}{\partial t} - \frac{\partial \psi_r}{\partial t}\right)_{x=0}$$

R – koeficient odrazu

$$Z_0 \frac{\partial \psi_{i,r}}{\partial t} \qquad \Rightarrow \left(\frac{\partial \psi_r}{\partial t}\right)_{x=0} = \frac{Z_0 - Z}{Z_0 + Z}\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial t}\right)_{x=0} \xrightarrow[integr.]{} \underline{\psi_r(t,0) = \boxed{\frac{Z_0 - Z}{Z_0 + Z}}\psi_i(t,0)}$$

v ľubovoľnom mieste $x = -l$ *(naľavo od zakončenia* $x = 0$ *):*

$$\left.\begin{aligned} \psi_i(-l, t - \tfrac{l}{v_f}) &= \psi_i(0,t) \\ \psi_r(-l, t + \tfrac{l}{v_f}) &= \psi_r(0,t) \end{aligned}\right\} \text{ lebo } \left\{\begin{aligned} (v_f t - x) \\ (v_f t + x) \end{aligned}\right\} \text{ sa nemení pri } \left\{\begin{aligned} \psi_i \\ \psi_r \end{aligned}\right.$$

$$\Rightarrow \psi_r(-l, t + \tfrac{l}{v_f}) = R\psi_i(-l, t - \tfrac{l}{v_f})$$

po odraze *pred odrazom*

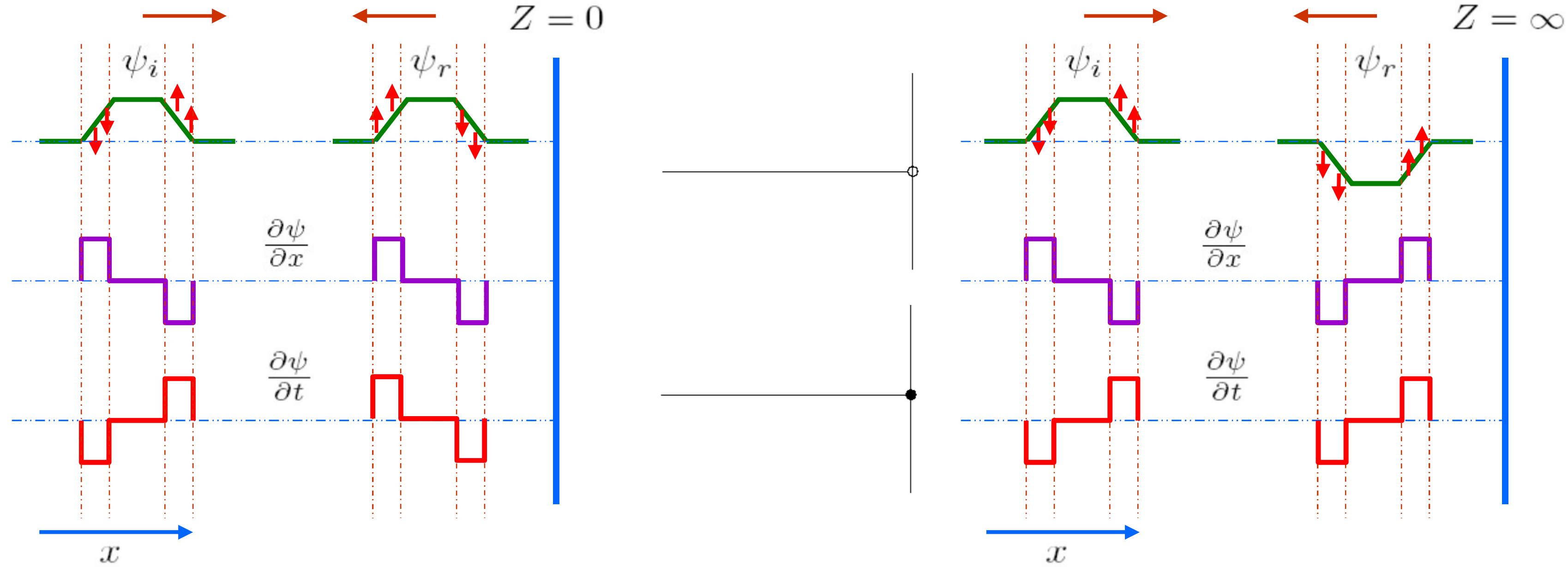
$R < 0$ *- tvar vlny sa pri odraze prevráti „dolu hlavou“ (* $Z > Z_0$*)*
$R > 0$ *- tvar vlny sa pri odraze nezmení (*$Z < Z_0$ *)*
$R = 0$ *- nevzniká odrazená vlna (* $Z = Z_0$ *)*

$-1 \leq R \leq 1 \quad (|R| \leq 1)$ *odrazená vlna je vždy menšia, nanajvýš rovnaká ako dopadajúca*

ψ je výchylka prostredia z rovnovážnej polohy a šíri sa prostredím ako vlna
(napr. priečna vlna – výchylka je kolmá na smer šírenia vlny)

$\frac{\partial\psi}{\partial x}$ určuje spätnú silu prostredia (pôsobiacu proti výchylke) a šíri sa spolu s vlnou ψ - $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ je tiež vlna

$\frac{\partial\psi}{\partial t}$ určuje rýchlosť zmeny výchylky ψ a šíri sa spolu s ňou - $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ je tiež vlna



$Z = 0$ znamená „nulový odpor“ kladený vlne zakončením – voľný koniec

$R = 1$ pre ψ a $\frac{\partial\psi}{\partial t}$, v bode odrazu sú dvojnásobné

$R = -1$ pre $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, v bode odrazu je nulové

(superpozícia dopadajúcej a odrazenej vlny)

$Z = \infty$ znamená „nekonečný odpor“ kladený vlne zakončením – pevný koniec

$R = -1$ pre ψ aj $\frac{\partial\psi}{\partial t}$, v bode odrazu sú nulové

$R = 1$ pre $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, v bode odrazu je dvojnásobné

$$\boxed{R_\psi = R_{\frac{\partial\psi}{\partial t}} = -R_{\frac{\partial\psi}{\partial x}}}$$

- *dve* *struny (prostredia) s* *rôznymi charakteristickými* *impedanciami* Z_1 *a* $Z_2 (\neq Z_1)$, *spojené v* $x = 0$, *vlna (rozruch) prichádzajúci z* $-\infty$ *sa v* $x = 0$ *čiastočne odrazí a* *čiastočne prejde* *rozhraním –* *prechádzajúca* *vlna* ψ_t

$$x = 0 : \psi_i(t,0) + \psi_r(t,0) = \psi_t(t,0) \qquad \begin{cases} \psi_r(t,0) = R\psi_i(t,0) \\ \psi_t(t,0) = \boxed{(1+R)}\psi_i(t,0) \end{cases} \qquad R = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$T = 1 + R = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \qquad 0 \leq T \leq 2$$

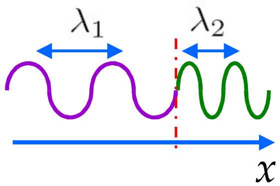
T – *koeficient prechodu*

prechádzajúca vlna môže byť *menšia i väčšia* *než dopadajúca!*

> *na rozhraní platí* $\psi_i(t,0) + \psi_r(t,0) = (1+R)\psi_i(t,0) = \psi_t(t,0)$
> *(súčet výchyliek na ľavej strane rozhrania = výchylka na pravej strane rozhrania)*
>
> 
>
> *prechádzajúca* *vlna má* *väčšiu* *amplitúdu než dopadajúca (T > 1)* *ak* $R > 0$, $Z_1 > Z_2$, *teda ak druhé prostredie kladie* *menší odpor* *voči kmitom než prvé (odrazená vlna vtedy „nie je prevrátená“)*

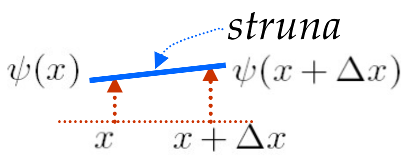
v druhom prostredí (strune, $x > 0$*) je* $Z_2 \neq Z_1 \Rightarrow$ *rýchlosť šírenia vlny* $v_{f2} \neq v_{f1}$

$\Rightarrow$ *tvar vlny sa mení* *pri prechode rozhraním –* *deformuje sa v smere x* *v pomere* $\frac{v_{f2}}{v_{f1}}$ *!*

> *vlnová dĺžka* *periodickej* *vlny je* $\lambda = v_f T = \frac{2\pi v_f}{\omega}$, *pričom frekvencia (resp. perióda) kmitov sa prechodom do druhého prostredia* *nemení*, *vlnová dĺžka sa teda* *mení* *s fázovou rýchlosťou vlny v danom prostredí,* $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{v_{f2}}{v_{f1}}$ *(podobne sa mení dĺžka ľubovoľného šíriaceho sa* *neperiodického* *rozruchu)*
>
> 
>

môže pritom nastať situácia $Z_1 = Z_2$ ($\sqrt{k'_1 m'_1} = \sqrt{k'_2 m'_2}$) *ale* $v_{f1} \neq v_{f2}$ ($\sqrt{\frac{k'_1}{m'_1}} \neq \sqrt{\frac{k'_2}{m'_2}}$)
resp. naopak

Prenos energie vo vlne



$$\psi(x+\Delta x)-\psi(x)=\frac{\psi(x+\Delta x)-\psi(x)}{\Delta x}\Delta x=\frac{\partial\psi}{\partial x}\Delta x$$

rozdiel výchyliek = napnutie struny

$$W_p=\tfrac{1}{2}k\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\Delta x\right)^2=\tfrac{1}{2}k'\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\Delta x$$

potenciálna energia (na jedn. dĺžky) $\quad W_p'=\tfrac{1}{2}k'\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 \qquad k'=k\Delta x$ *tuhosť jedn. dĺžky struny*

v *- rýchlosť zmeny výchylky*

kinetická energia (na jedn. dĺžky) $\quad W_k'=\tfrac{1}{2}m'\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 \qquad m'=\frac{m}{\Delta x}$ *hmotnosť struny na jedn. dĺžky*

celková energia (na jedn. dĺžky)

$$W'(x,t)=\tfrac{1}{2}m'\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2+\tfrac{1}{2}k'\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2=\frac{Z_0}{2v_f}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2+v_f^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right\} \qquad \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\pm v_f\frac{\partial\psi}{\partial x}=0\right)$$

okamžité hodnoty kinetickej a potenciálnej energie (na jedn. dĺžky) sa navzájom rovnajú v každom bode postupujúcej vlny

výkon sily vychyľujúcej strunu (zo zdroja kmitov) v danom bode x:

$$\mathcal{P}(x,t)=Fv=\boxed{-k'\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)}\boxed{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)}=-Z_0v_f\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial t}=\pm\frac{k'}{v_f}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2=\pm Z_0\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2=$$
$$=\pm v_f W'(x,t)$$

energia sa šíri spolu s vlnou, znamienko +/- vyjadruje len smer šírenia (vpravo/vľavo)

energia vlny dopadajúcej na rozhranie dvoch prostredí sa „rozdelí“ do vlny odrazenej od rozhrania (šíriacej sa v pôvodnom prostredí) a vlny prechádzajúcej do druhého prostredia

$$\mathcal{P}_i^{\rightarrow}(x,t) = \mathcal{P}_r^{\leftarrow}(x,t) + \mathcal{P}_t^{\rightarrow}(x,t)$$

porovnaj s $\psi_i + \psi_r = \psi_t$ *na rozhraní!*

$$Z_1\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial t}\right)^2 = Z_1\left(\frac{\partial\psi_r}{\partial t}\right)^2 + Z_2\left(\frac{\partial\psi_t}{\partial t}\right)^2$$

$\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + \frac{\partial\psi_r}{\partial t} = \frac{\partial\psi_t}{\partial t}$ *(po zderivovaní)*

$$Z_1\left(\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial\psi_r}{\partial t}\right)^2\right) = Z_2\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + \frac{\partial\psi_r}{\partial t}\right)^2$$

$$Z_1(1-R) = Z_2(1+R)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{(a^2 - b^2) - (a-b)(a+b)} \\ \psi_r = R\psi_i \dashrightarrow \frac{\partial\psi_r}{\partial t} = R\frac{\partial\psi_i}{\partial t} \end{array} \right.$$

$$\underline{\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1+R}{1-R}} \qquad \underline{R = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}} \dashrightarrow \underline{T = 1 + R = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}}$$

(pre koeficienty odrazu a prechodu)

Stojatá vlna

- *struna s pevným koncom v* $x = 0$*, vlna prichádza z* $-\infty$ $\quad Z \to \infty \Rightarrow \underline{R = -1}$ *úplný odraz*

  $\psi_i = \underline{A} \cos(\omega t - Kx + \varphi) \qquad \psi_r = \underline{-A} \cos(\omega t + Kx + \varphi)$

  pre všetky $x (< 0) : \psi = \psi_i + \psi_r = \underline{2A \sin Kx \sin(\omega t + \varphi)}$

  $$\boxed{\begin{array}{c} \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\ \alpha = \omega t + \varphi \,, \ \beta = Kx \end{array}}$$

  stojatá vlna – nešíri sa, body prostredia kmitajú ($\sin(\omega t + \varphi)$*), amplitúda sa mení s polohou (* $2A \sin Kx$ *)*

  $Kx = n\pi \ : \ \psi = 0$ *(body s nulovou amplitúdou) - uzly stojatej vlny*

- *struna s voľným koncom v* $x = 0$*, vlna prichádza z* $-\infty$ $\quad Z = 0 \Rightarrow \underline{R = 1}$ *úplný odraz*

  $\psi_i = A \cos(\omega t - Kx + \varphi) \qquad \psi_r = \underline{A} \cos(\omega t + Kx + \varphi)$

  $\psi = \psi_i + \psi_r = \underline{2A \cos Kx \cos(\omega t + \varphi)} \qquad Kx = (2n+1)\frac{\pi}{2} \ : \ \psi = 0$ *- uzly stojatej vlny*

- *struna s pevnými koncami v* $x = 0, L$

  $x = 0, L \ : \ \psi = 0 \qquad \sin K_n L = 0 \Rightarrow \underline{K_n = \frac{n\pi}{L} \ \ (n = 1, 2, \ldots)}$

  $\lambda = \underline{\lambda_n = \frac{2\pi}{K_n} = \frac{2L}{n}} \quad , \quad \omega = \underline{\omega_n = v_f K_n = \frac{n\pi v_f}{L}}$

  „dovolené" hodnoty parametrov stojatej vlny

  módy stojatej vlny (vlastné kmity)
  súčasne môže byť vybudených viacero módov

pri stojatej vlne sa energia šíri rovnako oboma smermi (superpozícia dopadajúcej a odrazenej vlny) – výsledná energia sa nešíri, len navzájom mení formy (z kinetickej na potenciálnu a naopak)

každé ohraničenie prostredia, ktorým sa vlna šíri, alebo rozhranie prostredí s rôznymi impedanciami vedie ku vzniku stojatej vlny ako superpozície dopadajúcej a odrazenej vlny

ak je šírenie harmonickej vlny ohraničené z jednej strany – tj. je obmedzené jednou okrajovou (hraničnou) podmienkou v smere šírenia vlny, vzniká stojatá vlna, ktorej vlnová dĺžka odpovedá vlnovej dĺžke dopadajúcej (a odrazenej) vlny, pričom tieto vlny môžu nadobúdať spojite ľubovoľné hodnoty

ak je šírenie harmonickej vlny ohraničené z oboch strán v smere šírenia vlny (dve okrajové podmienky), existujú len diskrétne hodnoty vlnových dĺžok (a frekvencií) stojatej vlny, a teda aj postupujúce riešenia vlnovej rovnice (dopadajúca a odrazená vlna) existujú len pri týchto diskrétnych hodnotách frekvencií – ohraničenie šírenia vĺn v priestore má za následok obmedzenie frekvencií vĺn na určité diskrétne spektrum

Tlmená vlna

dodatočná tlmiaca sila (napr. trenie) $-\gamma'\frac{\partial\psi}{\partial t}$ koeficient útlmu (na jedn. dĺžky)

rovnica tlmenej vlny (tlmená, porušená vlnová rovnica)

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \underbrace{\frac{k'}{m'}}_{v_f^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \underbrace{\frac{\gamma'}{m'}\frac{\partial\psi}{\partial t}}_{\text{tlmiaci člen}}}$$

hľadáme riešenie v tvare $\psi(x,t) = Ae^{i(\omega t - Kx)}$
(rovinná monochromatická vlna šíriaca sa v smere x)

$\omega^2 - i\frac{\gamma'}{m'}\omega = v_f^2K^2 \Rightarrow K = \alpha - i\beta$ K komplexné, α,β reálne

$\psi(x,t) = Ae^{-\beta x}e^{i(\omega t - \alpha x)}$

tlmená vlna v smere x

analogické riešenie pre vlnu šíriacu sa v smere -x

$\omega^2 = v_f^2(\alpha^2 - \beta^2)$ $\quad \frac{\gamma'}{m'}\omega = 2v_f^2\alpha\beta$ (samostatná rovnosť reálnych a imaginárnych častí)

pre malé tlmenie ($\beta \ll \alpha$) $\quad \alpha \cong \pm\frac{\omega}{v_f}$ koef. šírenia $\quad \beta \cong \pm\frac{\gamma'}{2v_f m'}$ koef. útlmu - nezávisí od ω - bezdisperzná tlmená vlna

komplexný vlnočet (vlnový vektor) K charakterizuje šírenie (reálna časť α) aj útlm vlny (imaginárna časť β) – reálna aj imaginárna časť K majú fyzikálny zmysel (na rozdiel od imag. časti výchylky)

$Z_0 = \frac{k'K}{\omega} = \frac{k'\alpha}{\omega} - i\frac{k'\beta}{\omega}$ - komplexné – imaginárna časť charakterizuje útlm

aj koeficient odrazu R komplexný - zahŕňa fázový posun odrazenej vlny voči dopadajúcej, vo všeobecnosti $\neq 0, \pi$

Vlnový balík, disperzia

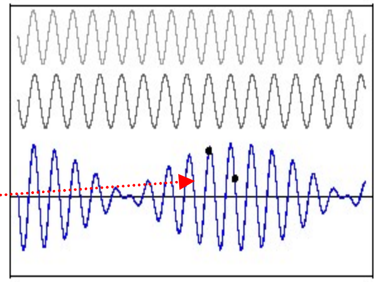
dve vlny blízkych frekvencií

$$\omega_1 = \omega + d\omega \qquad \omega_2 = \omega - d\omega$$

$$K_1 = K + dK \qquad K_2 = K - dK$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = 2A\cos(t\,d\omega - x\,dK)\sin(\omega t - Kx)$$

záznej

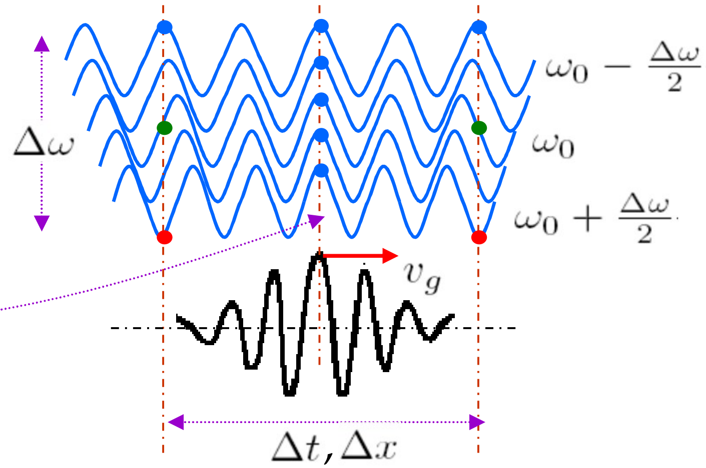


vlnový balík – superpozícia mnohých harmonických vĺn blízkych frekvencií vytvorí jediný záznej (mimo neho je superpozícia vĺn nulová)

pre miesta s rovnakou výchylkou a fázou platí

$$t\,d\omega - x\,dK = konst.$$

diferencovaním $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d\omega}{dK}$



ak sa frekvencie líšia len málo, tvar vlnového balíka sa šírením ani v disperznom prostredí takmer nemení – môžeme hovoriť o rýchlosti šírenia balíka (napr. miesta s maximálnou výchylkou) – grupovej rýchlosti

$$\boxed{v_g = \frac{d\omega}{dK}} \qquad \boxed{v_f = \frac{\omega}{K}}$$

pre dobu „preletu“ Δt vlnového balíka, tvoreného nekonečným počtom vĺn v intervale $\Delta\omega$ okolo ω_0, daným miestom platí $\Delta\omega\Delta t \geq 2\pi$ (viď obrázok)

rozptyl frekvencií $\Delta\omega$ znamená rozptyl vlnových vektorov $\Delta K = \frac{\partial K}{\partial \omega}|_{\omega_0}\Delta\omega + ... \cong \frac{\Delta\omega}{v_g}$ (Taylorov rozvoj)

dĺžka vlnového balíka $\Delta x \approx v_g \Delta t \cong \frac{\Delta\omega}{\Delta K}\Delta t \quad \Rightarrow \quad \underline{\Delta x \Delta K \approx \Delta\omega\Delta t \geq 2\pi}$

súčin rozmeru vlnového balíka a rozptylu vlnových čísel nemôže byť ľubovoľne malý

vlnový balík predstavuje akýsi druh impulzu, šíriaceho sa v priestore, v každom časovom okamihu lokalizovaného v určitej oblasti priestoru

vlnový balík je superpozíciou monochromatických vĺn, žiadna monochromatická vlna nie je lokalizovaná v priestore - začína aj končí v nekonečne – je idealizáciou

akákoľvek reálna vlna má svoj počiatok v priestore (v mieste svojho zdroja) – je „čiastočne lokalizovaná“ – nie je monochromatická

bezdisperzné prostredie $\quad \omega = v_f K \quad , \quad v_f = \frac{\omega}{K}$

disperzné prostredie $\quad v_f = v_f(K)$ - závisí od K a teda od λ, ω

v reálnej strune okrem napätia v dôsledku pozdĺžneho naťahovania existujú aj spätné sily spôsobené tuhosťou struny pri jej zakrivení, takéto sily spôsobujú závislosť rýchlosti šírenia (fázy) vlny od frekvencie, resp. vlnočtu

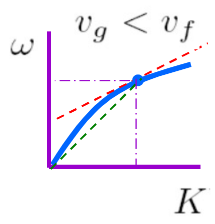
konkrétny tvar $\omega(K)$ - disperzný vzťah (disperzná krivka)

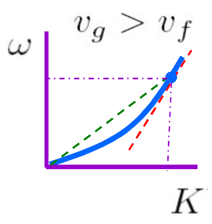
$$\omega = v_f K \Rightarrow v_g = v_f + K\frac{dv_f}{dK} \qquad K = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad dK = -\frac{2\pi}{\lambda^2}d\lambda \Rightarrow v_g = v_f - \lambda\frac{dv_f}{d\lambda}$$

v nedisperznom prostredí v_f *nezávisí od* K*, resp.* λ, $\frac{dv_f}{d\lambda} = 0 \quad \Rightarrow v_g = v_f$

ak $\frac{dv_f}{d\lambda} > 0,\; v_g < v_f$ *- normálna disperzia*

ak $\frac{dv_f}{d\lambda} < 0\,,\; v_g > v_f$ *- anomálna disperzia*





rýchlosť šírenia vlnového balíka (vzruchu, informácie) v_g *v prostredí s normálnou disperziou je rýchlosťou šírenia energie (resp. informácie zakódovanej v modulácii)*

harmonické vlny rôznych frekvencií sa šíria v disperznom prostredí rôznymi rýchlosťami, neharmonické vzruchy (zložené z harmonických zložiek) sa šíria so skreslením, tj. mení sa ich tvar

každá harmonická zložka sa šíri inou rýchlosťou, po istom čase sa zložky „rozídu“ a vlna zmení tvar - v disperznom prostredí sa tvar impulzu deformuje

v disperznom prostredí sa vlnový balík (šíriaci sa rýchlosťou v_g*) pomaly deformuje (jednotlivé vlny sa šíria rôznymi fázovými rýchlosťami) a po dostatočne dlhom čase sa rozpadne (pojem grupová rýchlosť vtedy stráca zmysel)*

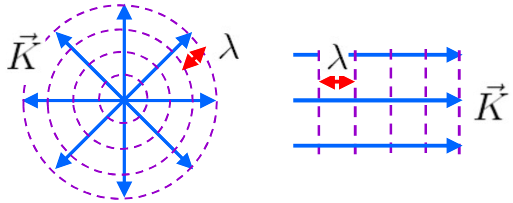
Šírenie vĺn v priestore, skladanie vĺn

vlnoplocha – plocha konštantnej fázy

vlny (podľa tvaru vlnoplochy) $\begin{cases}\textit{rovinné}\\ \textit{kruhové}\end{cases}$

susedné vlnoplochy s rovnakou fázou sú od seba vzdialené λ

vlnový vektor $\vec{K}$ *má smer kolmý na vlnoplochu*



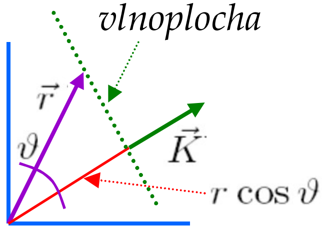
koherentná vlna - vlna danej frekvencie, ktorej fáza v danom čase a mieste je jednoznačne určená (rozdiel fáz vlny medzi dvoma rôznymi miestami v danom okamihu je jednoznačne daný dráhovým rozdielom vlny medzi týmito miestami, rozdiel fáz v danom mieste v dvoch rôznych okamihoch je jednoznačne daný časovým rozdielom)

vlny z rôznych zdrojov sa šíria nezávisle na sebe, v oblasti prekrývania sa skladajú

v oblasti prekrývania koherentných vĺn rovnakých frekvencií nastáva interferencia – výsledná okamžitá výchylka v danom bode závisí od okamžitých výchyliek a rozdielu fáz interferujúcich vĺn (nekoherentné vlny sa navzájom skladajú ale neinterferujú)

$\psi_1 = A_1 e^{i\varphi_1}$ $\qquad \psi_2 = A_2 e^{i\varphi_2}$ $\qquad$ *rovinné vlny* $\qquad \vec{K}\cdot\vec{r} = Kr\cos\vartheta$

$\varphi_{1,2} = \omega t - \vec{K}\cdot\vec{r}_{1,2} + \varphi_{01,02}$ *fázy rovinných vĺn v 3-rozmer. prípade*



$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = Ae^{i\varphi}$$

$$A^2 = AA^*(=\psi\psi^*) = (A_1e^{i\varphi_1} + A_2e^{i\varphi_2})(A_1e^{-i\varphi_1} + A_2e^{-i\varphi_2}) = \dots$$

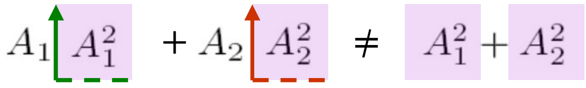
$$= A_1^2 + A_2^2 + \underbrace{\boxed{2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}}_{-1 \div 1}$$ *interferenčný člen*

$$\boxed{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 2\cos\alpha}$$

deštruktívna $\quad$ *konštruktívna interferencia* *ak* $A_1 = A_2 = A_0$*:* $\quad A^2 = 2A_0^2\underbrace{(1+\cos(\varphi_2-\varphi_1))}_{0\div 2} \longrightarrow \underline{0 \div 4A_0^2}$

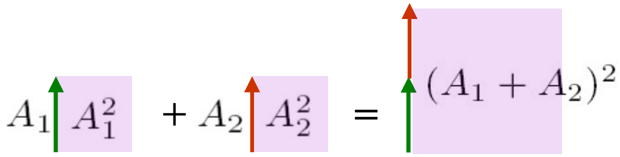
pri neinterferenčnom skladaní (nekoherentných vĺn) $\underline{A^2 = 2A_0^2}$ *(* $\varphi_2 - \varphi_1$ *nie je jednoznačne určené (neustále sa mení), časová stredná hodnota* $\cos(\varphi_2-\varphi_1) \rightarrow 0$*)*

intenzita (tj. amplitúda^2*) výslednej vlny pri interferencii koherentných vĺn sa líši od prostého súčtu intenzít jednotlivých vĺn o intereferenčný člen*

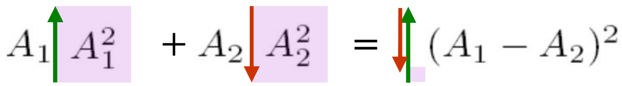


graficky možno intenzitu každej vlny zobraziť plochou štvorca (amplitúda^2 *) nad šípkou o veľkosti amplitúdy vlny v smere určenom fázou vlny, šípka výslednej vlny je zložená z šípok interferujúcich vĺn podľa pravidiel vektorového súčtu*

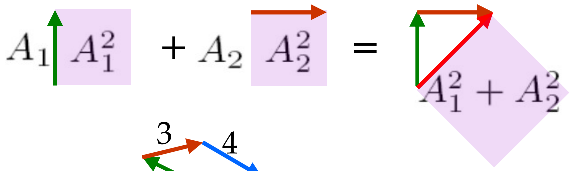
ak sa „stretnú" vlny s rovnakou fázou (tj. výchylky vĺn v danom mieste a čase majú rovnaký smer) nastáva konštruktívna interferencia ($\cos(\varphi_2-\varphi_1) = 1$ *)*



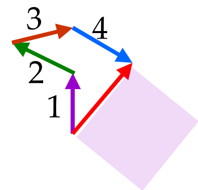
ak sa „stretnú" vlny s opačnou fázou (tj. výchylky vĺn v danom mieste a čase majú opačný smer) nastáva deštruktívna interferencia ($\cos(\varphi_2-\varphi_1) = -1$ *)*



ak sa „stretnú" vlny posunuté vo fáze o 90°, (pri maximálnej prvej výchylke je druhá nulová, a naopak), intereferenčný člen je nulový ($\cos(\varphi_2-\varphi_1) = 0$ *)*

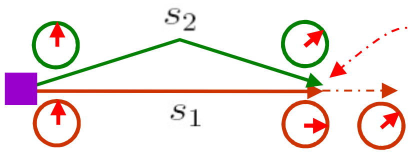


interferencia viacerých vĺn s rôznymi (všeobecnými) fázovými posunmi



rozdiel fáz dvoch vĺn, pochádzajúcich z toho istého zdroja, prichádzajúcich v danom okamihu do daného bodu po rôznych dráhach, je daný rozdielom prejdených dráh

vlny vychádzajú zo zdroja s rovnakou fázou

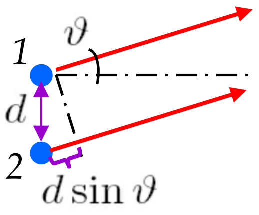


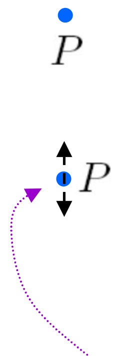
v danom okamihu a mieste sú fázy oboch vĺn rôzne

$$\varphi_{1,2} = \omega t - K s_{1,2} = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{s_{1,2}}{\lambda}\right)$$

dráhy prejdené jednotlivými vlnami

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda}(s_1 - s_2) = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta s$$





rozdiel vzdialeností medzi koherentnými zdrojmi 1 a 2 a (vzdialeným) bodom P je $d\sin\vartheta$

odpovedajúci rozdiel fáz je $Kd\sin\vartheta = \frac{2\pi}{\lambda}d\sin\vartheta$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda}d\sin\vartheta + \varphi_0$$

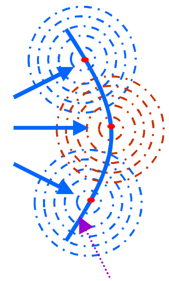
rozdiel počiatočných fáz

$$\varphi_0 = \varphi_{02} - \varphi_{01}$$

(pre koherentné zdroje nepodstatná konštanta)

zmenou uhla ϑ (t.j. zmenou polohy bodu P) sa mení hodnota interferenčného člena, vzniká v čase nemenný periodický priestorový interferenčný „obrazec“ intenzity vlnenia (tj. A^2) (intenzita je maximálna tam kde sú interferujúce vlny vo fáze a minimálna (nulová) tam kde sú v protifáze)

Huygensov princíp – každý bod, do ktorého dorazí vlna, sa stáva (pomyselným) zdrojom (sekundárneho) rovnakého vlnenia šíriaceho sa všetkými smermi



vlnoplocha

príspevky vĺn od pomyselných zdrojov interferujú, v homogénnom (rovnorodom) prostredí je výsledkom úplná deštruktívna interferencia vo všetkých smeroch okrem smeru šírenia pôvodnej vlny - výsledkom interferencie je vlna postupujúca rovnako ako pôvodná vlna

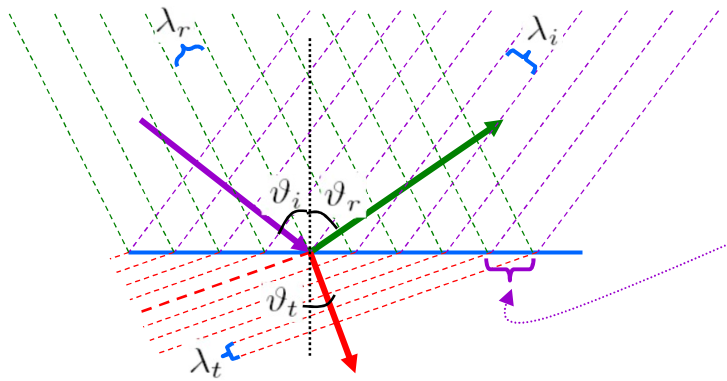
Odraz a lom vlny pri šikmom dopade na rozhranie

lom vlny – zmena *smeru* vlnového vektora (šírenia vlny) na rozhraní prostredí

rozhranie prostredí – dopadajúca, odrazená a prechádzajúca – *lomená* vlna

$$\psi_i + \psi_r = \psi_t \qquad \psi_{i,r,t} = A_{i,r,t}\cos(\omega t - \vec{K}_{i,r,t}\cdot\vec{r}) \quad \textit{(rovinné vlny)}$$

pre všetky body $\vec{r}$ *na rozhraní sú výchylky všetkých troch vĺn v každom okamihu vo fáze alebo v protifáze* $\Rightarrow \vec{K}_i\cdot\vec{r} = \vec{K}_r\cdot\vec{r} = \vec{K}_t\cdot\vec{r}$ *(vlnoplochy sa na rozhraní musia „stretnúť“)*



$\Rightarrow \vec{K}_{i,r,t}$ *musia ležať v jednej rovine (v rovine nákresne), medzi susednými vlnoplochami všetkých troch vĺn na rozhraní musí byť rovnaká vzdialenosť*

uhly voči kolmici na rozhranie

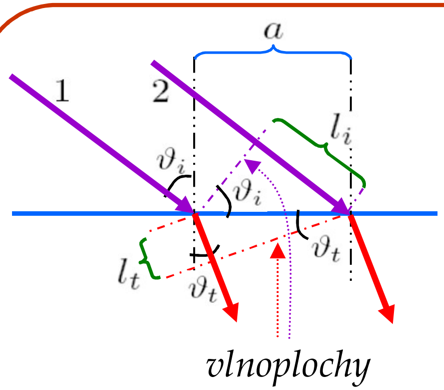
$$\Rightarrow |\vec{K}_i|\sin\vartheta_i = |\vec{K}_r|\sin\vartheta_r = |\vec{K}_t|\sin\vartheta_t$$

keďže ψ_i *a* ψ_r *sú v tom istom prostredí*

$$\lambda_i = \lambda_r,\ |\vec{K}_i| = |\vec{K}_r| \Rightarrow \boxed{\vartheta_i = \vartheta_r}$$ *zákon odrazu*

index lomu prostredia n (bezrozmerný) určuje, o koľko sa rýchlosť vlny v danom prostredí zmenší oproti rýchlosti v prostredí s indexom lomu $n=1$, *teda* $v_f = \frac{v_f|_{n=1}}{n} \Rightarrow K \sim n$

$$|\vec{K}_t|\sin\vartheta_t = |\vec{K}_i|\sin\vartheta_i \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{n_t\sin\vartheta_t = n_i\sin\vartheta_i}$$ *Snellov zákon lomu*



dva rovnobežné lúče (pomyselné čiary v smere vlny) šikmo dopadajúce na rozhranie prostredí „prejdú" rôzne dráhy v jednotlivých prostrediach

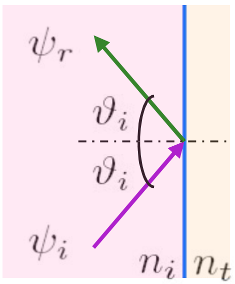
lúč 2 „prejde navyše" dráhu l_i za určitý čas t (rýchlosťou v_{fi})
za ten istý čas t „prejde" lúč 1 „navyše" dráhu l_t (rýchlosťou v_{ft})

$$l_i = a\sin\vartheta_i = v_{fi}t = \frac{v_f|_{n=1}}{n_i}t \qquad l_t = a\sin\vartheta_t = v_{ft}t = \frac{v_f|_{n=1}}{n_t}t$$

$$\underbrace{v_f|_{n=1}}_{\text{konštanta}}t = an_i\sin\vartheta_i = an_t\sin\vartheta_t \Rightarrow \underline{n_i\sin\vartheta_i = n_t\sin\vartheta_t}$$

lom je spôsobený rôznymi fázovými rýchlosťami vlny v oboch prostrediach – pri nezmenenom ω sa prechodom cez rozhranie mení v_f, $|\vec{K}|$, λ!

ak je aspoň jedno z prostredí disperzné, bude ϑ_t závisieť od ω (lebo v_f závisí od ω) - rozklad nemonochromatickej vlny (napr. dúha)



y, x

$\underline{n_i > n_t}$ *prechod z „hustejšieho" do „redšieho " prostredia*

$$\omega^2 = v_f^2K^2 = v_f^2(K_x^2 + K_y^2)$$

fázová rýchlosť dopadajúcej vlny

$$|\vec{K}_t|\sin\vartheta_t = K_{ty} = |\vec{K}_i|\sin\vartheta_i = \frac{n_i\omega}{v_f|_{n=1}}\sin\vartheta_i \Rightarrow \omega = \frac{v_f|_{n=1}K_{ty}}{n_i\sin\vartheta_i}$$

v prostredí prechádzajúcej (lomenej), resp. dopadajúcej vlny

$$\omega^2 = \frac{(v_f|_{n=1})^2K_{tx}^2}{1-n_i^2\sin^2\vartheta_i}$$

- disperzný vzťah pre prostredie prechádzajúcej vlny
- obsahuje n_i a ϑ_i! (pre dopadajúcu vlnu)

ak $n_i \sin\vartheta_i > 1$, $K_{tx}^2 < 0$ *lebo* $\frac{K_{tx}^2}{1-n_i^2\sin^2\vartheta_i} > 0$ ($\omega^2 > 0$)

$K_{tx} = -i\beta$ *- imaginárne* $\psi_t \sim e^{-\beta x} e^{i(\omega t - K_{ty} y)}$ *vlna šíriaca sa v smere y (pozdĺž rozhrania)*

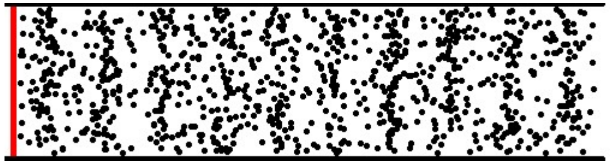
amplitúda vlny exponenciálne zaniká v smere x

vlna a energia sa nešíri do prostredia za rozhraním – úplný odraz

hraničný uhol dopadu $n_i \sin\vartheta_i = 1$

Zvuk

zvuk je mechanické *pozdĺžne* vlnenie – šíriace sa periodické zmeny *tlaku* a *hustoty* prostredia



tlak v prostredí $P = P_0 + \delta P$ — rovnovážna hodnota, porucha

hustota prostredia $\rho = \rho_0 + \delta\rho$ — rovnovážna hodnota, porucha

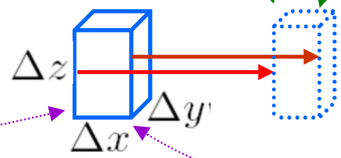
tlak ako funkcia hustoty (poruchy δP, $\delta\rho$ malé)

$$P = f(\rho_0 + \delta\rho) = \underbrace{\boxed{f(\rho_0)}}_{P_0} + \underbrace{\boxed{\frac{df(\rho_0)}{d\rho}\delta\rho}}_{\delta P} \quad \text{(Taylorov rozvoj)}$$

δP ← porucha tlaku vyvolaná poruchou hustoty

objemový element prostredia $\Delta x \Delta y \Delta z$ sa v dôsledku poruchy *posunie* a *zdeformuje* (v smere x)

$$x \to \overbrace{x + \chi(x,t)}$$



$$\underbrace{x + \Delta x} \to \overbrace{x + \Delta x + \chi(x + \Delta x, t)}$$

množstvo „prostredia“ v Δx (na plochu $\Delta y \Delta z$)

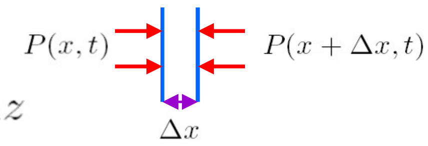
$$\overbrace{\rho_0 \Delta x}^{\text{pred porušením}} = \overbrace{\rho[\underbrace{\cancel{x} + \Delta x + \chi(x + \Delta x, t)} - \underbrace{\cancel{x} - \chi(x,t)}_{\text{nové hranice elementu}}]}^{\text{po porušení (nová hustota a objem)}}$$

$$\chi(x+\Delta x,t)-\chi(x,t)=\frac{\partial\chi}{\partial x}\Delta x$$ *(diferenciál,* $\Delta x\to 0$*)* *(parciálna deriv. lebo* χ *závisí od x,t)*

$$\rho_0\Delta x=\rho\left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\Delta x+\Delta x\right)\Rightarrow\rho_0=\rho\left(\frac{\partial\chi}{\partial x}+1\right)=\underbrace{(\rho_0+\delta\rho)}\left(\frac{\partial\chi}{\partial x}+1\right)\quad\Rightarrow\delta\rho=-\rho_0\frac{\partial\chi}{\partial x}-\cancel{\delta\rho\frac{\partial\chi}{\partial x}}$$

$$\gg$$

$$\Rightarrow\delta\rho\cong-\rho_0\frac{\partial\chi}{\partial x}$$ *ak vzrastá posunutie* $\left(\frac{\partial\chi}{\partial x}>0\right)$*, musí* ρ *klesať* $(\delta\rho<0)$



$$\boxed{\rho_0\Delta x\Delta y\Delta z}\boxed{\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}}=\text{sila = tlak na ploche}=(P(x,t)-P(x+\Delta x,t))\Delta y\Delta z$$

hmotnosť elementu prostredia *zrýchlenie*

$$-\frac{\partial P}{\partial x}\Delta x=-\frac{\partial(P_0+\delta P)}{\partial x}\Delta x=-\frac{\partial(\delta P)}{\partial x}\Delta x\qquad\left(\frac{\partial P_0}{\partial x}=0\right)$$

konštanta

$$\rho_0\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}=-\frac{\partial(\delta P)}{\partial x}=-c_s^2\frac{\partial(\delta\rho)}{\partial x}$$

$$=-c_s^2\frac{\partial}{\partial x}\left(-\rho_0\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)$$

lebo $\delta P=\underbrace{\boxed{\frac{dP(\rho)}{d\rho}\Big|_{\rho=\rho_0}}}_{c_s^2}\delta\rho$

(Taylorov rozvoj)

$$\boxed{\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}=\frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}}$$

vlnová rovnica

riešenie $\chi(x,t)=f(x-v_f t)$

$$\frac{\partial f(x-v_f t)}{\partial t}=\frac{\partial f(x-v_f t)}{\partial(x-v_f t)}\frac{\partial(x-v_f t)}{\partial t}=-v_f\frac{\partial f(x-v_f t)}{\partial(x-v_f t)}$$ *, analog.* $$\frac{\partial f(x-v_f t)}{\partial x}=\frac{\partial f(x-v_f t)}{\partial(x-v_f t)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial(x-v_f t)^2}=\frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2 f}{\partial(x-v_f t)^2}v_f^2\Rightarrow v_f=c_s$$

rýchlosť šírenia zvuku $c_s=\sqrt{\frac{\partial P}{\partial\rho}}$

(závisí od vlastností prostredia)

spravidla sa rovnica šírenia vzduchu píše pre tlak $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}=\frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$

3-rozmer.: $$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}=\nabla^2 P=\Delta P=\frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$$

zvuk – *akékoľvek (aj náhodné) mechanické kmity*

hudobný tón – *pretrvávajúce (po istú dobu, periodické) kmity*

hlasitosť tónu – amplitúda kmitov

výška tónu – frekvencia kmitov f (základná harmonická)

kvalita tónu (husle, trubka, hlas,...) – štruktúra kmitov (zastúpenie, tj. amplitúdy, vyšších harmonických – 2f, 3f...)

akord – súčasné znenie viacerých tónov

ľúbozvučné akordy – ich základné frekvencie v pomere malých čísel – ich vyššie harmonické sa zhodujú – nevznikajú zázneje (nepríjemné uchu)

väzbu amplitúd kmitov zdroja (napr. struny) a kmitov prostredia šírenia zvuku (napr. vzduch) možno ovplyvniť ozvučnicou („krabica" hudobného nástroja, ústa)

nelineárny systém – odozva systému na budiacu silu nie je priamo úmerná sile, harmonická sila vyvolá na výstupe aj vyššie harmonické - skreslenie

dve harmonické vlny na vstupe – dve skreslené vlny na výstupe, zložky $(\omega_1 + \omega_2)$ *,* $(\omega_1 - \omega_2)$ *- modulácia*

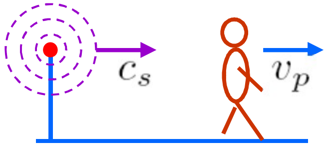
ucho je nelineárny systém – vnem je logaritmický s amplitúdou, aj čisté tóny sa nám javia ako skreslené, ak sú príliš hlasné, citlivosť ucha v oblasti 16 Hz – 20 kHz (podľa veku a opotrebenia), najcitlivejšie pri 3 kHz, mimo tohto rozsahu je infrazvuk (nižšie frekvencie) a ultrazvuk (vyššie frekvencie)

hlasitosť súvisí s hladinou akustického tlaku $20 \log \frac{P}{P_{ref}}$ $[dB]$, *zvukový prah (prah počuteľnosti) pri 3 kHz je* $P_{ref} = 2 \cdot 10^{-5} Pa$ *mierne silný zvuk odpovedá hlasitosti 60 dB (* $P = 10^3 P_{ref}$ *) a hlasitosť 120 dB je prahom bolesti*

Dopplerov jav

ak sú zdroj vlnenia látkového prostredia (napr. zvuku) a pozorovateľ vo vzájomnom pohybe, pozorovaná frekvencia vlnenia zdroja sa zvyšuje pri vzájomnom približovaní a znižuje pri vzájomnom vzďaľovaní (v porovnaní s prípadom vzájomného pokoja)

- *pozorovateľ sa pohybuje v smere šírenia vĺn, zdroj je v pokoji (vzhľadom na prostredie)*



$$\underline{\omega' = \omega(1 \mp \frac{v_p}{c_s})} = \frac{c_s \mp v_p}{\lambda}$$

vzájomná (relatívna) rýchlosť

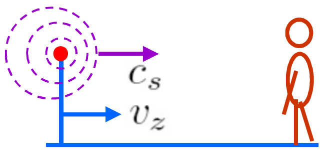
vzájomné

vzďaľovanie
približovanie

frekvencia vlnenia vnímaná pozorovateľom je daná časovým intervalom medzi registrovaním po sebe nasledujúcich vlnoplôch rovnakej fázy – tento interval sa skracuje, ak sa pozorovateľ pohybuje oproti šíriacej sa vlne a naopak – jeho rýchlosť sa skladá (sčítava alebo odčítava) s rýchlosťou vlny

- *pozorovateľ je v pokoji, zdroj sa pohybuje (aj vzhľadom na prostredie)*

pohybujúci sa zdroj sa v smere svojho pohybu „ snaží dobehnúť vlnoplochy, ktoré už vyslal“, pričom „vysiela nové vlnoplochy“ - vzdialenosť vlnoplôch s tou istou fázou a teda vlnová dĺžka sa skracuje, vzdialenosť vlnoplôch v opačnom smere (vlnová dĺžka) sa zväčšuje



$$\lambda' = \lambda \mp v_z T = \lambda \mp v_z \frac{\lambda}{c_s} = \lambda(1 \mp \frac{v_z}{c_s})$$

$$\omega' = \frac{2\pi c_s}{\lambda'} = \underline{\omega \frac{c_s}{c_s \mp v_z}}$$

vzájomné

približovanie
vzďaľovanie

- *pozorovateľ i zdroj sa pohybujú (vzhľadom na prostredie)* $\omega' = \omega \frac{c_s \mp v_p}{c_s \mp v_z}$
  (kombinácia oboch predchádzajúcich prípadov)

ak má šíriaca sa vlna charakter postupného šírenia kmitov látkového prostredia, rozhodujúci je pohyb zdroja vlnenia voči tomuto prostrediu - dochádza k „deformácii“ vlny (tj. k zmene frekvencie) v smere (a protismere) pohybu zdroja bez ohľadu na pohybový stav pozorovateľa
pohyb pozorovateľa voči prostrediu, v ktorom sa vlna šíri, spôsobuje jeho subjektívny vnem zmenenej frekvencie

čelo vlny je kužeľová plocha - nárazová vlna (vzniká aj keď samotné pohybujúce sa teleso nie je zdrojom zvuku!)

ELEKTROMAGNETICKÉ VLNY

Elektromagnetická vlna

pre tzv. lineárne prostredie ($\vec{j} = \sigma\vec{E}$) bez voľného náboja ($\rho = 0$) majú Maxwellove rovnice tvar

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \qquad \mathrm{div}\vec{E} = 0 \qquad \vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \sigma\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad \mathrm{div}\vec{H} = 0 \qquad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

$$\mathrm{rotrot}\vec{E} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\vec{H}$$

$$\mathrm{rotrot}\vec{H} = \sigma\mathrm{rot}\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\vec{E}$$

$$\boxed{\mathrm{rotrot}\vec{a} = \mathrm{graddiv}\vec{a} - \Delta\vec{a}}$$

$$-\Delta\vec{E} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}(\sigma\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t})$$

$$-\Delta\vec{H} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}(\sigma\vec{H} + \varepsilon\frac{\partial\vec{H}}{\partial t})$$

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta\vec{E} - \sigma\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0\\ \Delta\vec{H} - \sigma\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0\end{aligned}}$$

vlnové rovnice elektromagnetického poľa

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta\vec{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0\\ \Delta\vec{H} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0\end{aligned}}$$

v prostredí bez strát ($\sigma = 0$, $j = 0$)

riešením v neohraničenom homogénnom (rovnorodom) izotropnom (rovnakom vo všetkých smeroch) prostredí je rovinná monochromatická vlna

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{K}\cdot\vec{r})} \qquad \vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{K}\cdot\vec{r})}$$

resp. $e^{i(\omega t + \vec{K}\cdot\vec{r})}$ *(pre vlnu šíriacu sa v opačnom smere)*

v bezstratovom prostredí:

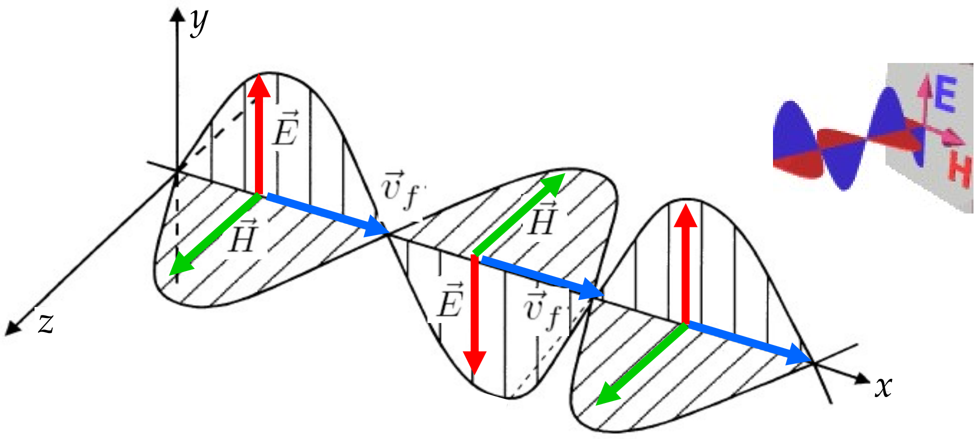
$$K^2 - \mu\varepsilon\omega^2 = 0 \Rightarrow \frac{\omega}{K} = \boxed{v_f = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\mu_r\varepsilon_0\varepsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} < \boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}}$$

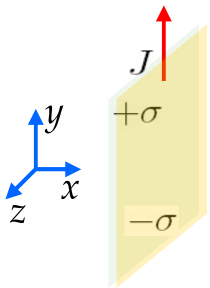
vo vákuu: $\mu \to \mu_0$, $\varepsilon \to \varepsilon_0$, $\boxed{v_f = c \cong 3\cdot 10^8 ms^{-1}}$ *rýchlosť šírenia elektromagnetickej vlny vo vákuu*

$\vec{E} \perp \vec{H} \qquad \vec{v}_f \perp \vec{E}, \vec{H}$

pravotočivý systém

elektromagnetická vlna je priečna vlna





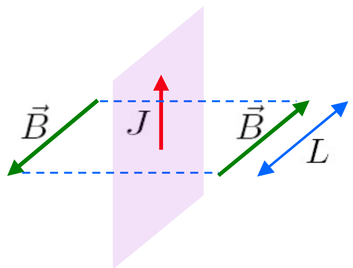
$B = 0$
$E = 0$

predpokladajme dve cez seba preložené nekonečné plochy s plošným nábojom $+\sigma$ a $-\sigma$, výsledný náboj je nulový

v čase $t = 0$ sa jedna plocha dá do pohybu nahor, výsledný náboj je stále nulový, ale tečie plošný prúd J $\Rightarrow$ okolo platne sa vytvorí (homogénne) magnetické pole

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

(na dĺžke L) $\quad 2LB = \mu_0 JL \Rightarrow B = \frac{\mu_0 J}{2}$

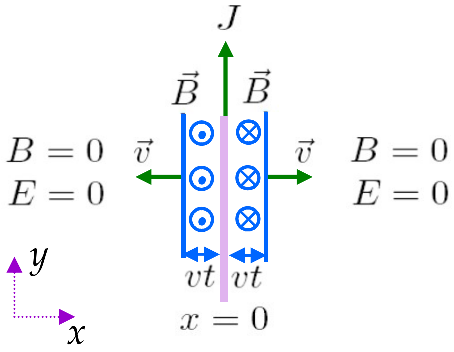


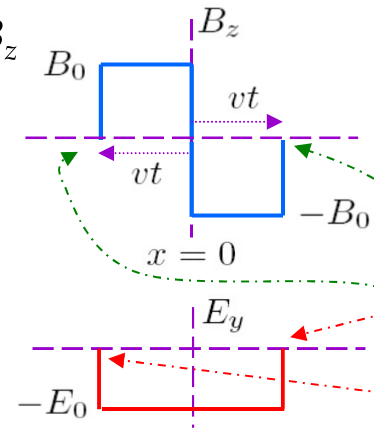
(v ustálenom stave všade okolo platne)

ak by po pohnutí platne (tj. zapnutí prúdu) vzniklo B ihneď a všade (nekonečne rýchla zmena B z 0 na $\frac{\mu_0 J}{2}$), indukovalo by sa v okolí platne neobmedzene veľké elektrické pole – to je nezmysel!

predpokladajme, že bezprostredne po zapnutí plošného prúdu ($t = 0$) vznikne pole $B = \frac{\mu_0 J}{2}$ len bezprostredne pri platni ($x = 0$) a postupne sa šíri ďalej od platne (v smeroch $\pm x$) rýchlosťou v

magnetické pole má (pre prúd v smere y) len zložku B_z





jedn. vektor bázy (v smere osi z)

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \cancel{\frac{\partial E_x}{\partial y}}\right)\vec{k} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}\vec{k}$$

$E_x = 0$ *(v tomto usporiadaní)*

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

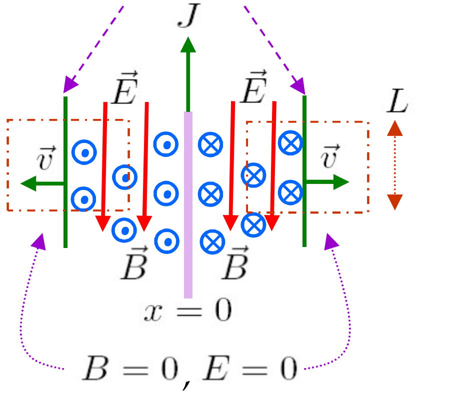
$$0 \rightarrow -B_0\,, \; \frac{\partial B_z}{\partial t} < 0 \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x} > 0$$

(pri prechode „ čela vlny“)

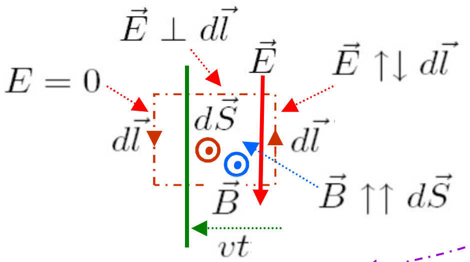
$$0 \rightarrow B_0\,, \; \frac{\partial B_z}{\partial t} > 0 \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x} < 0$$

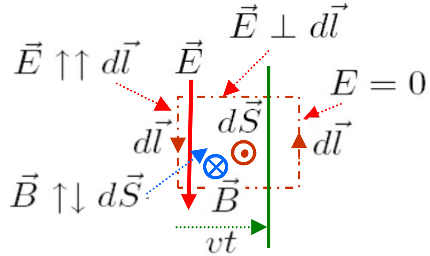
mimo miest, ktorými práve prechádzajú „čelá vlny“, je všade $\frac{\partial B_z}{\partial t} = 0$ *a teda aj* $\frac{\partial E_y}{\partial x} = 0$.
(elektrické pole je konštantné v smere x)

čelo oblasti s nenulovým B, E



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$



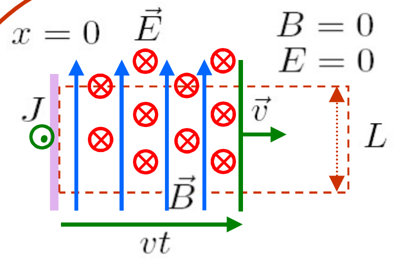


$$-E_y L = -\frac{\partial}{\partial t}(B_z L v t) \qquad E_y L = -\frac{\partial}{\partial t}(-B_z L v t)$$

$$E_y = v B_z$$

indukované elektrické pole má konečnú veľkosť, ak v je konečné!

elektrické aj magnetické pole sa musia šíriť konečnou rýchlosťou!



(pohľad „zhora")

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu\vec{j} + \mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

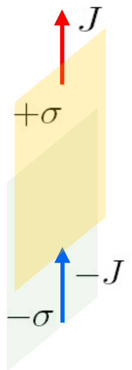
na čele pohybujúcich sa polí sa elektrické pole mení z 0 na E

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu\varepsilon\frac{d}{dt}\int \vec{E}\cdot d\vec{S}$$ (vnútri plochy $j=0$)

$$BL = \mu\varepsilon\frac{d}{dt}(ELvt) = \mu\varepsilon ELv \Rightarrow \underline{B = \mu\varepsilon vE}$$

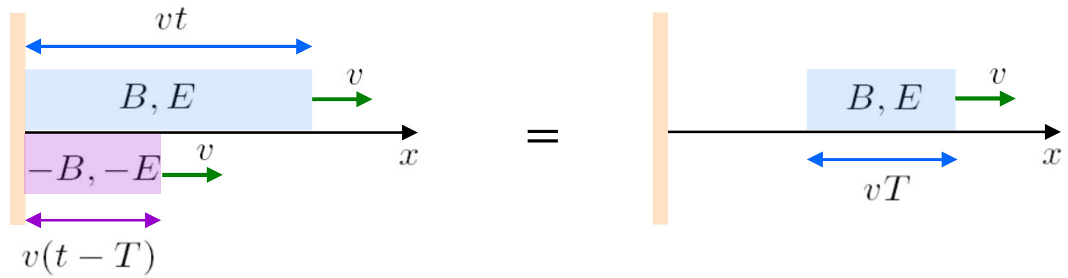
... a prispieva k vytváraniu magnetického poľa

$$\left.\begin{aligned} E &= vB \\ B &= \mu\varepsilon vE \end{aligned}\right\} \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$, vo vákuu $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = c$



v čase $t = T$ uvedieme do rovnakého pohybu druhú platňu ($-\sigma$) – vznikne prúd $-J$
- začnú sa rovnakým spôsobom šíriť magnetické pole –B a elektrické pole -E

ekvivalentný prístup: zastavíme pohyb platne nabitej $+\sigma$, $J \to 0$



elektromagnetické pole sa „odtrhne" od svojho pôvodného zdroja (prúdu – pohybujúcich sa platní) a šíri sa samostatne - elektromagnetická vlna nepotrebuje na svoje šírenie materiálne prostredie

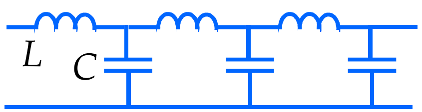
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} &= -\mathrm{rot}\vec{E} \\ \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} &= c^2\mathrm{rot}\vec{B} \end{aligned}\right\}$$ *- vo vákuu, polia sa navzájom generujú, dokážu sa šíriť priestorom*

podstatou existencie akejkoľvek vlny šíriacej sa prostredím sú kmity (jednotlivých „bodov“) prostredia, tj. periodická premena energie z jednej formy do druhej, resp. jej „vymieňanie“ medzi dvojicou „prvkov“ - vlastností prostredia, schopných akumulovať energiu– množstvá akumulovanej energie v týchto prvkoch sa spoločne šíria prostredím ako vlny – zložky (súčasti) výslednej vlny

v prípade mechanických kmitov sa energia cyklicky premieňa z kinetickej energie hmotného prostredia na (potenciálnu) energiu jeho pružnej deformácie, teda vymieňa sa medzi „zotrvačným prvkom“ (vlastnosť charakterizovaná hmotnosťou m), akumulujúcim kinetickú energiu, a „pružným deformačným prvkom“ (vlastnosť charakterizovaná koeficientom tuhosti k), akumulujúcim potenciálnu energiu

zložkami mechanickej vlny - výchylky „bodov“ prostredia z ich rovnovážnych polôh ψ sú vlna rýchlosti zmeny výchylky $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ a vlna spätnej sily pružne deformovaného prostredia $\frac{\partial \psi}{\partial x}$.

v prípade elektromagnetických kmitov v reťazci LC obvodov (bezstratové prenosové vedenia môžeme popísať takýmto reťazcom) sa energia cyklicky premieňa z elektrickej energie akumulovanej v kondenzátore (C) na magnetickú energiu akumulovanú v cievke (L)



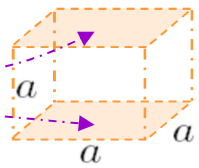
analógia s mechanickou vlnou odpovedá transformácii

$m' \rightarrow L'$, $k' \rightarrow \frac{1}{C'}$ (‘ = veličina jedn. dĺžky, resp. na jedn. dĺžky)

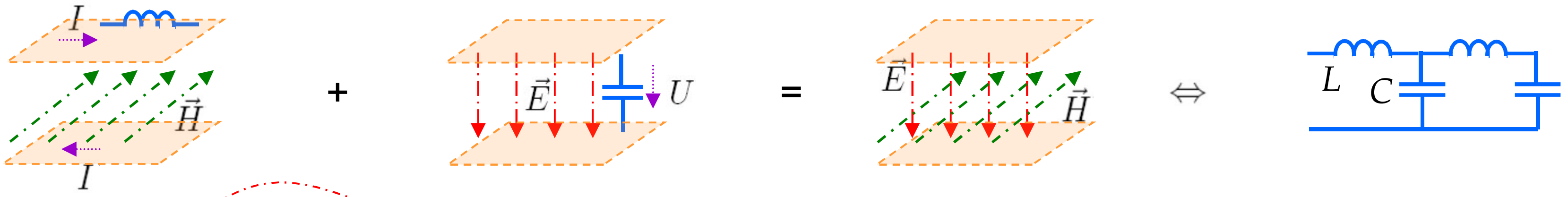
zložkami elektromagnetickej vlny šíriacej sa reťazcom sú vlna prúdu v cievke a vlna napätia na kondenzátore (cievkou preteká do vybitého kondenzátora maximálny nabíjací prúd, postupne slabne a zaniká pri nabití kondenzátora, nabitý kondenzátor sa vybíja prúdom tečúcim do cievky, atď.)

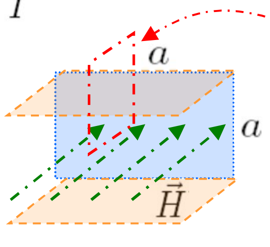
zložkami elektromagnetickej vlny v spojitom prostredí, charakterizovanom elektrickou permitivitou ε a magnetickou permeabilitou μ sú vlny vektorov $\vec{E}$, $\vec{H}$

predpokladajme pomyselný výrez spojitého prostredia v tvare kocky o strane a, ohraničený pomyselnou dvojicou vodivých stien



prúdy pretekajúce vodivými stenami (indukčnosťou), vytvárajú magnetické pole, vodivé steny tvoria kondenzátor s elektrickým poľom medzi nimi

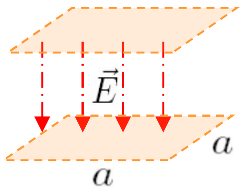




$$I = \oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = Ha \Rightarrow H = \frac{I}{a}$$

$$\Phi = \mu\vec{H}\cdot\vec{S} = \mu\frac{I}{a}a^2 = \mu a I$$

$$\Phi = LI \Rightarrow L = \mu a \qquad \underline{L' = \frac{L}{a} = \mu}$$



$$C = \varepsilon\frac{S}{a} = \varepsilon\frac{a^2}{a} = \varepsilon a$$

$$\underline{C' = \frac{C}{a} = \varepsilon}$$

pre dvojicu plôch, vytvárajúcich skrížené elektromagnetické polia, sú indukčnosť a kapacita spojitého prostredia na jedn. dĺžky dané veličinami μ, ε
skrížené elektromagnetické polia predstavuje aj priečna elektromagnetická vlna (na svoju existenciu nepotrebuje dvojicu vodivých rovín), veličiny μ, ε *sú teda akýmsi „ekvivalentom“ indukčnosti a kapacity (na jedn.dĺžky) spojitého prostredia pre šíriacu sa elektromagnetickú vlnu*

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} \to \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \qquad \left(\sqrt{\frac{k'}{m'}}\ \text{pre mechanickú vlnu},\ m' \to \mu\ (L'),\ \ k' \to \frac{1}{\varepsilon}\ \left(\frac{1}{C'}\right)\right)$$

vlny elektrického a magnetického poľa, šíriace sa spojitým prostredím, sú analógiami napätia a prúdu, šíriacich sa reťazcom LC-členov, resp. analógiami vĺn $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ *a* $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ *tvoriacich mechanickú vlnu*

Energia a hybnosť elektromagnetickej vlny

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho \qquad \mathrm{rot}\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad / \cdot \vec{H} \qquad \vec{H}\cdot\mathrm{rot}\vec{E} + \vec{H}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \qquad \mathrm{rot}\vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j} \qquad / \cdot \vec{E} \qquad \vec{E}\cdot\mathrm{rot}\vec{H} - \vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{E}\cdot\vec{j}$$

navzájom odčítame

$$\boxed{\mathrm{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot\mathrm{rot}\vec{a} - \vec{a}\cdot\mathrm{rot}\vec{b}}$$

$$\underbrace{(\vec{H}\cdot\mathrm{rot}\vec{E} - \vec{E}\cdot\mathrm{rot}\vec{H})}_{\mathrm{div}(\vec{E}\times\vec{H})} + \underbrace{\left(\vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)}_{\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{H}\cdot\vec{B})} = -\vec{E}\cdot\vec{j}$$

$$\vec{E}\partial\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}\partial\vec{E} = \frac{\varepsilon_0}{2}\partial(E^2)$$

$$\vec{H}\partial\vec{B} = \mu_0\vec{H}\partial\vec{H} = \frac{\mu_0}{2}\partial(H^2)$$

(predpokladáme rovnobežnosť vektorov intenzity a indukcie)

$$\mathrm{div}(\underbrace{\vec{E}\times\vec{H}}_{\vec{S}}) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\tfrac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{H}\cdot\vec{B})}_{w}$$

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$$

$$w = \frac{\vec{E}\cdot\vec{D}}{2} + \frac{\vec{H}\cdot\vec{B}}{2}$$

hustota energie elektromagnetickej vlny

ak $\sigma = 0$ - *nevodivé prostredie,*
tj. $j = 0$ *(oblasť bez prúdov):*

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \mathrm{div}\vec{S}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V w\,dV = \int_V \mathrm{div}\vec{S}\,dV$$

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \oint_S \vec{S}\cdot d\vec{S}$$

úbytok energie (z objemu) = výtok hustoty toku energie z plášťa objemu

pre porovnanie: rovnica kontinuity
(zákon zachovania elektrického náboja)

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \mathrm{div}\vec{j}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\,dV = \int_V \mathrm{div}\vec{j}\,dV$$

$$-\frac{\partial Q}{\partial t} = \oint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = I$$

úbytok náboja (z objemu) = výtok hustoty toku náboja (prúdu) z plášťa objemu

$\boxed{\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}}$ - *Poyntingov vektor* - *hustota toku elektromagnetickej energie* $[Wm^{-2}]$

$\vec{S}\perp\vec{E},\vec{H} \qquad \vec{E}\perp\vec{H}$ $\qquad \vec{S}$ *má smer šírenia vlny* ($\vec{v}_f$)

vo všeobecnosti $-\frac{\partial W}{\partial t} = \oint_S \vec{S}\cdot d\vec{S} + \underbrace{\int_V \vec{E}\cdot\vec{j}\,dV}_{\mathcal{P}}$ objemová hustota tepelného výkonu (premena elmag. energie na teplo)

$\mathcal{P}$ - stratový výkon

$$\boxed{-\frac{\partial W}{\partial t} = \oint_S \vec{S}\cdot d\vec{S} + \mathcal{P}}$$

zákon zachovania energie elektromagnetického poľa

úbytok elektromagnetickej energie (z objemu obopnutého plochou) = vyžiarená energia (z povrchu daného uzavretého objemu) + straty

komplexný Poyntingov vektor $\vec{S}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r})$ (komplexne združený)

jeho reálna časť určuje strednú hodnotu hustoty toku energie

predpokladajme elektromagnetickú vlnu so zložkami $\vec{E}(0, E_y, 0)$, $\vec{B}(0, 0, B_z)$ šíriacu sa v smere osi x vo vákuu, $E_y = cB_z$, interagujúcu s voľným nábojom q

elektrické pole vlny E_y spôsobuje pohyb náboja rýchlosťou v v smere y, kolmo na smer magnetického poľa vlny (z), ktoré vyvolá dodatočný pohyb náboja v smere x $\Rightarrow \vec{v}(v_x, v_y, 0)$

celková sila, ktorou vlna pôsobí na náboj $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) = qv_yB_z\vec{i} + q(E_y - v_xB_z)\vec{j}$

$q(E_y - v_xB_z) = qE_y(1 - \underset{\gg}{\frac{v_x}{c}})$, vplyv zmeny v_x počas periódy je zanedbateľný

$\langle E_y\rangle, \langle B_z\rangle \sim \int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta = 0$ stredná hodnota sily sa periódu vlny $\langle\vec{F}\rangle = q\langle v_yB_z\rangle\vec{i}$

práca vykonaná vlnou, tj. energia odobraná vlne pri zrýchlení náboja, za jedn. času – výkon síl vlny

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dW}{dt} = \vec{v}\cdot\vec{F} = \vec{v}\cdot q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) = \vec{v}\cdot q\vec{E} + 0 = qv_yE_y$$

magnetické pole nekoná prácu!

$\langle\frac{dW}{dt}\rangle = q\langle v_yE_y\rangle$ - stredný výkon

$\langle\vec{F}\rangle = \langle\frac{d\vec{p}}{dt}\rangle = q\langle v_yB_z\rangle\vec{i}$

$E_y = cB_z$

$\langle\frac{d\vec{p}}{dt}\rangle = \frac{1}{c}\langle\frac{W}{dt}\rangle\vec{i}$

elektromagnetická vlna odovzdáva náboju hybnosť

hybnosť elektromagnetickej vlny $\boxed{\vec{p} = \frac{W}{c}\vec{i}}$ smer šírenia vlny !!!

spôsobuje tzv. tlak žiarenia (dopadajúca elektromagnetická vlna odovzdáva hybnosť)

energia elektrickej a magnetickej zložky elektromagnetickej vlny je

$$\left.\begin{array}{l} w_e = \frac{\vec{E}\cdot\vec{D}}{2} = \frac{\varepsilon E^2}{2} \qquad w_m = \frac{\vec{H}\cdot\vec{B}}{2} = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{\mu H^2}{2} \\ E = v_f B = \frac{B}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \end{array}\right\} \quad w_e = w_m$$

(predpokladáme paralelnosť vektorov intenzity a indukcie)

okamžité hodnoty elektrickej a magnetickej energie vlny sa navzájom rovnajú (analógia s vlnami $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ a $\frac{\partial\psi}{\partial t}$)

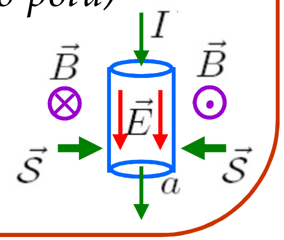
v neohraničenom priestranstve má šíriaca sa elektromagnetická vlna len priečne zložky, tj. $\vec{E}, \vec{H}$ sú kolmé na smer šírenia (aj navzájom)

v ohraničenom priestranstve (napr. vo vlnovode) môže obsahovať šíriaca sa vlna aj pozdĺžne zložky (v závislosti od okrajových podmienok), tj. niektoré z polí má aj zložku rovnobežnú so smerom šírenia, avšak $\vec{E} \times \vec{H}$ ($= \vec{S}$, smer šírenia energie) je nenulové len v smere šírenia vlny

Poyntingov vektor má fyzikálny zmysel aj v prípade statických polí:

stacionárny prúd vo vodiči s odporom R vytvára elektrické pole vo vodiči (v smere napäťového spádu - prúdu) a magnetické pole vo vodiči i v jeho okolí (kolmé na smer prúdu i elektrického poľa)

$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}$ smeruje do vodiča zo strán – energia, ktorá sa vo vodiči (na jeho odpore) mení na teplo, doň „nevchádza“ pozdĺž vodiča (s prúdom) ale z elektromagnetického poľa okolo (na povrchu) vodiča

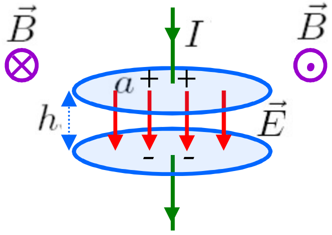


energia vtekajúca za jedn. času povrchom valcového vodiča polomeru a na dĺžke h je

$$\frac{dW}{dt} = \int \vec{S}\cdot d\vec{S} = \frac{2\pi a h E B}{\mu_0} = EhI = UI = \mathcal{P} \qquad \left(B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\ \text{je magnetické pole na jeho povrchu}\right)$$

stratový výkon (energia premenená na teplo za 1s)

stacionárny prúd I pri nabíjaní kondenzátora vytvára rastúce elektrické pole v objeme kondenzátora

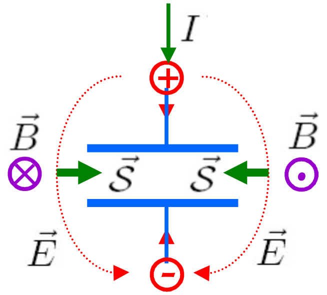


elektrická energia v objeme kondenzátora $W = \underbrace{\pi a^2 h}_{V}\underbrace{\frac{\varepsilon_0}{2}E^2}_{w}$

sa počas nabíjania mení $\frac{dW}{dt} = \pi a^2 h \varepsilon_0 E \frac{dE}{dt}$

posuvný prúd vyvoláva okolo seba magnetické pole $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \varepsilon_0\mu_0 \int \frac{d\vec{E}}{dt}\cdot d\vec{S}$

$$2\pi a B = \pi a^2 \varepsilon_0\mu_0 \frac{dE}{dt} \rightarrow B = \frac{\varepsilon_0\mu_0 a}{2}\frac{dE}{dt}$$



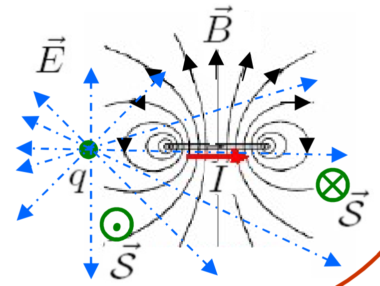
$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$ *smeruje zo strán do objemu kondenzátora,* $\mathcal{S} = \frac{\varepsilon_0 a}{2}E\frac{dE}{dt}$

energia nevstupuje do objemu kondenzátora prívodnými vodičmi ale z okolia plochou $2\pi a h$

$$\int \vec{S}\cdot d\vec{S} = \pi a^2 h \varepsilon_0 E \frac{dE}{dt} = \frac{dW}{dt}$$

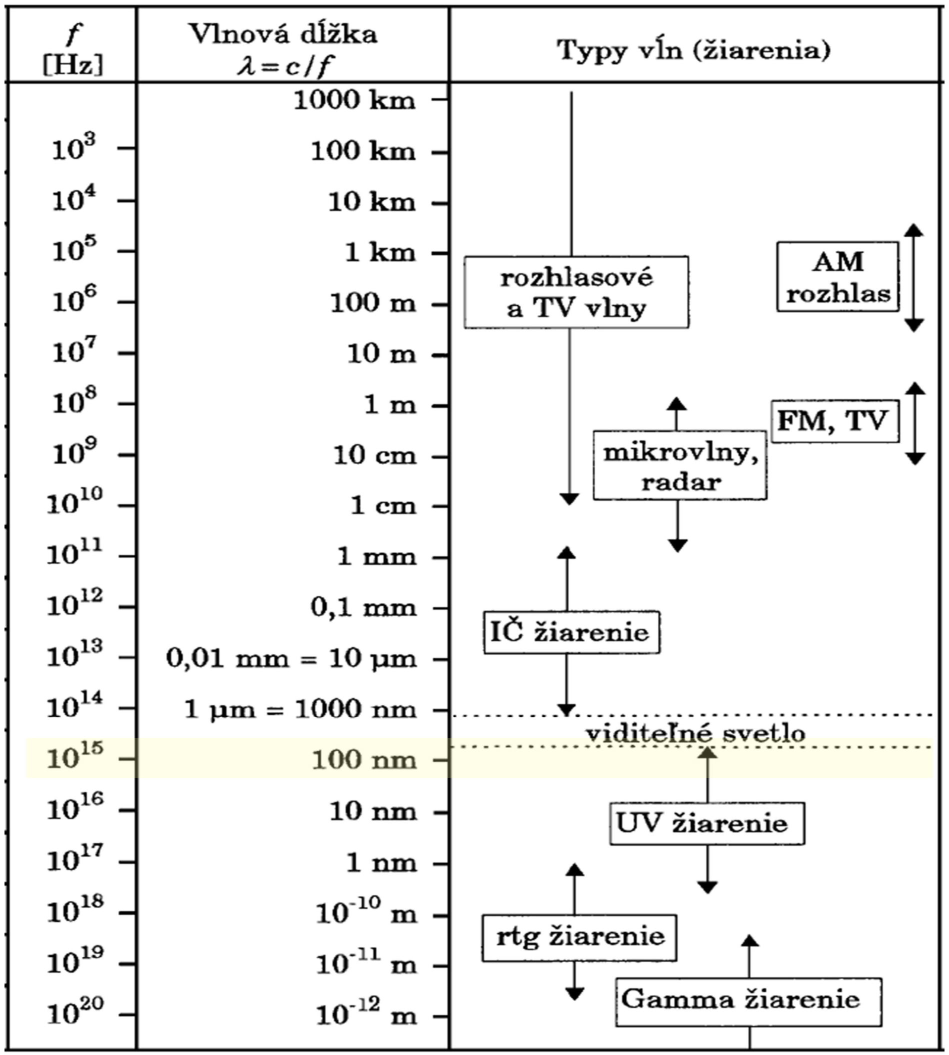
nabíjací prúd „približuje“ + a – náboj k doskám kondenzátora a tým „zhusťuje“ elektrické pole v jeho okolí („vtláča ho do kondenzátora zo strán)

statické magnetické pole magnetického dipólu a statické elektrické pole náboja v pokoji (mezi dipólom a nábojom nepôsobí žiadna sila) vyvolávajú cirkuláciu Poyntingovho vektora – energia elektromagnetického poľa „krúži dookola“, v každom bode priestoru priteká a odteká - jej hustota v danom mieste sa nemení

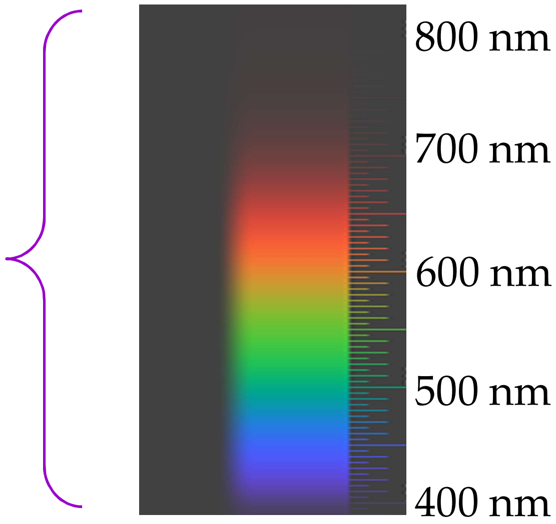


Spektrum elektromagnetických vĺn

farba svetla – je určená spektrálnym zložením (frekvenciami) svetla (elektromagnetického vlnenia) a subjektívnym vnemom (fyziologickými procesmi v systéme oko - mozog)



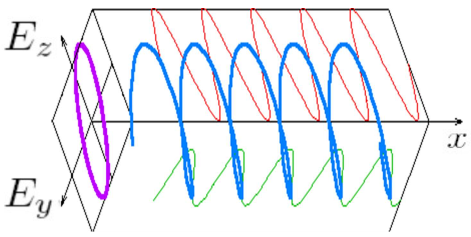
Spektrum elektromagnetických vĺn

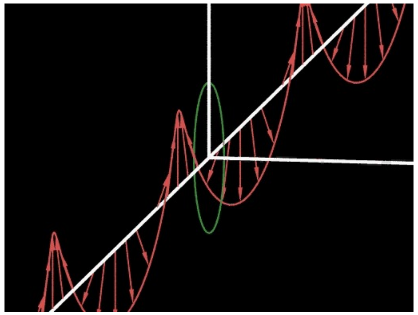


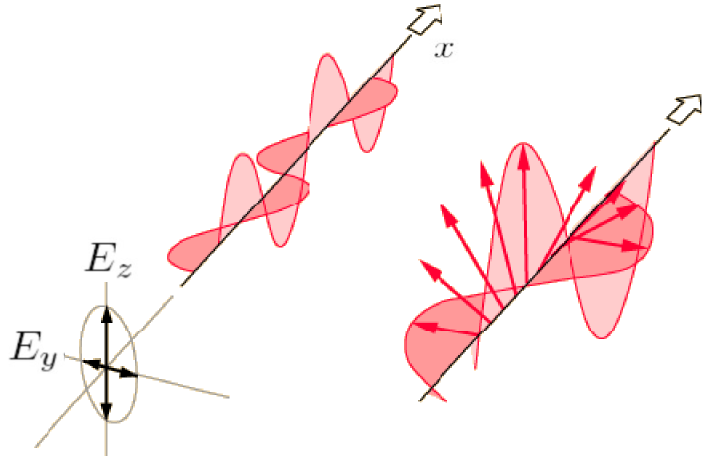
Polarizácia

elektromagnetické vlnenie je polarizované ak má v každom okamihu definovaný smer vektora $\vec{E}$ (a teda aj $\vec{H}$) – vektory polí

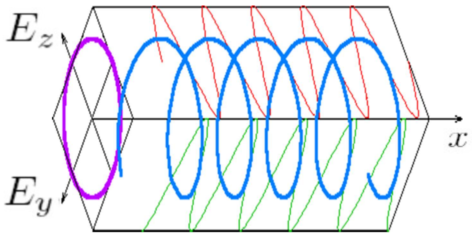
eliptická (všeobecná) polarizácia – smer vektora $\vec{E}$ (a teda aj $\vec{H}$) sa mení po eliptickej dráhe

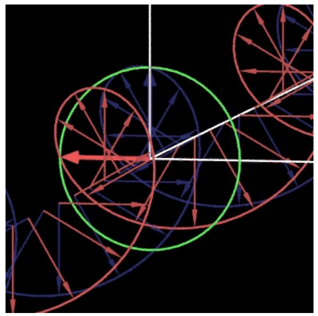


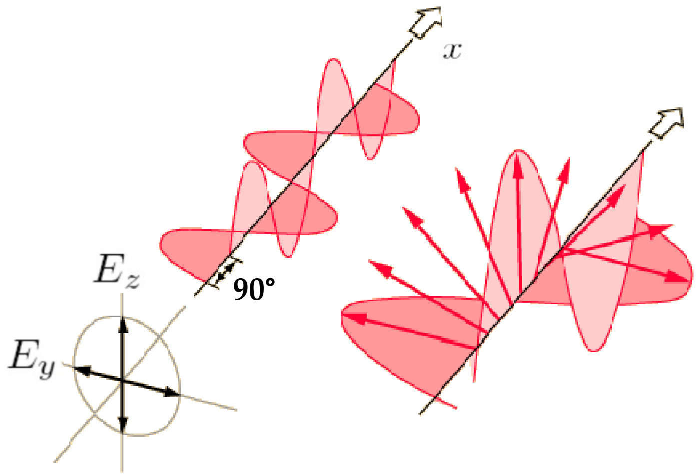




kruhová polarizácia
(špeciálny prípad eliptickej polarizácie)

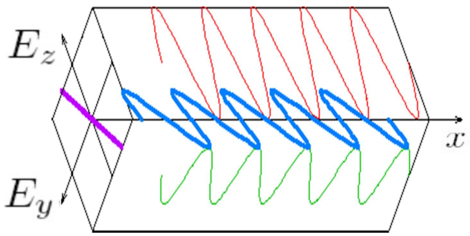


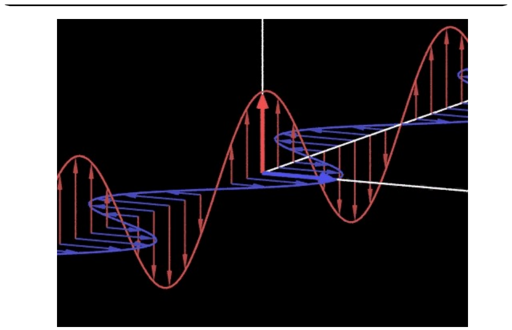


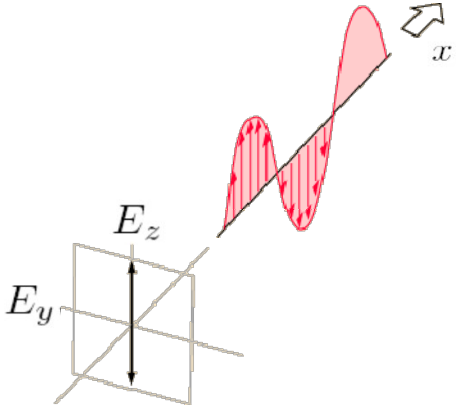


rovinná (*lineárna*) *polarizácia*

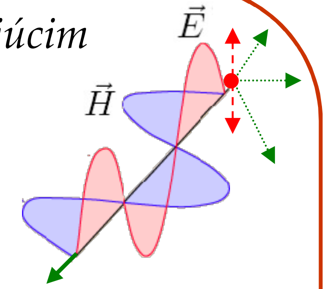
(špeciálny prípad eliptickej polarizácie)







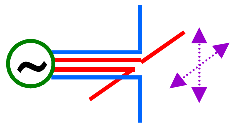
elektromagnetická vlna vzniká vyžarovaním elektrickej energie nábojom, pohybujúcim sa so zrýchlením, napr. kmitajúcim nábojom – vektor $\vec{E}$ kmitá v smere určenom kmitmi náboja, vlna sa šíri do všetkých smerov kolmých na smer kmitov



výsledná vlna, vyžarovaná viacerými nezávislými zdrojmi (kmitajúcimi nábojmi), je potom superpozíciou vĺn s rôznymi (navzájom nezávislými) smermi vektora $\vec{E}$ – skladajú sa (pozri Skladanie kmitov, Lissajousove obrazce)

v telekomunikáciach sa ako vyžarovacie antény používajú tzv. dipóly napájané striedavým prúdom

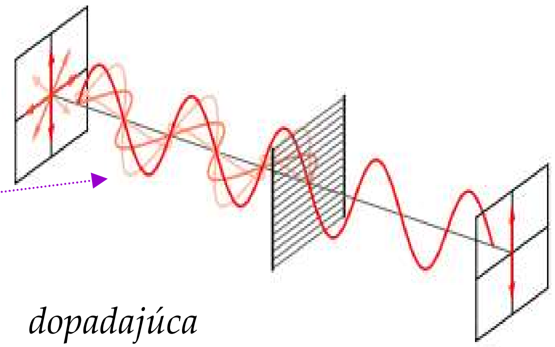
lineárne polarizované vlny

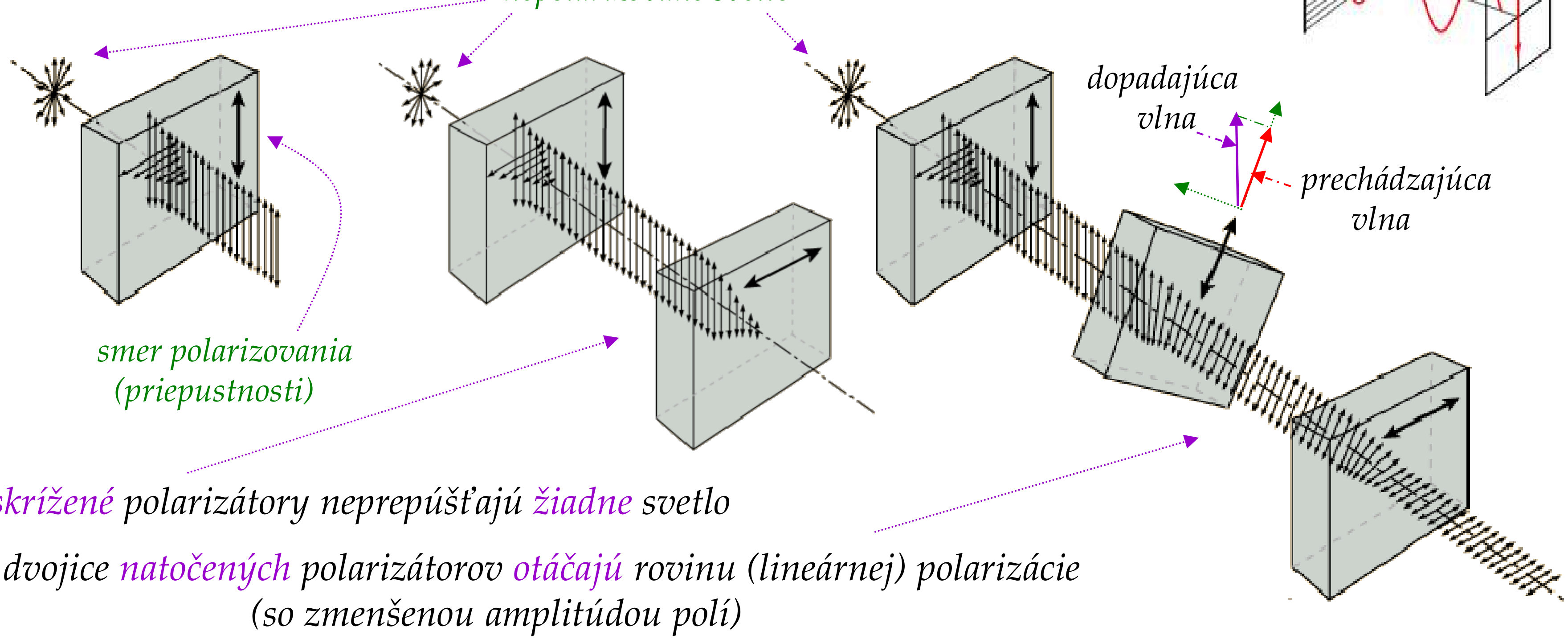


elipticky polarizovaná vlna

elektromagnetická vlna dopadajúca na sústavu nábojov s nimi interaguje – elektrické pole vlny pôsobí na náboje silou - udeľuje im hybnosť - a koná prácu na úkor svojej energie – náboje získavajú kinetickú energiu (na kmity) pohlcovaním energie vlny, a opätovne ju (alebo jej časť) vyžarujú v dôsledku svojho kmitania (časť pohltenej energie sa môže premeniť na teplo) *vlna je* *nepolarizovaná* *ak priečne zložky (napr.* E_y, E_z*) elektrického (a teda aj magnetického) poľa sú* *navzájom nezávislé* *(vlnenie rozptýlené kmitajúcimi nábojmi je* *nepolarizované* *- smer kmitania nábojov a tým aj polarizácia sa neustále mení)*

polarizátory *- látky, v ktorých* *absorpcia závisí od smeru polarizácie* *– prepúšťajú len vlnenie (svetlo) polarizované* *vo vybranom smere* *– prepustené svetlo je* *lineárne polarizované*



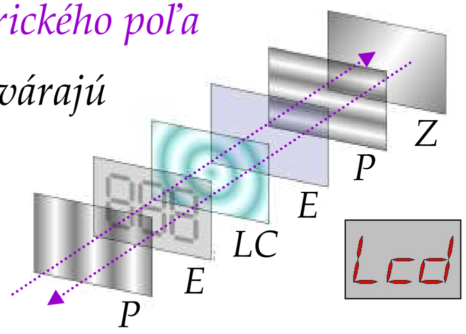


v niektorých látkach (kvapaliny tvorené nesymetrickými molekulami) sa molekuly zoradia v jednosmernom elektrickom poli a pôsobia ako polarizátor – Kerrov jav

niektoré látky (tvorené molekulami špirálovitého tvaru) stáčajú rovinu polarizácie lineárne polarizovaného vlnenia (svetla) – optická aktivita

kvapalné kryštály

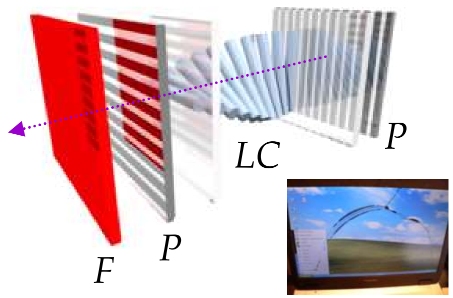
niektoré molekuly s permanentným elektrickým dipólom vykazujú aj v kvapalnom stave ďalekodosahové usporiadanie (kryštály) pod vplyvom vonkajšieho elektrického poľa



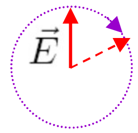
LCD: svetlo prechádza sústavou dvoch skrížených polarizátorov P (vytvárajú lineárne polarizované svetlo v navzájom kolmých smeroch), molekuly kvapalného kryštálu LC v stave bez elektrického poľa vytvárajú špirálovité reťazce (viazané dipól-dipólovými interakciami), ktoré otáčajú rovinu polarizácie svetla (dvojlom) – svetlo môže prechádzať sústavou polarizátorov na zrkadlo Z a naspäť – display je svetlý

zapnutím elektrického poľa medzi elektródami (vhodného tvaru) sa molekuly LC usporadujú v smere poľa – neotáčajú rovinu polarizácie svetla – svetlo neprechádza sústavou polarizátorov – display je tmavý

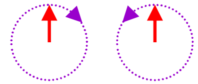
zmenou intenzity elektrického poľa medzi elektródami možno regulovať množstvo svetla prechádzajúceho systémom – jas displaya



farebný LCD: každý bod displaya (pixel) pozostáva z troch sústav doplnených o príslušný farebný filter F – z „bieleho“ svetla prepúšťajú len príslušnú farebnú zložku (napr. RGB) *kruhovo (alebo elipticky) polarizovaná vlna, dopadajúca na náboj, spôsobuje otáčanie smeru jeho kmitov – udeľuje náboju moment hybnosti*



dva možné smery kruhovej polarizácie – pravotočivá a ľavotočivá – predstavujú dva opačné smery momentu hybnosti



rovinne polarizovaná vlna nemá moment hybnosti (eliptická polarizácia je superpozíciou kruhovej a rovinnej polarizácie)

moment hybnosti rovinnej elektromagnetickej vlny

$$\boxed{\vec{L} = \langle \frac{W}{\omega} \rangle \vec{\omega^0}} \qquad \vec{\omega^0} = \pm \vec{i} \qquad (\vec{p} = \frac{W}{c} \vec{i})$$

smer kruhovej polarizácie vlny   *smer šírenia vlny*   *analógia s hybnosťou vlny*

kruhovo polarizovaná rovinná elektromagnetická vlna pôsobí na náboj momentom sily

$$\vec{\tau} = \langle \frac{d\vec{L}}{dt} \rangle = \frac{1}{\omega} \langle \frac{dW}{dt} \rangle \vec{i}$$

Charakteristická impedancia, index lomu

harmonická elektromagnetická vlna šíriaca sa prostredím

nech $\vec{E}\ (E_x = 0, E_y, E_z = 0)$

len zložka v smere y

nech $\vec{E}, \vec{H}$ závisia len od x (smeru šírenia vlny)

$$\mathrm{rot}\vec{E} \to \frac{\partial E_y}{\partial x}\vec{k} = -\mu\frac{\partial H_z}{\partial t}\vec{k}$$

len zložka v smere z

$$(H_x = 0, H_y = 0, H_z)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial E_y}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(E_y e^{i(\omega t - Kx)}) = -iKE_y \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(H_z e^{i(\omega t - Kx)}) = i\omega H_z\end{aligned}\right\} \Rightarrow KE_y = \omega H_z \Rightarrow \frac{E_y}{H_z} = \frac{\mu\omega}{K} = \boxed{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z}$$

charakteristická vlnová impedancia prostredia

vo vákuu $Z \to \boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}$

(analógie $Z = \sqrt{k'm'}$, $\sqrt{\frac{L'}{C'}}$, $\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$)

v bezstratovom prostredí je Z reálne $\Rightarrow$ vektory $\vec{E}$ a $\vec{H}$ sú vo fáze (vo všeobecnosti sú navzájom fázovo posunuté a Z je komplexné)

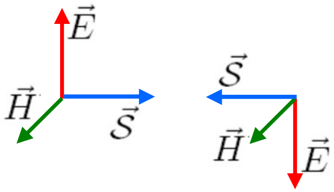
ak $\sigma \neq 0$ (vodivé prostredie), vlnové rovnice obsahujú tzv. „stratový" člen $\sigma\mu\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}, \vec{H}$, ktorý po dosadení riešenia vedie na člen posunutý (voči ostatným členom v rovnici) vo fáze o 90° (tj. imaginárny člen komplexnej reprezentácii $\frac{d}{da}e^{ia} = ie^{ia}$, voči členom $\frac{d^2}{da^2}e^{ia} = -e^{ia}$) – vlnový vektor aj impedancia sa stávajú komplexnými, tj. vlny $\vec{E}$ a $\vec{H}$ sú navzájom posunuté vo fáze a vlna je tlmená

(obdobný fázový posun nastáva pri kmitoch tlmených oscilátorov)

pri kolmom dopade elektromagnetickej vlny na rozhranie dvoch prostredí s rôznymi charakteristickými impedanciami vzniká odrazená a prechádzajúca vlna ak $Z_2 = 0$, *koeficient odrazu* $R = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = 1$

koeficient prechodu $T = 1 + R = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} = 2$

prostredie s nulovou impedanciou predstavuje pre elektrickú zložku vlny skrat – výsledné elektrické pole, tj. superpozícia elektrických polí dopadajúcej a odrazenej vlny, na takomto rozhraní musí byť nulové – odrazená vlna $\vec{E}$ *musí byť posunutá vo fáze o* 180° *voči dopadajúcej (vlna* $\vec{E}$ *sa pri odraze „otáča dolu hlavou“,* $R_E = -1$ *)*



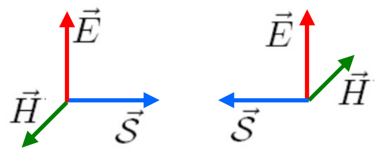
energia odrazenej vlny sa šíri v opačnom smere než energia dopadajúcej vlny, tj. Poyntingov vektor sa pri odraze mení o 180°

pravotočivosť sústavy vektorov $\vec{E}, \vec{H}, \vec{S}$ *sa pri odraze musí zachovať, pri „o-točení“ vektora* $\vec{E}$ *sa vektor* $\vec{H}$ *„neotáča“ – nenastáva fázový posun odrazenej vlny* $\vec{H}$ *voči dopadajúcej (*$R_H = 1$*) – na rozhraní je výsledné* $\vec{H}$ *dvojnásobné*

superpozícia polí dopadajúcej a odrazenej vlny na rozhraní určuje hodnoty prechádzajúcej vlny

ak $Z_2 = \infty$, *potom* $R = -1$, $T = 0$ - *úplný odraz (prechádzajúca vlna neexistuje)*

v prostredí s nekonečnou impedanciou nemôže tiecť elektrický prúd, magnetické pole na rozhraní teda musí byť nulové – vlna $\vec{H}$ *pri odraze mení fázu o* 180° ($R_H = -1$), *vlna* $\vec{E}$ *teda nemení fázu pri odraze a na rozhraní má dvojnásobnú veľkosť* ($R_E = 1$)



$\boxed{R = R_H = -R_E}$

(porovnaj s $R_\psi = R_{\frac{\partial\psi}{\partial t}} = -R_{\frac{\partial\psi}{\partial x}}$, $\frac{\partial\psi}{\partial t} \to \vec{H}$, $\frac{\partial\psi}{\partial x} \to \vec{E}$)

dopadajúca vlna

$$\vec{E}_i(x,t) = \vec{E}_0\cos(\omega t - Kx) = \vec{E}_0\{\cos\omega t\cos Kx + \sin\omega t\sin Kx\}$$

$$\vec{H}_i(x,t) = \vec{H}_0\cos(\omega t - Kx) = \vec{H}_0\{\cos\omega t\cos Kx + \sin\omega t\sin Kx\}$$

odrazená vlna

$$\vec{E}_r(x,t) = \mp\vec{E}_0\cos(\omega t + Kx) = \mp\vec{E}_0\{\cos\omega t\cos Kx - \sin\omega t\sin Kx\}$$

$$\vec{H}_r(x,t) = \pm\vec{H}_0\cos(\omega t + Kx) = \pm\vec{H}_0\{\cos\omega t\cos Kx - \sin\omega t\sin Kx\}$$

podľa toho či $Z_2 = 0$ alebo ∞

vektory $\vec{E}$ a $\vec{H}$ sú vo fáze pre dopadajúcu aj odrazenú vlnu

výsledná vlna

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_i(x,t) + \vec{E}_r(x,t) = 2\vec{E}_0\cos\omega t\cos Kx \quad \text{alebo} \quad 2\vec{E}_0\sin\omega t\sin Kx$$

$$\vec{H}(x,t) = \vec{H}_i(x,t) + \vec{H}_r(x,t) = 2\vec{H}_0\sin\omega t\sin Kx \quad \text{alebo} \quad 2\vec{H}_0\cos\omega t\cos Kx$$

vektory $\vec{E}$ a $\vec{H}$ vo výslednej vlne sú navzájom posunuté o π/2 v priestore aj v čase

Poyntingov vektor (smer šírenia energie) má striedavo smer dopadajúcej a odrazenej vlny, jeho stredná hodnota cez periódu (priestoru alebo času) je nulová – v stojatej vlne sa energia nešíri

ak $Z_1 = Z_2$, $R = 0$ (*nenastáva odraz, tzv. impedančné prispôsobenie*), $T = 1$

ak $0 < Z_2(\neq Z_1) < \infty$, *medzi dopadajúcou a odrazenou vlnou je fázový posun medzi* 0 *a* 180°

vlnová impedancia prostredia a rýchlosť šírenia vlny závisia od vlastností prostredia, vyjadrených (fenomenologickými) parametrami μ, ε

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} = Z_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \qquad v_f = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} = \frac{c}{n} \qquad \boxed{n = \frac{c}{v_f} = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}$$

index lomu prostredia

pre väčšinu látok na „optických" frekvenciách platí $\mu_r \cong 1$*, potom* $Z \sim \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}$, $n \sim \sqrt{\varepsilon_r} \Rightarrow Z \sim \frac{1}{n}$

koeficient odrazu od rozhrania prostredí $R = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}}{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2}$

napr.

rozhranie vzduch ($n \cong 1$*) – sklo (* $n = 1,5$*) :* $R_E = -R = -\frac{1,5-1}{1+1,5} = -0,2$

amplitúda elektrickej zložky svetla odrazeného od skla je 0,2 *amplitúdy dopadajúceho svetla (s otočenou fázou), energia odrazeného svetla (~ amplitúda², teda* $(0,2)^2 = 0,04$*) je teda len* 4% *energie dopadajúceho svetla*

rozhranie sklo – vzduch : $R_E = 0,2$

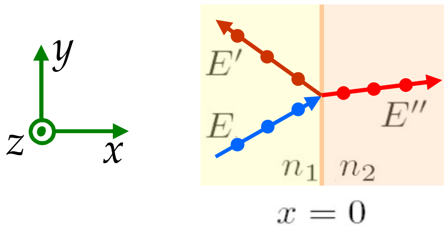
odráža sa rovnako 4% *energie, elektrická zložka sa neotáča (tj. otáča sa magnetická)*

Odraz a lom elektromagnetickej vlny

harmonické rovinné vlny $e^{i(\omega t - \vec{K}\cdot\vec{r})}$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow i\omega \qquad \nabla \longrightarrow -i\vec{K}$$

$$-i\vec{K} \times \vec{B} = -i\omega\vec{B} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{K}\times\vec{E}}{\omega} \qquad \vec{E}, \vec{B}, \vec{K} \text{ navzájom kolmé}$$



E, E', E'' *polarizované rovnobežne s rozhraním* ($x = 0$), *tj. kolmo na rovinu dopadu, majú len z-ovú zložku*

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - K_x x - K_y y)} \qquad \vec{E}' = \vec{E}'_0 e^{i(\omega' t - K'_x x - K'_y y)} \qquad \vec{E}'' = \vec{E}''_0 e^{i(\omega'' t - K''_x x - K''_y y)}$$

okrajová podmienka pre elektrické pole na rozhraní: $\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t}$ → *pozri Elektrostatické pole v dielektriku*

$$\vec{E}_{1t} = \vec{E} + \vec{E}' \qquad \vec{E}_{2t} = \vec{E}''$$

$$x = 0: \quad E_0 e^{i(\omega t - K_y y)} + E'_0 e^{i(\omega' t - K'_y y)} = E''_0 e^{i(\omega'' t - K''_y y)}$$ *platí pre všetky y a t*

$$x = 0,\ y = 0:\ E_0 e^{i\omega t} + E'_0 e^{i\omega' t} = E''_0 e^{i\omega'' t} \quad \Rightarrow \omega = \omega' = \omega'', \quad E_0 + E'_0 = E''_0$$

odrazená aj prechádzajúca vlna majú rovnakú frekvenciu ako dopadajúca vlna!

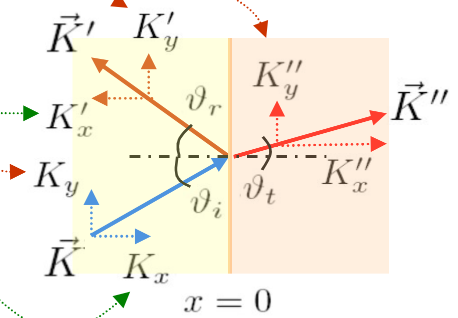
$x = 0\ ,\ t = 0$: $E_0 e^{-iK_y y} + E_0' e^{-iK_y' y} = E_0'' e^{-iK_y'' y}$ *platí pre všetky y na rozhraní*

$\Rightarrow \underline{K_y = K_y' = K_y''}$ $\quad (E_0 + E_0' = E_0'')$ *zložka rovnobežná s rozhraním sa nemení*

$$K^2 = \frac{\omega^2}{v_{f1}^2} = \frac{n_1^2\omega^2}{c^2} = K'^2 \qquad K''^2 = \frac{n_2^2\omega^2}{c^2} \Rightarrow \underline{\frac{K''^2}{n_2^2} = \frac{K^2}{n_1^2}}$$

$$K_x^2 + K_y^2 = K_x'^2 + K_y'^2 \quad \rightarrow \quad K_x^2 = K_x'^2 \Rightarrow \underline{K_x' = \pm K_x}$$

odrazená vlna



$$\left.\begin{aligned} K_x' &= -K_x \\ K_y' &= K_y \end{aligned}\right\}$$ *platí len ak* $\underline{\vartheta_r = \vartheta_i}$ *zákon odrazu*

$$\frac{K''^2}{n_2^2} = \frac{K^2}{n_1^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{K''}{K} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\left.\begin{aligned} K_y'' &= K_y \\ \frac{K_y}{K} &= \sin\vartheta_i \\ \frac{K_y''}{K''} &= \sin\vartheta_t \end{aligned}\right\} \quad \frac{K''}{K} = \frac{\sin\vartheta_i}{\sin\vartheta_t} \quad \rightarrow \quad \underline{n_2 \sin\vartheta_t = n_1 \sin\vartheta_i}$$

Snellov zákon lomu

okrajové podmienky pre magnetické pole na rozhraní: → *pozri Magnetické pole v magnetiku*

$$\left.\begin{aligned} H_{2t} - H_{1t} &= J \\ B_{2n} &= B_{1n} \end{aligned}\right. \qquad \text{predpokladáme } \mu \cong \mu_0\ ,\ J = 0 \ \Big\} \Rightarrow \underline{\vec{B}_1 = \vec{B}_2}$$

(na optických frekvenciách)

$$B_y = \cancel{\frac{K_z E_x}{\omega}} - \frac{K_x E_z}{\omega}\ ,\ B_x = \frac{K_y E_z}{\omega} - \cancel{\frac{K_z E_y}{\omega}}$$

(platí pre i, r aj t vlnu)

($\vec{E}$ má len z-ovú zložku)

y-ové zložky : $\frac{K_x}{\omega}E_0 e^{i(\omega t - K_y y)} + \frac{K'_x}{\omega'}E'_0 e^{i(\omega' t - K'_y y)} = \frac{K''_x}{\omega''}E''_0 e^{i(\omega'' t - K''_y y)}$

$\omega,\ K_y$ *rovnaké*

$K'_x = -K_x$

$$K_x E_0 - K_x E'_0 = K''_x E''_0 \qquad\qquad E_0 + E'_0 = E''_0$$

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{K_x - K''_x}{K_x + K''_x}\ ,\ \frac{E''_0}{E_0} = \frac{2K_x}{K_x + K''_x}$$

$K_x = K\cos\vartheta_i = \frac{\omega n_1}{c}\cos\vartheta_i$

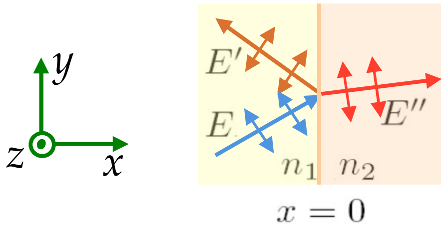
$K''_x = K''\cos\vartheta_t = \frac{\omega n_2}{c}\cos\vartheta_t$

s využitím Snellovho zákona

$$\boxed{\frac{E'_0}{E_0} = -\frac{\sin(\vartheta_i - \vartheta_t)}{\sin(\vartheta_i + \vartheta_t)}\ ,\ \frac{E''_0}{E_0} = \frac{2\sin\vartheta_t\cos\vartheta_i}{\sin(\vartheta_i + \vartheta_t)}}$$

Fresnelove vzorce pre odraz a lom

ak $n_1 < n_2\ ,\ \vartheta_i > \vartheta_t\ :\ E'_0$ *je posunuté o* π *voči* E_0 *pre všetky* ϑ



E, E', E'' *polarizované v rovine dopadu*

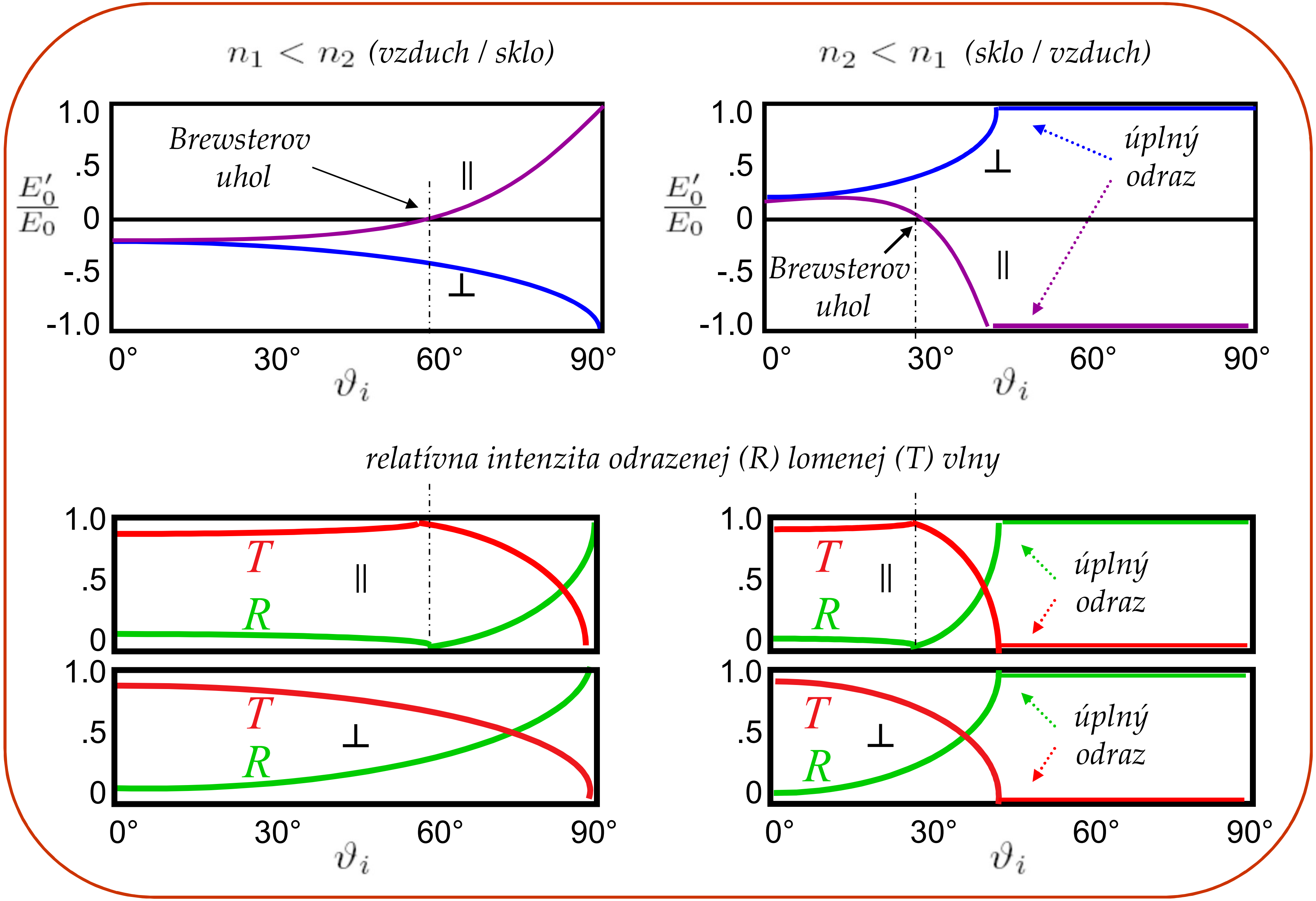
$$\boxed{\frac{E'_0}{E_0} = -\frac{\tan(\vartheta_i - \vartheta_t)}{\tan(\vartheta_i + \vartheta_t)}\ ,\ \frac{E''_0}{E_0} = \frac{2\sin\vartheta_t\cos\vartheta_i}{\sin(\vartheta_i + \vartheta_t)\cos(\vartheta_i - \vartheta_t)}}$$

E'_0 *je posunuté voči* E_0 *o* π *pre* $\vartheta_i + \vartheta_t > \frac{\pi}{2}$ *, ak* $n_1 > n_2$ $(\vartheta_i < \vartheta_t$ *a* $\tan(\vartheta_i + \vartheta_t) < 0)$

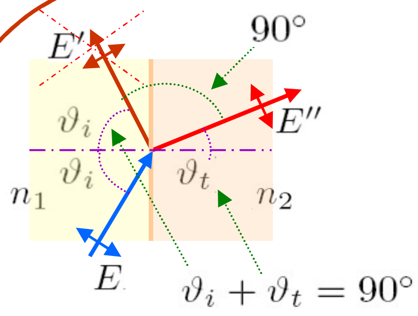
a pre $\vartheta_i + \vartheta_t < \frac{\pi}{2}$ *, ak* $n_1 < n_2$ $(\vartheta_i > \vartheta_t$ *a* $\tan(\vartheta_i + \vartheta_t) > 0)$

ak ϑ_i *také, že* $\underline{\vartheta_i + \vartheta_t = \frac{\pi}{2}}$ $(\tan\frac{\pi}{2} \to \infty)$, $E'_0 = 0$ - *nevzniká odrazená vlna*

Brewsterov uhol



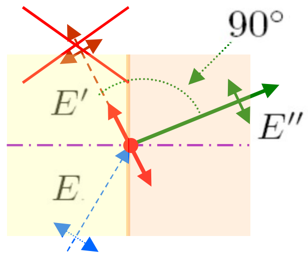
$n_1 < n_2$ (vzduch / sklo)
$n_2 < n_1$ (sklo / vzduch)
$\frac{E_0'}{E_0}$
1.0
.5
0
-.5
-1.0
Brewsterov uhol
úplný odraz
∥
⊥
0°
30°
60°
90°
ϑ_i
relatívna intenzita odrazenej (R) lomenej (T) vlny
T
R

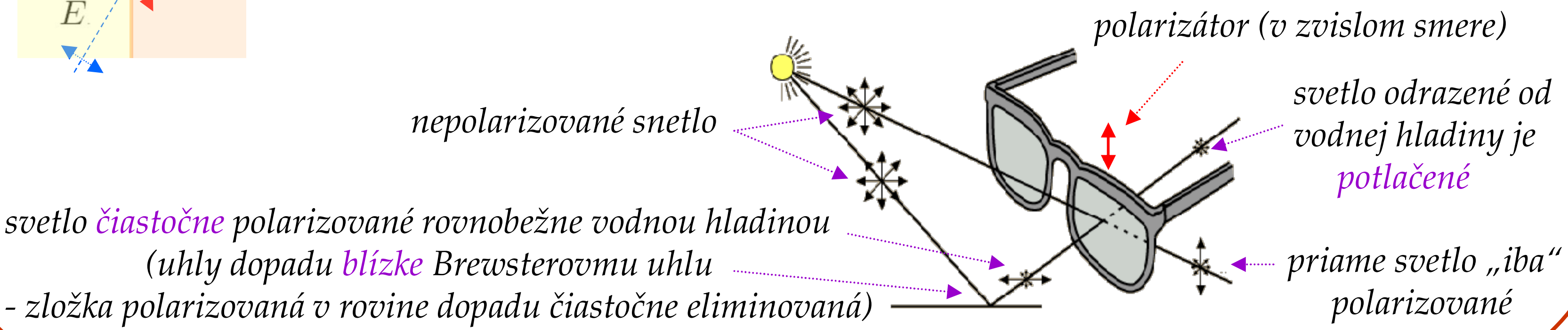


ak polarizácia dopadajúcej vlny je všeobecná (tj. eliptická - superpozícia polarizácie v rovine dopadu a kolmo na rovinu dopadu, tj. rovnobežne s rozhraním), pri Brewsterovom uhle dopadu zaniká v odrazenej vlne zložka polarizovaná v rovine dopadu - výsledná odrazená vlna je lineárne polarizovaná kolmo na rovinu dopadu

elektrické náboje v prostredí sú „rozkmitávané“ elektrickým poľom dopadajúcej vlny (v smere poľa), odrazená aj lomená vlna sú vlny následne vyžiarené týmito nábojmi

pri Brewsterovom uhle dopadu sú vlnové vektory odrazeného a lomeného lúča sú navzájom kolmé (v rovine dopadu, tj. v rovine nákresne), náboje kmitajúce v rovine dopadu (pri tejto polarizácii dopadajúcej vlny) a vyžarujúce so smeru kolmého na smer svojich kmitov (v rovine dopadu), tj. v smere šírenia lomenej vlny, nemôžu vyžarovať v smere odrazenej vlny, tj. pozdĺž svojich kmitov





amplitúda, resp. intenzita ($\sim E^2$) odrazenej a lomenej vlny závisí od uhlu dopadu, indexov lomu a polarizácie dopadajúcej vlny

v limite kolmého dopadu ($\vartheta_i = \vartheta_t \to 0$, $\sin\vartheta \to \vartheta$, $\tan\vartheta \to \vartheta$) *pre oba (význačné) smery polarizácie platí:*

$$\left|\frac{E_0'}{E_0}\right| = \frac{|\vartheta_i - \vartheta_t|}{\vartheta_i + \vartheta_t} = \frac{|n_2 - n_1|}{n_2 + n_1} \qquad \frac{\vartheta_i}{\vartheta_r} = \frac{n_2}{n_1} \qquad \frac{E_0''}{E_0} = \frac{2n_1}{n_2 + n_1}$$

nech $n_2 < n_1$ *, pre isté* $\vartheta_i = \vartheta_{ic}$ *je* $\vartheta_t = \frac{\pi}{2}$ $\quad$ ($n_1 \sin\vartheta_i = n_2 \sin\vartheta_t \Rightarrow \frac{n_1}{n_2}\sin\vartheta_{ic} = 1$)

lomená vlna sa nešíri do druhého prostredia - „kĺže“ sa po rozhraní

$$\left.\begin{aligned} K_x''^2 &= K''^2 - K_y''^2 = K^2\left(\tfrac{n_2}{n_1}\right) - K_y^2 \\ \frac{K''^2}{n_2^2} &= \frac{K^2}{n_1^2} \;,\; K_y'' = K_y \\ K_y &= K\sin\vartheta_i = \frac{n_1\omega}{c}\sin\vartheta_i \end{aligned}\right\} \qquad K_x''^2 = \frac{n_2^2\omega^2}{c^2}\Big(1 - \overbrace{\left(\tfrac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\vartheta_i}^{1 \text{ pre } \vartheta_i = \vartheta_{ic}}\Big) = 0$$

prechádzajúca vlna sa nešíri v smere x
(len pozdĺž rozhrania)

ak $\vartheta_i > \vartheta_{ic}$, $K_x''^2 < 1 \Rightarrow K_x'' = \pm i K_t$ *- imaginárne* $\qquad E'' = E_0'' e^{-K_t x} e^{i(\omega t - K_y y)}$

šíriaca sa lomená vlna neexistuje
– úplný odraz

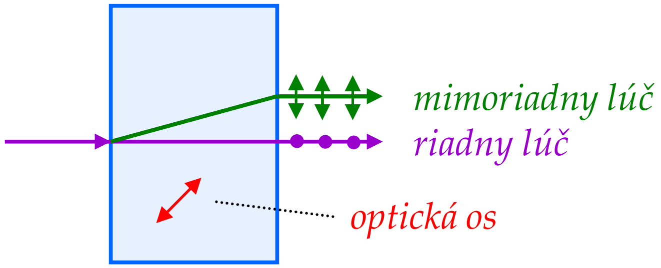
vlna exponenciálne zaniká v smere x

dvojlom

charakter kmitov nábojov (v atómoch, molekulách) môže byť anizotropný – môžu existovať význačné smery (napr. v podlhovastých molekulách) – tzv. optické osi – v ktorých sa náboje rozkmitajú ľahšie

pre vlnenie lineárne polarizované v rovine optickej osi je index lomu iný než pre polarizáciu kolmo na optickú os - dvojlom

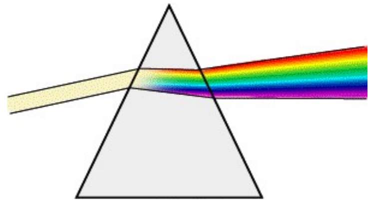
ak optická os dvojlomného kryštálu nie je rovnobežná s jeho povrchom, nepolarizované vlnenie (svetlo) dopadajúce kolmo na jeho povrch sa rozdvojí:
1.) zložka s polarizáciou kolmo na optickú os prechádza kryštálom priamo - tzv. riadny lúč
2.) zložka s polarizáciou v rovine určenej optickou osou a smerom šírenia sa láme (v rozpore so Snellovým zákonom, fázová rýchlosť a index lomu závisia od smeru šírenia) - tzv. mimoriadny lúč - a po prechode kryštálom je posunutý – anomálna refrakcia (lom) – vzniknú dva obrazy zdroja vlnenia



oddelením riadneho a mimoriadneho lúča možno získať lineárne polarizované svetlo

existujú materiály s jednou (jednoosé) alebo viacerými optickými osami *v disperznom prostredí fázová rýchlosť a teda aj index lomu závisia od frekvencie vlny*

nemonochromatické vlnenie (obsahujúce zložky rôznych frekvencii) sa pri prechode lomnou plochou rozkladá na zložky (v závislosti od frekvencie rôzne uhly lomu) – biele svetlo sa rozkladá na spektrum



dúha – rozklad slnečného (bieleho) svetla v kvapôčkach vody v atmosfére (lom, odraz, interferencia)

Geometrická optika, optické zobrazovanie

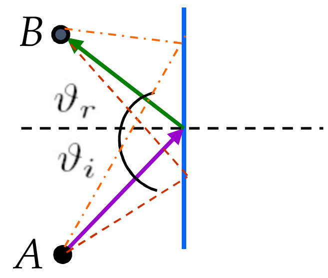
optická dráha $L = \int_A^B n\,dl \qquad n = \frac{c}{v_f}\,, dl = v_f dt \quad \Rightarrow \quad L = c\int_A^B \frac{dl}{v_f} = c \boxed{\int_A^B dt}$

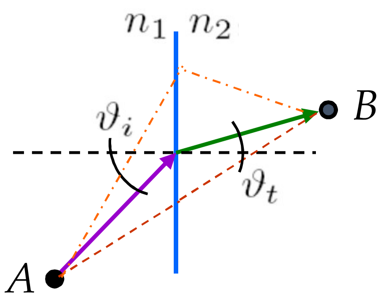
čas potrebný na prejdenie optickej dráhy

svetelný lúč (pomyselná čiara zobrazujúca smer šírenia vlny) sa šíri po minimálnej optickej dráhe, tj. takej dráhe, ktorú prejde za minimálny čas – Fermatov princíp

lúč medzi bodmi A a B v tom istom prostredí (konštantná rýchlosť) sa šíri po priamke

pre lúč z bodu A do bodu B odrazený od rozhrania platí $\underline{\vartheta_r = \vartheta_i}$, všetky iné optické dráhy sú dlhšie

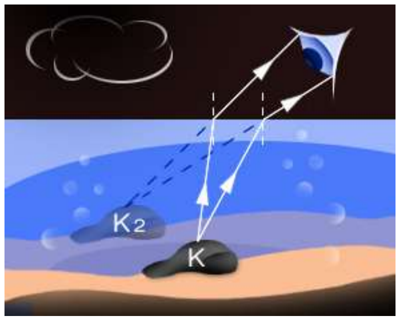




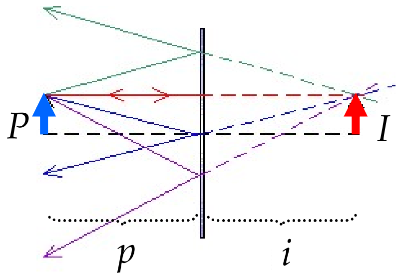
pre lúč z bodu A do bodu B prechádzajúci rozhraním platí

$$\underline{n_1 \sin\vartheta_i = n_2 \sin\vartheta_t}$$

na prejdenie všetkých iných optických dráh je potrebný dlhší čas (rôzne rýchlosti v odlišných prostrediach)



index lomu prostredia sa môže meniť aj spojite (napr. rôzne zohriate vrstvy vzduchu) - postupná spojitá zmena smeru (lom) svetelných lúčov (napr. fata morgana) *rovinné zrkadlo*



reálne obrazy ($i > 0$)
sú pred odrazovou plochou - na strane odrazeného (odchádzajúceho) lúča)

$p = -i \;,\; P = I$ *obraz je virtuálny (za zrkadlom, $i < 0$) rovnako veľký vzpriamený*

guľové (sférické) zrkadlá

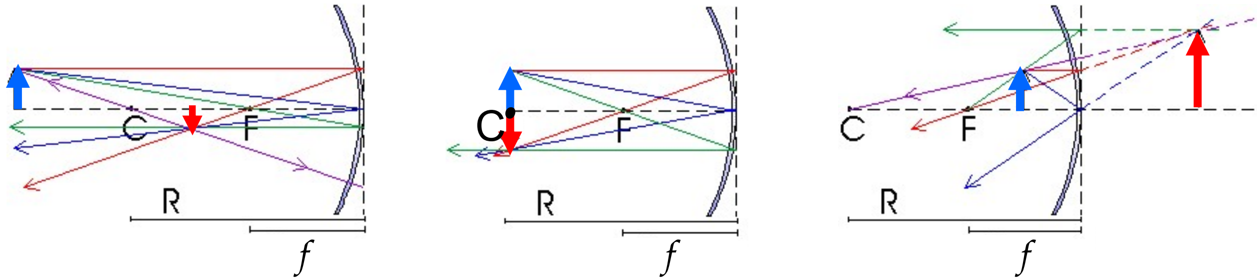
polomer krivosti R
ohnisková vzdialenosť $f = \frac{R}{2}$

$$\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f}}$$

význačné lúče:

- → *lúč prechádzajúci stredom krivosti (C) sa odráža v tom istom smere*
- → *ak je dopadajúci lúč rovnobežný s optickou osou, odrazený lúč prechádza ohniskom (F)*
- → *ak dopadajúci lúč prechádza ohniskom, odrazený lúč je rovnobežný s optickou osou*
- → *lúč dopadajúci a odrazený na optickej osi zvierajú s optickou osou rovnaký uhol*

vyduté (konkávne) zrkadlo



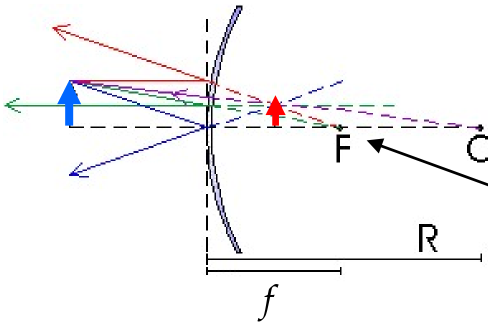
$p > R \;,\; R > i > f \;,\; -I < P$
$p = R \;,\; i = R \;,\; -I = P$
$R > p > f \;,\; i > R \;,\; -I > P$

obraz je reálny (pred zrkadlom) prevrátený

$p = f \;,\; i \to \infty$ *obraz neexistuje*

$p < f \;,\; -i > p \;,\; I > P$ *obraz virtuálny vzpriamený ($i < 0$)*

vypuklé (konvexné) zrkadlo



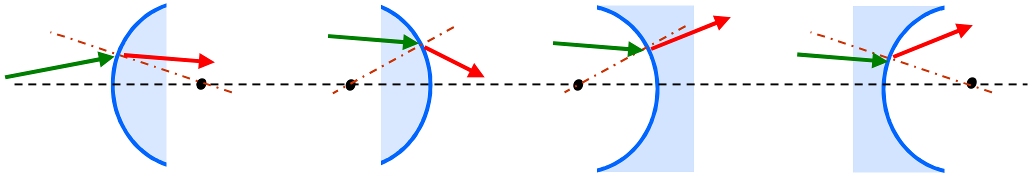
$f < 0$

virtuálne ohnisko

obraz je vždy virtuálny ($i < 0$), *zmenšený, vzpriamený*

$|i| < |f|\ ,\ I < P$

sférická lomná plocha



$$\boxed{\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{i} = \frac{n_2 - n_1}{R} = konst.}$$

reálne obrazy ($i > 0$) *sú za lomnou plochou* (!)
(*na strane odchádzajúceho – lomeného lúča*)

$$\left.\begin{array}{l} \textit{vypuklá} \\ \textit{vydutá} \end{array}\right\} \textit{lomná plocha} \left\{\begin{array}{l} R, f > 0 \\ R, f < 0 \end{array}\right.$$

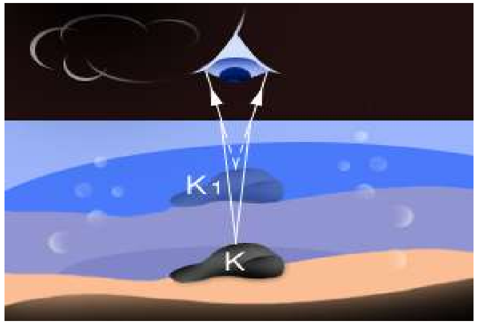
$$\left.\begin{array}{l} p \to f_1\ ,\ i \to \infty \\ p \to \infty\ ,\ i \to f_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{n_1}{f_1} = \frac{n_2}{f_2} = \frac{n_2 - n_1}{R} \qquad \frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{i} = \frac{n_1}{f_1} = \frac{n_2}{f_2} \qquad \boxed{\frac{f_1}{p} + \frac{f_2}{i} = 1}$$

$R \to \infty$ *rovinná plocha* $\quad \frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{i} \to 0 \Rightarrow \left|\frac{i}{p}\right| = \frac{n_2}{n_1}$

napr. pozorovanie predmetu cez vodnú hladinu:

$n_1 = 1$ *(vzduch)*, $\quad n_2 = n_{H_2O} \cong \frac{4}{3} \Rightarrow \left|\frac{i}{p}\right| = \frac{3}{4}$

predmet pod hladinou sa nám javí kratší



šošovka – *kombinácia dvoch sférických lomných plôch*

tenká (*v porovnaní s R, f, p, i*) *šošovka vo vzduchu*

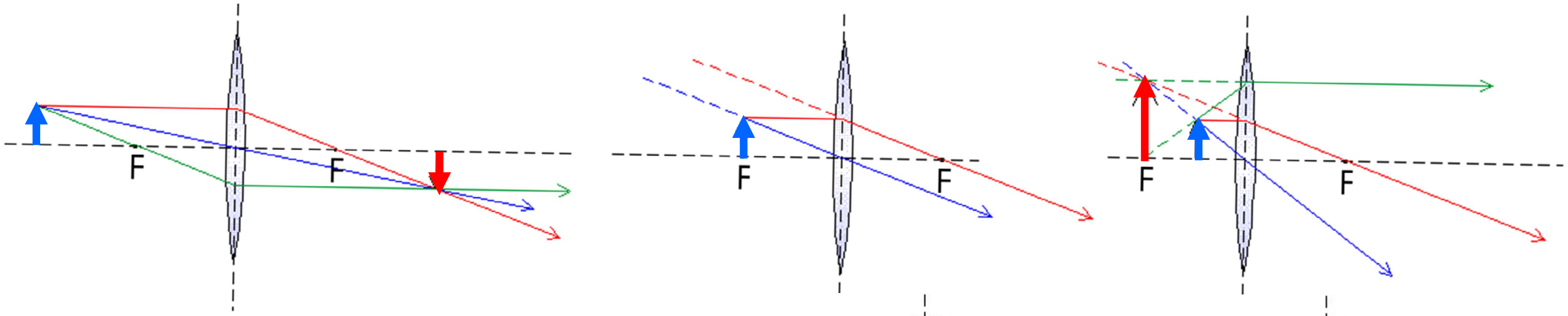
polomery krivosti lomných plôch

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{i}=\frac{1}{f}$$

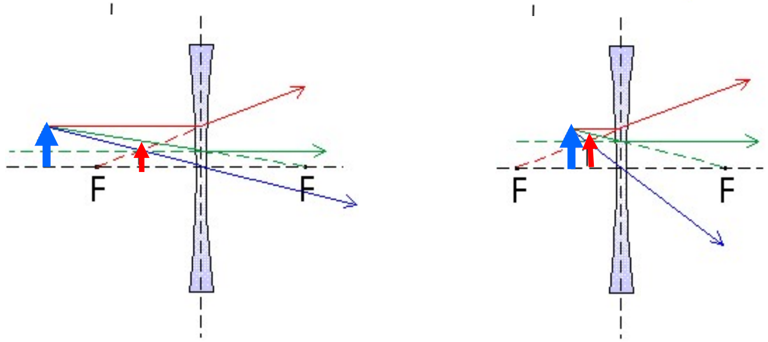
$$\boxed{\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)}$$

zväčšenie šošovky

tenká spojná šošovka (*spojka*)



tenká rozptylná šošovka (*rozptylka*)

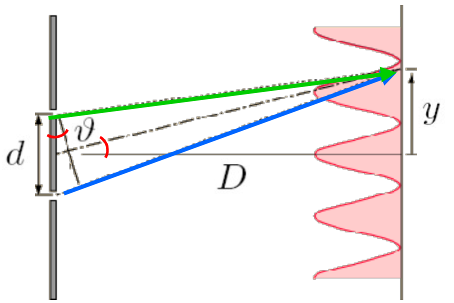


rozlišovacia schopnosť – *ak majú byť dva blízke body rozlíšiteľné, musia byť rozlíšiteľné časy, ktoré potrebuje svetlo na prejdenie dráh od týchto bodov* (*inak ich obrazy splynú*)

$$t_2-t_1>T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\lambda}{v_f}\Rightarrow \underline{\text{najmenšie viditeľné rozmery}\approx\lambda}$$

Interferencia a difrakcia

interferencia na dvoch štrbinách



intenzita svetla ~ amplitúda² $I \sim A^2$

$$I = \underbrace{2I_0(1+\cos(\Delta\varphi))}_{0 \div 4I_0}$$

(pozri: Šírenie vĺn v priestore, skladanie vĺn)

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \cancel{\varphi_0} + \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\vartheta$$

medzera medzi štrbinami

fázy lúčov prechádzajúcich oboma štrbinami

ak lúče pochádzajú z toho istého zdroja, $\varphi_0 = 0$

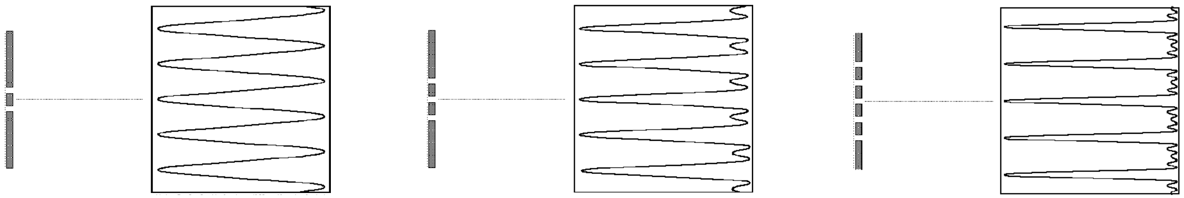
výsledná intenzita je maximálna ($4I_0$) *ak* $\cos(\Delta\varphi) = 1 \Rightarrow \Delta\varphi = 2\pi k$, $k = 1, 2, \ldots$

$$\frac{2\pi}{\lambda} d\sin\vartheta = 2\pi k \Rightarrow \underline{d\sin\vartheta = k\lambda} \qquad \sin\vartheta = \frac{y}{D} \Rightarrow y_{max} = k\lambda\frac{D}{d}$$

výsledná intenzita je minimálna (0) *ak* $\underline{d\sin\vartheta = (2k-1)\lambda}$ $\qquad y_{min} = (2k-1)\lambda\frac{D}{d}$

intenzita svetla na tienidle tvorí periodický interferenčný obrazec (v miestach deštruktívnej interferencie rôznych svetelných lúčov vzniká „tma“)

interferencia na viacerých štrbinách

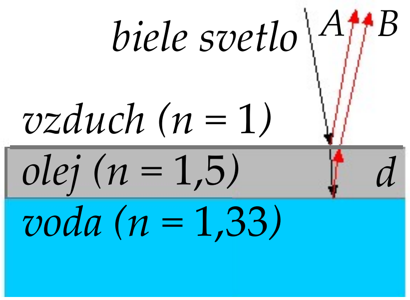


2 štrbiny   3 štrbiny   5 štrbín

vzdialenosť interferenčných maxím závisí od λ (!), teda od frekvencie (farby) svetla

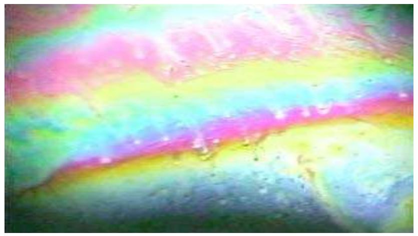
interferenčný obrazec pre nemonochromatické svetlo sa rozloží na (nerovnaké) obrazce pre jednotlivé monochromatické zložky

interferencia na tenkých vrstvách



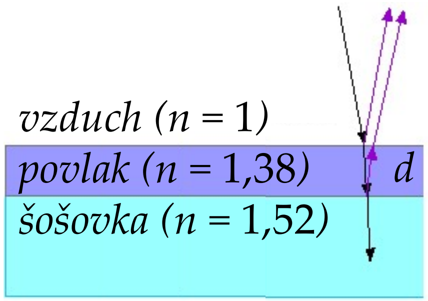
lúč A odrazený od rozhrania vzduch-olej mení fázu o π („tvrdý“ odraz od hustejšieho prostredia), t.j. posun vlny o $\lambda/2$

lúč B odrazený od rozhrania olej-voda nemení fázu („mäkký“ odraz od redšieho prostredia), vracia sa do vzduchu s dráhovým posunom $2d$



lúče A a B interferujú, pre monochromatickú zložku bieleho svetla s $\lambda/2 = 2d$ nastáva konštruktívna interferencia – táto zložka určuje farbu olejovej vrstvičky (zložky s inými λ sú zoslabené)

(olejové škvrny, mydlové bubliny)



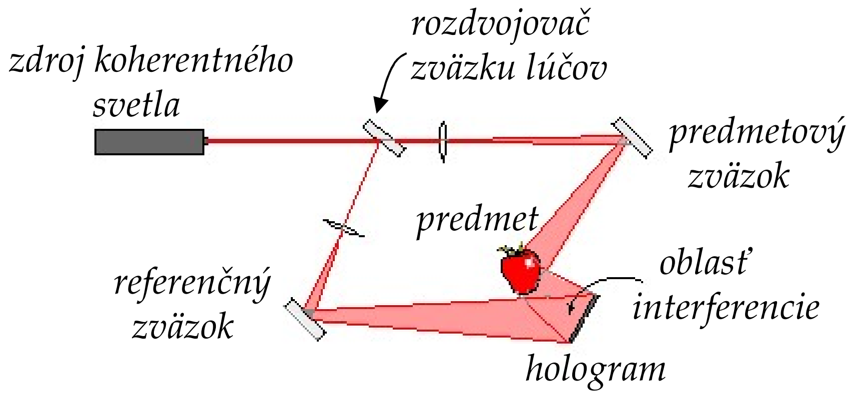
odraz od oboch rozhraní mení fázu o π, na povrchu nastáva pre zložku spĺňajúcu podmienku $\lambda/2 = 2d$ deštruktívna interferencia - táto zložka sa neodráža – prechádza celá do šošovky – chýba v odrazenom spektre a dominuje v spektre prechádzajúceho svetla (odlišná farba povlaku „na odraz“ a „na prechod“)

(interferenčné filtre, antireflexné vrstvy)

odraz v skutočnosti nenastáva len na rozhraniach prostredí, ale na každej „vrstve“ atómov (molekúl) tvoriacich prostredie – elektrické náboje viazané v týchto atómoch dopadajúcu vlnu (svetlo) pohlcujú, rozkmitajú sa, a opätovne ju vyžarujú do všetkých smerov kolmých na smer kmitov, v homogénnom prostredí však vlny vyžiarené rôznymi atómami deštruktívne interferujú vo všetkých smeroch rôznych od smeru dopadajúcej vlny, úplná deštruktívna interferencia je „narušená“ len na nehomogenitách prostredia - rozhraniach – výsledné vlny sú rovnaké ako keby odrazy vznikali len na rozhraniach

holografia

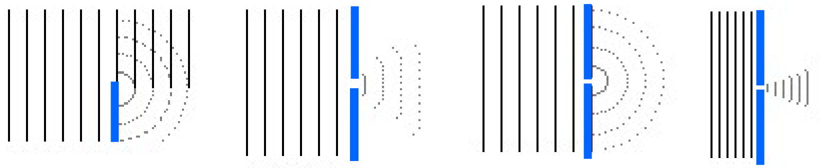
interferencia koherentného zväzku svetelných lúčov rozptýlených predmetom (predmetový zväzok) s referenčným zväzkom (pochádzajúcim z toho istého zdroja, míňajúcim predmet)

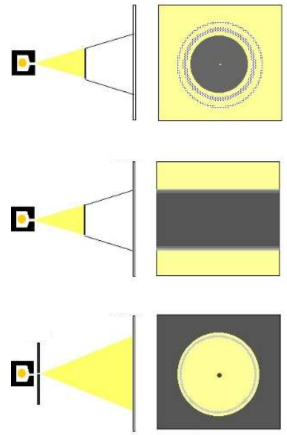


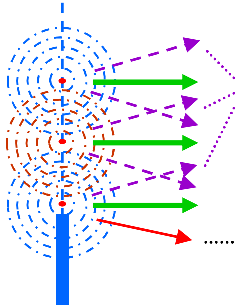
hologram je záznamom amplitúdy aj fázy lúčov rozptýlených na predmete (bežná fotografia je len amplitúdovým záznamom), každá časť hologramu obsahuje obraz celého predmetu
osvietením (tzv. rekonštrukciou) vyvolaného hologramu referenčným lúčom vzniká dojem 3D obrazu pôvodného predmetu

difrakcia

ohyb vlny (svetla) na hranách priečnych prekážok šírenia vlny, interferencia ohnutých vĺn - interferenčné obrazce na hranici tieňa prekážky

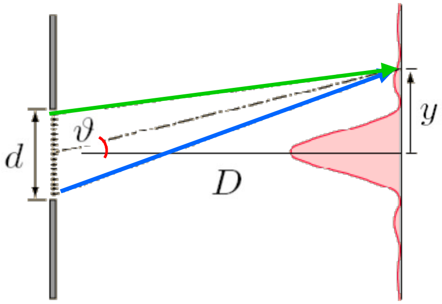






sekundárne vlnenia z pomyselných zdrojov na vlnoploche (Huygensov princíp) v smeroch rôznych od smeru šírenia vlny sa navzájom interferenčne zrušia pri neohraničenej vlnoploche, pri hrane prekážky zostávajú nevykompenzované „bočné“ smery

difrakcia na štrbine



v rovnobežnom zväzku (tj. s tienidlom dostatočne vzdialeným od štrbiny, resp. v ohniskovej rovine spojnej šošovky) vzniká Fraunhoferova difrakcia

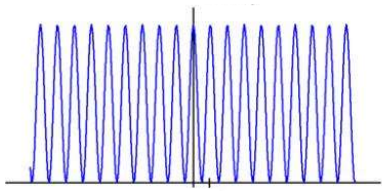
intenzita v priamom smere *šírka štrbiny*

$$I = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2} \qquad u = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \vartheta$$

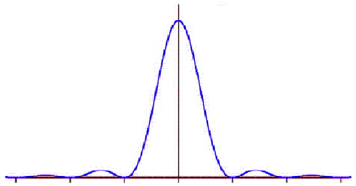
intenzita je minimálna (= 0) *ak* $u = k\pi \ , \ k = 1, 2, \ldots$

$$\Rightarrow \underline{d \sin \vartheta = k\lambda}$$

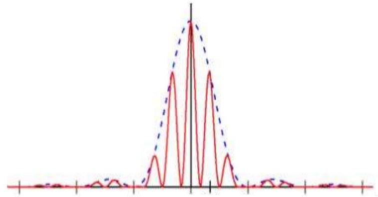
interferencia a difrakcia na viacerých štrbinách



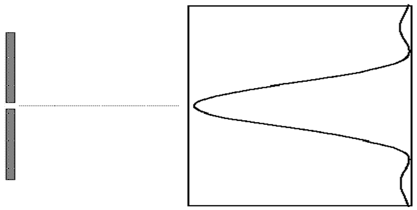
interferencia na dvoch štrbinách



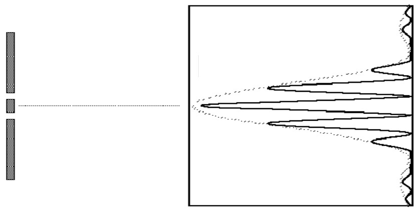
difrakcia na každej štrbine



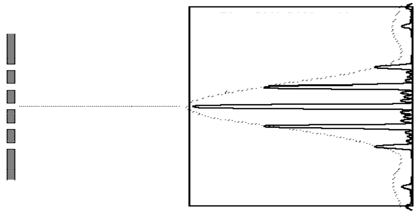
superpozícia



1 štrbina



2 štrbiny



5 štrbín

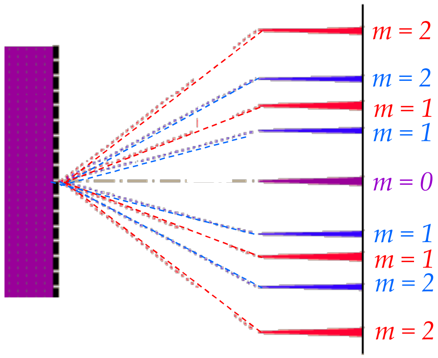
difrakcia na mriežke

difrakčná mriežka – N štrbín šírky d vo vzájomnej vzdialenosti b (perióda mriežky)

$$I = I_0 \frac{\sin^2 u}{u} \frac{\sin^2 N\alpha}{\sin^2 \alpha} \qquad \alpha = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \vartheta$$

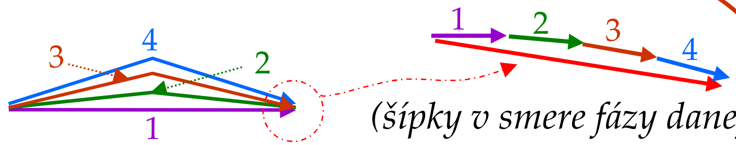
nemonochromatické svetlo sa rozkladá na monochromatické difrakčné obrazce

fialové svetlo (zložené z modrého a červeného)

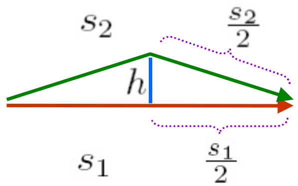


tvar difrakčného obrazca závisí od tvaru prekážky, resp. otvoru, a pri zväzku *rozbiehavých lúčov* (*Fresnelova* *difrakcia) aj od vzdialenosti od prekážky*

v prípade dráh *blízkych* (2,3,4) *k najkratšej dráhe* (1) *je* *fázový* *rozdiel interferujúcich vĺn* *malý* *– nastáva (nedokonalá)* *konštruktívna* *interferencia – príspevky od blízkych dráh* *zosilňujú* *výslednú intenzitu vlny*



(šípky v smere fázy danej vlny v danom mieste a čase)



$$\left(\frac{s_1}{2}\right)^2 + h^2 = \left(\frac{s_2}{2}\right)^2 \longrightarrow s_2^2 - s_1^2 = 4h^2$$

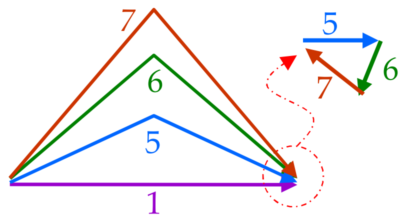
$$\overbrace{\underbrace{(s_2 - s_1)}_{= \Delta s}\underbrace{(s_2 + s_1)}_{\cong 2 s_2}}$$

(predpokladáme *blízke* *dráhy* $s_1 \cong s_2$ *)*

$$\Delta s \cong \frac{2h^2}{s_2} \quad (\sim h^2)$$

rozdiel dráh *rýchlo* *rastie s ich odklonom (h)*

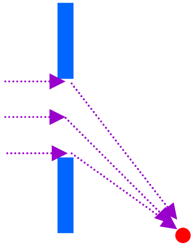
v prípade *vzdialených* *dráh* (5,6,7) *sa fáza vlny dopadajúcej do daného bodu v danom čase* *prudko mení* *so vzdialenosťou* ($\sim h^2$), *nastáva* *deštruktívna* *interferencia – vlny prichádzajúce do daného bodu po vzdialených dráhach k výslednej intenzite* *neprispievajú*



kritériom blízkosti dvoch dráh je v tomto prípade podmienka $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta s \ll \pi$ *(fázy sa nesmú príliš líšiť)*

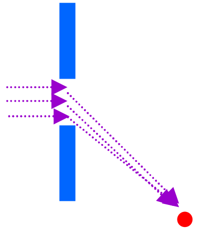
$$\Rightarrow \Delta s \approx \frac{h^2}{s} \ll \lambda$$

k intenzite vlnenia svetla v danom bode teda prispievajú len vlny šíriace sa od zdroja po dráhach *v nepatrnom okolí najkratšej optickej dráhy* *(Fermatov princíp)*



do bodu vzdialeného od priameho smeru prichádza z širokej štrbiny svetlo po veľmi odlišných dráhach – ich príspevky sa navzájom rušia (deštruktívna interferencia) – intenzita svetla je zanedbateľná (tma)

z úzkej štrbiny prichádza svetlo do toho istého bodu po blízkych dráhach – ich príspevky sa sčítavajú (konštruktívna interferencia) – intenzita svetla v danom bode je veľká

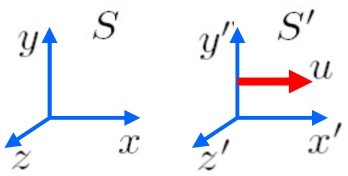


ak chceme svetlo „stlačiť“ úzkou štrbinou, rozptýli sa (!)

TEÓRIA RELATIVITY

Priestor a čas v špeciálnej teórii relativity

klasická predstava: svetlo (resp. elektromagnetická vlna) sa šíri *éterom* rýchlosťou c, z pohľadu *pozorovateľa v sústave pohybujúcej sa voči éteru* rýchlosťou u sa svetlo šíri rýchlosťou $c \pm u$ - *skladanie rýchlostí*



S – sústava v (relatívnom) pokoji
S′ – sústava pohybujúca sa voči S rýchlosťou u (v smere x)

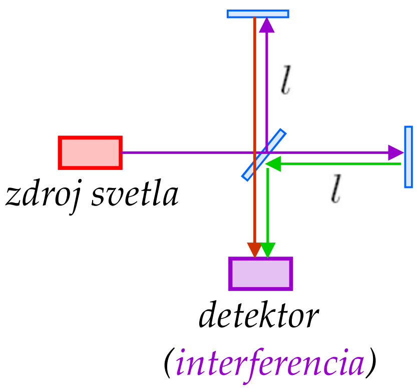
klasická (Galileiho) transformácia:

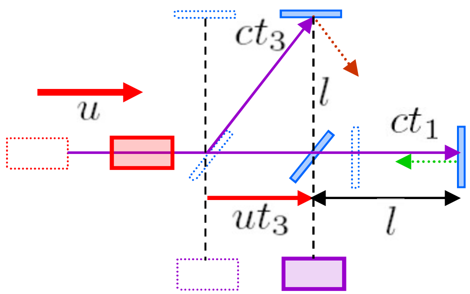
$$x' = \underline{x - ut}\ ,\ y' = y\ ,\ z' = z\ ,\ t' = t$$

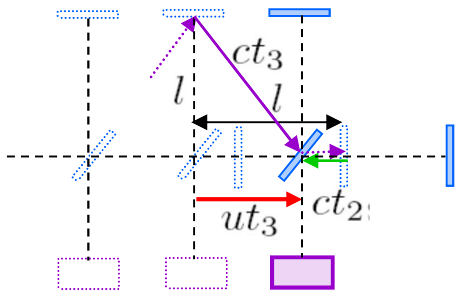
$$v'_x = \frac{dx'}{dt} = \frac{d(x-ut)}{dt} = \underline{v_x - u}\ ,\ v'_y = v_y,\ v'_z = v_z$$

podľa zákonov elektromagnetizmu (Maxwellove rovnice) sa *svetlo šíri rýchlosťou c* (vo vákuu) – *rozpor s klasickým skladaním rýchlostí* – platia Maxwellove rovnice rovnako pre všetkých pozorovateľov (bez ohľadu na ich pohybový stav)?

Michelsonov-Morleyho experiment







$$ct_1 = l + ut_1 \Rightarrow t_1 = \frac{l}{c-u}$$
$$ct_2 = l - ut_2 \Rightarrow t_2 = \frac{l}{c+u}$$
$$t_1 + t_2 = \frac{\frac{2l}{c}}{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

v smere pohybu

$$(ct_3)^2 = l^2 + (ut_3)^2 \Rightarrow 2t_3 = \frac{\frac{2l}{c}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

kolmo na smer pohybu

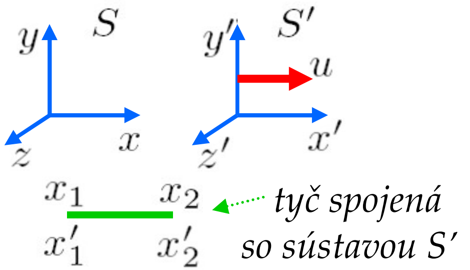
$$\underline{t_1 + t_2 \neq 2t_3}$$

časový posun medzi lúčmi na detektore - lúče interferujú s fázovým posunom

výsledok experimentu: žiaden *fázový posun nenastáva* (v žiadnom smere)!

1. postulát špeciálnej teórie relativity: *rýchlosť svetla vo vákuu je c pre všetkých pozorovateľov, bez ohľadu na ich pohybový stav*

vysvetlenie experimentu: *fázový posun medzi lúčmi nenastane ak sa vzdialenosť (dráha lúča) v smere pohybu sústavy (z pohľadu pozorovateľa v pokoji) skráti*



$$l \to l\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \underline{t_1 + t_2} \to \frac{\frac{2l}{c}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \underline{= 2t_3}$$

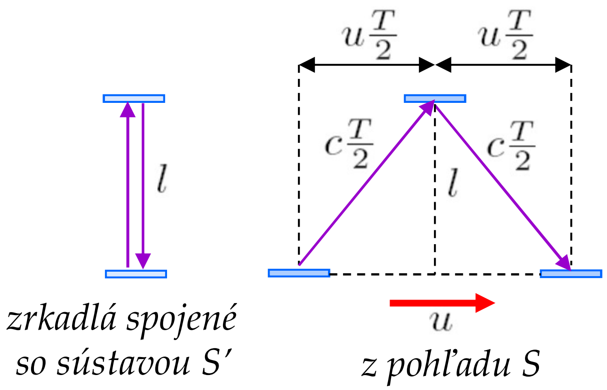
FitzGeraldova – Lorentzova kontrakcia (skrátenie) *dĺžky*

$$L = x_2 - x_1 \qquad L' = x_2' - x_1'$$

z pohľadu pozorovateľa v (pokojovej) *sústave S nastáva v sústave S′, pohybujúcej sa voči S rovnomernou rýchlosťou u, kontrakcia dĺžky (v smere pohybu sústavy S′)*

$$\boxed{L = L'\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad L' = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \underline{\frac{L}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}}$$

svetelný lúč „kmitajúci“ medzi dvoma pohybujúcimi sa rovnobežnými zrkadlami



perióda kmitov lúča

$T' = 2\frac{l}{c}$ v sústave S′ v sústave S

$$\left(c\frac{T}{2}\right)^2 = l^2 + \left(u\frac{T}{2}\right)^2 \Rightarrow T = \frac{\frac{2l}{c}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{T'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

univerzálnosť rýchlosti c vo vákuu vyžaduje predĺženie doby trvania deja (preletu lúča) – dilatáciu času

z pohľadu pozorovateľa v (pokojovej) sústave S nastáva v sústave S′ (pohybujúcej sa voči S rovnomernou rýchlosťou u) dilatácia času (medzi dvoma udalosťami t_1, t_2)

$$\boxed{T = \frac{T'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}} \qquad T = t_2 - t_1 = \frac{T'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

ak sa dve telesá (súradnicové sústavy) pohybujú voči sebe priamočiaro rovnomerným pohybom, nemožno rozlíšiť, ktorá z nich je v pohybe, resp. v pokoji – ich pohyb je relatívny

2. postulát špeciálnej teórie relativity:
neexistuje privilegovaná vzťažná sústava (éter), základné rovnice fyziky majú rovnaký tvar vo všetkých vzťažných sústavách pohybujúcich sa navzájom priamočiarym rovnomerným pohybom (tj. inerciálne vzťažné sústavy)

kontrakcia dĺžky a dilatácia času v pohybujúcej sa inerciálnej vzťažnej sústave z pohľadu pokojovej vzťažnej sústavy (skrátenie pohybujúceho sa telesa v smere pohybu, resp. spomalenie času pohybujúcich sa hodín) sú teda relatívne

z pohľadu „pohybujúceho sa" pozorovateľa je on sám v pokoji a „stojace" predmety sa voči nemu pohybujú – hodiny v „pokoji" sa z jeho pohľadu budú pohybovať, skracovať v smere ich pohybu, a ich čas sa bude spomaľovať

postuláty špeciálnej teórie relativity vyžadujú transformáciu súradníc aj času pri prechode medzi inerciálnymi sústavami vo vzájomnom pohybe

Lorentzova (relativistická) transformácia:

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \; , \; y' = y \; , \; z' = z \; , \; t' = \frac{t - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \; , \; t = \frac{t' + \frac{ux'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

pre malé rýchlosti $u \ll c \; , \; \frac{u}{c} \to 0$ Lorentzova transformácia $\longrightarrow$ Galileiho transformácia

udalosť je definovaná časom t a polohovým vektorom $\vec{r}\;(x, y, z)$ v priestore
(napr. poloha telesa v danom čase) $\quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

čas aj poloha udalosti sú relatívne – transformujú sa pri zmene súradnicovej sústavy

transformovaná poloha udalosti v novej (inerciálnej) vzťažnej sústave závisí od jej polohy a času v pôvodnej (inerciálnej) vzťažnej sústave
transformovaný čas udalosti v novej vzťažnej sústave závisí od jej polohy a času v pôvodnej sústave

transformácia a skladanie rýchlostí

$$dx' = \frac{dx - u\,dt}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \ , \quad dt' = \frac{dt - \frac{u\,dx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$dy' = dy \ , \ dz' = dz$$

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - u\,dt}{dt - \frac{u\,dx}{c^2}} = \frac{\frac{dx}{dt} - u}{1 - \frac{u}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \underline{\frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}v_x}}$$

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \underline{v_y \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{u}{c^2}v_x}} \ , \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \underline{v_z \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{u}{c^2}v_x}}$$

$$\underline{v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u}{c^2}v'_x} \ , \ v_y = v'_y \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{u}{c^2}v'_x} \ , \ v_z = v'_z \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{u}{c^2}v'_x}}$$

ak $v'_x = c$:

$$v_x = \frac{c+u}{1+\frac{u}{c^2}c} = c\frac{1+\frac{u}{c}}{1+\frac{u}{c}} = \underline{c}$$

- *nemožno dosiahnuť väčšiu rýchlosť než c!*

napr. z pohľadu pozorovateľa v sústave S', pohybujúcej sa voči (pokojovej) sústave S rýchlosťou $u = 0,8c$, sa teleso pohybuje rýchlosťou $v'_x = 0,9c$ (v tom istom smere)
z pohľadu pozorovateľa v S sa tieto rýchlosti (v rovnakom smere) *relativisticky sčítavajú*

$$v_x = \frac{0{,}9c + 0{,}8c}{1 + \frac{0{,}8 \times 0{,}9c^2}{c^2}} = \frac{1{,}7}{1{,}72}c = 0,988c$$

súčasnosť

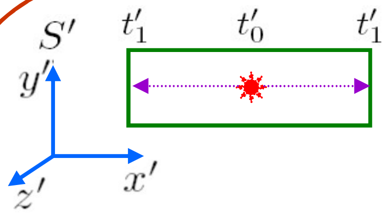
dve udalosti sú *súčasné*, ak ich v *daných* miestach (tj. v miestach udalostí) zaznamenajú pozorovatelia *v rovnakom čase* (tj. ak ich *navzájom zosynchronizované* hodiny ukazujú rovnaký čas)

dve *udalosti* v čase a mieste t_1, x_1 a t_2, x_2 (vzhľadom na „pokojovú“ sústavu S),
resp. t'_1, x'_1 a t'_2, x'_2 (vzhľadom na „pohybujúcu sa“ sústavu S')

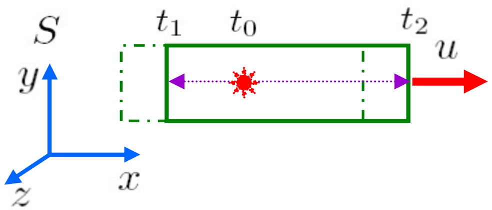
v sústave S sú udalosti *súčasné*, ak $t_1 = t_2$

v sústave S′ $\quad t_1' = \dfrac{t_1 - \frac{u x_1}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad t_2' = \dfrac{t_2 - \frac{u x_2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad t_2' - t_1' = \dfrac{\frac{u}{c^2}(x_1 - x_2)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \neq 0$

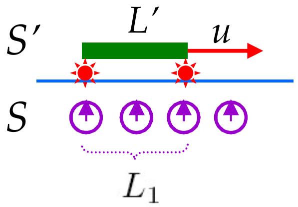
udalosti súčasné vzhľadom na S nemusia byť súčasné vzhľadom na S′ – súčasnosť je relatívna! (udalosti sú súčasné aj vzhľadom na S′ len ak sú súmiestne - $x_1 = x_2$, $x_1' = x_2'$)



svetelný záblesk (v čase t_0' *) v strede vagónu dopadá na jeho bočné steny súčasne (v čase* t_1' *) v sústave S′ spojenej s vagónom*



v sústave S, v ktorej sa vagón pohybuje rýchlosťou u, sa svetlo šíri rovnakou rýchlosťou c, zadná stena sa pohybuje „v ústrety“ záblesku – „stretnú sa“ v čase t_1
predná stena vagóna „uniká“ pred zábleskom – záblesk ju „dobehne“ v čase $t_2 > t_1$
dopady záblesku na bočné steny vagóna nie sú súčasné v sústave S

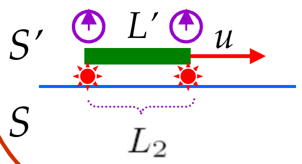


vzájomná vzdialenosť pozorovateľov v sústave S, ktorí súčasne (v S) zaznamenali konce pohybujúcej sa tyče pokojovej dĺžky L′, je

$$L_1 = x_2 - x_1 = \frac{(x_2'-x_1')+u(t_2'-t_1')}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \ldots = L'\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

(kontrakcia dĺžky tyče oproti pokojovej)

$$\left(x_2' - x_1' = L' \,,\quad t_2' - t_1' = \frac{(t_2-t_1) - \frac{u}{c^2}(x_2-x_1)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \,,\quad t_1 = t_2 \right)$$



vzájomná vzdialenosť pozorovateľov v sústave S, ktorí zaznamenali na koncoch pohybujúcej sa tyče pokojovej dĺžky L′ záblesky súčasné v S′, je

(pokračovanie na ďalšej strane)

$(t_1' = t_2')$ $$L_2 = x_2 - x_1 = \frac{(x_2'-x_1')+u(t_2'-t_1')}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \dots = \frac{L'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$ (*predĺženie* tyče oproti pokojovej dĺžke)

rozdiel „nameraných" dĺžok L_1, L_2 pohybujúcej sa tyče v S súvisí s relatívnosťou súčasnosti udalostí (zábleskov na koncoch tyče) v sústavách S a S′: pozorovateľ v sústave S zaznamená záblesk na prednom konci tyče neskôr (t_2) než na jej zadnom konci (t_1) – tyč medzitým prejde vzdialenosť

$$\Delta L = u(t_2 - t_1) = \frac{u(t_2'-t_1')+\frac{u}{c^2}^2(x_2'-x_1')}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\frac{u}{c^2}^2 L'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \dots = L_2 - L_1$$

Dopplerov jav

frekvencia elektromagnetickej vlny (svetla) vysielanej zdrojom

pozorovaná frekvencia $$\omega = \omega' \frac{1-\frac{u}{c}}{\boxed{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}}$$ *rýchlosť vzájomného pohybu zdroja a pozorovateľa*

relativistická korekcia

$u > 0 \Rightarrow \omega < \omega'$ *(vzďaľovanie)*
$u < 0 \Rightarrow \omega > \omega'$ *(približovanie)*
$|u| \ll c : \omega = \omega'(1 - \frac{u}{c})$

frekvencia svetla od približujúceho sa zdroja sa zvyšuje – tzv. (Dopplerov) fialový (modrý) posun

frekvencia svetla od vzďaľujúceho sa zdroja sa znižuje – tzv. (Dopplerov) červený posun

šírenie svetla nie je viazané na pohybový stav okolitého prostredia (ako v prípade zvuku)
- posun frekvencie je daný len vzájomným pohybom zdroja svetla a pozorovateľa

relativistické vizuálne efekty

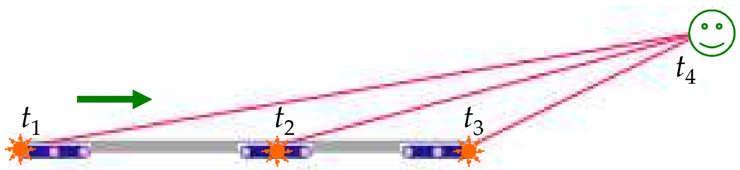
teleso, pohybujúce sa relativistickou rýchlosťou voči pozorovateľovi v „pokoji“, sa z jeho pohľadu skracuje v smere pohybu

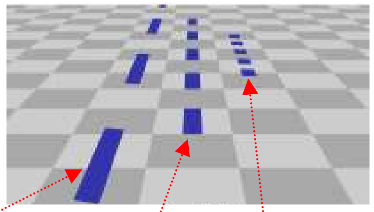
$v \ll c$ $\quad v = 0{,}9c$ $\quad v = 0{,}99c$

samotná kontrakcia je pozorovateľná len vtedy, ak doba šírenia sa svetla zo všetkých častí pohybujúceho sa telesa k pozorovateľovi je (približne) rovnaká alebo zanedbateľná

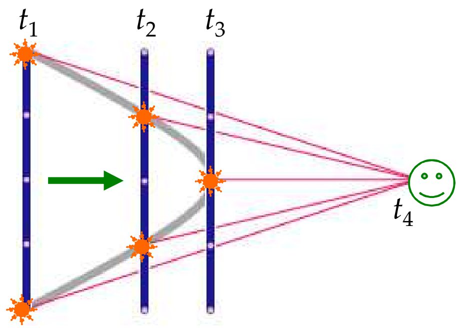
pozorovateľ zaznamená obraz objektu (zrakový vnem, signál v meracom zariadení) keď k nemu „dorazí“ svetlo z objektu, rýchlo sa pohybujúci objekt sa však v tom okamihu už nachádza inde – obraz objektu je retardovaný, tj. pochádza z jeho „minulosti“ (napr. obraz hviezd na oblohe)

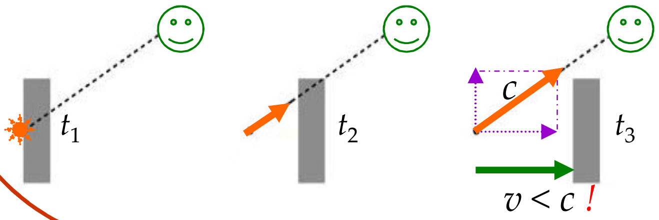
rôzne časti objektu (nenulových rozmerov) sú rôzne vzdialené od pozorovateľa - svetlo z nich „potrebuje“ rôzne časy, kým „dorazí“ k pozorovateľovi – obrazy jednotlivých častí objektu, registrované v danom okamihu pozorovateľom, pochádzajú z rôznych časov – celkový obraz je deformovaný



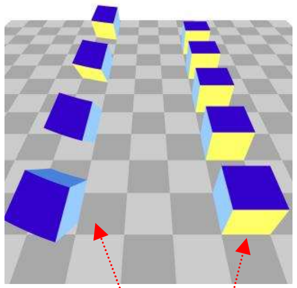


približujúce sa *vzďaľujúce sa*
tyče v kľude

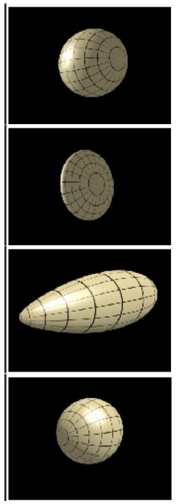




pri šikmom pohľade pozorovateľ môže vidieť odvrátenú stranu objektu, ak rýchlosť pohybu objektu je väčšia než zložka rýchlosti svetla v smere pohybu objektu



kocky *v kľude*
približujúce sa

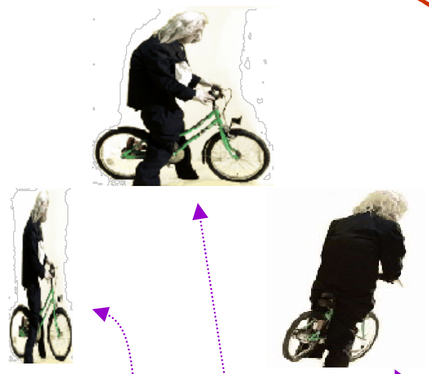


nerelativisticky (pomaly)
sa približujúca lopta

rýchlo sa približujúca lopta
so zarátaním iba kontrakcie

rýchlo sa približujúca lopta
so zarátaním iba retardácie

rýchlo sa približujúca lopta
so zarátaním kontrakcie i retardácie
(lopta sa „natáča" odvrátenou stranou)

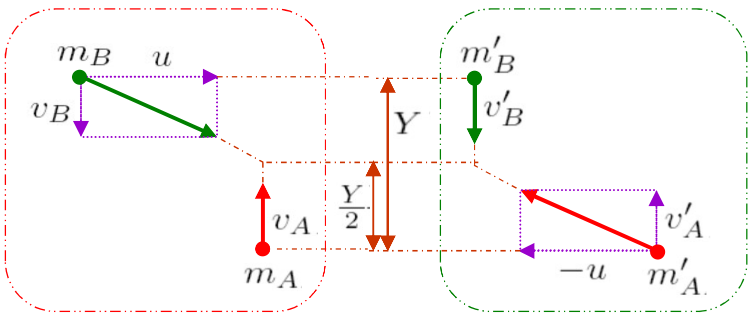


cyklista *v kľude*
v priečnom pohybe
šikmo sa približujúci

Hmotnosť a energia v špeciálnej teórii relativity

pružná zrážka dvoch telies

v sústave S (horizontálne sa pohybujúcej s A)



v sústave S′ (horizontálne sa pohybujúcej s B)

sústavy S, S′ sa voči sebe (horizontálne) pohybujú (veľkou) rýchlosťou u

vertikálne rýchlosti telies sú zanedbateľné!

hmotnosti i vertikálne rýchlosti oboch telies sú rovnaké vzhľadom na sústavy, v ktorých sa telesá „takmer nehýbu“ $v_A = v'_B \ll u$ $\quad m_A = m'_B = m_0$ *- hmotnosť „v pokoji“*

veľkosť rýchlosti horizontálne sa pohybujúceho telesa (v danej sústave) možno stotožniť so vzájomnou rýchlosťou sústav $\sqrt{u^2 + v_B^2} = \sqrt{u^2 + v'^2_A} \cong u$

priečne rozmery (vzhľadom na relativistický pohyb) sa nemenia – telesá sa zrazia v polovici ich pôvodnej vzájomnej vzdialenosti Y

z pohľadu „pokojových“ sústav nastane zrážka za čas $T_0 = \frac{\frac{Y}{2}}{v_A} = \frac{\frac{Y}{2}}{v'_B}$, *meraný v týchto sústavách,*
a $T = \frac{\frac{Y}{2}}{v_B} = \frac{\frac{Y}{2}}{v'_A} = \frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$, *meraný v relativisticky sa pohybujúcich sústavách*

$$v_A = \frac{\frac{Y}{2}}{T_0}$$
$$v_B = \frac{Y}{2}\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{T_0}$$

v každej zo sústav musí platiť zákon zachovania hybnosti

$$m_A v_A = m_B v_B$$
$$m'_A v'_A = m'_B v'_B$$

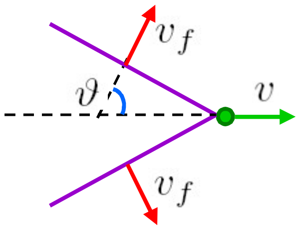
$$m_A = m_B\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \quad (= m_0)$$

$$\boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}}$$

pokojová hmotnosť telesa

hmotnosť telesa - miera zotrvačnosti, tj. odporu voči zmene jeho pohybového stavu narastá s jeho rýchlosťou *ak* $u \to c$, $m \to \infty$ - *teleso nemožno viac zrýchliť (zrýchľujúca sila by musela byť nekonečne veľká) - žiadne teleso (ani signál) sa nemôže šíriť rýchlejšie než svetlo vo vákuu*

v látkovom prostredí (s indexom lomu n) je fázová rýchlosť svetla $v_f = \frac{c}{n}$
rýchlosť v telesa (napr. elementárnej častice) v prostredí môže byť $c > v > v_f$!



častica pohybujúca sa v prostredí „nadsvetelnou" rýchlosťou je zdrojom Čerenkovovho žiarenia
- elektromagnetickej vlnu s kuželovou vlnoplochou

$$\cos\vartheta = \frac{v_f t}{vt} = \frac{c}{nv}$$

Newtonova pohybová rovnica $\boxed{\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}}} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt} = m\vec{a} + \vec{v}\frac{dm}{dt}$

teleso urýchľované silou F na dráhe s získa kinetickú energiu (rovnú práci konanej silou)

$$W_k = A = \int_0^s F\,ds = \int_0^s \frac{d(mv)}{dt}ds = \int_0^v v\,d\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0 \int_0^v \frac{v\,dv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \ldots$$

$$\boxed{d(xy) = y\,dx + x\,dy \ , \int y\,dx = xy - \int x\,dy}$$

$$\ldots = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = \underbrace{(m - m_0)}_{\Delta m} c^2$$

kinetická energia telesa pohybujúceho sa relativistickou rýchlosťou je mierou nárastu jeho hmotnosti

teleso v pokoji (s nulovou kinetickou energiou) má pokojovú energiu $m_0 c^2$

celková energia telesa $\boxed{\boxed{W = mc^2}}$ $W = W_k + m_0 c^2$ *kinetická pokojová energia* *ekvivalencia hmotnosti a energie – hmotnosť telesa je zdrojom jeho energie, zánikom malého množstva hmotnosti sa uvoľní obrovské množstvo energie*

$$W_k = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) \underset{\frac{v}{c} \ll 1}{\rightarrow} m_0c^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - 1\right) = \underline{\frac{1}{2}m_0v^2}$$

$$\boxed{(1 \pm x)^n \cong 1 \pm nx \ , \ x \ll 1}$$

$$W^2 = (mc^2)^2 = \frac{m_0^2c^4}{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow W^2 = m_0^2c^4 + \frac{W^2v^2}{c^2}$$

hybnosť telesa $\quad p^2 = m^2v^2 = m^2c^4\frac{v^2}{c^4} = \frac{W^2v^2}{c^4}$

$$\boxed{W^2 = m_0^2c^4 + p^2c^2}$$

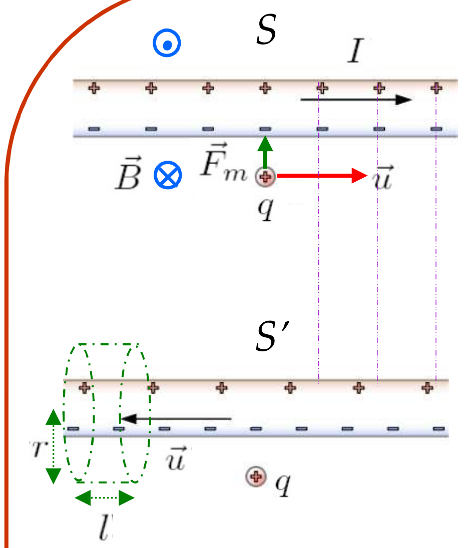
transformácia hybnosti a energie

$$\underline{p'_x = \frac{p_x - u\frac{W}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}} \qquad \left(x' = \frac{x-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right) \qquad \underline{p'_y = p_y \ , \ p'_z = p_z} \qquad (y' = y \ , \ z' = z)$$

$$\underline{W' = \frac{W - up_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}} \qquad \left(t' = \frac{t-u\frac{x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)$$

$\underline{\left(\frac{W}{c}\right)^2 - p^2}$ - *invariant voči transformácii*

Elektrické a magnetické pole v špeciálnej teórii relativity



prúd I pretekajúci valcovým vodičom (napr. tok kladných nábojov) vyvoláva v jeho okolí magnetické pole $\vec{B}$

v sústave S, spojenej s vodičom, sa v jeho okolí pohybuje kladný náboj q rýchlosťou $\vec{u}$ (rovnakou ako rýchlosť prúdu) v smere prúdu I (kolmo na smer $\vec{B}$) – pôsobí naň magnetická sila $\vec{F}_m = q\vec{u} \times \vec{B}$ - náboj je priťahovaný k vodiču

v sústave S′, pohybujúcej sa voči sústave S konštantnou rýchlosťou u v smere prúdu (tj. spolu s nábojom q), je rýchlosť náboja q nulová,
- neexistuje magnetická sila priťahujúca náboj k vodiču, $F_m = 0$
dej však musí prebiehať rovnako vo všetkých inerciálnych sústavách !

v sústave S, spojenej s vodičom, je vodič elektricky neutrálny, nábojová hustota (na jedn. dĺžky vodiča) kladných a záporných nosičov náboja je rovnaká, $\tau_- = -\tau_+$ ($Q = \tau l$), $E = 0$, $F_e = qE = 0$

v sústave S′ je náboj q v pokoji voči kladným nosičom náboja vo vodiči – ich (pokojová) hustota v S′ je menšia než v sústave S, v ktorej sa pohybujú („rozstupy medzi pohybujúcimi sa nábojmi sa relativisticky skracujú a náboj je invariant)

$$\tau'_+ = \tau_+\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

záporné nosiče náboja sa v S′ pohybujú (ich rozstupy sú skrátené voči S), ich hustota je väčšia než (pokojová) v S

$$\tau'_- = \frac{\tau_-}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

celková hustota náboja vo vodiči v S′ je $\tau' = \tau'_- + \tau'_+ = \dfrac{\tau_-}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} + \tau_+\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}} = \dfrac{\frac{u^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\tau_-$

$\oint \vec{E}' \cdot d\vec{S} = 2\pi r l E' = \dfrac{\tau' l}{\varepsilon_0} \Rightarrow E' = \dfrac{u^2}{2\pi\varepsilon_0 c^2 r\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\tau_-$ - v sústave S′ je vodič elektricky nabitý (záporne)

$$F' = qE' = \underbrace{qu\,\overbrace{\overset{\mu_0}{\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}}\,\overset{I}{\frac{u\tau_-}{2\pi r}}}^{B}}_{F_m}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

v sústave S' pôsobí na náboj q (v pokoji) elektrická sila (priťahuje kladný náboj q k záporne nabitému vodiču)

ak $u \ll c$, $F'_e = F_m$

čisto magnetická sila sa transformuje do čisto elektrickej sily, a naopak

vo všeobecnosti, ak rýchlosť prúdu vo vodiči a rýchlosť náboja q voči vodiču (S' voči S) sú rôzne, vo všeobecne zvolenej súradnicovej sústave sú nenulové elektrické aj magnetické pole

transformácia vektorov elektrického a magnetického poľa

$$\vec{E'}_\parallel = \vec{E}_\parallel \qquad \vec{B'}_\parallel = \vec{B}_\parallel$$

$$\vec{E'}_\perp = \frac{\vec{E}_\perp + (\vec{u}\times\vec{B})_\perp}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad \vec{B'}_\perp = \frac{\vec{B}_\perp - \frac{(\vec{u}\times\vec{E})_\perp}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

- zložky pozdĺžne so smerom vzájomného pohybu sústav

- zložky priečne na smer

pre $u \ll c$ *platí* $\vec{E'}_\perp = \vec{E}_\perp + (\vec{u}\times\vec{B})_\perp$ *a teda* $\vec{E'} = \vec{E} + \vec{u}\times\vec{B}$

„čisto“ elektrická sila sa transformuje na elektromagnetickú (Lorentzovu silu)

$$q\vec{E'} = q\vec{E} + q\vec{u}\times\vec{B}$$

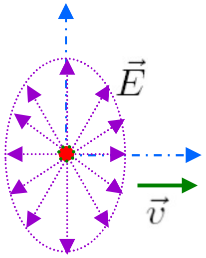
magnetické pole je relativistickým prejavom elektrického poľa – aj pri pomalom pohybe nábojov (teória elektromagnetického poľa je konzistentná so špeciálnou teóriou relativity)

v transformačných vzťahoch

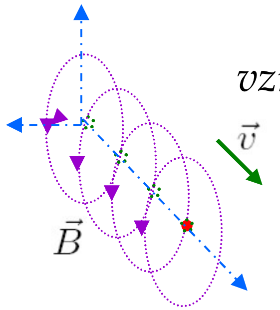
$\vec{u}\times\vec{B} \longrightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ *reprezentuje elektromagnetickú indukciu*

$\vec{u}\times\vec{E} \longrightarrow \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ *reprezentuje posuvný prúd*

transformácia elektrostatického poľa bodového náboja



kontrakcia sféricky symetrického elektrického poľa v smere pohybu náboja (ako kontrahovaná lopta)



vznik azimutálneho magnetického poľa pozdĺž pohybu náboja (ako pole priameho vodiča)

Časopriestor, štvorvektory

priestor i čas sú relatívne – závisia od výberu súradnicovej sústavy (transformácia súradníc závisí od času a transformácia času od súradníc), vzdialenosti i časové intervaly sa transformujú – priestor a čas sú zložkami časopriestoru

udalosť v časopriestore (4-rozmernom) $\begin{cases} \text{3 priestorové súradnice - polohový vektor } \vec{r}\,(x, y, z) \\ \text{1 imaginárna časová súradnica } ict \end{cases}$

polohu udalosti v časopriestore určuje polohový štvorvektor $x_\mu(x, y, z, ict)$ *o veľkosti s*

$$\left.\begin{array}{l} s^2 = x^2 + y^2 + z^2 + (ict)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 \\ s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 \end{array}\right\}$$

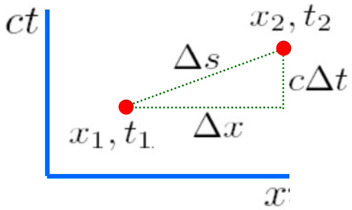
pomocou Lorentzovej transformácie dostávame $\underline{s^2 = s'^2}$

veľkosť polohového štvorvektora (v časopriestore) je invariantná (nemení sa) pri transformácii súradnicových sústav!

udalosť A: $x_1,\ t_1$ *vzdialenosť medzi udalosťami A a B v priestore* $\Delta x = x_2 - x_1$

udalosť B: $x_2,\ t_2$ *(y,z rovnaké) v čase* $\Delta t = t_2 - t_1$

pre interval medzi udalosťami A a B v časopriestore platí $\underline{(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2}$



$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

relativistický časopriestor nie je euklidovský!

v euklidovskej geometrii („náš“ priestor) platí Pythagorova veta

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2$$

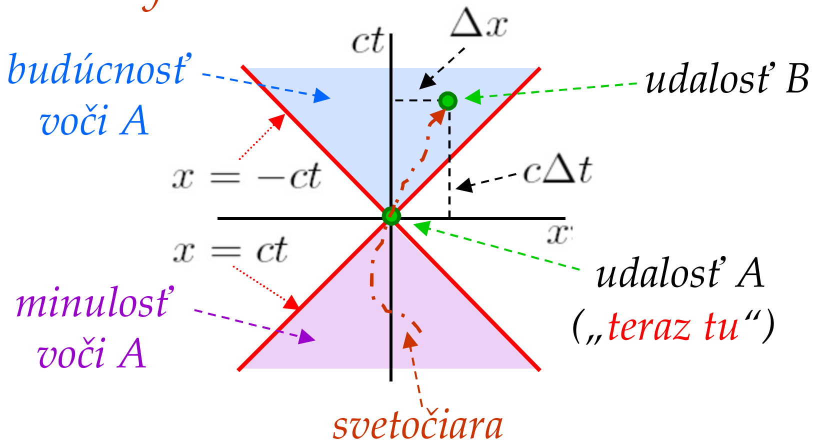
interval medzi udalosťami v časopriestore je invariantný pri Lorentzovej transformácii

$$\underline{(\Delta s')^2} = \frac{\{c(t_2-t_1)-(x_2-x_1)\frac{u}{c}\}^2}{1-\frac{u^2}{c^2}} - \frac{\{(x_2-x_1)-(t_2-t_1)u\}^2}{1-\frac{u^2}{c^2}} = \ldots = \frac{\{(c\Delta t)^2-(\Delta x)^2\}\cancel{(1-\frac{u^2}{c^2})}}{\cancel{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \underline{(\Delta s)^2}$$

ak $c\Delta t > |\Delta x| \Rightarrow (\Delta s)^2 > 0$ *- vzdialenosť udalostí v priestore je menšia než dráha, ktorú prejde svetlo za časový interval medzi udalosťami – udalosti môžu mať príčinnú súvislosť (príčina – dôsledok, tj. minulosť – budúcnosť)*

ak $(\Delta s)^2 < 0$ *- svetlo „nestihne“ za dobu medzi udalosťami prejsť vzdialenosť medzi nimi - udalosti nemôžu mať príčinnú súvislosť – môžu sa javiť ako (relatívne) súčasné (v závislosti od výberu súradnicovej sústavy môžu ale nemusia byť súčasné)*

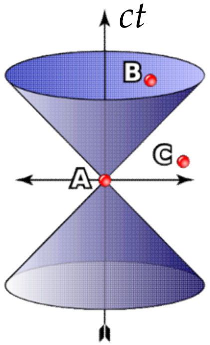
svetelný kužel



svetočiara – dráha telesa v časopriestore

udalosť B môže byť ovplyvnená udalosťou A (svetlo „stihne“ prejsť vzdialenosť medzi nimi) - B je v budúcnosti voči A

udalosti A,C sa nemôžu navzájom ovplyvniť (svetlo „nestihne“ prejsť ich vzájomnú vzdialenosť) – nemôžu byť vo vzájomnom kauzálnom vzťahu minulosť - budúcnosť
– sú relatívne súčasné



súčasnosť je relatívna, minulosť a budúcnosť sú absolútne – nemožno zmeniť chod času!

štvorvektory

kombinácia dvoch odpovedajúcich veličín vektor-skalár, ktorej veľkosť je invariantom pri Lorentzovej transformácii, je štvorvektorom v časopriestore

štvorvektor $a_\mu(\vec{a}, ia_t)$ *v časopriestore vzniká pridaním imaginárnej „časovej" zložky* ia_t *k priestorovým zložkám vektora* $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$, *pre veľkosť štvorvektora platí*

$$|a_\mu|^2 = a_\mu a_\mu = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 - a_t^2 \qquad \text{(pre veľkosť vektora } |\vec{a}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \text{)}$$

skalárny súčin vektorov $\vec{a}\cdot\vec{b}$ *(teda aj* $\vec{a}\cdot\vec{a}$, *a teda aj veľkosť vektora) – skalár - je invariantom pri priestorových transformáciách (translácii a rotácii) inerciálnych súradnicových sústav*

súčin štvorvektorov $a_\mu b_\mu$ *(teda aj* $a_\mu a_\mu$ *a veľkosť štvorvektora) – skalár - je invariantom pri časopriestorovej (Lorentzovej) transformácii inerciálnych súradnicových sústav*

polohový štvorvektor $x_\mu(x, y, z, ict) = (\vec{r}, ict)$ $\qquad x_\mu x_\mu = \underline{r^2 - c^2t^2}$

hybnosť-energia $p_\mu(\vec{p}, i\frac{W}{c})$ $\qquad p_\mu p_\mu = \underline{p^2 - \frac{W^2}{c^2} = -m_0^2c^2}$

štvorrýchlosť $u_\mu\left(\frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{ic}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \frac{1}{m_0}p_\mu$ $\qquad u_\mu u_\mu = \underline{-c^2}$

veľkosť rýchlosti telesa v danej sústave

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ *ale* $u_\mu \neq \frac{dx_\mu}{dt}$, *lebo dt nie je invariantom pri Lorentzovej transformácii*

infinitezimálny časopriestorový úsek svetočiary telesa je

$$ds = \sqrt{(cdt)^2 - (\underbrace{v_x dt}_{dx})^2 - (\underbrace{v_y dt}_{dy})^2 - (\underbrace{v_z dt}_{dz})^2} = cdt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

(pokračovanie na ďalšej strane)

$d\tau = \frac{ds}{c} = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ *je invariantom* pri Lorentzovej transformácii - predstavuje *vlastný čas* telesa (v sústave spojenej s telesom, $dx = dy = dz = 0$)

$u_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dx_\mu}{dt}$ $p_\mu = m_0\frac{dx_\mu}{d\tau}$ štvorsila $F_\mu = \frac{dp_\mu}{d\tau} = m_0\frac{dx_\mu^2}{d\tau^2}$ štvorzrýchlenie

(rovnice invariantné pri Lorentzovej transformácii)

vlnový štvorvektor $K_\mu(\vec{K}, i\frac{\omega}{c})$ $K_\mu K_\mu = K^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$

fáza rovinnej monochromatickej vlny $K_\mu x_\mu = \vec{K}\cdot\vec{r} - \omega t$

štvorvektorový nabla operátor $\nabla_\mu(\nabla, \frac{\partial}{ic\partial t})$ $\nabla_\mu\nabla_\mu = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$

štvordivergencia $\nabla_\mu a_\mu = \nabla\cdot\vec{a} + \frac{\partial a_t}{c\partial t}$

rovnica kontinuity

$$\nabla_\mu j_\mu = \nabla\cdot\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

prúdová-nábojová hustota $j_\mu(\vec{j}, ic\rho)$

elektromagnetický štvorpotenciál $A_\mu(\vec{A}, i\frac{\varphi}{c})$

Maxwellove rovnice

$$\nabla_\mu^2 A_\mu = -\mu_0 j_\mu$$

základné rovnice elektromagnetizmu sú invariantné voči Lorentzovej transformácii

Lorentzova transformácia štvorvektora:

$$a'_x = \frac{a_x - \frac{u}{c}a_t}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad a'_y = a_y \qquad a'_z = a_z \qquad a'_t = \frac{a_t - \frac{u}{c}a_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad a_x = \frac{a'_x + \frac{u}{c}a'_t}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad a_t = \frac{a'_t + \frac{u}{c}a'_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

zložka *v smere* zložky *kolmé* na smer *vzájomného pohybu sústav* (rýchlosťou u)

Hybnosť a hmotnosť elektromagnetického poľa

zákon zachovania energie elektromagnetického poľa (v nevodivom prostredí)

$\nabla \cdot \vec{\mathcal{S}} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0$ *Poyntingov štvorvektor* $\mathcal{S}_\mu(\vec{\mathcal{S}}, icw)$ $\nabla_\mu \mathcal{S}_\mu = 0$

tok energie poľa (jedn. plochou) *energia poľa (v jedn. objeme)*

hybnosť *energia*

$p_\mu(\vec{p}, i\frac{W}{c})$

$W = \int w dV \Rightarrow \frac{W}{c} = \frac{1}{c^2}\int (cw) dV \Rightarrow \vec{p} = \frac{1}{c^2}\int \vec{S} dV$

$g_\mu(\frac{\vec{\mathcal{S}}}{c^2}, i\frac{w}{c}) = \frac{\mathcal{S}_\mu}{c^2}$

(objemová) hustota časovej zložky štvorhybnosti = časová zložka Poyntingovho štvorvektora/c^2

(objemová) hustota priestorovej zložky štvorhybnosti = priestorová zložka Poyntingovho štvorvektora/c^2

(objemová) hustota štvorhybnosti elektromagnetického poľa

(objemová) hustota hybnosti elektromagnetického poľa $\vec{g} = \frac{\vec{\mathcal{S}}}{c^2} = \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}$

elektromagnetická vlna dopadajúca na teleso mu odovzdáva hybnosť rovnú $\frac{1}{c}\times$elektromagnetickej energii absorbovanej telesom (pozri Energia a hybnosť elektromagnetickej vlny)

odovzdaná hybnosť jedn. ploche za 1s je teda $\frac{\mathcal{S}}{c}$, šíri sa rýchlosťou c $\Rightarrow$ hustota hybnosti je $\frac{\mathcal{S}}{c^2}$

ak by svetlo bol tok častíc, potom za 1s dopadne na jedn. plochu nv častíc

objemová koncentrácia a rýchlosť „častíc svetla“

pokojová hmotnosť „častice svetla“

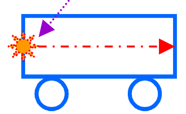
hybnosť každej častice je $p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ *, (objemová) hustota hybnosti je* $np = \frac{n m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = g$

energia každej častice je $\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, *celková energia dopadajúca na jedn. plochu za 1s je* $\frac{n v m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \mathcal{S}$ $g = \frac{\mathcal{S}}{c^2}$

tok energie poľa $\Leftrightarrow$ *hybnosť poľa* $\qquad$ *energia poľa* $\Leftrightarrow$ *hmotnosť poľa*

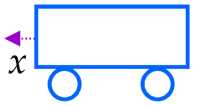
$$p = \frac{W}{c} \qquad\qquad m = \frac{W}{c^2}$$

záblesk svetla



záblesk svetla preletí vozňom dĺžky L a prenesie energiu W aj hmotnosť $\frac{W}{c^2}$ *a zmení rozloženie hmotnosti vo vozni*

poloha ťažiska telesa v pokoji (vozňa) sa nemôže zmeniť len v dôsledku procesov prebiehajúcich vo vnútri telesa (bez pôsobenia vonkajšej sily)



pri emisii záblesku (doprava) sa musí vozeň o hmotnosti M posunúť (doľava) o malú vzdialenosť x (spätný ráz) – poloha ťažiska sa nezmení $\quad L\frac{W}{c^2} = Mx$

zákon zachovania hybnosti $\quad Mv = c\frac{W}{c^2} = \frac{W}{c} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{W}{c}$

rýchlosť vozňa a záblesku

(po náraze záblesku na protiľahlú stenu sa spätný pohyb vozňa zastaví)

elektromagnetické pole je nositeľom energie a teda aj hmotnosti – časť hmotnosti nabitého telesa je teda sústredená v jeho elektromagnetickom poli – tzv. elektromagnetická hmotnosť

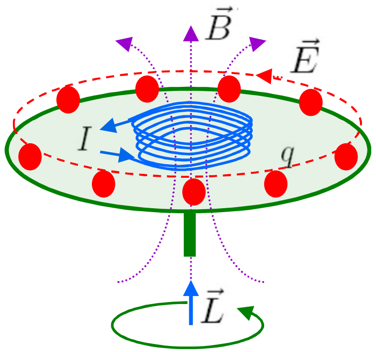
celková hmotnosť telesa = elektromagnetická + „ostatná“, tj. „neelektromagnetická“ hmotnosť

napr. hmotnosť atómu vodíka pozostáva z hmotností jadra (protónu) a elektrónu a z elektromagnetickej hmotnosti poľa medzi nimi, určenej energiou vzájomnej väzby elektrónu a jadra)

hmotnosť jadra (ako aj každej zloženej častice) súvisí s energiou väzby, ktorá ho „drží pokope“ (pole jadrových, tj. neelektromagnetických síl)

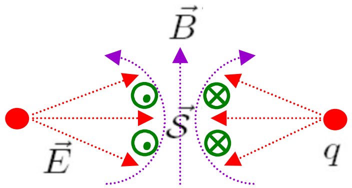
klasická fyzika: látka je nositeľom hmotnosti, pole je nositeľom energie
relativistická fyzika: ekvivalencia hmotnosti a energie – stiera sa ostrý rozdiel medzi látkou a poľom: pole je tam kde je malá hustota energie, látka je tam, kde je veľká hustota energie (sústredená v hmotnosti)

otáčavá platňa (bez trenia) s cievkou v osi platne a nabitými guľôčkami upevnenými po jej obvode



1. *platňa sa neotáča a cievkou tečie prúd I, vytvárajúci magnetické pole $\vec{B}$, na náboje q v pokoji nepôsobí žiadna sila*
2. *po náhlom vypnutí prúdu sa počas zániku magnetického poľa indukuje vírové elektrické pole $\vec{E}$, ktoré pôsobí silou na (kladné) náboje q a uvádza platňu do otáčavého pohybu*
3. *po zaniknutí magnetického poľa zaniká aj elektrické pole a platňa zotrvá v otáčavom pohybe s momentom hybnosti $\vec{L}$*

zo zákona zachovania momentu hybnosti však vyplýva, že platňa (bez pôsobenia momentu vonkajšej sily) musela mať stále rovnaký moment hybnosti – teda aj keď sa neotáčala !?



statické elektromagnetické pole stacionárneho prúdu cievkou a elektrických nábojov v pokoji vyvoláva cirkuláciu Poyntingovho vektora (pozri Energia a hybnosť elektromagnetickej vlny) a teda cirkuláciu hustoty hybnosti poľa – moment hybnosti

Základné myšlienky všeobecnej teórie relativity

Newtonova pohybová rovnica NPR (klasická mechanika) a rovnice špeciálnej teórie relativity ŠTR (vrátane elektromagnetizmu) platia v inerciálnych sústavách

inerciálna sústava (spojená s telesom, na ktoré nepôsobí žiadna sila) je fikcia!

všeobecná teória relativity VTR zovšeobecňuje NPR a ŠTR - všetky sústavy sú rovnocenné (vo všetkých sústavách majú základné rovnice fyziky rovnaký tvar, bez ohľadu na ich pohybový stav) – neexistuje absolútny priestor, absolútny čas ani absolútny pohyb

zrýchlenie $\Leftrightarrow$ gravitácia

zotrvačná hmotnosť m_z – miera zotrvačnosti telesa - odpor voči sile vyvolávajúcej zrýchlenie, veľkosť zrýchlenia telesa vyvolaného určitou silou závisí od jeho zotrvačnej hmotnosti

$$F_z = m_z a \qquad v_z = at = \frac{F_z}{m_z} t$$

dá sa určiť z konečnej rýchlosti telesa, na ktoré určitý čas pôsobila určitá (konštantná) sila

gravitačná hmotnosť m_g – miera gravitačného pôsobenia (napr. Zeme), veľkosť gravitačného zrýchlenia a rýchlosti telesa nezávisí od jeho gravitačnej hmotnosti

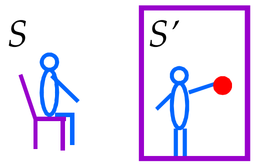
$$F_g = m_g g \qquad v_g = gt = \frac{F_g}{m_g} t$$

dá sa určiť vážením

ak je teleso urýchľované gravitáciou $F_z = F_g$

po čase t dosiahne rýchlosť $at = gt \Rightarrow \frac{F_z}{m_z} t = \frac{F_g}{m_g} t$

$$\Rightarrow \boxed{m_z = m_g}$$



S – sústava v (relatívnom) pokoji, pozorovateľ P
S′ – sústava spojená s kabínou pohybujúcou sa so zrýchlením voči S, pozorovateľ P′

I : kabína padá voľným pádom v gravitačnom poli (Zeme) so zrýchlením g

P : všetky predmety v kabíne sa pohybujú nadol so zrýchlením g, kabína je neinerciálna sústava
P′: všetky predmety v kabíne sú v kľude („beztiažový stav“), keby som postrčil loptu, pohybovala by sa priamočiaro rovnomerne – kabína sa javí ako inerciálna sústava (v obmedzenom priestore kabíny)

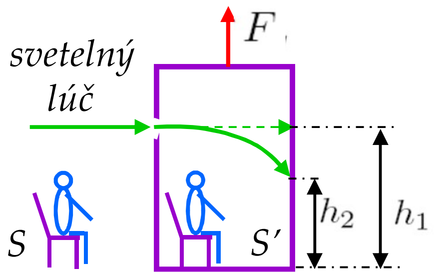
II : kabína mimo gravitačného poľa (vo vesmíre) je ťahaná nahor (raketou) so zrýchlením -g

P′: kabína stojí, pustená lopta padne na zem, lebo pôsobí gravitačné pole
P : žiadne gravitačné pole nie je, lopta stojí na mieste, len kabína je ťahaná nahor

III : v prípade II „upevníme“ kabínu a „zapneme“ gravitačné pole

P a P′ si budú myslieť to isté ako v II, v skutočnosti si vymenia úlohy (P′ s kabínou sa nehýbe a P padá)

všetky popisy sú správne – rovnice platia rovnako, sústavy sú ekvivalentné!
pôsobenie zotrvačnej sily ⇔ pôsobenie gravitačnej sily



P : lúč ide priamočiaro ale kabína stúpa nahor $\Rightarrow h_2 < h_1$
P′: kabína je v kľude ale na lúč pôsobí gravitačná sila $\Rightarrow h_2 < h_1$
(lúč nesie energiu, teda má hmotnosť, pôsobí naňho gravitácia)

oba popisy sú ekvivalentné!!!

dráha svetelného lúča sa zakrivuje v dôsledku gravitačnej sily, ktorou na lúč pôsobia telesá veľkých hmotností (Zem, hviezdy)

$\Leftrightarrow$

svetelný lúč sa šíri z bodu A do bodu B po najkratšej spojnici týchto bodov (geodetike), telesá veľkých hmotností (Zem, hviezdy) spôsobujú zakrivenie priestoru – geodetiky v okolí týchto telies nie sú úsečky ale krivky

ako vyzerá zakrivený (3D) priestor?!

vieme si predstaviť zakrivenú (2D) plochu:
súčet uhlov trojuholníka nakresleného na guľovej ploche nie je 180° (ako v rovinnej geometrii)!
strany trojuholníka tvoreného rovníkom a poludníkmi 0° a 90° z.d. sa stretajú pod pravými uhlami - súčet uhlov je 270°!
ísť „rovno“ po povrchu Zemegule (zakrivená plocha) znamená ísť po kružnici

základné rovnice elektromagnetizmu popisujú štruktúru poľa
rovnice VTR popisujú štruktúru časopriestoru (veľké hmotnosti deformujú priestor aj čas)

Michal Maheľ
FYZIKA II.
Kmity
Vlny
Elektromagnetické vlny
Teória relativity

Vydavateľ:
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK
Knižničné a edičné centrum
Bratislava 2022
1. vydanie

ISBN:
978-80-8147-120-9