# FUNDAMENTÁLNE ZÁKONY FYZIKY V KOCKE

***The best that most of us can hope to achieve
in physics is simply to misunderstand
at a deeper level.***

(Wolfgang Pauli)

# Úvod

Fyzika používa na opis Prírody jazyk matematiky, teda „vtláča“ Prírode matematickú štruktúru. Ak sa takýto opis zhoduje s pozorovaniami, konštatujeme, že Príroda *má* takúto matematickú štruktúru. Pritom nie je dostatočne (alebo možno vôbec) jasné, prečo to tak dobre funguje.

Fyzikálny svet by nám nedával zmysel, keby sme nedokázali *reprodukovať* výsledky pozorovaní a overovať tak jeho zákonitosti v rôznom čase alebo na rôznych miestch, či za inak zmenených okolností. Príroda nám tým odhaľuje isté **symetrie**, ktoré premietame aj do matematických štruktúr, ktorými ju opisujeme. Moderný prístup k fyzike sa opiera práve o tieto symetrie. Neznamená to, že Príroda sa musí riadiť symetriami. Príroda je taká aká je, a my ju spoznávame jej pozorovaním. Ak však spoznáme (a uveríme), že *má* svoje symetrie, sme oprávnení využiť matematiku symetrií na jej hlbšie pochopenie. Neznamená to teda, že fundamentálne zákony fyziky sú *dôsledkami* symetrií, ale že tieto symetrie rešpektujú.

Spojité časopriestorové symetrie klasickej fyziky súvisia so známymi zákonmi zachovania. Kvantová mechanika prináša nové symetrie v súvislosti s princípom superpozície ako aj s výmenou identických častíc. Symetrie teórie relativity súvisia s novými vlastnosťami, akými sú spin či helicita. Často sú však symetrie Prírody „zamaskované“, a to nielen náhodnými okrajovými podmienkami, ale ich *spontánnym narušením*, ktoré tvorí podstatu existencie kryštalickej štruktúry pevných látok, či podstatu javov ako feromagnetizmus či supravodivosť. Osobitné miesto vo svete symetrií zaujímajú *kalibračné* symetrie - symetrie matematického *opisu*. Tento druh symetrií je však podstatou fundamentálnych síl (interakcií) Prírody.

Tento text chce byť sprievodcom po fundamentálnych zákonitostiach fyziky a ich súvise so symetriami Prírody. Jeho ambíciou je ukázať, že na otázky typu „*Odkiaľ sa vzali princípy neurčitosti?, Čo je spin a odkiaľ sa vzal?, Prečo majú operátory známych veličín práve taký tvar? Ako si máme predstaviť elementárne častice a aké sú ich pohybové rovnice? Odkiaľ sa vzal Pauliho vylučovací princíp? Čo je podstatou fundamentálnych síl? Čo sú vlastne elektrické a iné náboje? Čo je to hmotnosť? Čo znamená zakrivený časopriestor?*“, a podobné, poznáme odpovede vyplývajúce z viery v symetrie Prírody. Text predpokladá vedomosti na úrovni bakalárskej fyziky, jeho cieľom nie je zahltiť čitateľa matematickými technikáliami, ale upriamiť pozornosť na kľúčové fyzikálne súvislosti. Použitý matematický formalizmus má slúžiť len ako vodítko pre matematicky založených čitateľov.

Inými slovami, text je orientovaný na *všetkých* študentov fyziky. Ako pri každom takomto texte, jeho úroveň je limitovaná nielen poznatkami súčasnej fyziky, ale predovšetkým hĺbkou ich pochopenia jeho autorom.

# Obsah

# Symetrie

Snaha o adekvátny opis štruktúry Prírody na *elementárnej* úrovni - *elementárnych „častíc“* (excitácií príslušných polí) v jazyku bežných pojmov zlyháva kvôli ich vágnosti v kontexte mikrosveta. Ukazuje sa, že najvýstižnejším spôsobom opisu je určenie pravidiel, akými sa takéto objekty správajú pri rôznych **transformáciách**, a aké charakteristiky sa pritom *zachovávajú*. Vychádzame pritom zo základného postulátu *špeciálnej teórie relativity*, že *všetky inerciálne sústavy sú ekvivalentné*, a každá fyzikálna teória, ktorá ašpiruje na adekvátny opis Prírody, musí túto *symetriu* zohľadniť. Fundamentálne fyzikálne zákonitosti musia byť rovnaké pre všetkých *vonkajších pozorovateľov*. Ak pozorovateľ stanoví nemennosť určitých vlastností systému pri jeho určitej transformácii, hovoríme o **symetrii** systému vzhľadom na *túto* transformáciu. Vlastnosť (veličinu), ktorá sa „fyzickou“ transformáciou *nezmení*, nazývame **invariantnou** (vzhľadom na danú transformáciu). Aj pri zmene *jednotlivých vlastností* systému (t.j. konfigurácie systému) sa však môže zachovať *dynamika* systému - tvar pohybových rovníc. Vtedy hovoríme o **kovariantnosti** systému (vzhľadom na danú transformáciu). Musíme tiež rozlišovať medzi **aktívnou** „fyzickou“ transformáciou systému *vzhľadom na jeho okolie*, a **pasívnou** transformáciou, pri ktorej netransformujeme skúmaný systém ale jeho „pozadie“, napr. súradnicovú sústavu[1] (Dodatok A).

Hľadáme teda základné zákonitosti fyziky v *kovariantnom* tvare - nezávislé na posunutí pozorovateľa v priestore či čase, jeho pootočení, zmene jeho rýchlosti či pohľade do zrkadla. A rovnako hľadáme invariantné charakteristiky elementárnych „stavebných prvkov“ Prírody.[2] Naše hľadanie začne v oblastiach známych zo základných kurzov fyziky - v klasickej a kvantovej mechanike a v klasickej teórii polí.

## I.1 Symetrie v klasickej mechanike.

Táto úvodná kapitola je zhrnutím tých základných postulátov *klasickej* mechaniky, ktoré sa v tej či onej podobe premietajú do moderného *kvantového* opisu Prírody. Látka je usporiadaná tak, aby poskytovala čo najprirodzenejší prechod od klasických pojmov a zákonitostí ku kvantovomechanickým.

[1]Napr. transformácia vektoru *v danej báze* (sústave súradníc) je *aktívnou*, kým transformácia vektorovej *bázy* na inú (fyzicky nemeníme vektor, iba jeho opis) je *pasívnou*. Príkladom tohto rozdielu v kvantovej mechanike je aj Schrödingerov vs. Heisenbergov obraz: V prvom z nich pôsobíme operátormi na *stavy meniace sa v čase* - to je *aktívna* transformácia. V druhom z nich sú stavy nemenné, operátory sa však v čase menia podľa Heisenbergovej rovnice, čiže menia sa ich *bázové stavy*, do ktorých skúmaný stav rozkladáme - to je *pasívna* transformácia.

[2]To, čo robí napr. *elektrón* elektrónom, musí byť rovnaké pre všetkých pozorovateľov - inak nejde o *fundamentálnu* vlastnosť.

### I.1.1 Lagrangián a účinok.

Systém (teleso, častica) v *klasickej lagrangeovskej* mechanike „žije“ vo svojom **v konfiguračnom priestore** - každý bod tohto *abstraktného* priestoru, určený *zovšeobecnenými súradnicami* $q_j(t)$, odpovedá *stavu* systému. Vývoj (pohyb) systému reprezentuje „dráha“ v tomto priestore. Túto dráhu parametrizuje **lagrangián** $\mathscr{L}(q_j(t), \dot{q}_j(t), t)$ - veličina (spravidla) o rozmere energie, ktorá v sebe kóduje celú dynamiku systému. Ak je systém *izolovaný* (čo nateraz pre jednoduchosť predpokladáme), jeho lagrangián závisí od času len *implicitne*, teda prostredníctvom časového vývoja zovšeobecnených súradníc a rýchlostí, $\mathscr{L}(q_j(t), \dot{q}_j(t))$. Na rozdiel od energie systému, ktorá sa pre *izolovaný* systém *vždy zachováva*, lagrangián sa teda zachovávať *nemusí.*

Pomocou lagrangiánu definujeme **účinok** vývoja systému v danom časovom intervale ako *funkcionál*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L} dt$$

Hodnota účinku (ako číslo) pritom závisí od *výberu dráhy* medzi fixnými bodmi $q_j(t_1), q_j(t_2)$. V *klasickej* mechanike platí **princíp extremálneho účinku** - zo všetkých možných priebehov vývoja systému, čiže dráh medzi začiatočným a konečným stavom, si Príroda „zvolí“ práve *tú* s extremálnym (zväčša minimálnym) účinkom. Znalosť takejto dráhy nám umožňuje spoznať pohybové rovnice systému.[3] Dráhu systému v konfiguračnom priestore zovšeobecnených súradníc $q_j(t)$ v časoch $t_1 < t < t_2$ hľadáme variačnou metódou medzi *fixnými* koncovými bodmi, $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$, tak aby $\mathscr{L}(q_j(t), \dot{q}_j(t))$ spĺňal podmienku $\delta S = 0$. Diferenciál lagrangiánu je[4]

$$\delta\mathscr{L}(q_j, \dot{q}_j) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_j}\delta q_j + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_j}\delta q_j - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\right)\delta q_j + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right) \qquad \dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt}$$

V (určitom) integráli účinku posledný člen vypadne, keďže (ako totálna derivácia) bude rozdielom hraničných hodnôt, pre ktoré $\delta q_j = 0$.[5] Podmienka extremálneho účinku $\delta S = 0$ vedie na $\delta\mathscr{L} = 0$, odkiaľ dostávame (bez ohľadu na výber zovšeobecných súradníc) **Eulerovu-Lagrangeovu rovnicu** (ELR)

$$\underline{\frac{\partial\mathscr{L}(q_j, \dot{q}_j)}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathscr{L}(q_j, \dot{q}_j)}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0}$$

Riešením tejto rovnice s daným lagrangiánom dostaneme odpovedajúcu pohybovú rovnicu systému.

V *ne*relativistickej fyzike je lagrangián rozdielom kinetickej a potenciálnej energie systému, $\mathscr{L}_{nerelat} = K - V$. *Kinetická* energia je akousi mierou „akčnosti“ systému - *pohybu.* Naopak, *potenciálna* energia je mierou ešte „nerealizovanej akcie“ - energie, ktorú má systém „v rezerve“ (t.j. k dispozícii ako potencialitu). Minimálny lagrangián je teda prirodzenou mierou *úspornosti* Prírody.[6] Povýšenie extremálneho účinku na *princíp* však vyžaduje jeho *invariantnosť* voči rôznym transformáciám. Lagrangián preto musí obsahovať všetky *symetrie* systému. $\mathscr{L}_{nerelat}$ takým celkom určite nie je, veď stačí zmeniť pohybový stav pozorovateľa - rôzni pozorovatelia sa nezhodnú na rýchlostiach ani na časomiere. Napr. pre *voľný* ($V = 0$) relativistický objekt (časticu) o hmotnosti $m$ a rýchlosti $v$ má správny lagrangián tvar $\mathscr{L} = -mc^2/\gamma$, kde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Vo všeobecnosti preto definujeme lagrangián ako

[3] V praxi splnenie týchto požiadaviek zabezpečujeme výberom/konštrukciou lagrangiánu.

[4] V celom texte používame **Einsteinovu konvenciu** - sumovanie cez opakujúci sa index.

[5] Tento člen teda predstavuje len aditívnu konštantu k energii, ktorú môžeme pridať/ubrať bez vplyvu na pohybovú rovnicu. V ďalšom texte ho preto nebudeme uvažovať. Vo všeobecnosti môžeme lagrangián rozšíriť o *totálnu* časovú deriváciu ľubovoľnej funkcie $G(q_j, t)$. Koncové body dráhy v *konfiguračnom* priestore sú totož *fixované* a po zintegrovaní pridajú k účinku konštantný člen $G(q_j(t_2), t_2) - G(q_j(t_1), t_1)$, ktorý pri jeho variácii vypadne. Pridanie členu $\pm\frac{dG(q_j,t)}{dt}$ k lagrangiánu teda nemá vplyv na dráhu s extremálnym účinkom. Taktiež vynásobenie lagrangiánu ľubovoľnou konštantou nemá vplyv na dráhu s extremálnym účinkom ani na ELR.

[6] Takáto konštrukcia lagrangiánu vyplýva zo zachovania energie.

*funkciu, pre ktorú extremálny účinok odpovedá dráhe zvolenej Prírodou.*

Ak predpokladáme $\mathscr{L}(q_j, \dot{q}_j) = K(\dot{q}_j) - V(q_j)$, potom prvý člen v ELR, $\frac{\partial \mathscr{L}(q_j,\dot{q}_j)}{\partial q_j} = -\frac{\partial V(q_j)}{\partial q_j}$, reprezentuje *zovšeobecnenú silu.* Druhý člen v ELR musí preto byť (v súlade s Newtonovou pohybovou rovnicou) časovou zmenou *zovšeobecnenej* - **kánonickej hybnosti**

$$\underline{p_j = \frac{\partial \mathscr{L}(q_j, \dot{q}_j)}{\partial \dot{q}_j}}$$

V tomto špeciálnom prípade $p_j = \frac{\partial K(\dot{q}_j)}{\partial \dot{q}_j}$, vo všeobecnosti sa však kánonická hybnosť od „bežnej“ newtonovskej hybnosti hmotného telesa/častice môže líšiť, ako je uvedené v Dodatku B.

Od *lagrangeovského* formalizmu prejdeme k *hamiltonovskému* definovaním **hamiltoniánu**

$$\underline{H = p_j \dot{q}_j - \mathscr{L}}$$

Porovnaním výrazov pre variáciu hamiltoniánu

$$\delta H = \dot{q}_j \delta p_j + \underbrace{p_j \delta \dot{q}_j - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j}_{0} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_j}\delta q_j \qquad\qquad \delta H = \frac{\partial H}{\partial p_j}\delta p_j + \frac{\partial H}{\partial q_j}\delta q_j$$

dostávame **Hamiltonove rovnice** (HR)

$$\underline{\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}} \qquad\qquad \underline{\frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}}$$

Vo všeobecnosti pre účinok platí

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}(q_j, \dot{q}_j, t)dt = \int_{t_1}^{t_2} [p_j \dot{q}_j - H(p_j, q_j, t)]dt \qquad\qquad q_j = q_j(t),\, p_j = p_j(t)$$

Keďže $\dot{q}_j dt = dq_j$, môžeme uvedený vzťah zapísať ako

$$S(q_j(t)) = \int_{q_j(t_1)}^{q_j(t_2)} p_j dq_j - \int_{t_1}^{t_2} H dt$$

Tento výraz môžeme vnímať ako dráhový integrál medzi bodmi $(q_j(t_1), t_1)$ a $(q_j(t_2), t_2)$ v rovinách $q_j - t$ (pre každý stupeň voľnosti $j$), pre ktorý musí platiť

$$S(q_j(t)) = \int_{q_j(t_1)}^{q_j(t_2)} \frac{\partial S}{\partial q_j} dq_j + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial S}{\partial t} dt$$

Porovnaním podintegrálnych výrazov dostávame

$$\underline{p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}} \qquad\qquad \underline{H = -\frac{\partial S}{\partial t}} \qquad\qquad H = H\left(\frac{\partial S}{\partial q_j}, q_j, t\right)$$

Prvá z rovníc má v kartézskej sústave tvar $\vec{p} = \nabla S$, a znamená pohyb v smere nárastu účinku, kolmo na plochy $S = konšt.$ Druhá z rovníc je **Hamiltonova-Jacobiho rovnica** (HJR), a je alternatívnou formuláciou klasickej mechaniky (popri newtonovskej, lagrangeovskej a hamiltonovskej), ktorá, ako hneď uvidíme, zbližuje časticové a vlnové hľadisko. Navyše, obe pripomínajú predpisy pre kvantovomechanické operátory (v súradnicovej reprezentácii, ak $S \to \frac{\hbar}{i}$)

$$\hat{p}_j = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q_j} \qquad\qquad \hat{H} = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}$$

Pre *ne*relativistickú časticu $H = \frac{p^2}{2m} + V$, a HJR má v kartézskych súradniciach tvar

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V$$

ktorý zas pripomína Schrödingerovu rovnicu (SCHR). Skôr než túto podobnosť preskúmame hlbšie, uvažujme ešte *izolovanú* časticu v *konštantnom* potenciáli, pre ktorú $-\frac{\partial S}{\partial t} = H = E = konšt.$, a teda $S = -Et + f(\vec{r})$. Potom $p = |\nabla S| = |\nabla f(\vec{r})|$, a dosadením nerelativistickej hybnosti dostávame $p = \sqrt{2m(E-V)} = konšt. = |\nabla f(\vec{r})|$. Znamená to, že účinok má tvar

$$S = \vec{p} \cdot \vec{r} - Et$$

ktorý pripomína *fázu vlnovej funkcie* častice v tvare *rovinnej vlny* $\psi(\vec{r}, t) \sim e^{iS/\hbar}$, s vlnovým vektorom $\vec{k} = \vec{p}/\hbar$ a frekvenciou $\omega = E/\hbar$. Klasická časticová mechanika nás teda priviedla k šíreniu vlny!

V geometrickej optike poznáme **Fermatov princíp**, podľa ktorého svetelný *lúč* „volí“ medzi bodmi A a B dráhu odpovedajúcu *minimálnemu* času $T_{min}$. V zmysle uvedenej všeobecnej definície lagrangiánu môžeme optický účinok - veličinu, ktorá sa minimalizuje - a lagrangián konštruovať pomocou **optickej dráhy**[7]

$$\tilde{S} = \int_A^B \tilde{\mathscr{L}} dt = cT = \int_A^B c dt = \int_A^B n(\vec{r}) \dot{r} dt = \int_A^B n(\vec{r}) dl$$

kde $n(\vec{r}) = \frac{c}{\dot{r}}$ je *index lomu* prostredia (pre jednoduchosť predpokladajme izotropné prostredie), a $dl = \dot{r} dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$ je infinitezimálny dráhový úsek. Môžeme však využiť voľnosť v konštrukcii lagrangiánu - pripočítajme k $\tilde{\mathscr{L}}$ konštantu $\alpha$ a vynásobme ho rozmerovou konštantou $\beta$. Lagrangián (so „správnym“ fyzikálnym rozmerom) potom bude

$$\mathscr{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \beta \left( n(\vec{r}) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} + \alpha \right)$$

Odpovedajúca kánonická optická hybnosť má potom zložky

$$p_x = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\beta n(\vec{r}) \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \qquad p_y, p_z \text{ analogicky} \qquad p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = (\beta n)^2$$

čiže $n = \frac{p}{\beta}$. Optický účinok je

$$S = \int_A^B \mathscr{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) dt = \int_A^B (p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} + \beta\alpha)\, dt = \int_A^B (p_x dx + p_y dy + p_z dz + \beta\alpha dt)$$

Odtiaľ dostávame

$$\frac{\partial S}{\partial x} = p_x \qquad p_y, p_z \text{ analogicky} \qquad \Leftrightarrow \qquad \underline{\nabla S = \vec{p}} \qquad (\text{resp. } \underline{|\nabla \tilde{S}| = n(\vec{r})}\ )$$

Táto rovnica[8] hovorí, že svetelný *lúč* sa šíri kolmo na plochy $S = konšt.$, vo formálnej zhode s šírením *častice* v klasickej mechanike. Z definície však platí $\mathscr{L} = p_j \dot{x}_j - H$ (kde sme formálne definovali optický hamiltonián). Porovnaním s predchádzajúcim výrazom pre $S$ dostávame

$$\underline{\frac{\partial S}{\partial t} = -H = \beta\alpha}$$

Oba výsledky (pre lúč svetla) sú formálne *zhodné* s rovnicami hamiltonovsko-jacobiovského formalizmu (pre časticu). Navyše, ak uvážime, že index lomu dáva do súvisu frekvenciu svetla s vlnovým

[7] Takto definované veličiny však nemajú „správny“ fyzikálny rozmer, čo je vyjadrené symbolom $\sim$.

[8] V alternatívnom tvare je táto rovnica známa ako **rovnica eikonálu**.

číslom, $n = \frac{kc}{\omega}$, potom $p = \beta n = \beta \frac{c}{\omega} k$. Z rozmerových dôvodov je zrejmé, že pre konštanty $\beta$ a $\alpha$ musí platiť

$$\beta = \frac{\hbar\omega}{c} \qquad \underline{p = \hbar k} \qquad\qquad \alpha = -c \qquad -\beta\alpha = \underline{\hbar\omega = H}$$

kde $\hbar$ je „*rozmerová konštanta rovnakého rozmeru ako Planckova konštanta*“. Optický účinok nadobudne tvar

$$S = \hbar \int_A^B (\vec{k} \cdot \vec{dr} - \omega dt) = \int_A^B (\vec{p} \cdot \vec{dr} - H dt)$$

a plochy $S$ =*konšt.* fyzikálne odpovedajú *vlnoplochám* (plochám *konštantnej fázy*) rovinnej vlny $\psi \sim e^{iS/\hbar}$ (resp. $e^{i\tilde{S}/\lambdabar}$, $\lambdabar = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{1}{k}$ - vlnová dĺžka).

Predpokladajme teraz *kvantovomechanickú* komplexnú vlnovú funkciu voľnej častice v tvare $\psi = e^{iS/\hbar}$ ($|\psi| = 1$). Dosadením do SCHR dostávame

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2m}\nabla^2 S + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V$$

a v limite $\hbar \to 0$, čo je *klasická limita* kvantovej mechaniky, dostávame HJR pre voľnú časticu.

Klasická aj kvantová (pravdepodobnostná) vlna v tvare $e^{i\tilde{S}/\lambdabar}$, resp. $e^{iS/\hbar}$ predstavujú rovinné vlny (s konštantnou amplitúdou), môžeme im teda priradiť vlnové dĺžky, odpovedajúce zmene fázy o $2\pi$:

$$\frac{\delta\tilde{S}}{\lambdabar} = 2\pi \qquad \delta l = \left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial l}\right)^{-1} \delta\tilde{S} = \frac{1}{n}\lambda = \lambda_n \qquad \text{(vlnová dĺžka v prostredí s } n \geq 1\text{)}$$

$$\frac{\delta S}{\hbar} = 2\pi \qquad \delta l = \left(\frac{\partial S}{\partial l}\right)^{-1} \delta S = \frac{1}{p}h = \lambda_p \qquad \text{(de Broglieova vlnová dĺžka)}$$

Klasická vlna $e^{i\tilde{S}/\lambdabar}$ šíriaca sa priestorom v každom jeho bode interferuje sama so sebou. Jednotlivé pomyselné dráhy sa líšia hodnotou účinku, čiže fázou, a interferenciu konštruktívne „prežijú“ len dráhy, ktorých účinky sa líšia o menej než $\approx \lambda/4$. V *geometrickej limite* $\lambda \to 0$ sa smer *šírenia vlny* redukuje na *dráhu lúča* kolmú na vlnoplochy (v izotropnom prostredí), spĺňajúcu rovnaké pohybové zákony ako klasická *trajektória častice* (HJR). V kvantovej mechanike sa *pomyselná* „častica“ (v zmysle pravdepodobnosti detekcie) šíri priestorom ako *vlna* $e^{iS/\hbar}$, v superpozícii všetkých *pomyselných* a navzájom interferujúcich „dráh“. Interferenciu „prežijú“ len dráhy, ktorých účinky sa líšia o menej než $\approx h/4$, čo však vzhľadom na malosť $p$ môže na mikroskopických škálach znamenať značne veľký „koridor“. V *klasickej limite* $\hbar \to 0$ sa tento „koridor“ redukuje na *trajektóriu častice.*

Konštruktívna interferencia (rovinných vĺn) je kľúčom k pochopeniu princípu extremálneho účinku. Relevantný príspevok k integrálu cez všetky mysliteľné dráhy pochádza len z dráh, ktorých priestorová variácia (vzhľadom na odpovedajúcu vlnovú dĺžku) vedie k zanedbateľnej zmene *fázy.* Keďže fáza týchto rovinných vĺn je daná práve účinkom $S$, podmienka $\delta S = 0$ určuje „reálnu“ trajektóriu častice/lúča.

### I.1.2 Noetherovej teoréma.

Lagrangeovský formalizmus je vhodný aj na opis symetrií. Podmienkou kovariantnosti dynamiky systému je *invariantnosť* účinku, $\delta S = \delta \int \mathscr{L} dt = 0$, čo je zaistené ak $\underline{\delta\mathscr{L} = 0}$.

Pomocou ELR dostávame pre *dráhovú* variáciu lagrangiánu *izolovaného* systému (t.j. takého, v ktorom lagrangián závisí od času *len implicitne* prostredníctvom $q_j(t), \dot{q}_j(t)$, čiže $\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t} = 0$)

$$\delta\mathscr{L} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_j}\delta q_j + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j \underset{ELR}{=} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right) \qquad \text{čiže} \qquad \underline{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right) = \frac{d}{dt}\mathcal{Q} = 0}$$

kde $\mathcal{Q}$ je veličina *zachovávajúca sa v čase* - tzv. **noetherovský náboj**.[9]

Uvažujme *voľnú ne*relativistickú časticu o hmotnosti $m$, potom $\mathscr{L} = m(\dot{\vec{q}})^2/2$. Pri priestorovej *translácii*, $\vec{q} \to \vec{q} + \Delta\vec{q}$, je $\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\Delta q_j = m\dot{q}_j\Delta q_j$. Keďže $\Delta\vec{q}$ je ľubovoľné, noetherovským nábojom je $m\dot{\vec{q}} = \vec{p}$, čiže *hybnosť* častice v smere translácie.

*Ak translácia vo fyzickom priestore je symetriou lagrangiánu (účinku), zachováva sa hybnosť.*

Ak je transformáciou *rotácia* polohového vektoru častice $\vec{q}$, jeho infinitezimálna zmena v rovine kolmej na $\vec{n} \to 0$ je $\vec{n} \times \vec{q}$, a teda $q_j \to q_j + \Delta q_j = q_j + \epsilon_{jkl}n_k q_l$ ($\epsilon_{jkl}$ - Leviho-Civitov symbol). Potom $\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\Delta q_j = p_j\epsilon_{jkl}n_k q_l \to (\vec{q} \times \vec{p}) \cdot \vec{n}$, a noetherovským nábojom je *moment hybnosti* $\vec{q} \times \vec{p} = \vec{L}$.

*Ak rotácia vo fyzickom priestore je symetriou, zachováva sa moment hybnosti.*

Časový vývoj lagrangiánu (predpokladáme opäť *izolovaný* systém, pre ktorý $\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t} = 0$) je

$$\frac{d\mathscr{L}}{dt} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial t} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial t} \overset{ELR}{=} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\right)\frac{\partial q_j}{\partial t} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial t} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right)$$

a odtiaľ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - \mathscr{L}\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{Q} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - \mathscr{L}$$

čo pre *voľnú* časticu vedie na $\mathcal{Q} = p_j\dot{q}_j - \mathscr{L} = H$, čiže správny (relativistický) vzťah pre hamiltonián. Ak do tohto vzťahu dosadíme relativistický výraz $\mathscr{L} = -mc^2/\gamma$ pre *voľnú* časticu, rozvojom do Taylorovho radu pre $\dot{q} \ll c$ dostaneme *ne*relativistický hamiltonián $H = mc^2 + \mathscr{L}$, v ktorom $\mathscr{L}$ obsahuje len kinetickú energiu, a *konštantnú* **pokojovú energiu** častice $mc^2$ môžeme (ale nemusíme) zahrnúť do (inak nulovej) potenciálnej energie ako aditívnu konštantu.

*Ak translácia v čase je symetriou, zachováva sa energia.*

Všetky tieto závery sú dôsledkami **Noetherovej teorémy**:

*Každá spojitá časopriestorová symetria súvisí so zachovávajúcou sa veličinou.*

Pre časovú zmenu $\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial F}{\partial p_j}\dot{p}_j + \frac{\partial F}{\partial t}$ ľubovoľnej funkcie $F(q_j, p_j, t)$, definovanej na **fázovom priestore**, po dosadení z HR dostávame **Hamiltonovu pohybovú (evolučnú) rovnicu**

$$\underline{\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}}$$

kde $\{F, G\} = \sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial G}{\partial q_j}\right)$ sú **Poissonove zátvorky** (PZ), pre ktoré platí

$$\underline{\{F, G\} = -\{G, F\}} \qquad \underline{\{q_j, p_k\} = \delta_{jk}} \qquad \underline{\{q_j, q_k\} = 0} \qquad \underline{\{p_j, p_k\} = 0}$$

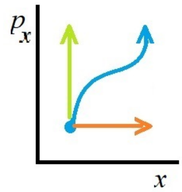
kde posledné tri výrazy sú tzv. **fundamentálne PZ**. Ak funkcia $F$ nezávisí od času *explicitne*, $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ (čiže závisí od času len *implicitne*, prostredníctvom $q_j(t), p_j(t)$), a súčasne $\{F, H\} = 0$ - vtedy hovoríme, že $F$ a $H$ **poissonovsky komutujú**,[10] funkcia $F$ sa *zachováva v čase*.

[9] Pomenovanie podľa Emmy Noetherovej.
[10] Presnejšia formulácia znie „*komutujú v zmysle PZ*“.

Pomocou PZ môžeme HR vyjadriť v tvare

$$\underline{\{q_j, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_j}} \qquad\qquad \underline{\{p_j, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}}$$

Dvojice súradníc fázového priestoru $(q_j, p_j)$ tvoria **kánonicky konjugované** páry.




Ilustrujme tieto závery na príklade fázového priestoru $x - p_x$: Stav hmotného bodu v každom okamihu odpovedá bodu $(x(t), p_x(t))$ vo fázovom priestore. *Časový* vývoj stavu - tzv. **tok** na fázovom priestore - je daný rovnicami

$$\frac{dx}{dt} = \{x, H\} \qquad\qquad \frac{dp_x}{dt} = \{p_x, H\}$$

čo vo všeobecnosti odpovedá *kľukatej* trajektórii na obr. Hovoríme, že

*hamiltonián generuje (prostredníctvom PZ) tok na fázovom priestore.*

Ak $\{p_x, H\} = 0$, potom $\frac{dp_x}{dt} = 0$ - hybnosť sa zachováva v *čase*. Je zrejmé, že časovému vývoju s $p_x = konšt.$ odpovedá *vodorovná* trajektória vo fázovom priestore na obr. - *translácia polohy* $x$. Obdobne, ak $\{x, H\} = 0$, potom $x = konšt.$ (*zvislá* trajektória) - časový vývoj odpovedá *translácii v hybnostnom priestore* $p_x$.

Hamiltonián $H(q_j, p_j)$ je však len jednou (aj keď najvýznamnejšou) z možných funkcií $G(q_j, p_j)$ na fázovom priestore. Uvedenú úvahu môžeme teda zovšeobecniť na tvar

$$\underline{\frac{dq_j}{d\theta} = \{q_j, G\}} \qquad\qquad \underline{\frac{dp_j}{d\theta} = \{p_j, G\}}$$

$$\frac{d}{d\theta} = \sum_j \left( \frac{\partial q_j}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial q_j} + \frac{\partial p_j}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial p_j} \right) \qquad\qquad \frac{\partial q_j}{\partial \theta} = \frac{\partial G}{\partial p_j} \qquad\qquad \frac{\partial p_j}{\partial \theta} = -\frac{\partial G}{\partial q_j}$$

kde $G$ generuje tok na fázovom priestore *vzhľadom na jemu príslušnú* premennú $\theta$, pričom súradnice fázového priestoru sú funkciami tejto premennej, $q_j(\theta), p_j(\theta)$. Ak $G = H$, potom $\theta = t$. Ak $G = p_x$, potom

$$\frac{dx}{d\theta} = \{x, p_x\} = 1 \qquad\qquad \frac{dp_x}{d\theta} = \{p_x, p_x\} = 0 \qquad\qquad \Rightarrow \qquad\qquad \theta = x$$

Znamená to, že $p_x$ generuje tok vzhľadom na $x$, teda

*hybnosť generuje (prostredníctvom PZ) priestorovú transláciu.*

Obdobne, ak $G = x$, potom $\frac{dp_x}{d\theta} = \{p_x, x\} = -1$ a teda $\theta = -p_x$

*priestorová súradnica generuje (prostredníctvom PZ) transláciu v hybnostnom priestore.*

Kánonickým párom *zovšeobecnených* súradníc fázového priestoru $(q_j, p_j)$ je aj $(\varphi_j, L_j)$, čiže pár uhol otočenia-moment hybnosti (kolmý na rovinu otočenia), a platí teda, že

*zložky momentu hybnosti generujú (prostredníctvom PZ) priestorové rotácie okolo príslušných osí.*

Ľubovoľná funkcia na fázovom priestore teda generuje určitú transformáciu. Z hľadiska symetrií má však výsadné postavenie hamiltonián: Napr. pre *zovšeobecnenú* hybnosť *zachovávajúcu sa v čase* platí

$$\underbrace{0}_{} = \frac{dp_j}{dt} = \{p_j, H\} = -\{H, p_j\} = -\underbrace{\frac{\partial H}{\partial q_j}}_{}$$

čo je podmienka *translačnej/rotačnej* (ak $p_j \to L_j$) *invariancie* hamiltoniánu.[11] Platí preto, že ak je priestorová translácia/rotácia *symetriou hamiltoniánu*, veličina, ktorá ju generuje - hybnosť/moment hybnosti - sa *zachováva*. Vo všeobecnosti

*ak je spojitá transformácia symetriou hamiltoniánu, zachováva sa jej generujúca veličina.*

Toto je Noetherovej teoréma v hamiltonovskom formalizme. Ak je transformácia-symetria generovaná samotným hamiltoniánom, $G = H$, dostneme HR.

### I.1.3 Operátory a generátory transformácií.

Podľa predchádzajúcej kapitoly pre ľubovoľnú funkciu $F(q_j, p_j)$, definovanú na fázovom priestore, platí

$$\{F, p_j\} = \frac{\partial F}{\partial q_j} \qquad\qquad \{F, H(q_j, p_j)\} = \frac{dF}{dt}$$

Význam PZ môžeme teda zovšeobecniť vzťahom

$$\{F(q_j, p_j), G(q_j, p_j)\} = \frac{dF}{d\theta}$$

čiže PZ určujú vývoj/tok funkcie $F(q_j, p_j)$ vo fázovom priestore pri transformácii premennej $\theta$, generovanej funkciou $G(q_j, p_j)$. Definíciu PZ môžeme prepísať do tvaru

$$\{F, G\} = \sum_j \left( \frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial G}{\partial q_j} \right) = \underbrace{\sum_j \left( \frac{\partial G}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial q_j} - \frac{\partial G}{\partial q_j}\frac{\partial}{\partial p_j} \right)} F = \mathcal{O}_G F$$

kde

$$\underline{\mathcal{O}_G = \{\cdot\,, G\} = \frac{d}{d\theta}}$$

má význam *operátoru* - **generátoru transformácie** generovanej funkciou $G$, pôsobiaceho[12] na funkciu $F$. Ak $G = p_j$ a teda $\theta = q_j$, resp. $G = q_j$ a teda $\theta = -p_j$, potom

$$\mathcal{O}_{p_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \qquad \text{resp.} \qquad \mathcal{O}_{q_j} = -\frac{\partial}{\partial p_j}$$

čo odpovedá generátorom translácií súradnice resp. hybnosti. Ak $G = H$ a teda $\theta = t$, potom (z HR)

$$\mathcal{O}_H = ... = \dot{q}_j \frac{\partial}{\partial q_j} + \dot{p}_j \frac{\partial}{\partial p_j} = \frac{d}{dt} \qquad\qquad \left( \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \right)$$

Platí teda, že *ľubovoľná funkcia $G$, definovaná na fázovom priestore, vytvára prostredníctvom PZ operátor $\mathcal{O}_G$ odpovedajúci derivácii podľa jej príslušnej premennej $\theta$.*

Definujme všeobecnú *spojitú lineárnu* transformáciu $F(\theta) \to \mathcal{A}_\theta F(\theta) = F(\theta + \delta\theta)$, kde $\mathcal{A}_\theta$ je **operátor transformácie**. Potom

$$\lim_{\delta\theta \to 0} \frac{F(\theta + \delta\theta) - F(\theta)}{\delta\theta} = \lim_{\delta\theta \to 0} \frac{\mathcal{A}_\theta - 1}{\delta\theta} F(\theta) = \frac{dF(\theta)}{d\theta} = \mathcal{O}_G F(\theta)$$

čiže $\mathcal{O}_G$ je *generátorom* transformácie $\mathcal{A}_\theta$. Pre *infinitezimálnu* transformáciu o $\delta\theta \to 0$ platí

$$\underline{\mathcal{A}_\theta \cong 1 + \delta\theta \mathcal{O}_G = 1 + \delta\theta \{\cdot\,, G\}}$$

[11] Rovnosť $\{H, p_j\} = \frac{\partial H}{\partial q_j}$ interpretujeme ako priestorovú transláciu hamiltoniánu generovanú hybnosťou.
[12] Hovoríme, že $G$ pôsobí na $F$ prostredníctvom PZ, čiže operátoru $\{\cdot\,, G\}$.

*Konečná* transformácia o $\Delta\theta$ je $(N\to\infty)$-násobným opakovaním infinitezimálnej transformácie $\delta\theta$,

$$\underline{\underline{\mathcal{A}_\theta(\Delta\theta)}} = [\mathcal{A}_\theta(\delta\theta)]^N = \left[1+\frac{\Delta\theta}{N}\mathcal{O}_G\right]^N \underset{N\to\infty}{\to} \underline{\underline{e^{\Delta\theta\mathcal{O}_G} = e^{\Delta\theta\{\cdot\,,G\}}}} =$$

$$= 1+\Delta\theta\{\cdot\,,G\}+\frac{(\Delta\theta)^2}{2!}\{\{\cdot\,,G\},G\}+\ldots = 1+\Delta\theta\left(\frac{d}{d\theta}\right)_{\Delta\theta\to 0}+\frac{(\Delta\theta)^2}{2!}\left(\frac{d^2}{d\theta^2}\right)_{\Delta\theta\to 0}+\ldots$$

čo je operátor Taylorovho rozvoja transformovanej funkcie $F(\theta+\Delta\theta)=\mathcal{A}_\theta F(\theta)$.

Každej funkcii $G(q_j,p_j)$ definovanej na fázovom priestore môžeme teda priradiť operátor $\mathcal{O}_G$, ktorý je *generátorom* určitej spojitej transformácie (pozdĺž konjugovanej premennej $\theta$).

Stojí za povšimnutie, že ak dve rôzne funkcie $G_1, G_2$ *poissonovsky nekomutujú*, $\{G_1,G_2\}=G_3\neq 0$, potom pre operátor priradený ich PZ platí[13]

$$\mathcal{O}_{G_3}=\mathcal{O}_{\{G_1,G_2\}}=\mathcal{O}_{G_1}\mathcal{O}_{G_2}-\mathcal{O}_{G_2}\mathcal{O}_{G_1}=[\mathcal{O}_{G_1},\mathcal{O}_{G_2}]$$

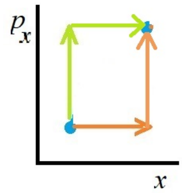
čo je **komutátor** východiskových generátorov.

$$\begin{array}{c} \{G_1,G_2\} = G_3 \\ \Downarrow\quad\Downarrow\qquad\Downarrow \\ [\mathcal{O}_{G_1},\mathcal{O}_{G_2}] = \mathcal{O}_{G_3} \end{array}$$

Ak napr. $G_1=p_x$ a $G_2=x$, potom $\mathcal{O}_{G_1},\mathcal{O}_{G_2}$ sú generátormi posunutí súradnice $x$ a hybnosti $p_x$ vo fázovom priestore, pričom platí

$$\{x,p_x\}=1 \qquad \text{a teda} \qquad \mathcal{O}_{G_3}=\mathcal{O}_1=\ldots=0$$

čiže *posunutia súradnice a odpovedajúcej hybnosti v klasickej fyzike komutujú*! Z vlastností PZ však tiež vo všeobecnosti vyplýva (Dodatok C)




$$\{F,G\}=\frac{1}{\lambda}[F,G]$$

kde $\lambda$ je *konštanta* (číslo) rozmeru *účinku*. Keďže táto rovnica obsahuje *funkcie* (nie operátory), ich komutátor na pravej strane *musí byť nulový*, a to aj v prípade *ne*nulových PZ. Znamená to, že kladieme $\lambda=0$. Uvedený vzťah (hoci triviálny v klasickej mechanike) je východiskom pre prechod ku *kvantovej* mechanike. Veličinu $\lambda$ interpretujeme ako účinok (vplyv) „merania“ (stanovenia hodnoty) $F$ na hodnotu $G$, resp. merania $G$ na hodnotu $F$. V *klasickej* mechanike takýto účinok neuvažujeme, $\lambda\to 0$ (pripúšťame *ideálne* meranie), čo nás oprávňuje reprezentovať dynamické premenné v danom stave prostredníctvom *čísel* - funkcií. (*Kvantová* mechanika takýto prístup *ne*umožňuje, kap. I.2.)

Na základe uvedeného môžeme analyzovať význam dôležitých (*netriviálnych*) PZ. Uvažujme pritom *pasívnu* transformáciu (Dodatok A), pri ktorej generátor $\mathcal{O}_G=\{\cdot,G\}$ *ne*transformuje funkciu $F$ (na ktorú pôsobí), ale *fázový priestor* (pozdĺž odpovedajúcej premennej $\theta$):

$$\{q_j,p_k\}=\{\cdot,p_k\}q_j=\frac{\partial}{\partial q_k}q_j=\delta_{jk} \quad \text{resp.} \quad \{q_j,p_k\}=-\{p_k,q_j\}=-\{\cdot,q_j\}p_k=-\left(-\frac{\partial}{\partial p_j}\right)p_k=\delta_{jk}$$

Táto PZ nám hovorí, ako sa mení určitá zložka polohy/hybnosti, ak posúvame fázový priestor v smere *nejakej* zložky polohy/hybnosti. Kartézske zložky momentu hybnosti $L_k$ generujú prostredníctvom $\mathcal{O}_{L_k}=\{\cdot,L_k\}$ rotáciu roviny $jl$ (fázového priestoru) okolo osi $k$. Platí

$$\{L_j,L_k\}=\{\cdot,L_k\}L_j=\mathcal{O}_{L_k}L_j=\ldots=\epsilon_{jkl}L_l$$

čo môžeme interpretovať ako pootočenie osi rotácie $j$ generátorom $\mathcal{O}_{L_k}$ (okolo osi $k$) do smeru $l$,

$$L_j\to\mathcal{A}_{\delta\theta}L_j\cong(1+\delta\theta\{\cdot,L_k\})\,L_j=L_j+\delta\theta\{L_j,L_k\}=L_j+\delta\theta\,\epsilon_{jkl}L_l$$

[13]Pre PZ totiž platí **Jacobiho identita** $\{f,\{f_1,f_2\}\}=\{\{f,f_1\},f_2\}+\{\{f_2,f\},f_1\}=\{\{f,f_1\},f_2\}-\{\{f,f_2\},f_1\}$.

Keďže $\mathcal{O}_{L_l} = \mathcal{O}_{\{L_j,L_k\}} = [\mathcal{O}_{L_j}, \mathcal{O}_{L_k}] \neq 0$, *rotácie okolo rôznych osí v klasickej fyzike nekomutujú*![14] Platí tiež

$$\{p_j, L_k\} = \{\,\cdot, L_k\}p_j = \epsilon_{jkl}p_l \qquad\qquad \{q_j, L_k\} = \{\,\cdot, L_k\}q_j = \epsilon_{jkl}q_l$$

čo znamená, že pôvodné smery $j$ (potenciálnych) translácii polohy/hybnosti sú pootočené v rovine $jl$ (okrem prípadov translácií *v smere osi otočenia*, $k = j$).

V *klasickej* mechanike veličiny ako energia, poloha, hybnosť či moment hybnosti určujú (pohybový) stav telesa, a priraďujeme im (súčasne) konkrétne hodnoty - čísla, bez ohľadu na to či je daná veličina predmetom merania. V *kvantovej* mechanike však takýto prístup zlyháva - hodnoty týchto veličín sú (často nekomutujúcimi) *produktmi merania*, pričom *každé meranie ovplyvňuje stav* kvantového objektu. *Priradenie konkrétnej hodnoty niektorej z veličín je teda transformáciou stavu*, v kvantovom formalizme vyjadrenou *diferenciálnym operátorom* tejto veličiny, $\hat{G} \sim \frac{\partial}{\partial\theta}$ (v $\theta$-reprezentácii).[15] V limite *klasickej* mechaniky túto transformáciu síce zanedbávame, v jej formalizme je však prítomná práve v podobe generátorov $\mathcal{O}_G$ (PZ) prislúchajúcich jednotlivým veličinám. Kvôli správnemu chápaniu vzťahu klasickej a kvantovej mechaniky je vhodné vnímať tieto klasické „stavové“ veličiny (určujúce klasický pohybový stav) všeobecnejšie ako veličiny *generujúce spojité transformácie* stavu (pozdĺž konjugovaných premenných $\theta$), a to prostredníctvom PZ.[16] Prechod od klasických generátorov $\mathcal{O}_G$ ku kvantovomechanickým operátorom a od PZ ku komutátorom je predmetom nasledujúcej kapitoly.

◇◇◇◇◇

## Dôležité závery:

• Princíp extremálneho účinku je nosným princípom modernej fyziky. Založený je na konštruktívnej interferencii všetkých pomyselných priestorových „trajektórií“ objektov ako rovinných vĺn, ktorých fázy sú určené účinkom.

• Zo znalosti lagrangiánu systému dokážeme pomocou ELR zostaviť pohybovú rovnicu systému. V praxi však práve lagrangián zostavujeme tak, aby jeho ELR viedla k „správnej“ pohybovej rovnici.

• Každá spojitá časopriestorová transformácia-symetria súvisí so zachovávajúcou sa veličinou, ktorá túto transformáciu generuje.

[14]Pootočenia okolo rôznych osí nekomutujú.

[15]Napr. $\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ v $x$-reprezentácii, $\hat{x} = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p_x}$ v $p_x$-reprezentácii, a pod.

[16]V skutočnosti je aj v klasickej mechanike priradenie konkrétnej „ostrej“ hodnoty určitej pohybovej dynamickej premennej *fikciou*: Bežné otázky typu „*Koľko je hodín?*“ či „*Kde sa práve nachádzaš?*“ predpokladajú len *približný* údaj, „rozmazaný“ na intervale relevantnom pre spracovanie takejto informácie - ak by získané údaje vzápätí (okamžite a úplne) stratili platnosť, takéto otázky by nemali zmysel. Kvantovomechanický princíp neurčitosti je teda úplne *prirodzený*, kým klasická „presnosť“ je len priblížením. Najvšeobecnejšia definícia pojmov *hybnosť/moment hybnosti* a *energia* je, že *generujú zmeny „polohy“ objektu v priestore a čase*, a ich „ostré“ hodnoty znamenajú stálosť jeho stavu pri týchto zmenách.

Pojem *energia* je ústredným pojmom fyziky. Moderná fyzika vníma elementárne častice (elektróny, fotóny,...) ako „balíky“ energie príslušného poľa (ako uvidíme v ďalšom texte). Vyvstáva teda otázka, ako fyzikálne definovať pojem energia (ako základnú substanciu hmoty). Tradičná definícia - *schopnosť konať prácu* - vystihuje len určitý aspekt energie. Kontext symetrií ponúka iný pohľad: *Energia = schopnosť existovať (zachovávať sa) v čase.* (Fotón, ktorý stratí svoju energiu, prestane existovať. Vďaka ekvivalencii $E = mc^2$ to platí aj pre častice s nenulovou pokojovou hmotnosťou $m$.) Analogicky, hybnosť/moment hybnosti je schopnosť priestorovej translácie.

• Funkcie definované na fázovom priestore generujú transformácie na tomto priestore prostredníctvom PZ.

• Veličiny, ktorých PZ s hamiltoniánom je nulová, sa zachovávajú v čase (v izolovanej sústave).

• Posunutia súradníc a hybností v klasickej mechanike komutujú, kým rotácie s inými rotáciami či posunutiami vo všeobecnosti nie.

## I.2 Symetrie v kvantovej mechanike.

Podľa predchádzajúceho textu symetrie vzhľadom na *spojité* transformácie sú späté so zachovávajúcimi sa veličinami $G$, ktoré generujú tieto transformácie. V kvantovej mechanike však dynamické premenné nemajú fyzikálny zmysel mimo kontext merania,[17] a nahrádzame ich **hermitovskými operátormi** $\hat{G}$ so spektrami *reálnych* vlastných hodnôt ako množinami *realizovateľných* výsledkov meraní. Stav skúmaného objektu (častice či systému častíc) je reprezentovaný **stavovým vektorom** $|\psi\rangle$ „žijúcim" v abstraktnom *komplexnom* priestore všetkých realizovateľných stavov.[18]

*Každý operátor transformuje stav, na ktorý pôsobí.*

Pre *určité* stavy je však táto transformácia *symetriou* (vzhľadom na generujúcu veličinu, prislúchajúcu operátoru) - takéto stavy sú **vlastnými stavmi** daného operátoru, a *zachovávajúcou sa* veličinou (v zmysle Noetherovej teorémy) je **vlastná hodnota** operátoru príslušná k danému vlastnému stavu,[19]

$$\hat{G}|\psi_n\rangle = G_n|\psi_n\rangle$$

V tejto kapitole preskúmame vzťah stavových vektorov a na nich pôsobiacich operátorov ku časo-priestorovým transformáciám-symetriám.

### I.2.1 Spojité priestorové symetrie.

Rozloženie (normovanej) pravdepodobnosti namerania[20] častíc pozdĺž osi $x$ je

$$\mathcal{P}(x) = |\psi(x)|^2 = |\langle x|\psi\rangle|^2$$

kde $|x\rangle$ a $\langle x| = |x\rangle^*$ sú navzájom komplexne združené stavy s ostrou hodnotou polohy. Nech $\mathcal{U}_x$ je operátor *priestorovej translácie* systému v smere $x$. Ak má byť táto transformácia *symetriou*, nesmie sa rozloženie pravdepodobnosti zmeniť,

$$|\psi\rangle \to |\psi'\rangle = \mathcal{U}_x|\psi\rangle \qquad\qquad \mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x') = \mathcal{P}(x)$$

[17] V štandardnej interpretácii kvantová mechanika poskytuje *len predpovede týkajúce sa možných výsledkov experimenov*, akékoľvek iné otázky ležia za hranicami fyziky. Inými slovami, kvantová mechanika *ne*opisuje aký Vesmír *je*, ale čo sa o ňom môžeme dozvedieť prostredníctvom *našich meraní* (t.j. experimentov *nami* navrhovaných „v našom jazyku").

[18] Stav je jednoznačne charakterizovaný *smerom* stavového vektoru v tomto (Hilbertovom) priestore, *bez ohľadu na veľkosť* vektoru. Hovoríme, že stav je *lúčom* v Hilbertovom priestore. *Každý* stav pritom môžeme vyjadriť ako *superpozíciu* iných stavov. Počet *nezávislých bázových* stavov určuje *dimenzionalitu* tohto priestoru.

[19] Takýto stav je možným výsledkom merania. Bezprostredne opakovanými meraniami sa hodnota veličiny *nemení*, čo však *neznamená nulový* účinok meraní na tento stav - znamená len, že transformácia spôsobená meraním je *symetriou*.

[20] V štandardnej interpretácii meranie polohy častice túto polohu *ne*odhaľuje ale *vytvára*.

Ak $|x\rangle \to \mathcal{U}_x|x\rangle$, potom[21] $\langle x| \to \langle x|\mathcal{U}_x^\dagger$, a teda $\langle x|\psi\rangle = \langle x|\mathcal{U}_x^\dagger \mathcal{U}_x|\psi\rangle \Rightarrow \underline{\mathcal{U}_x^\dagger \mathcal{U}_x = 1 = \mathcal{U}_x^{-1}\mathcal{U}_x}$. Takúto transformáciu nazývame **unitárnou**.

*V kvantovej mechanike symetrie reprezentujeme unitárnymi transformáciami.*

V prípade *spojitej infinitezimálnej* translácie $\delta x \to 0$ musí byť operátor $\mathcal{U}_x$ blízky *jednotkovému*, čiže $\mathcal{U}_x \cong 1+\delta x \hat{G}_x$ , kde $\hat{G}_x$ je *generátor* tejto *spojitej* translácie. Translácia sústavy o konečné $\Delta x$ potom pre stav $|\psi\rangle$ znamená (podobne ako v kap. I.1.3, $\mathcal{O}_G \to \hat{G}$)

$$\underline{|\psi\rangle \to |\psi'\rangle = \mathcal{U}_x|\psi\rangle = e^{\Delta x \hat{G}_x}|\psi\rangle \underset{\Delta x\to 0}{\cong} \left(1+\Delta x \hat{G}_x\right)|\psi\rangle}$$

Pre ľubovoľnú *merateľnú* veličinu[22] reprezentovanú *operátorom* $\hat{F}$ je pri translačnej symetrii *invariantnou* jej *stredná hodnota*

$$\langle\psi|\hat{F}|\psi\rangle = \langle\psi|\Big(\underbrace{\mathcal{U}_x^{-1}\mathcal{U}_x}_{1}\Big)\hat{F}\Big(\underbrace{\mathcal{U}_x^{-1}\mathcal{U}_x}_{1}\Big)|\psi\rangle = \underbrace{\langle\psi|\mathcal{U}_x^{-1}}_{\langle\psi'|}\left(\mathcal{U}_x\hat{F}\,\mathcal{U}_x^{-1}\right)\underbrace{\mathcal{U}_x|\psi\rangle}_{|\psi'\rangle} = \langle\psi'|\hat{F}'|\psi'\rangle$$

Znamená to, že daný operátor sa transformuje ako

$$\hat{F} \to \hat{F}' = \mathcal{U}_x\hat{F}\,\mathcal{U}_x^{-1}$$

Potom pre *infinitezimálne* posunutie dostávame (s ohľadom na *poradie* operátorov a zanedbaním člena $\sim (\delta x)^2$)

$$\hat{F}' = \mathcal{U}_x\hat{F}\,\mathcal{U}_x^{-1} \cong (1+\delta x\hat{G}_x)\hat{F}(1-\delta x\hat{G}_x) = \ldots = \hat{F} - \delta x[\hat{F},\hat{G}_x]$$

*Pasívna* transformácia sústavy v smere $x$ o $\delta x$ znamená pre transformovaný operátor $\hat{F}' = \hat{F}|_{x-\delta x}$, a preto

$$\frac{\partial\hat{F}}{\partial x} \stackrel{!}{=} \left.\frac{\hat{F}-\hat{F}'}{\delta x}\right|_{\delta x\to 0} = [\hat{F},\hat{G}_x]$$

V analógii s klasickou mechanikou, kde priestorová translácia je generovaná hybnosťou, kladieme $\hat{G}_x = \frac{1}{i\hbar}\hat{p}_x$, kde $\hbar$ je *univerzálna rozmerová* (Plancková) konštanta, a imaginárna jednotka $i$ zabezpečuje *hermitovosť* operátoru hybnosti.[23] Potom

$$\underline{\frac{\partial\hat{F}}{\partial x} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{F},\hat{p}_x]} \qquad \left(\text{čo odpovedá klasickému } \frac{\partial F}{\partial x} = \{F,p_x\}\right)$$

Prechod od klasickej ku kvantovej mechanike je prechodom od funkcií k operátorom

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \{F,p_x\} = \frac{1}{\lambda}[F,p_x] \quad \to \quad \frac{\partial\hat{F}}{\partial x} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{F},\hat{p}_x] \qquad \underline{\lambda \to i\hbar}$$

Ak napr. položíme $\hat{F} = \hat{x} = x$ (*súradnicová* reprezentácia, kap. I.2.2), dostávame $\frac{\partial\hat{F}}{\partial x} = \hat{\mathbb{1}}$ (jednotkový operátor). Nenulová PZ teda prejde na $\{x,p_x\} = 1 \to \hat{\mathbb{1}}$, a fundamentálny **kánonický komutačný vzťah** bude $[\hat{x},\hat{p}_x] = i\hbar\hat{\mathbb{1}}$, resp. vo všeobecnom tvare[24]

$$\underline{[\hat{q}_j,\hat{p}_k] = i\hbar\delta_{jk}\hat{\mathbb{1}}}$$

[21] $\mathcal{U}_x^\dagger$ je operátor *hermitovsky združený* ku $\mathcal{U}_x$.

[22] angl. *observable*

[23] Pre generátor $\hat{G}$ unitárnej transformácie platí *hermitovosť*

$$\mathcal{U}_x^\dagger\mathcal{U}_x \cong (1-\delta x\,\hat{G}^\dagger)(1+\delta x\,\hat{G}) \cong 1+\delta x(\hat{G}-\hat{G}^\dagger) \stackrel{!}{=} 1 \;\Rightarrow\; \hat{G} = \hat{G}^\dagger$$

[24] Napriek tomu, že ide o operátorovú rovnosť, jednotkový operátor $\hat{\mathbb{1}}$ na pravej strane obvykle vynechávame.

Priradenie $\lambda \to i\hbar$ (v klasickej mechanike $\lambda \to 0$) znamená, že vplyv merania (určenia hodnoty) dynamickej veličiny na stav objektu už nemôžeme ignorovať, pričom jeho *minimálny* účinok je $\approx \hbar$.

Generátor posunutia $\hat{p}$ teda pôsobí na operátor $\hat{F}$ prostredníctvom *komutátoru* (namiesto PZ v klasickej mechanike), kým na stavový vektor pôsobí *priamo*[25]

$$\underline{\hat{F}' = \mathcal{U}_x \hat{F} \mathcal{U}_x^{-1} = e^{i\Delta x[\,\cdot\,,\hat{p}_x]/\hbar} \hat{F}} \cong (1 + i\Delta x[\,\cdot\,, \hat{p}_x]/\hbar)\hat{F}$$

$$\underline{|\psi'\rangle = \mathcal{U}_x|\psi\rangle = e^{-i\Delta x\,\hat{p}_x/\hbar}|\psi\rangle} \cong (1 - i\Delta x \hat{p}_x/\hbar)\,|\psi\rangle$$

## I.2.2 Princíp neurčitosti.

Kánonický komutačný vzťah z predchádzajúcej kapitoly *nezávisí* od *reprezentácie* - výberu bázy, v ktorej konštruujeme stavové vektory. **Súradnicová reprezentácia** je taká, v ktorej stavové vektory $|\psi\rangle$ sú superpozíciami ortogonálnych vlastných stavov $|q\rangle$ operátoru $\hat{q}$, teda operátoru *určenia súradnice*, s *amplitúdami* (komplexnými číslami) $\psi_q = \langle q|\psi\rangle$. Platí

$$\langle q'|\hat{q}|q\rangle = q\delta(q - q') \qquad \hat{q}|q\rangle = q|q\rangle \qquad \text{čiže} \qquad \underline{\hat{q} = q}$$

Prostredná rovnica (veta o vlastnom stave operátoru a jemu príslušnej vlastnej hodnote) predstavuje transformáciu-*symetriu*. Stav po transformácii operátorom $\hat{q}$ je v tejto reprezentácii identický[26] s pôvodným stavom $|q\rangle$, a v zmysle Noetherovej teorémy sa zachováva veličina generujúca transformáciu, vyjadrená vlastnou hodnotou $q$. Treba však mať na pamäti, že v kvantovom svete *každá interakcia znamená zmenu stavu* - táto transformácia je teda symetriou *len* vzhľadom na premennú $q$, čo sa prejaví práve v *tejto* reprezentácii. Zmena stavu v tomto prípade nastáva v konjugovanej premennej $p$, ako znázorňujú *zvislé* trajektórie (zachovávajúce polohu) na obr. v kap. I.1.2.[27]

V tejto reprezentácii uvažujme operátor *posunutia súradnice* $\partial_q = \frac{\partial}{\partial q}$. Jeho komutačný vzťah s operátorom $\hat{q} = q$ je

$$(\partial_q \hat{q} - \hat{q}\partial_q)\,\psi_q = \partial_q\,(q\psi_q) - q(\partial_q\psi_q) = ... = \psi_q \qquad \text{platí pre každé } \psi_q\text{, čiže} \qquad [\partial_q, \hat{q}] = 1$$

čo je (až na faktor $i\hbar$) zhodné s kánonickým komutačným vzťahom. To nás oprávňuje definovať kánonicky združený operátor (zovšeobecnenej) hybnosti, ktorý *je* generátorom priestorovej translácie, v *súradnicovej* reprezentácii prostredníctvom operátoru posunutia súradnice ako

$$\underline{\hat{p} = -i\hbar\partial_q}$$

[25] *Klasickým* analógom kvantovomechanického *stavu* sú zovšeobecnené *súradnice fázového priestoru* $q_j, p_j$ - jednoznačne určujú stav objektu. Infinitezimálna transformácia *klasického stavu* je teda transformáciou jeho súradníc vo fázovom priestore,

$$\frac{\partial q_k}{\partial q_j} = \mathcal{O}_{p_j} q_k = \{q_k, p_j\} = \delta_{kj} \qquad \frac{\partial p_k}{\partial q_j} = \mathcal{O}_{p_j} p_k = \{p_k, p_j\} = 0$$

$$\frac{\partial q_k}{\partial p_j} = -\mathcal{O}_{q_j} q_k = -\{q_k, q_j\} = 0 \qquad \frac{\partial p_k}{\partial p_j} = -\mathcal{O}_{q_j} p_k = -\{p_k, q_j\} = \delta_{kj}$$

Nenulové PZ znamenajú, že kánonicky združené páry $q_j, p_j$ *nie sú* nezávislé. Znamená to tiež, že vzťah $[\mathcal{O}_{q_j}, \mathcal{O}_{p_j}] = 0$ (kap. I.1.3) je len klasickým priblížením ($\hbar \to 0$) všeobecnejšieho vzťahu $[\hat{q}_k, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{kj}$, čiže transformácie *kvantovomechanického* stavu v súradnici a konjugovanej hybnosti už *ne*komutujú.

Klasickým analógom kvantovomechanického *operátoru* je *funkcia* zovšeobecnených súradníc (a hybností) fázového priestoru. Na rozdiel od stavu, operátory generujúce príslušnú transformáciu pôsobia na iné funkcie/operátory prostredníctvom PZ/komutátorov.

[26] Vynásobenie reálnym číslom nemení stav v Hilbertovom priestore.

[27] Transformácia operátorom $\hat{q}$ odpovedá *meraniu* polohy. Každé meranie polohy vyžaduje „dotyk“ meraného objektu (trebárs len svetlom - fotónmi), a každý dotyk je transférom hybnosti.

Rovnaký vzťah získame aj Taylorovým rozvojom transformovanej vlnovej funkcie (s operátorom $\hat{p}$ v úlohe generátoru infinitezimálneho posunutia, pričom stále uvažujeme *pasívnu* transformáciu)

$$\psi_q \to \psi_{q-\delta q} = \mathcal{U}_q \psi_q = \left(1 - \underbrace{i\delta q\, \hat{p}/\hbar} + ...\right)\psi_q \qquad\qquad \psi_{q-\delta q} = \left(1 - \underbrace{\delta q\, \partial_q} + ...\right)\psi_q$$

Generátorom posunutia v smere $x$ ($q = x$) je $x$-ová zložka hybnosti s operátorom $\underline{\hat{p}_x = -i\hbar\partial_x}$, generátorom rotácie v smere $\varphi$ ($q = \varphi$) okolo danej osi je príslušná zložka momentu hybnosti s operátorom $\underline{\hat{L} = -i\hbar\partial_\varphi}$.

V **hybnostnej reprezentácii** diagonalizujeme operátor *hybnosti*, t.j. stavové vektory konštruujeme ako superpozície ortogonálnych vlastných stavov $|p\rangle$ operátoru $\hat{p}$ s amplitúdami $\psi_p = \langle p|\psi\rangle$. Platí

$$\langle p'|\hat{p}|p\rangle = p\delta(p-p') \qquad\qquad \hat{p}|p\rangle = p|p\rangle \qquad\qquad \underline{\hat{p} = p}$$

Opäť ide o symetriu, tentokrát vzhľadom na „meranie" *hybnosti*. Takého transformácie odpovedajú *vodorovným* trajektóriám (zachovávajúcim hybnosť) na obr. v kap. I.1.2, čiže ide o *priestorovú* symetriu *hybnostných* stavov.

Analogickým spôsobom sa dá ukázať, že v tejto reprezentácii kánonickým komutačným vzťahom vyhovuje operátor kánonicky združenej súradnice ako generátor *posunutia v hybnostnom priestore*, v tvare

$$\underline{\hat{q} = i\hbar\partial_p}$$

V oboch týchto reprezentáciách je nekomutatívnosť kánonicky združených párov súradnica-hybnosť fyzikálne zrejmá: Vždy jeden z operátorov *manipuluje tou istou* dynamickou premennou, ktorú druhý operátor *fixuje* - na poradí týchto úkonov teda *záleží*.

Vzájomný súvis oboch týchto reprezentácií vyjadruje aj amplitúda ich „prekryvu" $\langle q|p\rangle$ (*skalárny* súčin, čiže priemet jedného vektoru do druhého). Platí

$$p|p\rangle = \hat{p}|p\rangle \qquad \Rightarrow \qquad p\langle q|p\rangle = -i\hbar\partial_q\langle q|p\rangle$$

čo je diferenciálna rovnica s riešením $\langle q|p\rangle = Ce^{ipq/\hbar}$ ($C$ je normovacia konštanta). Vlnové funkcie v oboch reprezentáciách sú[28]

$$\psi_q = \langle q|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle q|p'\rangle\langle p'|\psi\rangle dp' = C\int_{-\infty}^{\infty} e^{ip'q/\hbar}\,\psi_{p'}\,dp'$$

$$\psi_p = \langle p|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle p|q'\rangle\langle q'|\psi\rangle dq' = C\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iq'p/\hbar}\,\psi_{q'}\,dq'$$

Vidíme, že vzťahmi medzi týmito kánonicky konjugovanými reprezentáciami sú *Fourierove transformácie.*[29] Potreba *výberu* konkrétnej reprezentácie (pri konfrontovaní s výsledkami meraní) v kvantovej mechanike znamená výber „otázky, ktorú kladieme Prírode", a odzrkadľuje neredukovateľnú úlohu pozorovateľa. Naproti tomu, klasická mechanika úlohu pozorovateľa *ne*uvažuje, merania súradnice a odpovedajúcej hybnosti preto *komutujú*, čo umožňuje *jednotnú reprezentáciu* prostredníctvom *čísel* $q, p$ namiesto operátorov.

Prechod od klasickej ku kvantovej mechanike je teda prechodom od dynamických premenných a ich PZ k ich operátorom a ich komutátorom, s multiplikačným faktorom $i\hbar$. Tejto procedúre hovoríme

[28] Prvé z integrálov znamenajú, že amplitúda „preklopenia" stavu $|\psi\rangle$ do stavu $|q\rangle$ resp. $|p\rangle$ je daná superpozíciou prechodov cez všetky dostupné „medzistavy" $|p'\rangle$ resp. $|q'\rangle$.

[29] Fourierova transformácia dáva do súvisu *priestorovú* ($\Delta r$) a *vlnočtovú* ($\Delta k$) šírku vlnového balíku, čo v kvantovomechanickom kontexte určuje limit pre súčin neurčitostí polohy a hybnosti de Broglieovej vlny-častice. Takýto *vlnovo*-časticový pohľad na princíp neurčitosti je ekvivalentnou alternatívou k nášmu prístupu z pohľadu symetrií, vychádza však z netriviálneho vlnovo-časticového dualizmu. Postup založený na transformáciách-symetriách klasickej aj kvantovej mechaniky žiaden takýto predpoklad nevyžaduje.

**kánonické kvantovanie**. Fundamentálne kánonické komutačné vzťahy úzko súvisia so *symetriami* matematickej štruktúry klasickej aj kvantovej mechaniky. V klasickej hamiltonovskej mechanike poznáme tzv. **kánonické transformácie** súradníc fázového priestoru, $(q_j, p_j) \to (q'_j, p'_j)$, pri ktorých sa zachováva tvar HR (teda PZ). Konjugované páry súradnica-hybnosť s nenulovými PZ sa pri týchto transformáciách *netransformujú nezávislo na sebe.* (čomu odpovedajú *kánonické* komutačné vzťahy medzi ich kvantovomechanickými operátormi).

„Recept“ na kánonické kvantovanie môžeme aplikovať aj na klasické PZ medzi zložkami momentu hybnosti (kap. I.1.3), čo vedie na komutačné vzťahy pre *operátory*[30]

$$\underline{[\hat{L}_j, \hat{L}_k] = i\hbar\epsilon_{jkl}\hat{L}_l}$$

Majme pritom na pamäti, že operátory $\hat{L}_j$ sú generátormi rotácií.

### I.2.3 Časový vývoj.

Nech $\mathcal{U}_t$ je operátor transformácie stavu v čase, $|\psi'\rangle = \mathcal{U}_t|\psi\rangle$, pri ktorej sa nemení norma stavu $\langle\psi|\psi\rangle$. Znamená to opäť, že $\mathcal{U}_t$ je *unitárna*, $\mathcal{U}_t^{-1}\mathcal{U}_t = 1$. Potom[31]

$$\frac{|\psi'\rangle - |\psi\rangle}{\Delta t} = \frac{\mathcal{U}_t - 1}{\Delta t}|\psi\rangle \underset{\Delta t \to 0}{\to} \frac{\partial|\psi\rangle}{\partial t}$$

Pre infinitezimálnu transláciu $\delta t \to 0$ opäť definujeme *unitárny* generátor časového posuvu $\hat{G}$ prostredníctvom vzťahu $\mathcal{U}_t \cong 1 + \delta t\hat{G}$. V analógii s klasickou mechanikou, kde generátorom časového vývoja je hamiltonián, volíme $\hat{G} = \frac{1}{i\hbar}\hat{H}$, a teda

$$\mathcal{U}_t \cong 1 - i\delta t\hat{H}/\hbar \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\hat{H} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}}$$

v čom po aplikovaní na $|\psi\rangle$ spoznáme **Schrödingerovu rovnicu** (SCHR) s časovým vývojom stavu (čiže unitárnou transformáciou v čase)

$$|\psi'\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar}|\psi\rangle = \mathcal{U}_t|\psi\rangle \qquad \text{resp.} \qquad \langle\psi'| = \langle\psi|\mathcal{U}_t^{-1}$$

Pre operátory merateľných veličín však očakávame (vo všeobecnosti) *časový vývoj ich stredných hodnôt*, $\langle\psi|\hat{F}|\psi\rangle$. V tzv. **Schrödingerovom obraze** (kvantovej mechaniky) je tento časový vývoj spôsobený *časovým vývojom stavov*, s *operátormi nezávislými na čase.* Pre strednú hodnotu veličiny $F$ pritom platí

$$\langle\psi|\hat{F}|\psi\rangle \underset{\mathcal{U}_t}{\to} \langle\psi'|\hat{F}|\psi'\rangle = \underbrace{\langle\psi'|\mathcal{U}_t}\overbrace{\mathcal{U}_t^{-1}\hat{F}\mathcal{U}_t}\underbrace{\mathcal{U}_t^{-1}|\psi'\rangle} = \langle\psi|\overbrace{\mathcal{U}_t^{-1}\hat{F}\mathcal{U}_t}|\psi\rangle$$

Takéto presunutie časovej závislosti strednej hodnoty zo *stavu* na *operátor*, $\hat{F}' = \mathcal{U}_t^{-1}\hat{F}\mathcal{U}_t$, sa nazýva **Heisenbergovým obrazom**. Dosadením linearizovaného tvaru $\mathcal{U}_t$ (pre $\delta t \to 0$) dostávame

$$\hat{F}' \cong (1 + i\delta t\hat{H}/\hbar)\hat{F}(1 - i\delta t\hat{H}/\hbar) \cong \hat{F} - \frac{i}{\hbar}\delta t[\hat{F}, \hat{H}]$$

---

[30] Tieto vzťahy dostaneme aj dosadením operátorov polohy a hybnosti (v konkrétnej reprezentácii) do klasického vzťahu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

[31] Tu prirodzene uvažujeme *časový vývoj systému*, čiže *aktívnu* transformáciu.

Hamiltonián opäť generuje *časový* posuv operátoru dynamickej premennej $\hat{F}(\hat{x}_j, \hat{p}_j)$ (nezávisiacej explicitne od času) prostredníctvom *komutátoru*, a tento vývoj je (analogicky ako v kap. I.1.2) daný **Heisenbergovou pohybovou rovnicou**[32]

$$\underline{\frac{d\hat{F}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{F}, \hat{H}\right]} + \cancel{\frac{\partial \hat{F}}{\partial t}}$$

Na druhej strane, ak tento operátor $\hat{F}$ je generátorom unitárnej transformácie $\mathcal{U}_\theta$ (napr. priestorového posuvu), potom

$$\hat{H} \to \mathcal{U}_\theta \hat{H} \mathcal{U}_\theta^{-1}$$

Ak táto transformácia je symetriou hamiltomiánu, čiže $\hat{H} = \mathcal{U}_\theta \hat{H} \mathcal{U}_\theta^{-1}$, potom

$$[\hat{H}, \mathcal{U}_\theta] = 0 \qquad \Rightarrow \qquad [\hat{H}, \hat{F}] = 0$$

Keďže hamiltonián definuje časový vývoj systému, *symetria systému* vzhľadom na danú transformáciu $\mathcal{U}_\theta$ s generátorom $\hat{F}$ je *symetriou hamiltoniánu*, a jej generátor $\hat{F}$ je veličinou *zachovávajúcou sa* v čase (v izolovanom systéme).

Podmienka $\frac{d\hat{F}}{dt} = 0$ však neznamená, že existuje *jediná* zachovávajúca sa vlastná hodnota $F$! V skutočnosti sa zachováva *celé spektrum* vlastných hodnôt operátoru $\hat{F}$ aj s rozdelením ich pravdepodobností, t.j. *neurčitosťou*, a *strednou hodnotou* s časovým vývojom

$$0 = \frac{d\langle\hat{F}\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left\langle\left[\hat{F}, \hat{H}\right]\right\rangle + \cancel{\left\langle\frac{\partial \hat{F}}{\partial t}\right\rangle}$$

Časový vývoj napr. operátoru hybnosti v tomto obraze je

$$\frac{d\hat{p}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{p}, \hat{H}]$$

Opäť (v analógii so závermi kap. I.1.2), ak priestorová translácia je symetriou hamiltoniánu, čiže $[\hat{p}, \hat{H}] = 0$, tak sa zachováva jej generátor $\hat{p}$. Takými sú aj operátory momentu hybnosti[33]

$$[\hat{L}^2, \hat{H}] = 0 \qquad\qquad [\hat{L}_z, \hat{H}] = 0$$

Samotný čas v *ne*relativistickej klasickej ani kvantovej mechanike nie je dynamickou premennou ale *parametrom*, nepriraďujeme mu preto operátor, a netvorí s hamiltoniánom kánonicky konjugovaný pár ani komutátor.[34] Tieto *ne*relativistické teórie nesplňajú základnú podmienku, kladenú na fundamentálne teórie - invariantnosť voči zmene (pohybového stavu) pozorovateľa, a vyžadujú si teda zovšeobecnenie.

### I.2.4 Priestorová a časová inverzia.

Popri vyššie uvedených *spojitých* časopriestorových symetriách, ktorých generátormi sú hermitovské operátory zovšeobecnenej hybnosti a energie, dôležitými z pohľadu fundamentálnych symetrií Prírody sú aj *diskrétne* transformácie - **parita** a **prevrátenie času** (priestorová a časová inverzia)[35]

$$\vec{r} \underset{\mathcal{P}}{\to} \vec{r}\,' = \mathcal{P}\vec{r} = -\vec{r} \qquad\qquad t \underset{\mathcal{T}}{\to} t' = \mathcal{T}t = -t$$

[32]Táto rovnica je základným zákonom kvantovej mechaniky ekvivalentným SCHR. Formálne ide o kánonicky kvantovanú Hamiltonovu evolúčnu rovnicu (pre operátory) z kap. I.1.2.

[33]Ide o veličiny, ktorých PZ s hamiltoniánom sú nulové.

[34]Vzťah neurčitosti *energia-čas* má iné postavenie než vzťahy pre zovšeobecnené *hybnosti-súradnice*.

[35]Na rozdiel od spojitých symetrií, na diskrétne symetrie sa Noetherovej teoréma *nevzťahuje*.

V kvantovej mechanike rozlišujeme pôsobenie operátoru $\mathcal{P}$ na *stavy* a na *operátory* dynamických premenných

$$|\psi\rangle \underset{\mathcal{P}}{\rightarrow} \mathcal{P}|\psi\rangle \qquad \hat{\vec{r}} \underset{\mathcal{P}}{\rightarrow} \mathcal{P}\hat{\vec{r}}\mathcal{P}^{-1} = -\hat{\vec{r}} \qquad \hat{\vec{p}} \underset{\mathcal{P}}{\rightarrow} \mathcal{P}\hat{\vec{p}}\mathcal{P}^{-1} = -\hat{\vec{p}}$$

Fundamentálne komutačné vzťahy $[\hat{x}_j, \hat{p}_j] = i\hbar$ ostanú zachované len ak $\mathcal{P}i\mathcal{P}^{-1} = i$, čo znamená, že operátor $\mathcal{P}$ musí byť *unitárny*. Pre tzv. *axiálne* vektorové operátory orbitálneho a spinového momentu hybnosti platia transformačné vzťahy

$$\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}} \underset{\mathcal{P}}{\rightarrow} \mathcal{P}\hat{\vec{L}}\mathcal{P}^{-1} = \hat{\vec{L}} \qquad \hat{\vec{S}} \underset{\mathcal{P}}{\rightarrow} \hat{\vec{S}}$$

Pre operátor $\mathcal{T}$ však platí

$$\hat{\vec{r}} \underset{\mathcal{T}}{\rightarrow} \mathcal{T}\hat{\vec{r}}\mathcal{T}^{-1} = \hat{\vec{r}} \qquad \hat{\vec{p}} \underset{\mathcal{T}}{\rightarrow} \mathcal{T}\hat{\vec{p}}\mathcal{T}^{-1} = -\hat{\vec{p}}$$

a fundamentálne komutačné vzťahy ostanú zachované len ak $\mathcal{T}i\mathcal{T}^{-1} = -i$, operátor $\mathcal{T}$ musí preto byť *antiunitárny*, čo znamená

$$\mathcal{T}\psi(\vec{r}, t) = \psi^*(\vec{r}, -t) \qquad \langle \mathcal{T}\phi | \mathcal{T}\psi \rangle = \langle \phi | \psi \rangle^*$$

Pre operátory momentov hybnosti platí

$$\hat{\vec{L}} \underset{\mathcal{T}}{\rightarrow} -\hat{\vec{L}} \qquad \hat{\vec{S}} \underset{\mathcal{T}}{\rightarrow} -\hat{\vec{S}}$$

◇ ◇ ◇ ◇ ◇

## Dôležité závery:

• Generátormi transformácií v kvantovej mechanike sú operátory, prislúchajúce dynamickým premenným (napr. generátorom priestorovej translácie je operátor hybnosti). Alebo naopak, operátory dynamických premenných *definujeme*[36] ako generátory príslušných transformácií: *Každý takýto operátor je nástrojom (generátorom) na určitú transformáciu stavov.*

• Operátory/generátory transformácií pôsobia na stavy priamo, na iné operátory prostredníctvom komutátorov.

• Ak je určitá *spojitá* transformácia (generovaná daným diferenciálnym operátorom) *symetriou* stavu, na ktorý pôsobí (t.j. tento stav sa pri transformácii *nezmení*), nazývame tento stav **vlastným stavom** tohto operátora-generátora. Dôsledkom spojitej symetrie je *zachovávajúca sa* veličina (noetherovský náboj) - **vlastná hodnota** operátora príslušná k vlastnému stavu.

• Ak určitá transformácia *nie je* symetriou stavu - stav sa transformáciou *mení*, operátor-generátor tejto transformácie *nemá* vlastnú hodnotu prislúchajúcu *pôvodnému* stavu. V kontexte merania to znamená, že zmeraná hodnota prislúcha *novému* stavu.

• Nenulovým PZ klasických dynamických premenných prislúchajú nenulové komutátory príslušných operátorov.

[36] V klasickej mechanike majú dynamické premenné (ako poloha alebo hybnosť) *dvojjedinú* úlohu: Definujú *stav* systému (bod vo fázovom priestore), a súčasne generujú *transformácie* (prostredníctvom PZ). V kvantovej mechanike stav *nie je bodom* vo fázovom priestore (nemožno mu jednoznačne priradiť polohu a hybnosť - mimo aktu merania tieto pojmy strácajú zmysel). Ostáva teda len možnosť definovať operátory prostredníctvom transformácií, ktoré generujú.

• Fundamentálny kánonický komutačný vzťah (kvantovej *mechaniky*) poloha-hybnosť úzko súvisí s translačnou symetriou: Operátor hybnosti je generátorom posunutia - jeho aplikovaním meníme polohu.

• Vývoj stavu v kvantovej mechanike je určený hamiltoniánom, a symetrie sú opísané unitárnymi operátormi, komutujúcimi s hamiltoniánom. Kvantovomechanické operátory veličín komutujúcich s hamiltoniánom sa zachovávajú v čase (v izolovanej sústave)

• Unitárny operátor parity mení znamienko súradníc aj hybnosti, ale nemení znamienko momentu hybnosti. Antiunitárny operátor prevrátenia času nemení súradnice, ale mení znamienko hybnosti aj momentu hybnosti.

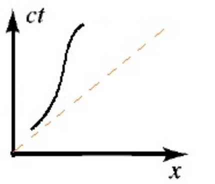
## I.3 Symetrie v teórii polí.

V tejto kapitole prejdeme od *ne*relativistickej klasickej a kvantovej mechaniky k relativistickej teórii *polí*. V nej je čas súradnicou *rovnocennou* s priestorovými, a spolu tvoria jednotný časopriestor, na opis ktorého používame *štvorvektorový* formalizmus.

### I.3.1 Minkowského časopriestor.

Pri rýchlostiach *ne*zanedbateľných voči rýchlosti svetla vo vákuu $c$ relativistické efekty **dilatácie času** a **kontrakcie dĺžky** znamenajú „miešanie" priestoru a času pri prechode medzi *navzájom* sa pohybujúcimi sústavami.[37] *Samostatný* priestor i čas sa stávajú *relatívnymi* (t.j. závislými od pohybového stavu pozorovateľa). Čas teda stráca svoje „výsadné" postavenie, a stáva sa rovnocenným s priestorovými súradnicami v jednotnom **Minkowského časopriestore**.

Trajektórie objektov $\vec{r}(t)$ sa premietajú do kriviek v časopriestore - tzv. **svetočiar** (angl. *world lines*). Strmosť svetočiary (v dvojrozmernom grafe na obr.) je $\frac{d(ct)}{dx} = \frac{c}{v_x}$, čiže zvislý úsek svetočiary odpovedá prípadu $v_x = 0$, kým sklon 45° znamená $v_x = c$, čo je limit pre fyzikálne objekty.




Pre vzdialenosť dvoch bodov A$(\vec{r}_A, t_A)$ a B$(\vec{r}_B, t_B)$ v Minkowského časopriestore platí (na rozdiel od euklidovského priestoru)[38]

$$(\Delta s)^2 = c^2(t_B - t_A)^2 - (x_B - x_A)^2 - (y_B - y_A)^2 - (z_B - z_A)^2$$

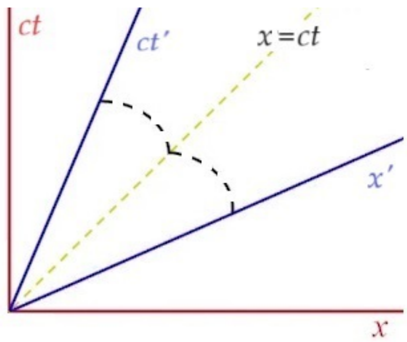
Časopriestorové vzdialenosti bodov, pre ktoré $(c\Delta t)^2 < (\Delta\vec{r})^2$, nazývame **priestoru podobné** (angl. *spacelike*) - medzi **udalosťami** odpovedajúcimi týmto bodom *nemôže byť príčinná súvislosť*. Nemôžeme ani jednoznačne určiť ich časovú následnosť - pre rôznych pozorovateľov môže byť rôzna. Ak sa medzi takýmito udalosťami šíri častica, smer jej šírenia nie je jednoznačný (môže byť emitovaná v A a absorbovaná v B, alebo naopak).[39] Svetočiara *hmotného* objektu musí byť **času podobná** (angl. *timelike*), t.j. $(c\Delta t)^2 > (\Delta\vec{r})^2$, pre nehmotné objekty platí $(c\Delta t)^2 = (\Delta\vec{r})^2$ (**svetlu podobné**, angl. *lightlike*).

[37] Je to dôsledok základných postulátov špeciálnej teórie relativity.
[38] V alternatívnej konvencii sú všetky znamienka na pravej strane opačné.
[39] Hovoríme o *relativite súčasnosti*.

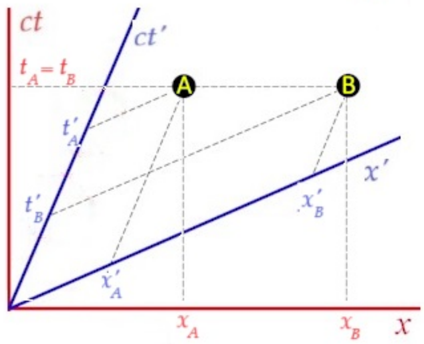
Celá špeciálna teória relativity je postavená na dvoch princípoch/postulátoch - (1) *symetrii zákonov fyziky vzhľadom na transformáciu medzi inerciálnymi sústavami,*[40] a (2) *invariantnosti rýchlosti svetla vo vákuu, $c$, pre všetky takéto sústavy.* Podmienka inerciálnosti vedie na *lineárnosť* transformačných vzťahov, a požiadavka invariantnosti $c$ pre šírenie svetla v sústavách S a S' znamená $dx = cdt$ a $dx' = cdt'$. Tomu odpovedajú transformačné vzťahy časopriestorových súradníc z *laboratórnej* sústavy S do sústavy S' pohybujúcej sa voči S *konštantnou* rýchlosťou $v$ v smere $x$ - tzv. **lorentzovský *boost***[41]

$$x' = \gamma(x - vt) \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(resp. $v \to -v$ pri opačnej transformácii S'→S), a vedú na javy kontrakcie dĺžky a dilatácie času v S' „z pohľadu“ S. Lorentzovský boost je *ne*euklidovskou analógiou *rotácie* súradnicovej sústavy v 3D, tentokrát však v rovine $ct$-$x_j$, $x_j = x, y, z$ (viac v kap. II.4.1). Ekvivalentnosť inerciálnych sústav znamená, že transformované súradnicové osi $x'_j$ a $ct'$ zostávajú v Minkowského časopriestore *ortogonálne* (čo sa nedá zobraziť v euklidovskej geometrii na obr.), rovnako ako osi $x_j$ a $ct$.




Udalosti A a B, ktoré sú súčasné ale *ne*súmiestne v sústave S (červenej na obr.), nie sú súčasnými v sústave S' (modrej), a naopak.




Zároveň však pre časopriestorové vzdialenosti udalostí platí

$$(\Delta s')^2 = (c\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = c^2(t'_B - t'_A)^2 - (x'_B - x'_A)^2 =$$

$$... = c^2(t_B - t_A)^2 - (x_B - x_A)^2 = (\Delta s)^2$$

Znamená to, že

*časopriestorová vzdialenosť dvoch udalostí nezávisí od voľby inercialnej sústavy.*[42]

V sústave (čiarkovanej) spojenej s (relatívne) pohybujúcim sa objektom prirodzene platí $dr' = 0$ a teda $(ds')^2 = (cdt')^2$ pre každý úsek jeho svetočiary. To nám umožňuje stotožniť $t'$ s tzv. **vlastným časom** objektu,[43] $\tau$, ako mierou dĺžky jeho svetočiary,[44] $l'_{AB} = \int_A^B ds'$

$$d\tau = \frac{ds'}{c} = \frac{ds}{c} = \sqrt{(dt)^2 - \left(\frac{d\vec{r}}{c}\right)^2} \qquad l'_{AB} = c\int_A^B d\tau = c\int_A^B \sqrt{1 - \left(\frac{\vec{v}(t)}{c}\right)^2}\,dt = c\int_A^B \frac{dt}{\gamma}$$

($ds$ je infinitezimálny úsek svetočiary *pohybujúceho sa* objektu z pohľadu sústavy S.) Z prvej rovnice vidíme, že $d\tau\ (= dt') < dt$, teda že v *pohybujúcej sa sústave plynie čas pomalšie.*

Vidíme tiež, že čas prejdený medzi udalosťami A a B prirodzene závisí od tvaru svetočiary spájajúcej tieto udalosti, a to aj v prípade $\vec{r}_A = \vec{r}_B$ (čo je rozuzlením tzv. *paradoxu dvojčiat*):

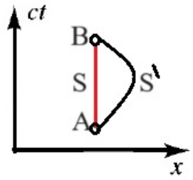
[40] *Inerciálnou* nazývame sústavu, v ktorej platí 1. Newtonov zákon (zákon zotrvačnosti).

[41] Slovenská terminológia používa pre *boost* termín *Lorentzova transformácia*, čo je však všeobecnejší pojem, zahrňujúci aj *priestorové* rotácie. Kvôli absencii samostatného slovenského termínu pre *boost* bude v tomto texte používaný bežný anglický termín.

[42] Vzdialenosťou medzi udalosťami tu rozumieme ich *priamočiaru* časopriestorovú spojnicu. Naproti tomu časopriestorová trajektória objektu medzi týmito udalosťami je vo všeobecnosti *krivočiarou*.

[43] Napr. pre živú hmotu vlastný čas odpovedá biologickému času.

[44] Dĺžka svetočiary objektu medzi bodmi A, B je daná trajektóriou v časopriestore.




Čas medzi *súmiestnymi* udalosťami A a B na obr., uplynuvší v *nehybnej* (laboratórnej) sústave S, je $\Delta t = t_B - t_A$, a odpovedá vlastnému času *tejto* sústavy. Naproti tomu vlastný čas v *pohybujúcej sa* sústave S' je $\Delta t' < \Delta t$ (znamienko - vo výraze pod odmocninou). Vlastné časy sú mierami dĺžok svetočiar, a teda sú prirodzene *rôzne*. Neobyčajné však je, že

*priama spojnica ľubovoľných dvoch udalostí v Minkowského časopriestore je tou najdlhšou.*[45]

Tak ako sa pri euklidovskej rotácii zachováva veľkosť vektorov a ich skalárny súčin, zachováva sa pri rotácii či booste v Minkowského časopriestore veľkosť a skalárny súčin tzv. **štvorvektorov**. Súradnice udalosti v časopriestore definujú jej *polohový* štvorvektor v tzv. **kontravariantnom**, resp. **kovariantnom** zápise[46]

$$x^\mu = (ct, \vec{r}) \qquad \text{resp.} \qquad x_\mu = (ct, -\vec{r}) \qquad \mu = 0, 1, 2, 3$$

Kombinácia oboch tvarov zabezpečuje lorentzovskú invariantnosť veľkosti štvorvektoru definovaním skalárneho súčinu (určujúceho kvadrát jeho veľkosti)[47]

$$x_\mu x^\mu = x^\mu x_\mu = (ct)^2 - \vec{r} \cdot \vec{r}$$

(pričom sumujeme cez opakujúci sa index $\mu$). Vzťah medzi kontra- a kovariantným tvarom štvorvektoru je

$$x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu \qquad x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu \qquad \eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

kde $\eta^{\mu\nu}$ je tzv. **Minkowského metrika**,[48] nahrádzajúca *euklidovskú* metriku, $\delta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, 1, 1, 1)$, meniaca jeden tvar štvorvektoru na druhý.

Pri lorentzovskom *booste* sa vzájomne „miešajú“ aj iné dvojice veličín (skalár + vektor) a vytvárajú štvorvektory so zachovávajúcou sa veľkosťou a rovnakými transformačnými vzťahmi ako polohový štvorvektor. Dôležité štvorvektory získame pomocou derivácie polohového štvorvektoru podľa *vlastného času* $\tau$.

Štvor*rýchlosť* definujeme ako

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} = \gamma(c, \vec{v}) \qquad u^\mu u_\mu = \gamma^2(c^2 - \vec{v} \cdot \vec{v}) = \underline{c^2}$$

Môžeme to interpretovať tak, že

*každý objekt putuje časopriestorom konštantnou rýchlosťou c*,

pričom *relatívna* zmena rýchlosti putovania priestorom je *kompenzovaná* zmenou rýchlosti putovania časom.[49] Okamžitý „smer“ štvorrýchlosti v časopriestorových diagramoch je dotyčnicou k svetočiare objektu.

---

[45]V uvedenej úvahe nejde o relatívnosť pohybu medzi dvomi *inerciálnymi* sústavami. Sústava S' je nevyhnutne *ne*inerciálnou - návrat nie je možný bez jej *zrýchlenia*. Pozorovateľ v tejto sústave teda pociťuje *zotrvačné pseudosily*.

[46]Existuje viacero konvencií v relativistickom štvorvektorovom zápise, čo je potrebné zohľadniť pri porovnávaní rôznych textov. Obvykle sa kontravariantný vektor zapisuje ako stĺpcový a kovariantný ako riadkový.

[47]Kvôli názornosti pripomeňme, že $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, čo nám môže slúžiť ako „motivácia“ pre zápis skalárneho súčinu štvorvektorov ako kombinácie ich kontra- a kovariantného tvaru.

[48]V našej konvencii je kladným časový diagonálny člen, v alterntívnej konvencii $(-1, 1, 1, 1)$ sú kladnými priestorové diagonálne členy.

[49]Pre objekt v kľude plynie čas (pohyb na časovej osi) rýchlosťou $c$, pre objekt pohybujúci sa priestorom (pre pozorovateľa v laboratórnej sústave) rýchlosťou $c$ čas *stojí*. Pre $v \to c$ však $\gamma \to \infty$, čo je nefyzikálne - *ne*existuje inerciálna sústava spojená s nehmotným objektom. To tiež znamená, že svetočiaru objektu s *nulovou* hmotnosťou nemôžeme parametrizovať vlastným časom.

Newtonov pohybový zákon v špeciálnej relativite prejde na tvar[50]

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\vec{a} = \vec{F} \quad \rightarrow \quad m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = ma^\mu = F^\mu \qquad\qquad F^\mu = \gamma(\vec{v}\cdot\vec{F}/c, \vec{F})$$

Kľúčovým štvorvektorom je štvor*hybnosť* (štvorvektor energia-hybnosť)

$$p^\mu = mu^\mu = m\gamma(c,\vec{v}) = (E/c,\vec{p}) \qquad \vec{p} = \gamma m\vec{v} \qquad E = \gamma mc^2 \qquad p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}\cdot\vec{p} = \underline{m^2c^2}$$

Posledná rovnica je relativistický vzťah pre energiu častice o (*invariantnej*) hmotnosti $m$. Vyplýva z neho tiež, že častica s *nulovou* hmotnosťou nesmie byť v pokoji *v žiadnej sústave*: Pre $p = 0$ by totiž platilo $E = 0$, čo v kvantovej fyzike znamená *absenciu* častice.

Obdobným spôsobom definujeme dôležité štvorvektory *frekvencie-vlnočtu* (vlnového vektoru), *nábojovej-prúdovej hustoty*, a *skalárneho-vektorového potenciálu* - *veľkosti* všetkých sú lorentzovskými invariantmi (ako sa patrí na skalárne súčiny v Minkowského metrike)

$$k^\mu = (\omega/c,\vec{k}) \qquad j^\mu = (c\rho,\vec{j}) \qquad A^\mu = (\varphi/c,\vec{A})$$

Kombinácia kontravariantného a kovariantného zápisu je elegantným prostriedkom na zápis lorentzovsky invariantného *skalárneho súčinu rôznych* štvorvektorov

$$a_\mu b^\mu = a_\mu\eta^{\mu\nu}b_\nu = a^\mu\eta_{\mu\nu}b^\nu = a^\mu b_\mu = a_0b_0 - \vec{a}\cdot\vec{b}$$

Potrebujeme ešte definovať štvorvektorovú *deriváciu*

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, -\nabla\right) \qquad\qquad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla\right)$$

*štvorgradient* (skaláru $\phi$), *štvordivergenciu* (štvorvektoru $a^\mu$) a *štvorlaplacián* (= vlnový operátor)

$$\partial^\mu\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial\phi}{c\partial t}, -\nabla\phi\right) \qquad \partial_\mu a^\mu = \frac{\partial a^\mu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial a^0}{c\partial t} + \nabla\cdot\vec{a} \qquad \partial_\mu\partial^\mu = \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \nabla^2$$

*Fáza* rovinnej vlny, *rovnica kontinuity* a *lorenzovská kalibrácia*[51] nadobudnú tvar

$$\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} = \underline{k_\mu x^\mu} \qquad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} = \underline{\partial_\mu j^\mu = 0} \qquad \frac{\partial\varphi}{c^2\partial t} + \nabla\cdot\vec{A} = \underline{\partial_\mu A^\mu = 0}$$

V lorenzovskej kalibrácii nadobúdajú *nehomogénne Maxwellove rovnice* kompaktný štvorvektorový tvar

$$\underline{\partial_\mu\partial^\mu A^\nu = \mu_0 j^\nu}$$

Napokon ešte vyjadrime relativistický účinok *voľnej* častice. Pomocou vlastného času častice môžeme účinok vyjadriť ako

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathscr{L}\gamma d\tau \qquad\qquad (dt = \gamma d\tau)$$

Požiadavka relativistickej invariantnosti účinku znamená invariantnosť výrazu $\mathscr{L}\gamma$, a teda kladieme $\mathscr{L}\gamma = konst$. Voľbou $\mathscr{L}\gamma = -mc^2$ dostávame

$$S = -mc^2\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau = -mc\int_a^b ds \qquad\qquad (\text{v sústave častice } ds = \sqrt{c^2d\tau^2 - 0})$$

čo vedie na správny relativistický hamiltonián

$$H = \vec{p}\cdot\vec{v} - \mathscr{L} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\vec{v}}\cdot\vec{v} - \mathscr{L} = ... = \gamma\vec{v}\cdot\vec{v} + \frac{mc^2}{\gamma} = ... = \gamma mc^2$$

a správne nerelativistické ($v \ll c$) priblíženie $H = mv^2/2$. Minimalizácia účinku znamená (paradoxne, kvôli znamienku -) *maxi*malizáciu *časopriestorového* dráhového integrálu v Minkowského metrike. Môžeme to tiež interpretovať tak, že častica *maximalizuje trvanie vlastného času*.[52] Ako už vieme,

[50]Štvorvektorová rovnica predstavuje štyri rovnice pre jednotlivé zložky. Ľahko však ukážeme, že $F^\mu u_\mu = 0$, a teda len tri z nich sú nezávislé, rovnako ako v newtonovskej mechanike.

[51]Pomenovanie na počesť L.V.Lorenza, nie H.A.Lorentza - autora transformačných vzťahov.

[52]Preto sa princípu najmenšieho účinku hovorí aj *princíp lenivosti Prírody* - Príroda sa očividne nikam neponáhľa.

maximálnemu času odpovedá *priama* svetočiara.

V *ne*relativistickej limite $(cdt)^2 \gg (d\vec{r})^2$ platí $-mc\sqrt{(cdt)^2 - (d\vec{r})^2} \cong \frac{(d\vec{r})^2}{2dt} - mc^2 dt$, čo pre účinok znamená

$$S = -mc \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{(cdt)^2 - (d\vec{r})^2} \cong \int_{t_A}^{t_B} \underbrace{\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 - mc^2 + ...\right]}_{\mathscr{L}} dt$$

Pokojová energia $mc^2$ v *ne*relativistickom lagrangiáne hrá úlohu akejsi potenciálnej energie, a pri hľadaní extermálneho účinku predstavuje len aditívnu konštantu.

Štvorvektorový zápis účinku v Minkowského metrike je

$$S = -mc \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$$

## I.3.2 Lagrangián v teórii polí.

V teórii polí predmetom záujmu nie sú hmotné objekty v priestore, ale priestor samotný - **polia**. Základnou myšlienkou je, že *priestor je tvorený energiou polí*, fluktuujúcou okolo stredných hodnôt, ktoré lokálne môžu byť aj nulové - úplne prázdny priestor však *neexistuje*. O charaktere týchto polí sa dozvieme v ďalších kapitolách. Nateraz predpokladajme, že v každom okamihu v každom bode reálneho priestoru tieto polia nadobúdajú určité hodnoty hladkých funkcií, tvoriacich *konfigurácie* týchto polí v čase. Ako nositeľovi energie a dynamiky môžeme každému poľu $\phi(t, \vec{r})$ priradiť lagrangián $\mathscr{L}(\phi, \dot{\phi})$ ako funkciu jeho *konfigurácie* a jej *časovej* derivácie, v analógii s *dráhou* v konfiguračnom priestore $q$ a jej časovou deriváciou $\dot{q}$ pre systémy v reálnom priestore, teda

$$q(t) \to \phi(t, \vec{r}) \qquad \dot{q}(t) \to \dot{\phi}(t, \vec{r}) \qquad S = \int \mathscr{L}(\phi, \dot{\phi}) dt$$

Keďže pole je priestorovo rozložený objekt, definujeme **objemovú hustotu lagrangiánu** prostredníctvom vzťahu

$$\mathscr{L} = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^3x$$

Účinok potom definujeme ako

$$S = \int \mathscr{L} dt = \underline{\int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^4x} \qquad d^4x = dtd^3x = dV^*$$

pričom časová a priestorové súradnice v poslednom integráli sú už *rovnocenné parametre*, definujúce bod časopriestoru, v ktorom pole nadobúda určitú hodnotu[53]. Hľadanie extremálneho účinku spočíva vo variovaní *konfigurácie* poľa, $\delta\phi(x_\mu)$ a $\delta(\partial_\mu \phi(x_\mu))$, medzi fixnými hraničnými konfiguráciami $\partial\phi(x^\mu)|_\Sigma = 0$, kde $\Sigma$ je hranica obopínajúca danú *časo*priestorovú oblasť $V^*$. Potom[54]

$$0 = \delta S = \int_{V^*} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\delta(\partial_\mu \phi)\right] dV^*$$

Úpravami a uvážením Gaussovej vety pre štvordivergenciu

$$\int_{V^*} \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\delta\phi\right) dV^* = \int_\Sigma \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\delta\phi\right) d\Sigma = 0 \qquad \text{keďže} \qquad \delta\phi|_\Sigma = 0$$

[53] Takáto formulácia je v zhode s teóriou relativity, a teda predstavuje realistickú teóriu.

[54] Opäť nebudeme uvažovať aditívnu konštantu v lagrangiáne (totálnu deriváciu ľubovoľnej funkcie, ktorá v integráli účinku vypadne).

dostávame ELR pre $\mathcal{L}$ v tvare

$$\underline{\frac{\partial \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) = 0}$$

Riešením takejto rovnice (s daným $\mathcal{L}$) dostaneme pohybovú rovnicu určujúcu dynamiku príslušného poľa.[55] V analógií s časticovou mechanikou definujeme **kánonickú hybnosť poľa**

$$\Pi(x^\mu) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\phi}(x^\mu)} = \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}(x^\mu)} \int \mathcal{L}(\phi(y^\mu), \partial_\mu \phi(y^\mu)) d^3 y$$

a jej *objemovú* hustotu

$$\underline{\pi(x^\mu) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x^\mu)}} \qquad \left( \dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \text{ , nie } \frac{\partial \phi}{c \partial t} \text{ !!!} \right)$$

Následne môžeme definovať objemovú hustotu hamiltoniánu poľa

$$\underline{\mathcal{H}(\phi, \pi) = \pi(x^\mu) \dot{\phi}(x^\mu) - \mathcal{L}(x^\mu)}$$

$\phi$ a $\pi$ tvoria kánonicky združený pár, spĺňajúci Hamiltonove rovnice.[56]

### I.3.3 Noetherovej teoréma pre polia.

Predpokladajme *infinitezimálnu* transformáciu poľa $\phi(x^\mu) \to \phi(x^\mu) + \delta\phi$ a odpovedajúcu zmenu lagrangiánu $\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$. Ak má byť takáto transformácia *symetriou*, musí platiť

$$\delta S = \delta \left( \int \mathcal{L} d^4 x \right) \stackrel{!}{=} 0$$

Integrál v zátvorke musí byť teda konštantou, čo je splnené ak $\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \mathcal{K}^\mu$ pre ľubovoľné $\mathcal{K}^\mu$ (viď kap. I.3.2). Keďže

$$(\partial_\mu \mathcal{K}^\mu =) \;\; \delta\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) \underset{ELR}{=} \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right)$$

definujme **hustotu noetherovského štvorprúdu**, spĺňajúcu *rovnicu kontinuity* (zákon zachovania noetherovského náboja), ako

$$\mathcal{J}^\mu \stackrel{!}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi - \mathcal{K}^\mu \qquad\qquad \underline{\underline{\partial_\mu \mathcal{J}^\mu = 0}}$$

ktorej fyzikálny význam v jednotlivých prípadoch osvetlíme v nasledujúcich kapitolách.

---

[55] Nech napr. pre *voľné* pole (bez interakcií) je hustota lagrangiánu $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$, čiže $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$. ELR povedie na *homogénnu* vlnovú rovnicu $\partial_\mu \partial^\mu \phi = 0$.

[56] V časticovej mechanike kánonická hybnosť nie je *vo všeobecnosti* zhodná s *kinematickou* hybnosťou $m\vec{v}$. Napr. pri rotačnom pohybe zovšeobecnenou súradnicou je *uhol*, a zovšeobecnenou (= kánonickou) hybnosťou je *moment hybnosti*. Pre nabitú časticu v elektromagnetickom poli $\vec{A}$ je kánonickou hybnosťou $m\vec{v} - q\vec{A}$, a v kvantovej mechanike práve jej priraďujeme operátor $-i\hbar\nabla$. Ako uvidíme v nasledujúcich kapitolách, zachovanie kinematickej či kánonickej hybnosti odpovedá *odlišným* symetriám polí.

### I.3.4 Translačná symetria polí.

O *spojitej* **translačnej symetrii** poľa $\phi(x^\mu)$ hovoríme vtedy keď sa nemení hustota lagrangiánu pri *infinitezimálnej časopriestorovej translácii* $x^\mu \to x^\mu + \delta x^\mu$. Predpokladajme pre jednoduchosť *reálne skalárne* pole[57] (bez vnútornej štruktúry), ktoré sa v tomto prípade transformuje ako

$$\phi(x^\mu) \to \phi(x^\mu) + \delta\phi \cong \phi(x^\mu) + \partial_\mu\phi(x^\mu)\delta x^\mu$$

Odpovedajúca transformácia lagrangiánu je

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \delta\mathcal{L} \cong \mathcal{L} + \partial_\mu\mathcal{L}\delta x^\mu$$

Podľa kap. I.3.3 z podmienky symetrie tejto transformácie vyplýva $\delta\mathcal{L} = \partial_\mu\mathcal{K}^\mu$ a teda $\mathcal{K}^\mu = \mathcal{L}\delta x^\mu$, a pre hustoty noetherovských štvorprúdov, odpovedajúce 4 ortogonálnym smerom časopriestorových translácií, $\mu = 0, 1, 2, 3$, platí

$$\partial_\nu\mathcal{J}^\nu_\mu = \partial_\nu\left[\left(\underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\partial_\mu\phi - \mathcal{L}\delta^\nu_\mu}\right)\delta x^\mu\right] = \partial_\nu[T^\nu_\mu\delta x^\mu] = 0 \;\Rightarrow\; \underline{\partial_\nu T^\nu_\mu = 0}$$

($\delta^\nu_\mu = \eta_{\mu\rho}\eta^{\rho\nu} = \eta^\nu_\mu$ - Kroneckerov symbol v tenzorovom/maticovom zápise), kde $T^\nu_\mu$ je štvortenzor **napätia-energie-hybnosti**. Každému smeru translácie $\mu$ odpovedá rovnica kontinuity

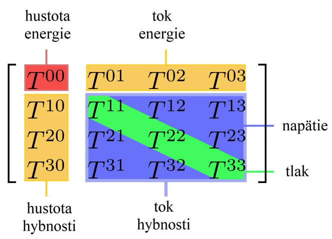
$$\partial_\nu T^\nu_\mu = \partial_0 T^0_\mu + \partial_j T^j_\mu = \frac{\partial T^0_\mu}{c\partial t} + \nabla\cdot\vec{T}_\mu = 0$$

čiže **zákon zachovania noetherovského náboja** s *objemovou* hustotou $T^0_\mu$, pričom $\vec{T}_\mu = (T^1_\mu, T^2_\mu, T^3_\mu)$ je *plošná* hustota jeho toku - **noetherovského prúdu**. Noetherovským nábojom pre $\mu = 0$ je *energia*

$$\int T^0_0 d^3x = \int\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)}\partial_0\phi - \mathcal{L}\delta^0_0\right)d^3x = \int\left(\pi\dot{\phi} - \mathcal{L}\right)d^3x = \int\mathcal{H}d^3x = E$$

Podobne, pre $\mu = j = 1, 2, 3$ je noetherovským nábojom *kinematická hybnosť*

$$\int T^0_j d^3x = \int\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)}\partial_j\phi - \mathcal{L}\cancel{\delta^0_j}\right)d^3x = cp_j$$




(platí $\partial_j\phi = \dot{\phi}/\dot{x}_j$). *Symetrický* tvar štvortenzoru je $T^{\nu\rho} = T^{\rho\nu} = \eta^{\rho\mu}T^\nu_\mu$. Jeho 0-tý stĺpec predstavuje *hustotu* štvorvektoru hybnosti-energie, a ostatné stĺpce *toky* tohto štvorvektoru v jednotlivých smeroch. Smer zložky štvorhybnosti a jej toku sú vo všeobecnosti *rôzne*. $T^{jk}$ pre $j, k = 1, 2, 3$ sú zložkami **tenzoru napätia**. Nulové divergencie riadkov štvortenzoru tvoria štvoricu zákonov zachovania pre jednotlivé zložky štvorhybnosti (Dodatok D).

### I.3.5 Rotačná symetria polí.

**Rotačná symetria** poľa znamená invariantnosť jeho lagrangiánu voči (časo)priestorovým rotáciám.[58] Uvažujme opäť pre jednoduchosť *skalárne* pole. Pre rotáciu priestorových súradníc platí

[57] Význam tohto obmedzenia ozrejmíme v kap. II.4.3 a II.4.4.

[58] Lorentzovský *boost* - transformáciu sústavy o *konštantnú* rýchlosť - môžeme vnímať tiež ako rotáciu v časopriestore.

$\delta x^\mu = \omega^\mu_\nu x^\nu$, kde $\omega_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho}\omega^\rho_\nu$ je *antisymetrická* matica *infinitezimálnych* rotácií.[59] Podmienka symetrie je[60]

$$0 = \partial_\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} \partial_\mu \phi - \mathcal{L}\delta^\nu_\mu \right) \omega^\mu_\rho x^\rho = \partial_\nu T^\nu_\mu \omega^\mu_\rho x^\rho = ... = \frac{1}{2}\partial_\nu \underbrace{\left(x^\rho T^{\mu\nu} - x^\mu T^{\rho\nu}\right)} \omega_{\rho\mu} = \frac{1}{2}\partial_\nu \underbrace{(\mathcal{J}^\nu)^{\rho\mu}} \omega_{\rho\mu}$$

Znamená to, že pre každé nenulové[61] $\omega_{\rho\mu}$ existuje noetherovský štvorprúd $\mathcal{J}^\nu$, spĺňajúci rovnicu kontinuity, čiže zachovávajúci sa noetherovský náboj ($\nu = 0$)

$$\underline{\partial_\nu (\mathcal{J}^\nu)^{\rho\mu} = 0} \qquad \mathcal{Q}^{\rho\mu} = \int (\mathcal{J}^0)^{\rho\mu} d^3x = \int \left(x^\rho T^{\mu 0} - x^\mu T^{\rho 0}\right) d^3x$$

Pre *priestorové* rotácie ($\nu \to j = 1, 2, 3$) sa v tomto prípade zachovávajú veličiny

$$L_j = \frac{1}{2}\epsilon_{jkl}\mathcal{Q}^{kl} = \frac{1}{2}\epsilon_{jkl} \int \left(x^k T^{l0} - x^l T^{k0}\right) d^3x = \frac{1}{2}\epsilon_{jkl} \int \pi \left( \underbrace{x_k \partial_l - x_l \partial_k} \right) \phi \, d^3x$$

Prechodom ku kvantovému formalizmu v tomto výraze spoznáme zložky (operátoru) *orbitálneho* momentu hybnosti. *Zachovávajúcou sa* veličinou pri priestorových rotáciách je teda *moment hybnosti poľa.*

### I.3.6 Vnútorné symetrie polí.

O **vnútornej symetrii** hovoríme v prípade invariancie voči *vnútorným transformáciám polí*, $\phi(x^\mu) \to \phi(x^\mu) + \delta\phi$, *ne*vzťahujúcim sa na časopriestorové transformácie ($\delta\phi \neq \partial_\mu \phi \delta x^\mu$). Kým časopriestorová symetria vedie na $\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \mathcal{K}^\mu$, kde $\mathcal{K}^\mu = \mathcal{L}\delta x^\mu$ (kap. I.3.4), pri absencii takejto transformácie, $\delta x^\mu = 0$ a teda $\mathcal{K}^\mu = 0$, je podmienkou symetrie priamo (kap. I.3.3)

$$0 = \delta\mathcal{L} = \partial_\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} \delta\phi \right) = \partial_\nu \mathcal{J}^\nu \qquad \mathcal{J}^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} \delta\phi$$

Veličinou zachovávajúcou sa v čase (noetherovským nábojom) je $\mathcal{Q} \sim \int \mathcal{J}^0 d^3x$.

$$\mathcal{Q} = \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} d^3x = \int \pi d^3x = \Pi$$

čo je práve *kánonická hybnosť poľa* s objemovou hustotou $\pi$ (konjugovanou s $\phi$, kap. I.3.2). Táto veličina *nie je* totožná s hustotou hybnosti poľa, $T^j_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} \partial_j \phi$, zachovávajúcou sa pri *priestorovej* translácii!

V prípade *komplexného* poľa[62] je dôležitou vnútornou transformáciou *fázový posuv* (rotácia v komplexnej rovine), $\phi \to \phi' = e^{-i\epsilon}\phi$, a teda $\phi^* \to e^{i\epsilon}\phi^*$. V prípade spojitej *infinitezimálnej* zmeny môžeme použiť priblíženie $\delta\phi = \phi' - \phi \cong -i\epsilon\phi$, $\delta\phi^* \cong i\epsilon\phi^*$. Keďže v tomto prípade $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, \phi^*, \partial_\mu \phi^*)$, štandardným postupom dostaneme rovnicu kontinuity a noetherovský náboj

$$\underline{\partial_\mu \mathcal{J}^\mu = \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \phi^* - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \phi \right) i\epsilon = 0} \qquad \underline{\mathcal{Q} = \int \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^*} \phi^* - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \phi \right) d^3x}$$

Tento výsledok budeme neskôr interpretovať ako *zákon zachovania počtu častíc*, resp. ich pravdepodobnosti.

[59] Bližšie sa s ňou zoznámime pri lorentzovských transformáciách v kap. II.4.2.

[60] Pri úprave sme do výrazu vložili $\eta^{\mu\rho}\eta_{\mu\rho} = 1$ a následne využili antisymetrickosť $\omega_{\rho\mu}$ ($\omega^\mu_\rho$ antisymetrická nie je!).

[61] $\omega_{\rho\mu} = -\omega_{\mu\rho}$, a teda $\omega_{\mu\mu} = 0$, čiže existuje 6 nenulových zložiek $\omega_{\rho\mu}$ - 3 pre rotácie a 3 pre boosty.

[62] Komplexným je napr. tzv. Schrödingerovo pole (kap. I.3.8), reprezentované komplexnou vlnovou funkciou.

Napokon uvážme časopriestorovú transformáciu, ktorá spôsobí aj vnútornú transformáciu poľa, $\phi(x^\mu) \to \phi'(x'^\mu) = \phi(x^\mu) + \delta\phi$. Zmena poľa sa dá vyjadriť (rozšírením o 0) ako

$$\delta\phi = [\phi'(x'^\mu) - \overbrace{\phi(x'^\mu)] + [\phi(x'^\mu)}\, - \phi(x^\mu)] \cong \delta_\phi \phi + \partial_\mu \phi \, \delta x^\mu$$

Ak je takáto transformácia symetriou, rovnica kontinuity nadobúda tvar

$$\underline{\underline{\partial_\nu \overbrace{\left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} \partial_\mu \phi - \mathcal{L} \delta^\nu_\mu \right) \delta x^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} \delta\phi \right]}^{\mathcal{J}^\nu} = 0}}$$

## I.3.7 Kvantovanie polí.

V predchádzajúcich kapitolách sme predstavili koncepciu *poľa* ako nositeľa energie, hybnosti aj momentu hybnosti, teda vlastností, ktoré obvykle priraďujeme hmotným objektom či časticiam.[63] V kvantovej mechanike časticu reprezentujeme **vlnovou funkciou** $\psi(\vec{r}, t)$, ktorú interpretujeme ako *amplitúdu pravdepodobnosti namerania častice* v danom mieste a čase. Takto definovaná veličina v skutočnosti tiež predstavuje *komplexné skalárne pole* (pravdepodobnosti). Zásadný problém však spočíva v tom, že SCHR ako pohybová rovnica pre vlnovú funkciu *nie je* lorentzovsky kovariantná. Kým priestorovým súradniciam sú priradené operátory, $\hat{x}_j$, čas vystupuje v tejto rovnici ako „klasický" *parameter*. SCHR teda *nespĺňa* relativistickú požiadavku na adekvátny opis fyzikálneho sveta.[64]

Relativistickým východiskom je zrieknutie sa *operátora* polohy (častice) v prospech polohy ako *parametra* rovnocenného s časom. Tým však strácajú zmysel fundamentálne kánonické komutačné vzťahy štandardnej kvantovej mechaniky, $[\hat{x}_j, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{jk}$, v pôvodnej interpretácii, keď operátory $\hat{x}_j, \hat{p}_j$ pôsobiace na časticu $\psi$ jej „priraďujú" polohu a hybnosť, teda *atribúty*, bez ktorých pojem *častica* stráca svoj tradičný zmysel. Namiesto toho sa samotná vlnová funkcia stáva **operátorom časticového poľa** parametrizovaným časopriestorovými súradnicami, $\hat{\psi}(x^\mu)$, pôsobiacim na *základný stav* tohto poľa - **vákuum**, a generujúcim/anihilujúcim jeho *excitáciu* („časticu"). Tento mechanizmus sa nazýva **druhé kvantovanie**, resp. **kánonické kvantovanie polí**.

V analógii s kánonickými pármi operátorov (v súradnicovej reprezentácii) $\hat{q}_j = q_j$ , $\hat{p}_j = -i\hbar\partial_{q_j}$ (kap. I.2.2) definujeme k operátoru poľa aj **operátor hustoty kánonickej hybnosti poľa**

$$\underline{\hat{\psi}(x^\mu) = \psi(x^\mu)} \qquad\qquad \underline{\hat{\pi}(x^\mu) = -i\hbar\partial_\psi}$$

generujúci infinitezimálnu *vnútornú* transformáciu poľa (symetriu, kap. I.3.6) - posuv hodnoty poľa

$$\psi \to \psi' = e^{i\epsilon\hat{\pi}/\hbar}\psi \cong (1 + i\epsilon\hat{\pi}/\hbar)\psi = (1 + \epsilon\partial_\psi)\psi = \psi + \epsilon \qquad\qquad (\epsilon \to 0)$$

Pre komutátor $\frac{i}{\hbar}[\hat{\psi}(t, \vec{r}), \hat{\pi}(t, \vec{r}\,')]$ platí

$$\left[\psi(t, \vec{r}), \frac{\partial}{\partial\psi(t, \vec{r}\,')}\right]|\psi\rangle = ... = \cancel{\psi(t, \vec{r}) \frac{\partial\,|\psi\rangle}{\partial\psi(t, \vec{r}\,')}} - \left( \frac{\partial\psi(t, \vec{r})}{\partial\psi(t, \vec{r}\,')}|\psi\rangle + \cancel{\psi(t, \vec{r}) \frac{\partial\,|\psi\rangle}{\partial\psi(t, \vec{r}\,')}} \right) = -\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')|\psi\rangle$$

kde $\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$ je 3-rozmerná $\delta$-funkcia. Fundamentálnymi komutačnými vzťahmi sú teda[65]

$$\underline{\underline{[\hat{\psi}(t, \vec{r}), \hat{\pi}(t, \vec{r}\,')] = i\hbar\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')}} \qquad \underline{\underline{[\hat{\psi}(t, \vec{r}), \hat{\psi}(t, \vec{r}\,')] = 0}} \qquad \underline{\underline{[\hat{\pi}(t, \vec{r}), \hat{\pi}(t, \vec{r}\,')] = 0}}$$

[63] S touto koncepciou sme sa už stretli v elektromagnetizme, kde sme poľu priradili energiu, hybnosť aj moment hybnosti, a spoznali sme zákony ich zachovania.

[64] „Učebnicová" nerelativistická kvantová mechanika pripúšťa nenulovú pravdepodobnosť nájdenia častice, pripravenej v danom mieste a čase, ľubovoľne ďaleko po ľubovoľne krátkom čase, čo je v rozpore s teóriou relativity.

[65] Uvedené vzťahy platia pre *skalárne bozónové* polia. Pre iné druhy polí musíme tieto vzťahy modifikovať.

Interpretujeme ich tak, že nemožno presne určiť *v danom bode v tom istom okamihu* amplitúdu poľa aj rýchlosť jeho zmeny. Pokiaľ však uvažujeme operátory *v rôznych miestach a časoch*, teda $x^\mu = (t, \vec{r})$ a $x'^\mu = (t', \vec{r}')$, všetky uvedené komutátory sú nulové.

### I.3.8 Schrödingerovo pole.

Na demonštráciu vyššie uvedených záverov použijeme tzv. **Schrödingerovo pole** - *nerelativistické komplexné skalárne* pole s hustotou lagrangiánu[66]

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2}\left(\psi^*\partial_t\psi - \psi\partial_t\psi^*\right) - \frac{\hbar^2}{2m}\partial_j\psi^*\partial_j\psi$$

Polia $\psi$ a $\psi^*$ môžeme vnímať ako dva nezávislé stupne voľnosti. Dosadením $\mathcal{L}$ do ELR pre $\psi$ aj $\psi^*$ dostaneme dve komplexne združené SCHR pre *voľnú* bezspinovú (t.j. *skalárnu*) časticu[67] o hmotnosti $m$,

$$i\hbar\partial_t\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_j^2\psi \qquad\qquad -i\hbar\partial_t\psi^* = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_j^2\psi^*$$

s riešeniami (fourierovsky) rozložiteľnými do rovinných vĺn

$$\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int a(\vec{k})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}d^3k \qquad \psi^*(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int a^*(\vec{k})e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}d^3k \qquad \omega_k = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

pričom hustoty konjugovaných hybností a hamiltoniánu sú

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi)} = \frac{i\hbar}{2}\psi^* \qquad \pi^* = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi^*)} = -\frac{i\hbar}{2}\psi \qquad \mathcal{H} = \pi\partial_t\psi + \pi^*\partial_t\psi^* - \mathcal{L}$$

a teda hamiltonián je[68]

$$H = \int \mathcal{H}d^3r = ... = \frac{\hbar}{(2\pi)^3}\int \omega_k a^*(\vec{k})a(\vec{k})d^3k$$

*Vnútornou* symetriou Schrödingerovho poľa je transformácia

$$\psi(\vec{r},t) \to e^{i\theta}\psi(\vec{r},t) \qquad\qquad \psi^*(\vec{r},t) \to e^{-i\theta}\psi^*(\vec{r},t)$$

opísaná v kap. I.3.6, s hustotou noetherovského náboja a prúdu

$$\rho(\vec{r},t) = \psi^*(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t) \qquad\qquad \vec{j}(\vec{r},t) = \frac{-i\hbar}{2m}\left[\psi^*(\vec{r},t)\nabla\psi(\vec{r},t) - \psi(\vec{r},t)\nabla\psi^*(\vec{r},t)\right]$$

a zachovávajúcim sa noetherovským nábojom (časticou, resp. počtom častíc)

$$N = \int \psi^*(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)d^3r = \frac{1}{(2\pi)^3}\int a^*(\vec{k})a(\vec{k})d^3k$$

*Translačnej* symetrii zas odpovedá zachovávajúca sa hybnosť (nie kánonická!)

$$\vec{p} = \frac{\hbar}{(2\pi)^3}\int \vec{k}a^*(\vec{k})a(\vec{k})d^3k$$

[66] Tento výraz odvodíme v kap. III.1.7.

[67] V základnych kurzoch kvantovej mechaniky sa SCHR obvykle spája predovšetkým s elektrónom - časticou s *nenulovým spinom*. Samotná SCHR (bez modifikácií) však spinové stupne voľnosti ignoruje. Pre *voľnú* časticu je aj elektrický náboj irelevantný.

[68] Pri integrivaní využívame ortogonálnosť rovinných vĺn, $\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}d^3r = (2\pi)^3\delta(\vec{k})$.

Prechod k *operátorom* polí, $\hat{\psi}, \hat{\psi}^\dagger$ znamená kvantovanie fourierovských koeficientov do podoby hermitovsky združenej dvojice operátorov $\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger$ anihilujúcich/kreujúcich energetické kvantá - „častice“ v stavoch s ostrou hodnotou hybnosti $\hbar\vec{k}$ a s energiou $\hbar\omega$.[69] Komutačné vzťahy majú tvar[70]

$$[\hat{\psi}(\vec{r},t), \hat{\psi}(\vec{r}\,',t)] = [\hat{\psi}^\dagger(\vec{r},t), \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}\,',t)] = 0 \qquad [\hat{\psi}(\vec{r},t), \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}\,',t)] = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

a pre operátory[71] $\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k})$

$$\underline{[\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}(\vec{k}')] = [\hat{a}^\dagger(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')] = 0} \qquad \underline{[\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')] = (2\pi)^3\delta(\vec{k}-\vec{k}')}$$

Operátory $\hat{a}^\dagger(\vec{k}), \hat{a}(\vec{k})$ *kreujú/anihilujú* energetické kvantá v stavoch s ostrou hodnotou $\vec{k}$ (rovinné vlny). Operátory

$$\hat{N} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \hat{\mathcal{N}}(\vec{k})d^3k \qquad \hat{\mathcal{N}}(\vec{k}) = \hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}) \qquad [\hat{\mathcal{N}}(\vec{k}), \hat{\mathcal{N}}(\vec{k}')] = 0$$

identifikujeme ako operátor *počtu častíc* a operátor *spektrálnej hustoty častíc* v takýchto *priestorovo úplne delokalizovaných* „časticových“ stavoch. Zdôraznime, že pojem *častica* vystupuje vo význame *energetického kvanta poľa*, a predstava jeho *ostrej priestorovej lokalizácie* nemá oporu vo fyzike![72] Takéto kvantá energie sa *šíria* daným poľom aj vymieňajú medzi *rôznymi* druhmi polí (čo vnímame ako rozpad jedného druhu častíc na iný druh).

Kvantovanie Schrödingerovho poľa je elegantným formalizmom opisu (bezspinových) *mnoho*časticových stavov.

◇◇◇◇◇

## Dôležité závery:

• Priestorová (translačná a rotačná) invariancia súvisí so zachovávajúcou sa hybnosťou a momentom hybnosti poľa. Časová invariancia súvisí so zachovaním energie poľa.

• Vnútorná symetria vzhľadom na posunutie hodnoty poľa súvisí so zachovaním *kánonickej* hybnosti poľa.

---

[69]Tieto operátory poznáme z riešenia kvantovej *parabolickej* jamy (harmonického oscilátoru) s hamiltoniánom

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2} = ... = \underline{\frac{\hbar\omega}{2}(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger)}$$

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\,\hat{p} \qquad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} - i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\,\hat{p} \qquad \hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(\hat{a}+\hat{a}^\dagger) \qquad \hat{p} = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\,(\hat{a}-\hat{a}^\dagger)$$

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\hbar\omega}\left(\hat{H} + \frac{1}{2}\hbar\omega\right) \qquad \hat{a}^\dagger\hat{a} = \frac{1}{\hbar\omega}\left(\hat{H} - \frac{1}{2}\hbar\omega\right)$$

Z komutačných vzťahov pre tieto operátory $\underline{[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1}$, $[\hat{H}, \hat{a}] = -\hbar\omega\hat{a}$, $[\hat{H}, \hat{a}^\dagger] = \hbar\omega\hat{a}^\dagger$ vyplýva okrem známeho vzťahu $\underline{\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})}$ aj ich funkcia operátorov *znižovania/zvyšovania* energie stavu o $\hbar\omega$, teda **anihilovania/kreovania** *energetického kvanta*. Každý mód s ostrou hodnotou $\vec{k}$ tak odpovedá kvantovému harmonickému oscilátoru.

[70]Pre *fermiónové* polia budeme musieť zohľadniť *Pauliho vylučovací princíp*.

[71]Výpočet $a(\vec{k})$ z $\psi(\vec{r},t)$ je štandardným výpočtom fourierovských koeficientov.

[72]Tento záver je rozlúčkou s naivnou predstavou častice ako miniatúrnej guľôčky potulujúcej sa priestorom v „opare“ neurčitosti. Jej lokalizácia *makroskopickým* meracím prístrojom (priestorovým detektorom, hmlovou komorou,...) je len dôsledkom nedeliteľnosti kvanta energie pri interakcii s *makro*svetom - lokalizovanou energetickou odozvou meracieho systému (makroskopické *priestorové rozloženie* by znamenalo deliteľnosť energie kvanta).

• Vnútorná symetria vzhľadom na zmenu fázy komplexného nabitého Schrödingerovho poľa súvisí so zachovaním častice/náboja.

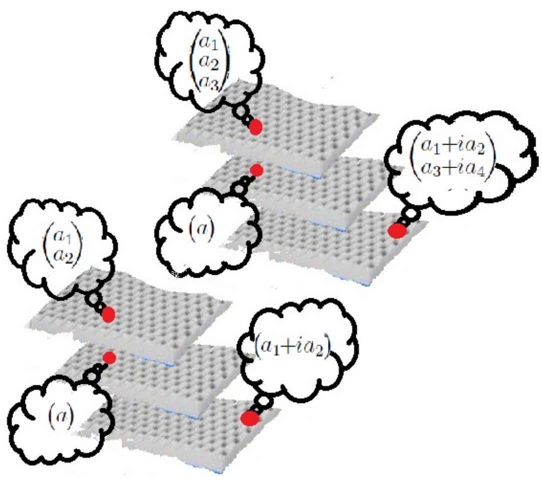
• V kvantovej teórii polí je samotnému poľu priradený operátor generujúci jeho energetickú excitáciu - časticu. Fundamentálnym je komutátor operátoru poľa a jeho kánonickej hybnosti.

# Dôležité grupy symetrií

Skôr než sformulujeme *fundamentálne* rovnice fyziky a identifikujeme ich elementárnych „aktérov“, musíme sa oboznámiť s „jazykom“ symetrií. Táto časť bude preto o *matematike* symetrií - teórii **grúp**. Grupou *symetrie* nazývame množinu všetkých transformácií, ktoré ponechajú určitý objekt (alebo vlastnosť) *invariantným*. V časti I boli objektami transformácií najprv (kap. I.1) *funkcie* definované na fázovom priestore, neriešili sme pritom ich charakter - **vnútorné stupne voľnosti** (či išlo napr. o *skalárnu* alebo *vektorovú* funkciu). Potom (kap. I.2) sme transformovali *stavové vektory* definované na Hilbertových priestoroch, opäť bez ohľadu na ich vnútornú štruktúru. A napokon (kap. I.3) sme analyzovali symetrie *polí* pri ich časopriestorových i vnútorných transformáciách, opäť bez špecifikovania charakteru týchto polí. Teória grúp je tým vhodným nástrojom na zovšeobecňujúci prístup k symetriám. V jej jazyku transformujeme objekty nášho záujmu ako *abstraktné* matematické objekty, pričom transformačné pravidlá každej grupy sú sformulované v *jej* **algebre**. *Vnútorné stupne voľnosti* transformujúcich sa objektov rovnako podliehajú transformáciám, a ich špecifickosť je zohľadnená v odlišných **reprezentáciách** danej algebry (i samotnej grupy).

V kap. I.3.7 sme už naznačili, že predstava **elementárnych častíc** Prírody ako „veľmi malých“ či „bodových guľôčok“ do dnešnej fyziky na *fundamentálnej* úrovni *nepatrí*. Nahrádza ju predstava *fundamentálnych polí*, ktorých excitácie (zo základného stavu - vákua) stotožňujeme s elementárnymi časticami.[1] Tieto polia sa navzájom prelínajú a interagujú. (Fyzikálnemu opisu základných typov polí a ich interakcií sú venované časti III až V.)

Jednotlivé polia sa líšia počtom vnútorných stupňov voľnosti. Z klasickej fyziky poznáme *skalárne* (*jeden* stupeň voľnosti) a *vektorové* polia (*tri* stupne voľnosti). V kvantovej mechanike pribudlo *komplexné skalárne* pole - vlnová funkcia (*dva* reálne = jeden *komplexný* stupeň voľnosti). Zaveďme jednotný opis, v ktorom každému časopriestorovému *bodu* $x^\mu$ daného poľa s $d$ vnútornými stupňami voľnosti priradíme stĺpcový vektor s $d$ reálnymi alebo komplexnými komponentami (obr.). Takýto vektor tvorí akýsi $d$-rozmerný reálny resp. komplexný *vnútorný priestor* „vztýčený“ *nad* každým bodom fyzického časopriestoru. Aktívna aj pasívna *časopriestorová* transformácia (skúmaného poľa, resp. pozorovateľa či súradnicovej sústavy) znamená aj transformáciu tohto *vnútorného* priestoru, a to v závislosti od jeho dimenzie.




[1] *Kvantovanosť* energie pri vzájomných interakciách polí, a najmä pri interakciách s meracími zariadeniami, nás naďalej motivuje tieto kvantá stotožňovať s časticami (ako ich vnímame v klasickom svete), inak však takáto newtonovská predstava *nemá oporu* v matematickom formalizme modernej fyziky. Od samého zrodu kvantovej fyziky existuje definícia elementárnej častice ako *objektu, ktorý vzniká pri meraní.*

Transformujeme teda časopriestorové polia, reprezentované spojitými funkciami, aj ich vnútornú $d$-rozmernú štruktúru, reprezentovanú $d$-rozmernými vektormi. Postupne opíšeme základné druhy transformácií v *reálnych* a *komplexných* priestoroch - **ortogonálne** resp. **unitárne** - a pomocou nich vybudujeme reprezentácie vyhovujúce požiadavkám špeciálnej relativity - **lorentzovské**. Dôležitou spoločnou vlastnosťou *spojitých* transformácií-symetrií sú zachovávajúce sa veličiny - generátory transformácií (Noetherovej teoréma). V časti I sme identifikovali súvis časopriestorových translácií s pojmami *hybnosť* a *energia*, ako aj súvis priestorových rotácií s pojmom *moment hybnosti.* V tejto časti sa sústredíme najmä na rotácie *vnútorných* priestorov (vnútornej štruktúry - stupňov voľnosti) objektov/polí a s tým súvisiacim *vnútorným* momentom hybnosti - **spinom** - jedným z **kvantových čísel**, pomocou ktorých charakterizujeme jednotlivé druhy elementárnych častíc.[2] Takéto kvantové čísla preto musia byť invariantmi pri transformáciách. V rámci jednotlivých grúp transformácií odhalíme súvis medzi ich generátormi a kvantovými číslami.

# II.1 Lieove grupy transformácií.

## II.1.1 Definícia Lieovej grupy a algebry.

O **spojitej** transformácii hovoríme vtedy ak existuje infinitezimálna transformácia blízka identite $\mathbb{1}$, vyjadrená *operátorom* $\mathcal{A}(\epsilon_j) = \mathbb{1} + \epsilon_j X_j$, kde[3] $\epsilon_j \to 0$ je infinitezimálne „posunutie“ v $j$-tom „smere“ $d$-rozmerného priestoru,[4] a $X_j$ je *generátor* príslušnej transformácie.[5] Linearita tohto vzťahu zaručí aj pre kombináciu takýchto infinitezimálnych transformácií $\mathcal{A}(\epsilon_j^1)\mathcal{A}(\epsilon_j^2) = \mathbb{1} + (\epsilon_j^1 + \epsilon_j^2)X_j$. Množina takýchto spojitých transformácií tvorí **Lieovu grupu**[6].

Binárnou operáciou Lieovej grupy je *násobenie.*[7] $N$-násobným opakovaním infinitezimálnej transformácie dosiahneme *konečnú* zmenu transformačného parametru $\theta_j = N\epsilon_j$ $(N \to \infty)$

$$\mathcal{A}(\theta_j) = [\mathcal{A}(\epsilon_j)]^N = \left[\mathbb{1} + \frac{\theta_j}{N} X_j\right]^N \underset{N\to\infty}{\to} e^{\theta_j X_j} = \mathbb{1} + \theta_j X_j + ...$$

[2]Niektoré základné charakteristiky, ako sú *hmotnosti*, stále nedokážeme kvantovať, a zostávajú *ne*vyriešenými otázníkmi teórie.

[3]V zmysle Einsteinovej sumačnej konvencie $\epsilon_j X_j = \sum_j^n \epsilon_j X_j$.

[4]Pojmy „posunutie“ a „smer“ *ne*musia mať význam *časopriestorový*, môže ísť o zmenu hodnoty *vnútorného* stupňa voľnosti.

[5]Pojmy *operátor* a *generátor transformácie* sme vysvetlili v kap. I.1.3.

[6]**Grupa** G je množina prvkov $a, b, c...$, medzi ktorými je definovaná binárna operácia $\circ$, výsledkom ktorej je opäť prvok tejto množiny $a, b \in$ G, $a \circ b \in$ G. Okrem tejto **uzatvorenosti** musí byť táto operácia **asociatívna**, musí existovať **neutrálny** prvok grupy $e \in$ G a **inverzný** prvok $a^{-1} \in$ G ku *každému* prvku grupy,

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \qquad a \circ e = e \circ a = a \qquad a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$$

Operácia $\circ$ pritom nemusí byť komutatívna.

[7]Dve po sebe nasledujúce transformácie, napr. rotácie $\mathcal{R}_1(\theta)$ a $\mathcal{R}_2(\phi)$, sú ekvivalentné jedinej transformácii, v tomto prípade $\mathcal{R}_3(\vartheta) = \mathcal{R}_1(\theta)\mathcal{R}_2(\phi)$ (vo všeobecnosti okolo rôznych osí). Súčin operátorov je vo všeobecnosti *ne*komutatívny!

V prípade *spojitých* transformácií je teda vzťah medzi transformáciou a jej generátorom[8]

$$\underline{\mathcal{A}(\theta_j) = e^{\theta_j X_j}} \qquad\qquad \underline{X_j = \left(\frac{d\mathcal{A}(\theta_j)}{d\theta_j}\right)_{\theta_j=0}}$$

Generátory tejto grupy sú teda formálne deriváciami jej prvkov (operátorov transformácií) v okolí identity ($\theta_j \to 0$), a tvoria tiež vlastnú *grupu* - tzv. **Lieovu algebru** $\mathfrak{g}$. Pre kombináciu *konečných* (nie infinitezimálnych) transformácií však platí

$$\mathcal{A}(\theta_j^1)\mathcal{A}(\theta_j^2) = \mathbb{1} + (\theta_j^1 + \theta_j^2)X_j + ... \neq \mathcal{A}(\theta^1 + \theta^2)$$

Binárnou operáciou *tejto* grupy - Lieovej *algebry* - teda *nie je* prosté násobenie - jeho výsledok totiž *nemusí* byť tiež prvkom tejto množiny! Dá sa však ukázať, že jej prvkom[9] bude **komutátor**

$$[X_1, X_2] = X_1X_2 - X_2X_1 \qquad\qquad e^{X_1}e^{X_2} = e^{X_1+X_2+\frac{1}{2}[X_1,X_2]-\frac{1}{12}[X_1,[X_1,X_2]]-\frac{1}{12}[X_2,[X_1,X_2]]+...}$$

Inými slovami, $e^{X_1}e^{X_2} = e^{X_1+X_2}$ len ak generátory $X_1, X_2$ *komutujú*, čo vo všeobecnosti neplatí. Lieove algebry teda tvoria *uzatvorené* grupy vzhľadom na binárnu operáciu *komutátor*.[10]

Každá Lieova grupa definuje určitý počet *p lineárne nezávislých bázových* generátorov svojej Lieovej algebry, $X_j$, pomocou ktorých vieme skonštruovať ľubovoľný iný prvok algebry, $X = \sum_j^p c_jX_j$ ($c_j$ môžu byť reálne alebo komplexné). V tomto zmysle generátory algebry tvoria vlastný $p$-rozmerný *abstraktný priestor* algebry. Keďže komutátor ľubovoľných dvoch bázových prvkov algebry (t.j. generátorov) musí byť tiež prvkom tejto algebry (požiadavka *uzavretosti* grupy), platí (v Einsteinovej konvencii)

$$\underline{[X_j, X_k] = -[X_k, X_j] = C_{jkl}X_l = -C_{kjl}X_l}$$

kde $C_{jkl}$ je tzv. **štruktúrna konštanta**, ktorá *definuje* danú Lieovu algebru.

Z predchádzajúcich kapitol vieme, že generátormi transformácií t.j. (generátormi Lieovej algebry) sú merateľné veličiny.[11] V kvantovej fyzike však matice operátorov *merateľných* veličín musia byť *hermitovské*[12], $X^\dagger = (X^T)^* = X$. To zabezpečíme „predefinovaním" Lieovej algebry na

$$X \to iX \qquad\qquad \underline{\mathcal{A}(\theta) \to e^{i\theta X} = \mathbb{1} + i\theta X + ...} \qquad\qquad \underline{X = -i\left(\frac{d\mathcal{A}(\theta)}{d\theta}\right)_{\theta=0}}$$

pričom prvky matíc $X$ budú z oboru *komplexných* čísel (znamienko pred $i$ závisí od voľby konvencie).

### II.1.2 Reprezentácie Lieovej grupy a algebry.

**Reprezentáciou** Lieovej grupy spojitých transformácií $G$ bude pre nás *konkrétne vyjadrenie* prvkov danej grupy[13], $\mathcal{A} \in G$, a generátorov jej algebry, $X \in \mathfrak{g}$. Voľba reprezentácie závisí od charakteru a

[8]Vo všeobecnosti Taylorov rozvoj funkcie v okolí referenčnej hodnoty premennej je

$$f(\theta_0 + \theta) = f(\theta_0) + \theta\left(\frac{df}{d\theta}\right)_{\theta_0} + ...$$

V našom prípade je touto funkciou transformačný predpis, $f(\theta_0 + \theta) = \mathcal{A}(\theta_j)$ a $f(\theta_0) = \mathcal{A}(0) = \mathbb{1}$.

[9]$X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$, $[X_1, X_2] \in \mathfrak{g}$ ale $X_1 \cdot X_2 \notin \mathfrak{g}$

[10]Už v kap. I.1.3 a I.2.1 sme ukázali, že *generátory* transformácií pôsobia prostredníctvom komutátorov, resp. PZ v klasickej mechanike, kým *operátory* transformácií pôsobia *priamo*, t.j. násobením zľava.

[11]V skutočnosti súbor všetkých kvantovomechanických operátorov *pozorovateľných* veličín tvorí Lieovu algebru.

[12]$\dagger$ - hermitovsky združený, $T$ - transponovaný, $*$ - komplexne združený operátor.

[13]Samotná grupa je len množinou *abstraktných* objektov s definovanými vzájomnými vzťahmi - štruktúrou. Jednotlivé reprezentácie priraďujú týmto abstraktným objektom konkrétnu *formu* (čísla, vektory, matice, jablká...) pri zachovaní štruktúry grupy.

dimenzionality priestoru, v ktorom „žijú“ transformujúce sa objekty. Ak týmito objektami sú *spojité* funkcie časopriestoru, *báza* tohto priestoru je $\infty$-*rozmerná.*[14] V tomto prípade *generátory* $X$ reprezentujeme prostredníctvom *diferenciálnych* operátorov (ako ich poznáme z kvantovej mechaniky, napr. $\hat{p}_x = -i\hbar\partial_x$). Takéto reprezentácie nazývame **spojitými**, resp. $\infty$-**rozmernými**. Samotné operátory transformácií $\mathcal{A}$ sú v tejto reprezentácii exponenciálami *s diferenciálnymi operátormi v exponente.*

Pri transformácii objektu s $d$ stupňami voľnosti (napr. pri rotácii 3D vektoru okolo svojho počiatku je $d = 3$) pracujeme v $d$-**rozmernej** reprezentácii - transformujúci sa objekt je $d$-rozmerným vektorom (ako lineárna kombinácia bázových vektorov). Generátory transformácií $X$ sú v tomto prípade reprezentované *maticami* $d \times d$, pôsobiacimi prostredníctvom násobenia na $d$-rozmerné vektory. Takéto reprezentácie nazývame $\boldsymbol{d}$-**rozmernými**. Samotné operátory transformácií $\mathcal{A}$ sú v tejto reprezentácii exponenciálami *s maticami v exponente.*

V kontexte fundamentálnych fyzikálnych polí (*spojite* rozložených v časopriestore) s *vnútornými* stupňami voľnosti (*vnútornými* abstraktnými $d$-rozmernými vektorovými priestormi žijúcimi *nad* časopriestorovými bodmi) to znamená, že časopriestorové (aktívne či pasívne) transformácie polí budú pozostávať z *časopriestorovej časti v spojitej reprezentácii* a transformácie *vnútorných priestorov v d-rozmernej reprezentácii.*[15]

Pri $d$-rozmerných reprezentáciách konkrétny tvar transformačných operátorov a generátorov *závisí od voľby bázy* vektorového priestoru. (Zmenou bázy sa zmení ich tvar, ako uvidíme v nasledujúcich kapitolách.) *Ne*závislou na tejto voľbe je však *štruktúra* algebry - komutačné vzťahy medzi generátormi a štruktúrne konštanty.

Väzba medzi konkrétnou reprezentáciou Lieovej grupy a jej algebry však *nie je* jedno-jednoznačná: Z danej reprezentácie grupy vieme derivovaním *jednoznačne* určiť odpovedajúcu reprezentáciu jej algebry. Opačný proces - dosadenie reprezentácie algebry do exponenciály - už jednoznačným byť *nemusí* - daná reprezentácia algebry môže prislúchať, ako uvidíme, *viacerým* grupám.

O **neredukovateľnej (ireducibilnej) reprezentácii** hovoríme vtedy, ak pôsobenie *ľubovoľného* prvku grupy na *ľubovoľný* vektor daného priestoru vedie opať na vektor *celého* tohto priestoru. Naopak, ak v danej reprezentácii existujú *pod*priestory, v ktorých je pôsobenie grupy *uzavreté* (t.j. tieto podpriestory sa navzájom „nemiešajú“), reprezentácia je *redukovateľná.* Znamená to vtedy, že každý generátor algebry $X_j$ sa dá rozdeliť na generátory $X_j^1, X_j^2, ...$ pôsobiace oddelene v podpriestoroch, a v maticovej podobe

$$X_j = \begin{pmatrix} X_j^1 & 0 & ... \\ 0 & X_j^2 & ... \\ & ... & \end{pmatrix}$$

kde $X_j^1, X_j^2, ...$ sú *matice* rozmerov podpriestorov.

Pojem *ireducibilná reprezentácia* je kľúčový pri kategorizácii *elementárnych* častíc. Je zrejmé, že prívlastok *elementárny* sa viaže *invariantnosť fundamentálnych* vlastností voči transformáciám pri ich pozorovaní. V závere tejto časti definujeme grupu takýchto transformácií.[16] *Rôznorodosť* vlastností elementárnych častíc/polí sa manifestuje práve v rozdielnom spôsobe ich transformovania, vyjadrenom konkrétnou *ireducibilnou reprezentáciou* tejto grupy. Nasledujúce kapitoly sú preto venované hľadaniu ireducibilných reprezentácií dôležitých grúp ako nástrojov na *definície* elementárnych častíc.

[14] *Bázou* rozumieme množinu *ortogonálnych* funkcií, prostredníctvom ktorých vieme „skomponovať“ každú funkciu daného priestoru. Napr. pomocou Fourierovej transformácie dokážeme *ľubovoľnú* spojitú funkciu časopriestoru vytvoriť z nekonečného počtu *bázových* funkcií - sínusov a kosínusov *všetkých* frekvencií a vlnových čísel.

[15] V kap. I.3.4 a I.3.5 sme transformovali (posúvali a otáčali) *skalárne* polia bez vnútornej štruktúry (*jediný* stupeň voľnosti), vystačili sme teda so *spojitou* reprezentáciou. Všeobecnejší prípad rozoberieme v kap. II.4.4.

[16] Bude ňou *Poincarého grupa.*

## II.2 Ortogonálne transformácie.

### II.2.1 Ortogonálne grupy O($D$), SO($D$).

**Ortogonálna grupa O($D$)** je grupou priestorových transformácií v $D$-rozmernom *reálnom* priestore, pri ktorých sa *zachováva veľkosť vektoru* (skalárny súčin). Je tvorená množinou ortogonálnych matíc[17]

$$\underline{\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}\mathcal{A}^T = \mathbb{1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ & & ... & \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^T}$$

kde $\mathcal{A}^{-1}$ a $\mathcal{A}^T$ sú *inverzná* a *transponovaná* matica k matici $\mathcal{A}$, a $\mathbb{1}$ je *jednotková* matica (identita). V $d$-rozmernej reprezentácii majú matice rozmer $d \times d$ a pôsobia na $d$-rozmerné vektory. Pre **základnú (definičnú) reprezentáciu** grupy platí $d = D$. Z týchto definičných vzťahov grúp O($D$) tiež vyplýva podmienka $\det(\mathcal{A}) = \pm 1$.

V 2D ($D = 2$) sú takýmito transformáciami **odraz** a **rotácia**. Ak zvolíme „kartézsku“ reprezentáciu transformovaných 2D vektorov

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y = v_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

potom odraz (zrkadlenie) zložiek vektoru $\vec{v}$ vzhľadom na os $x$, resp. $y$ je

$$v'_x = -1 \cdot v_x + 0 \cdot v_y \qquad v'_y = 0 \cdot v_x + 1 \cdot v_y \qquad \text{resp.} \qquad v'_x = 1 \cdot v_x + 0 \cdot v_y \qquad v'_y = 0 \cdot v_x - 1 \cdot v_y$$

Matice odrazu v takejto reprezentácii sú

$$\mathcal{P}_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{P}_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Rotácia vektoru $\vec{v}$ ľavotočivo[18] o uhol $\theta\,(> 0)$ znamená transformáciu jeho zložiek

$$v'_x = v_x \cos\theta + v_y \sin\theta \qquad v'_y = -v_x \sin\theta + v_y \cos\theta$$

Matica ľavotočivej rotácie vektoru $\vec{v}$ v 2D v tejto reprezentácii je teda

$$\mathcal{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \underline{\vec{v}\,' = \mathcal{R}(\theta)\vec{v}}$$

Samotné matice *rotácie* tvoria *pod*grupu **SO($D$)**, spĺňajúcu dodatočnú *špeciálnu*[19] podmienku

$$\underline{\det(\mathcal{A}) = 1}$$

ktorá zabezpečuje zachovanie ľavej/pravej „ruky“. (Pre matice odrazu platí $\det(\mathcal{A}) = -1$, pri odraze sa mení pravá „ruka“ na ľavú a naopak.)

Matice rotácií okolo ortogonálnych osí $x, y, z$ v 3D, tvoriace v „kartézskej“ reprezentácii *bázu grupy* SO(3), sú

$$\mathcal{R}_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \mathcal{R}_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \mathcal{R}_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[17]Každý stĺpec/riadok ortogonálnej matice je vektorom ortogonálnym voči ostatným stĺpcom/riadkom.

[18]V texte uvažujeme *aktívnu ľavotočivú* rotáciu objektu o *kladný* uhol, čiže *pasívnu pravotočivú* rotáciu súradnicovej sústavy o *kladný* uhol.

[19]odtiaľ skratka *special orthogonal*

Rozšírením SO(3) aj na prípady $\det(\mathcal{A}) = -1$ dostávame grupu O(3), ktorá popri rotačných maticiach obsahuje aj matice odrazov (zrkadlení podľa jednej z osí) $3 \times 3$ a maticu priestorovej inverzie, čiže zmeny *parity*, $\mathcal{P} = -\mathbb{1}_{(3\times3)}$.

## II.2.2 Generátory grúp SO($D$).

Definičné podmienky týchto grúp rotácií $\mathcal{R}$ a generátorov $X$ ich Lieovej algebry, obvykle označovanej $\mathfrak{so}(D)$, sú

$$\mathcal{R}^T\mathcal{R} = \mathbb{1} \qquad\qquad \det(\mathcal{R}) = 1 \qquad\qquad \mathcal{R} = e^{\theta X}$$

Odtiaľ vyplývajú podmienky[20]

$$\underline{\mathrm{Tr}(X) = 0} \qquad\qquad \underline{X^T = -X}$$

Matice generátorov $X$ musia teda byť *antisymetrické*. Vo všeobecnosti v $D$-rozmernom priestore majú antisymetrické matice $D \times D$ grupy SO($D$) (s nulovou diagonálou) práve $p = D(D-1)/2$ voľných parametrov (ostatné prvky matice $D \times D$ sú určené definičnými vzťahmi, v tomto prípade antisymetrickosťou). Tieto nezávislé parametre odpovedajú *stupňom voľnosti* s prislúchajúcimi generátormi, a tvoria $p$-rozmerný *generátorový* priestor Lieovej algebry. Počet generátorov sa vo všeobecnosti *ne*rovná počtu dimenzií reálneho priestoru.[21]

V kap. I.1.3 sme si ukázali, že v *klasickej* mechanike sú generátormi *spojitých* transformácií (vo fázovom priestore), napr. infinitezimálnych rotácií o uhol $\theta \to 0$, *antisymetrické* PZ generujúcej veličiny, v tomto prípade zložky momentu hybnosti $L_j$, a transformačné (v tomto prípade rotačné) operátory (v spojitej reprezentácii) majú tvar

$$\mathcal{R}_\theta = e^{\theta\{\cdot\,,L_j\}} \cong \mathbb{1} + \theta\{\cdot\,, L_j\}$$

Generátory $X_j$ algebry $\mathfrak{so}(D)$ (pôsobiace na vektorový priestor tejto algebry) by sme teda mohli *fyzikálne* stotožniť s poissonovskými operátormi $\{\cdot\,, L_j\}$. Kvantová fyzika však pre merateľné veličiny požaduje *hermitovské* operátory. Keďže matice $\mathcal{R}$ sú *reálne*, musíme zmeniť definíciu algebry na[22]

$$X \to iJ \qquad\qquad J = -i\frac{d\mathcal{R}(\theta)}{d\theta}\Big|_{\theta=0}$$

V ďalšom texte budeme pracovať s takto definovanými *hermitovskými* generátormi.

Pre $D = 2$ obsahujú rotačné matice *jediný* parameter $\theta$, abstraktný *operátorový* priestor Lieovej algebry je teda 1-rozmerný, $p = 1$, s jediným generátorom rotácií[23], napr. v rovine $xy$ v reprezentácii z predchádzajúcej kap. II.2.1

$$J = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

V 3D je $D = 3$ a rovnako $p = D(D-1)/2 = 3$, čomu odpovedajú 3 generátory. V kartézskej reprezentácii máme potom 3 rotačné matice so *samostatným* parametrom $\theta_j$ okolo každej z osí $x, y, z$. *Kartézsku* bázu generátorov tvoria

$$J_x = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_y = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_z = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{[J_j, J_k] = i\epsilon_{jkl}J_l}}$$

[20]Využili sme maticové pravidlo $\det(e^X) = e^{\mathrm{Tr}(X)}$, kde $\mathrm{Tr}(X)$ je stopa matice $X$.

[21]Všeobecné rotácie v $D$-rozmerných priestoroch sa dajú rozložiť na nezávislé rotácie v jednotlivých *ortogonálnych rovinách.* Počet generátorov algebry je daný práve počtom týchto rovín: V 2D je *jediná* rovina, v 3D sú *tri.* V 4D s ortogonálnymi osami $x, y, z, w$ máme šesť ortogonálnych rovín $xy, xz, xw, yz, yw, zw$, atď.

[22]Znamená to, že $iJ$ je *reálne*, $iJ = (iJ)^* = -iJ^*$, a teda $J^* = -J$. Zároveň platí $J^T = -J$, čo vedie na $J = J^\dagger$.

[23]Táto algebra *ne*obsahuje štruktúrnu konštantu, resp. jej štruktúrna konštanta je 0.

Štruktúrnou konštantou tejto algebry je teda $\epsilon_{jkl}$ - (antisymetrický) Leviho-Civitov symbol. Vidíme, že komutačné vzťahy pre generátory algebry $\mathfrak{so}(3)$ a kvantovomechanické operátory momentu hybnosti $\hat{L}_j$ sú *totožné* (až na rozmerovú konštantu $\hbar$), čo svedčí o ich hlbokom súvise.[24]

Lineárnou kombináciou týchto bázových generátorov vieme skonštruovať *ľubovoľný* prvok $\mathfrak{so}(3)$ ako generátor rotácie okolo osi danej jednotkovým vektorom $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$

$$J = n_x J_x + n_y J_y + n_z J_z = \vec{n} \cdot \vec{J} = i \begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix} = i\,(\vec{n})_\times$$

kde $\vec{n} \cdot \vec{J}$ je „skalárny“ súčin vektoru $\vec{n}$ s „vektorom“ $\vec{J}$, ktorého zložkami sú *matice* $J_j$, a $(\vec{n})_\times$ je symbol pre maticu-operátor. Maticu takejto rotácie skonštruujeme pomocou vzťahu $\mathcal{R}_n(\theta) = e^{i\vec{n}\cdot\vec{J}\theta}$ jeho rozvojom do Taylorovho radu[25],

$$\underline{\mathcal{R}_n(\theta) = \cos\theta\,\mathbb{1} + (1-\cos\theta)(\vec{n}\otimes\vec{n}) - \sin\theta\,(\vec{n})_\times}$$

($\otimes$ je tenzorový súčin, každý s každým) čo je maticový zápis tzv. **Rodriguesovho vzorca**, alebo

$$\mathcal{R}_n(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta + n_x^2(1-\cos\theta) & n_x n_y(1-\cos\theta) + n_z\sin\theta & n_x n_z(1-\cos\theta) - n_y\sin\theta \\ n_y n_x(1-\cos\theta) - n_z\sin\theta & \cos\theta + n_y^2(1-\cos\theta) & n_y n_z(1-\cos\theta) + n_x\sin\theta \\ n_z n_x(1-\cos\theta) + n_y\sin\theta & n_z n_y(1-\cos\theta) - n_x\sin\theta & \cos\theta + n_z^2(1-\cos\theta) \end{pmatrix}$$

### II.2.3 Dôležité reprezentácie SO($D$).

*Ne*redukovateľnou *základnou* reprezentáciou grupy SO(2), vo forme *reálnych* matic $2\times 2$, je kartézska reprezentácia z predchádzajúcich kapitol[26]

$$\mathcal{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

*Inou* je reprezentácia SO(2) vo forme *komplexných* matíc $2\times 2$: Nájdeme ju pomocou *vlastných vektorov* matice $\mathcal{R}(\theta)$, ktorými sú $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ a $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ s vlastnými hodnotami $e^{i\theta}$ a $e^{-i\theta}$, pričom tieto vektory tvoria stĺpce matice $\mathcal{S} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ takej, že $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{R}\mathcal{S} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ je *diagonálna* matica. Takáto reprezentácia SO(2) je však *redukovateľná* na dve *rôzne* jednorozmerné (ďalej neredukovateľné) reprezentácie

$$\mathcal{R}(\theta) = e^{\pm i\theta}$$

V nich teda prvky grupy SO(2) *nie sú* maticami $2\times 2$. Súvis so základnou reprezentáciou je zrejmý: 2D rotácia vektoru $\vec{v} = (v_x, v_y)$ pravo/ľavotočivo o uhol $\theta$ v základnej reprezentácii vedie na

$$\vec{v}\,' = (v_x\cos\theta \mp v_y\sin\theta\,,\ v_x\sin\theta \pm v_y\cos\theta)$$

[24]Kým tu uvedené vzťahy sú 3-rozmernou reprezentáciou generátorov rotácií, kvantovomechanické diferenciálne operátory sú ich spojitou reprezentáciou. Štruktúra algebry je však rovnaká. Tieto vzťahy sú teda rýdzo „klasickou“ zákonitosťou. Definovanie zložiek momentu hybnosti prostredníctvom generátorov rotácií je zásadné: V kvantovej mechanike totiž nie je možné definovať moment hybnosti telesa rovnakým spôsobom ako v klasickej fyzike, $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$, keďže pojem *poloha objektu* nemá zmysel.

[25]Využijeme pritom, že $(\vec{n})_\times^2 = \vec{n}\otimes\vec{n} = \mathbb{1}$ , $(\vec{n})_\times^3 = -(\vec{n})_\times$, atď.

[26]V tejto reprezentácii sú transformujúce sa objekty stĺpcovými vektormi $2\times 1$ s *reálnymi* prvkami, vyjadrujúcimi kartézske zložky 2D vektorov.

V *komplexnej* reprezentácii sú tieto vektory reprezentované komplexnými číslami

$$\vec{v} \to v_x + iv_y \qquad\qquad \vec{v}\,' \to e^{\pm i\theta}\vec{v} = (\cos\theta \pm i\sin\theta)(v_x + iv_y)$$

Pravo/ľavotočivé otočenie vektoru v 2D priestore je teda ekvivalentné násobeniu jednotkovým komplexným číslom $e^{\pm i\theta}$ v komplexnej rovine.

Pri „štandardnej" rotácii vektoru v 3D priestore je vhodnou voľbou kartézska reprezentácia s transformujúcimi sa stĺpcovými vektormi $3 \times 1$ a generátormi transformácií v tvare matíc 3×3 z predchádzajúcej kapitoly. Generátory grupy SO(3) pritom spĺňajú komutačné vzťahy $[J_j, J_k] = i\epsilon_{jkl}J_l$ *nezávislo na výbere reprezentácie.*

Uvažujme teraz 3D rotáciu *poľa* $v(\vec{r})$, ktoré má vo všeobecnosti *netriviálnu vnútornú štruktúru* (triviálnym je prípad *reálneho skalárneho* poľa s *jedno*rozmernou vnútornou štruktúrou, čiže $v$ ako *reálne číslo* pre každé $\vec{r}$). Predpokladajme *pasívnu* spojitú rotáciu priestoru (súradníc, pozorovateľa) $\vec{r} \to \vec{r}\,' = \mathcal{R}\vec{r}$. V prípade $\mathcal{R}$ ide o *spojitú* reprezentáciu. Pre pôvodné a transformované pole musí pritom platiť

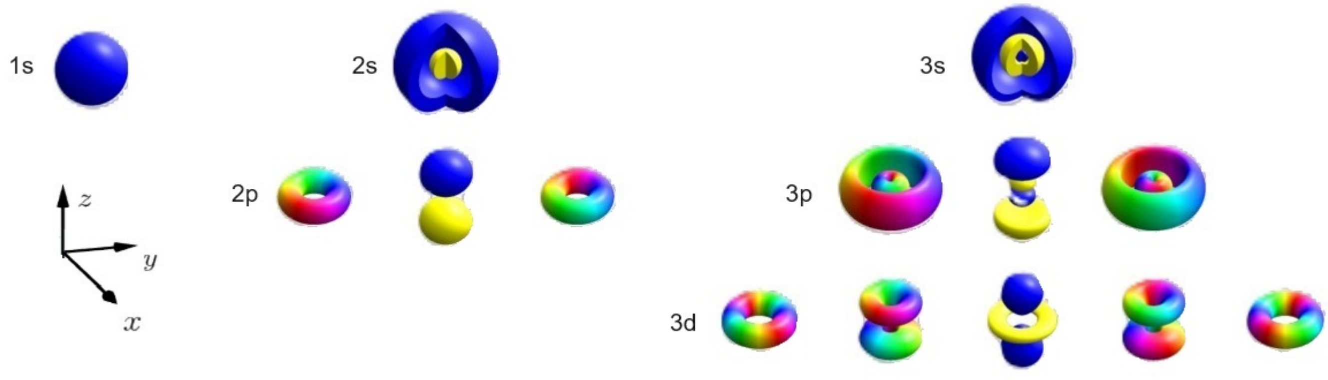
$$v'(\vec{r}\,') = v(\vec{r}) = v(\mathcal{R}^{-1}\vec{r}\,')$$

Takáto transformácia teda znamená $v \to v' = \mathcal{D}_{\mathcal{R}}v$, kde $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$ je *konkrétna reprezentácia* operátora pôsobiaceho na *vnútorný* priestor poľa (čiže abstraktný priestor „schovaný" v každom $\vec{r}$). Výber reprezentácie súvisí s *voľbou bázy* tohto vnútorného priestoru. V prípade 3D *vektorového* poľa $\vec{v}(\vec{r})$ je prirodzenou bázou *vnútorného* priestoru báza *totožná* s bázou *fyzického* („vonkajšieho") 3D priestoru. (Rotácia vektorového poľa je potom „obvyklou" 3D rotáciou vektoru $\vec{v}$, a to v každom bode $\vec{r}$.) Vo všeobecnosti však môže byť vnútorný priestor poľa „exotickejší".

V kvantovej fyzike pracujeme so *stavovými vektormi* $|v\rangle$ „žijúcimi" v *abstraktných Hilbertových priestoroch*, nesúcimi úplnú informáciu o veličinách merateľných v danom stave. Hermitovské operátory $\hat{X}$ odpovedajúce merateľným veličinám sú v skutočnosti *generátormi* príslušných transformácií,[27] a *veta o vlastných stavoch a vlastných hodnotách operátorov*

$$\hat{X}|v_m\rangle = X_m|v_m\rangle \qquad\qquad |v\rangle = \sum_m c_m|v_m\rangle$$

je vetou o *symetrii* (Noetherovej teoréma) - transformácia generovaná operátorom $\hat{X}$ je *symetriou* stavu $|v_m\rangle$ (veličinou zachovávajúcou sa pri tejto transformácii je $X$ s hodnotou $X_m$). Vhodnou reprezentáciou Hilbertovho priestoru stavu $|v\rangle$ vzhľadom na transformáciu $\hat{X}$ je teda taká, ktorej bázu tvoria práve *vlastné vektory* tohto operátoru, $|v_m\rangle$. Príkladom je rotačná symetria vlastných stavov operátoru $\hat{L}_z$ ($z$-ovej zložky orbitálneho momentu hybnosti) v atóme vodíka (čiže elektrónových orbitálov na obr.).




[27]Napr. operátor $j$-tej zložky momentu hybnosti je generátorom rotácie okolo osi $j$.

Ak takéto bázové vektory v $d$-rozmernej báze vyjadríme ako stĺpcové vektory/matice $d \times 1$ s *jedinou* nenulovou zložkou (odpovedajúcou danému bázovému „smeru“, čiže danému bázovému stavu na obr.), potom generátorom symetrie musí byť *diagonálna* matica $d \times d$. Keďže ide o *rotačnú* symetriu v 3D, jej generátorom musí byť jeden z generátorov algebry $\mathfrak{so}(3)$, pričom hodnota $d$ - počet bázových vektorov určujúci dimenziu matice generátoru a teda aj reprezentácie - je vo všeobecnosti *rôzna* od 3 (napr. pre p-orbitály na obr. $d = 3$, ale $d = 5$ pre d-orbitály, či $d = 1$ pre s-orbitály).

V prípade tejto algebry môžeme *súčasne* diagonalizovať *jediný* z generátorov - súvisí to s ich vzájomnou *ne*komutatívnosťou[28] - konvenčne $J_z$. Vo všeobecnosti, pre $D > 3$, grupy SO($D$) obsahujú *niekoľko* vzájomne komutujúcich - tzv. **Cartanových** - generátorov. Algebra $\mathfrak{so}(3)$ má jediný „Cartan“, spravidla $J_z$. Jeho vlastné vektory $v_m$ budú tvoriť *bázu* abstraktného priestoru transformujúcich sa vektorov, a im prislúchajúce vlastné hodnoty $m$ budú tvoriť spektrum merateľných hodnôt príslušnej veličiny.

Pomocou zvyšných „kartézskych“ generátorov $J_x, J_y$ (rovnako v príslušnej $d$-rozmernej reprezentácii) definujme „pomocné“ operátory ako ich *komplexnej* kombinácie

$$J_+ = (J_x + iJ_y)/\sqrt{2} \qquad J_- = (J_x - iJ_y)/\sqrt{2} \qquad J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 = J_+J_- + J_-J_+ + J_z^2$$

s komutačnými vzťahmi[29]

$$[J_+, J_-] = J_z \qquad [J_z, J_\pm] = \pm J_\pm \qquad [J^2, J_j] = 0 \qquad [J^2, J_\pm] = 0$$

Operátory $J_\pm$ sú potom **zvyšovacím/znižovacím operátorom** vzhľadom na vlastné hodnoty $m$ príslušné k vektorom $v_m$[30]

$$J_z v_m = m v_m \qquad J_z(J_\pm v_m) = J_z v_{m\pm1} = ... = (m \pm 1) v_{m\pm1}$$

Hermitovský operátor $J^2$ je tzv. **Casimirovým operátorom** algebry $\mathfrak{so}(3)$ - *komutuje so všetkými* operátormi tejto grupy. Pre jeho vlastné hodnoty môžeme písať

$$J^2 v_m = \mu^2 v_m \qquad J^2 = \mu^2 \mathbb{1} \qquad (\mu \text{ - reálne číslo})$$

Pre zvyšovací/znižovací operátor potom vieme odvodiť vzťah[31]

$$J_\pm v_m = \sqrt{\mu^2 - m(m \pm 1)}\, v_{m\pm1} \qquad \Rightarrow \qquad \mu^2 \geq m(m \pm 1)$$

Spektrum vlastných hodnôt $m$ je ohraničené zdola, resp. zhora, len ak platí

$$J_- v_{min} = 0 \qquad J_z v_{min} = m_{min} v_{min} \qquad J^2 v_{min} = \mu^2 v_{min} \qquad m_{min}(m_{min} - 1) = \mu^2$$

$$J_+ v_{max} = 0 \qquad J_z v_{max} = m_{min} v_{max} \qquad J^2 v_{max} = \mu^2 v_{max} \qquad m_{max}(m_{max} + 1) = \mu^2$$

Z toho vyplýva[32]

$$\underline{m_{max} = -m_{min} := j} \qquad \underline{\mu^2 = j(j+1)}$$

a jednotkový pokles/nárast vlastných hodnôt $m$ je obojstranne *ohraničený*, $-j \leq m \leq j$ . Existuje teda $N$ jednotkových preskokov medzi hodnotami $-j$ a $j$, čiže $j = -j + N$ a odtiaľ $j = \frac{N}{2}$. Hodnota $j$ teda môže očividne byť *len celočíselná alebo poločíselná*, a pre každé $j$ existuje $2j + 1$ hodnôt $m$,

$$\underline{j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, ...} \qquad \underline{m = j, j-1, ... -j+1, -j}$$

[28] V kvantovej mechanike sa táto skutočnosť manifestuje ako nemožnosť súčasne určiť viac než jednu zložku momentu hybnosti.

[29] Tieto operátory neodpovedajú rotáciám, a komutačné vzťahy medzi trojicou $J_z, J_+, J_-$ nespĺňajú algebru $\mathfrak{so}(3)$. Navyše $J^2 \notin \mathfrak{so}(3)$ - nie je *lineárnou* kombináciou $J_j$.

[30] Paralela s kvantovou mechanikou je zrejmá - poznáme ich ako stavy s rôznymi *priemetmi* momentu hybnosti do vybraného smeru $z$.

[31] Odvodenie sa dá nájsť v štandardných učebniciach kvantovej mechaniky.

[32] Vyššie uvedené závery sú dôverne známe z kurzu kvantovej mechaniky. Ako však opäť vidíme, dôvody ich platnosti spočívajú v elementárnych symetriách, a kvantový mikrosvet je len „javiskom“, na ktorom sa manifestujú.

Znamená to teda, že $J_z$ je *diagonálna* matica $(2j+1)\times(2j+1)$ s prvkami $j, j-1, ..., -j$. Ide o $(2j+1)$-rozmernú reprezentáciu grupy SO(3), resp. jej algebry $\mathfrak{so}(3)$, ktorej prvky *nie sú* vo všeobecnosti maticami $3\times 3$ (iba ak by $j=1$).

Hodnota $\underline{d = 2j+1}$ - počet bázových vektorov - určuje *dimenzionalitu abstraktného vektorového priestoru*, čiže počet (vnútorných) stupňov voľnosti. Táto báza pokrýva celý priestor (operátory $J_x, J_y$ sú lineárnymi kombináciami $J_\pm$, a to isté platí aj o *ich* vlastných vektoroch - všetky sa dajú „vyskladať" z bázových vektorov). *Každému $j$ odpovedá $d$-rozmerná reprezentácia algebry* $\mathfrak{so}(3)$ v príslušnom $d$-rozmernom vektorovom priestore - jej generátory majú tvar matíc $d\times d$.

Je namieste rekapitulácia priestorov: S grupou SO(3) pracujeme v 3D *fyzickom* priestore, $D=3$. Algebre *tejto* grupy odpovedá $p=3-$rozmerný *operátorový* priestor - počet generátorov (lebo $p = D(D-1)/2 = 3$) - môže ísť o sadu $J_x, J_y, J_z$, resp. ich kombináciu $J_+, J_-, J_z$. Tieto generátory „žijú" (operujú) v $d$-rozmerných *vektorových* priestoroch s $d=2j+1$ bázovými vektormi $v_m$, pričom $d$ (dané príslušnou vlastnou hodnotou $j$ Casimirovho operátoru) určuje dimenzionalitu *reprezentácie* (čiže dimenzionalitu vektorov aj matíc generátorov). Vo všeobecnosti $D\neq d$, vo fyzickom 3D priestore teda definujeme *rôzne* dimenzie reprezentácií. V kontexte fundamentálnych fyzikálnych *polí* to znamená polia s $d$ reálnymi vnútornými stupňami voľnosti, vyplňujúce fyzický $D$-rozmerný priestor ($d$-rozmerné vnútorné priestory „žijúce" v každom bode $D$-rozmerného priestoru).

Reprezentáciu samotnej grupy SO(3) dostaneme z reprezentácie jej algebry na základe vzťahov $\mathcal{R}_j(\theta) = e^{i\theta J_j}$: Napr. rotáciu ($d$-rozmerného) vektoru $v$ okolo osi $z$ v reálnom priestore reprezentuje matica $e^{i\theta J_z}$. Vektor $v$ je pritom superpozíciou $(2j+1)$ bázových stavov $v_m$ - vlastných stavov operátoru $J_z$, čiže

$$\mathcal{R}_z(\theta)v = e^{i\theta J_z}v = e^{i\theta J_z}\sum_m c_m v_m = \sum_m e^{im\theta}c_m v_m \qquad\qquad m = -j, -j+1, ..., j-1, j$$

Ako príklad uveďme reprezentáciu $\mathfrak{so}(3)$ v *troj*rozmernom vektorovom priestore, $d = 2j+1 = 3$ čiže $j=1$, $m = 1, 0, -1$. Bázové vektory a diagonálny operátor sú

$$|j,m\rangle: \qquad |1,1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad |1,0\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad |1,-1\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad J_z = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

Z týchto bázových vektorov a predchádzajúcich vzťahov vieme identifikovať tvar zvyšovacieho/znižovacieho operátoru,

$$J_+ = \sqrt{2}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad\qquad J_- = \sqrt{2}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

a pomocou nich zvyšné generátory algebry

$$J_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \qquad\qquad J_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}$$

Odpovedajúca reprezentácia grupy SO(3) je $\mathcal{R}_j(\theta) = e^{i\theta J_j} = ... = \mathbb{1} + i\sin\theta J_j + (\cos\theta - 1)(J_j)^2$

$$\mathcal{R}_z(\theta) = \begin{pmatrix}e^{i\theta}&0&0\\0&1&0\\0&0&e^{-i\theta}\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{R}_x(\theta) = \begin{pmatrix}(\cos\theta+1)/2 & i\sin\theta/\sqrt{2} & (\cos\theta-1)/2\\ i\sin\theta/\sqrt{2} & \cos\theta & i\sin\theta/\sqrt{2}\\ (\cos\theta-1)/2 & i\sin\theta/\sqrt{2} & (\cos\theta+1)/2\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{R}_y(\theta) = \begin{pmatrix} (\cos\theta+1)/2 & \sin\theta/\sqrt{2} & -(\cos\theta-1)/2 \\ -\sin\theta/\sqrt{2} & \cos\theta & \sin\theta/\sqrt{2} \\ -(\cos\theta-1)/2 & -\sin\theta/\sqrt{2} & (\cos\theta+1)/2 \end{pmatrix}$$

čo sú očividne odlišné vzťahy než tie v *základnej* reprezentácii z kap. II.2.1 (kde žiadny z generátorov nebol diagonálny).

Prípad $d = 5$, $j = 2$ by predstavoval 5 bázových vektorov $5 \times 1$ a $J_z = \mathrm{diag}[2, 1, 0, -1, -2]$, atď. Rotácia o $\theta = 2\pi$ v reálnom priestore znamená identitu, to je však splnené[33] len pre *celo*číselné $m$, čiže pre $j = 0, 1, ...$! Rovnako dostupné *polo*číselné $j$, vedúce na otočenie jednotlivých zložiek o $\pi$, čiže transformáciu $v \to -v$, teda *nemôžu* reprezentovať grupu SO(3). Inými slovami, reprezentácie algebry $\mathfrak{so}(3)$ generujú reprezentáciu *širšej* grupy transformácií[34], než je SO(3).

Osobitným prípadom je $\infty$-rozmerná, čiže *spojitá* reprezentácia, v ktorej transformovaným objektom je *hladká spojitá* funkcia - pole $\psi(\vec{r})$ (bázu tvorí nekonečný počet $\delta$-funkcií).[35] Generátormi v tomto prípade sú (namiesto matíc) *diferenciálne* operátory pôsobiace na $\psi(\vec{r})$. Keďže *aktívna* rotácia v 2D o uhol $\theta$ je ekvivalentná pasívnej rotácii súradníc o uhol $-\theta$, platí

$$\mathcal{R}_\theta\psi(\vec{r}) = \psi(\mathcal{R}_\theta^{-1}\vec{r}) \; = \; \psi(\vec{r} + \Delta\vec{r}) = \left[1 + \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right) + ...\right]\psi(\vec{r})$$

kde (Taylorovým rozvojom $\cos\theta$ a $\sin\theta$ v matici $\mathcal{R}_\theta^{-1}$ v kartézskej reprezentácii)

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \Delta\vec{r} = \mathcal{R}_\theta^{-1}\vec{r} - \vec{r} = \mathcal{R}_\theta^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ... = \begin{pmatrix} -y\theta - ... \\ x\theta - ... \end{pmatrix}$$

Dosadením $\Delta x, \Delta y$ do predchádzajúceho vzťahu a porovnaním s definičným vzťahom pre generátor $J$ dostávame

$$\mathcal{R}_\theta\psi(\vec{r}) = e^{i\theta J}\psi(\vec{r}) = [1 + i\theta J + ...]\,\psi(\vec{r}) \; = \; \left[1 - \theta\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right) + ...\right]\psi(\vec{r})$$

Stotožnenie $J = -i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$ dáva $\mathcal{R}_\theta = e^{i\theta J}$, aj po dopočítaní rozvoja do vyšších mocnín $\theta$. V úlohe *generátoru rotácií* v SO(2) spoznáme (podľa očakávania) známy predpis pre operátor momentu hybnosti (pri $\hbar = 1$). Alternatívne by sme mohli prejsť k polárnym súradniciam a zopakovať postup, čo by nás priviedlo k výrazu $J = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}$. Periodicita funkcie $\mathcal{R}_\theta$ modulo $2\pi$ a požiadavka jednoznačnosti zas vedú k *celočíselným* vlastným hodnotám[36] operátoru $J$. Analogická úvaha platí v 3D, teda pre spojitú reprezentáciu SO(3).

[33] Vidíme to pomocou rozkladu na bázové vektory

$$e^{i\theta J_z}v = e^{i\theta J_z}(c_{-j}v_{-j} + ... + c_j v_j) = c_{-j}e^{i\theta(-j)}v_{-j} + ... + c_j e^{i\theta(j)}v_j$$

[34] Touto grupou, ako neskôr uvidíme, je SU(2), ktorej reprezentácie nie sú *obmedzené na reálne* vektorové priestory (tak ako SO(3)).

[35] V tomto prípade ide o reprezentáciu rotácie *priestorových* stupňov voľnosti *skalárneho poľa*, a nie *vnútorných* stupňov voľnosti $d$-rozmerných *vektorov* (ako v prípade $d$-rozmerných reprezentácií).

[36] Poznáme ich ako *kvantovanie* momentu hybnosti v jednotkách $\hbar$. Vo všetkých bezrozmerných algebrických úvahách $\hbar = 1$. S uvážením fyzikálneho rozmeru generátorov $J$ definujeme $\mathcal{R}_\theta = e^{i\theta J/\hbar}$.

### II.2.4 Fyzikálny význam reprezentácií.

Pre hlbšie pochopenie fyzikálneho obsahu reprezentácií z predchádzajúcej kapitoly a ich vzťahu k elementárnym časticiam si najprv stručne zhrňme predchádzajúce kapitoly. Každý operátor $\mathcal{R}_j$ grupy rotácií v *kartézskej* reprezentácii, s generátormi $J_j$ v tvare *ne*diagonálnych matíc, *rotuje* dané $d$-rozmerné vektory okolo osi $j$, pričom *zachováva* ich $j$-tú zložku (*nulová* transformácia $j$-tej zložky generovaná *ne*diagonálnym $J_j$), ale *mieša* ostatné zložky („prelieva" jednu do druhej). Všeobecnú priestorovú rotáciu (s miešaním *všetkých* zložiek) dosiahneme lineárnou kombináciou všetkých $\mathcal{R}_j$, pričom sa zachovávajú vlastné hodnoty Casimirovho operátoru $J^2$ (veľkosti vektorov).

V reprezentáciách s *diagonalizovaným*, t.j. Cartanovým generátorom $J_z$ komplexifikované generátory $J_\pm$ *ne*predstavujú rotácie ale „kvantované" *preskoky* medzi *rotačne symetrickými vlastnými* stavmi „Cartana" $J_z$. Počet týchto stavov určuje dimenziu reprezentácie $d$, ktorá súvisí so zachovávajúcou sa vlastnou hodnotou „Casimira" $J^2$. Práve takéto reprezentácie sú matematickým opisom transformácií v *abstraktných stavových* priestoroch kvantových objektov.

Napr. v prípade elektrónu v atóme vodíka je „Cartanom" operátor $z$-ovej zložky orbitálneho momentu hybnosti, $\hat{L}_z$, s bázou tvorenou $(2l+1)$ *sférickými harmonikami* $Y_{lm}(\theta,\varphi)$, a „Casimirom" je $\hat{L}^2$ s určitou vlastnou hodnotou $l$ pre každú atómovú podvrstvu. *Periodické* okrajové podmienky na guľovej ploche (čo je priestor v ktorom „žijú" funkcie $Y_{lm}$) vedú na *celočíselné* hodnoty $l$, každú s $(2l+1)$ celočíselnými hodnotami $m$. Každému $l$ teda odpovedá $(2l+1)$-rozmerný *abstraktný* priestor, v ktorom „žijú" *stavy* elektrónu, vyjadriteľné $(2l+1)$-rozmernými vektormi

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_{2l+1} \end{pmatrix}$$

teda ako superpozície bázových stavov s konkrétnou hodnotou $m$ (určujúcou $z$-ový priemet momentu hybnosti). Ide o $(2l+1)$-*rozmerné reprezentácie* SO(3). Pôsobenie operátorov $J_\pm$ odpovedá kvantovým preskokom medzi stavmi s dostupnými priemetmi orbitálneho momentu hybnosti v rámci podvrstvy.

Podstatou uvedenej schémy je *spojitá rotačná symetria* úlohy v 3D (obr. v predchádzajúcej kap.). Ak bázu $d$-rozmerného priestoru stavov vybudujeme z *vlastných* stavov jedného z generátorov symetrie, potom každému z týchto $2j+1$ bázových stavov bude prislúchať jedna z možných hodnôt príslušného *noetherovského náboja.* Takými sú aj stavy $|j,m\rangle$ - vlastné vektory diagonálneho generátoru $J_z$ s prislúchajúcimi hodnotami noetherovského náboja, napr. $m = +1, 0, -1$ pre $d = 3$. Pôsobením $J_z$ sa tieto vektory *nemenia* - pri rotácii okolo osi $z$ sa $z$-ový priemet momentu hybnosti - noetherovský náboj - *zachováva.* Pôsobením *ne*diagonálnymi $J_\pm$ (komplexifikovanými rotáciami okolo osí $x, y$) sa však bázové vektory *menia* - $z$-ový priemet *nie je* noetherovským nábojom *vzhľadom na takúto* transformáciu. Ak teda za *charakteristiku stavu* volíme $z$-ový noetherovský náboj, operátory $J_\pm$ *tento* náboj zvyšujú/znižujú.

Pre ľubovoľnú dimenziu $d$ abstraktných priestorov je užitočné vnímať $J_x, J_y, J_z$ ako generátory *pasívnych* rotácií fyzických 3D súradníc (teda rotácií *pozorovateľa*), vyvolávajúcich transformácie „pohľadu" pozorovateľa (čiže fyzikálneho opisu) týchto abstraktných priestorov. Vhodnosť takéhoto prístupu sa preukáže v nasledujúcich kapitolách.

Ako to všetko súvisí s elementárnymi časticami? Tieto vnímame ako excitácie príslušných polí, pričom každé z polí má $d$ vnútorných stupňov voľnosti - vnútorný $d$-rozmerný priestor stavov, vztýčený nad každým bodom časopriestoru. Časticu (ako stav poľa v danom bode) môžeme teda opísať určitým *vektorom* v $d$-rozmernej reprezentácii. Ak bázu tohto vektorového priestoru tvoríme z vlastných stavov generátoru komutujúceho s hamiltoniánom (napr. v atóme vodíka[37] $[\hat{L}_z, \hat{H}] = 0$), potom ide o

[37]Neuvažujeme tu spin, resp. spin-orbitálnu väzbu.

„stacionárne“ stavy častice. Zmena takéhoto stavu môže nastať len *interakciou* s iným objektom (časticou). Pôsobenie operátorov $J_\pm$ nepochybne znamená takúto interakciu. Časticovo orientovaný prístup teda ponúka nasledovnú interpretáciu: Stacionárne stavy elementárnych častíc látky odpovedajú vlastným stavom *diagonálnych* generátorov, a im odpovedajúce vlastné hodnoty sú ich *merateľnými* charakteristikami - noetherovskými nábojmi.[38] Generátory reprezentujú *sily* (t.j. častice „silových“ polí) pôsobiace na takto „noetherovsky nabité“ častice: Diagonálne generátory menia ich energiu a hybnosť, „náboj“ však zachovávajú, na rozdiel od *ne*diagonálnych generátorov - síl meniacich aj „náboje“.

Transformácie grúp symetrií teda vyjadrujú *interakcie* polí, a generátory týchto transformácií reprezentujú fundamentálne *sily* (resp. častice sprostredkujúce silové interakcie).

◇ ◇ ◇ ◇ ◇

## Dôležité závery:

• Ortogonálne transformácie grupy $\mathrm{O}(D)$, reprezentované maticami s *reálnymi* prvkami, zachovávajú veľkosti vektorov s *reálnymi* zložkami. Patria sem rotácie a zrkadlenia. Rotácie tvoria špeciálnu podgrupu $\mathrm{SO}(D)$, zachovávajúcu chiralitu transformovaných objektov.

• $D(D-1)/2$ generátorov transformácií grupy $\mathrm{SO}(D)$ definujeme ako hermitovské matice/operátory.

• Grupa SO(3) má jeden Casimirov operátor, ktorého vlastné hodnoty sú charakteristikami reprezentácií (určujúcimi ich rozmer). V každej reprezentácii SO(3) sú tri navzájom nekomutujúce bázové generátory - vlastné stavy (jediného) diagonálneho generátoru tvoria vhodnú bázu vektorového priestoru danej reprezentácie.

• Generátory rotácií SO(3) (v ľubovoľnej reprezentácii) spĺňajú rovnaké komutačné vzťahy ako operátory zložiek momentu hybnosti. Rotácie (ani infinitezimálne) okolo rôznych osí nekomutujú (ani v klasickom svete).

• Generátory rotácií v spojitej reprezentácii sú diferenciálnymi operátormi, ktoré odpovedajú operátorom zložiek momentu hybnosti z kvantovej mechaniky.

• V rámci ortogonálnych transformácií vektorov sa realizujú len *celo*číselné vlastné hodnoty $j$ Casimirovho operátoru. (V kvantovej mechanike tomu odpovedajú priemety orbitálneho momentu hybnosti v *celo*číselných násobkoch $\hbar$.) Lieova algebra $\mathfrak{so}(3)$ však pripúšťa možnosť „hustejšieho“ priestorového kvantovania. (Túto možnosť využívajú transformácie *unitárne*.)

# II.3 Unitárne transformácie.

## II.3.1 Unitárne grupy U($D$), SU($D$).

**Unitárna grupa U($D$)** v $D$-rozmernom priestore je tvorená množinou *unitárnych* matíc $\mathcal{U}$,

$$\underline{\mathcal{U}^\dagger \mathcal{U} = \mathbb{1}} \qquad \qquad \underline{\mathcal{U}^\dagger = \mathcal{U}^{-1}}$$

[38] Pre symetrie SO(3) sú noetherovskými nábojmi priemety momentu hybnosti, v prípade iných grúp symetrií ide aj o iné „náboje“.

Takéto transformácie pôsobia na vektory *komplexného* $d$-rozmerného vektorového priestoru

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ .. \\ \xi_d \end{pmatrix} \qquad\qquad \xi_j \in \mathbb{C}$$

a *zachovávajú normu komplexných* čísel a vektorov.[39] Špeciálnu podgrupu $\mathbf{SU}(D)$ tvoria matice spĺňajúce dodatočnú podmienku $\underline{\det(\mathcal{U}) = 1}$.

Prípad $D = 1$ odpovedá v *základnej* reprezentácii matici $1 \times 1$, čiže *komplexnému skaláru* $z = a + ib$. Požiadavka unitárnosti $z^\dagger z = 1$ znamená, že

$$|z| = zz^* = a^2 + b^2 = 1$$

čo je rovnica jednotkovej kružnice. Transformácie grupy U(1), čiže násobenie *jednotkovým* komplexným číslom, teda odpovedajú *rotáciám pozdĺž jednotkovej kružnice v komplexnej rovine* - zmene uhlu $\theta$ pri fixovanej norme (*jednému* stupňu voľnosti v 2D priestore).

Ľubovoľné komplexné číslo však môžeme vyjadriť aj ako maticu $2 \times 2$ (teda 2-rozmerná reprezentácia U(1)) definovaním jednotkovej a *imaginárnej* jednotkovej matice

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad z = a + ib = a\mathbb{1} + b\mathbb{i} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

*Jednotkové* komplexné číslo $z = a + ib \in \mathrm{U}(1)$, $a^2 + b^2 = 1$, má potom maticový tvar (Eulerov vzorec)

$$e^{i\theta} = \mathcal{R}_\theta^{U(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos\theta + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \sin\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \mathcal{R}_\theta^{SO(2)}$$

čo je matica štandardnej rotácie v SO(2) - transformácie SO(2) a U(1) sú tzv. *izomorfné*,[40]

$$\underline{\vec{v}\,' = \mathcal{R}_\theta^{U(1)}\,\vec{v} \;=\; \mathcal{R}_\theta^{SO(2)}\,\vec{v}}$$

Grupa SU(2) obsahuje (v základnej reprezentácii $d = D$) *unitárne* matice $2 \times 2$ s komplexnými prvkami

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} a - id & b - ic \\ -b - ic & a + id \end{pmatrix} \qquad\qquad \det(\mathcal{U}) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$$

Špeciálna podmienka je rovnicou jednotkovej *troj*plochy[41] v 4D. Grupa SU(2) teda obsahuje transformácie len s *tromi* stupňami voľnosti v 4D. V analógii s priradením

bod v 2D $\leftrightarrow$ komplexné číslo (bod na jednotkovej kružnici $\leftrightarrow$ jednotkové komplexné číslo)

uvažujme 4D priestor s jednou reálnou a *tromi* imaginárnymi (ortogonálnymi) osami, a definujme priradenie

bod v4D $\leftrightarrow$ **kvaternión**[42] $\mathbf{q} = (a, b, c, d) = a\mathbb{1} + b\mathbb{i} + c\mathbb{j} + d\mathbb{k}$

[39] V tomto zmysle sú unitárne transformácie obdobou ortogonálnych v abstraktnom priestore *komplexných* vektorov. Neexistuje jednoduché zobrazenie unitárnych transformácií do reálneho priestoru našej každodennej skúsenosti, musíme si preto vystačiť s abstraktnou matematickou argumentáciou.

[40] *Izomorfizmus* = zhoda zobrazení, 1:1.

[41] Analógia guľovej plochy v 3D alebo kružnice v 2D.

[42] Historicky sú kvaternióny predchodcami vektorov. W.R.Hamilton definoval vektor ako imaginárnu časť kvaterniónu. J.C.Maxwell sformuloval svoje rovnice elektromagnetizmu v jazyku kvaterniónov. V súčasnosti našli kvaternióny svoje uplatnenie v počítačovej grafike.

kde $\mathbb{1}, \mathbb{i}, \mathbb{j}, \mathbb{k}$ sú reálna a imaginárne jednotky - bázové kvaternióny, pre ktoré platia vzťahy

$$\underline{\mathbb{i}^2 = \mathbb{j}^2 = \mathbb{k}^2 = \mathbb{i}\mathbb{j}\mathbb{k} = -1} \qquad\qquad \mathbb{i}\mathbb{j} = -\mathbb{j}\mathbb{i} = \mathbb{k},\ \text{atď. cyklicky}$$

Kvaternióny sa sčítavajú *po zložkách* (ako vektory) a násobia *každá zložka s každou*, výsledkami sú opäť kvaternióny. Súčin kvaterniónov je asociatívny, ale *nie je* komutatívny.

Bázové kvaternióny môžeme reprezentovať jednotkovými maticami[43] $2 \times 2$

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{j} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{k} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

Ak pre kvaternión (v maticovom zápise) platí $\det(\mathbf{q}) = 1$, ide o *jednotkový* kvaternión, pričom $\mathbf{q}^\dagger\mathbf{q} = \mathbf{q}\mathbf{q}^\dagger = \mathbb{1}$, a maticový tvar kvaterniónu je identický s maticou $\mathcal{U} \in \mathrm{SU}(2)$. Množina všetkých jednotkových kvaterniónov tvorí jednotkovú trojplochu v 4D, definovanú špeciálnou podmienkou SU(2). Operácie násobenia jednotkovým kvaterniónom teda tvoria grupu SU(2) - grupu transformácií na jednotkovej *troj*ploche v 4D.

$$\text{jednotkové komplexné číslo} \leftrightarrow \mathcal{U} \in \mathrm{U}(1) \qquad\qquad \text{jednotkový kvaternión} \leftrightarrow \mathcal{U} \in \mathrm{SU}(2)$$

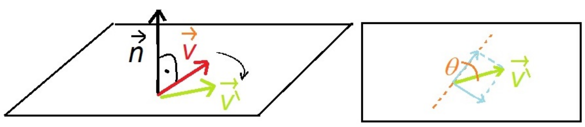
Podobne ako izomorfnosť grúp U(1)-SO(2), existuje aj súvis medzi grupami SU(2) a SO(3) - pomocou oboch môžeme rotovať *vektory* v 3D. Ak totiž *formálne* stotožníme *imaginárne* jednotky $\mathbb{i}, \mathbb{j}, \mathbb{k}$ s *kartézskymi* bázovými jednotkovými vektormi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, môžeme ľubovoľný kvaternión zapísať ako kombináciu *skaláru* (reálna zložka kvaterniónu) a *vektoru* (imaginárné zložky kvaterniónu)

$$\mathbf{q} = a + b\vec{i} + c\vec{j} + d\vec{k} = (a, \vec{v})$$

Ak položíme skalárnu časť $a = 0$, dostaneme tzv. *kvaterniónovú reprezentáciu* vektoru, $\mathbf{q} = (0, \vec{v})$. V nej pre súčin takýchto dvoch kvaterniónov platí[44]

$$\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 = ... = (-\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2\,,\ \vec{v}_1 \times \vec{v}_2)$$

Uvažujme ako príklad otáčanie vektoru $\vec{v}$ *kolmého* na os otáčania, určenú *jednotkovým* vektorom $\vec{n}$ (čiže $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$), o uhol $\theta$ (ľavotočivo). Pootočený vektor $\vec{v}\,'$ môžeme rozpísať ako súčet vektorov v smere pôvodného vektoru $\vec{v}$ a kolmého vektoru v rovine otáčania $\vec{v} \times \vec{n}$



$$\vec{v}\,' = \vec{v}\cos\theta + (\vec{v} \times \vec{n})\sin\theta =$$
$$= \vec{v}\cos\theta - (\vec{n} \times \vec{v})\sin\theta$$

Prepíšme túto rotáciu vektoru do *kvaterniónovej* reprezentácie: V nej sú vektory $\vec{n}, \vec{v}, \vec{v}\,'$ kvaterniónmi s *nulovou* reálnou časťou, $\mathbf{n} = (0, \vec{n})$, atď., a súčin $\vec{n} \times \vec{v}$ bude odpovedať kvaterniónu

$$\mathbf{n}\mathbf{v} = ... = (-\vec{n} \cdot \vec{v}, \vec{n} \times \vec{v}) = (0, \vec{n} \times \vec{v})$$

Uvedené pootočenie vektoru $\vec{v}$ má potom v kvaterniónovej reprezentácii tvar

$$\mathbf{v}' = (\cos\theta - \mathbf{n}\sin\theta)\mathbf{v} \qquad \text{pričom} \qquad \mathbf{n}^2 = (-\vec{n} \cdot \vec{n}, \vec{n} \times \vec{n}) = ... = -1$$

Jednotkový kvaternión $\mathbf{n}$ je teda 3-rozmerným analógom imaginárnej jednotky ($i^2 = -1$), a Eulerov vzorec zovšeobecnený pre kvaternióny je[45]

$$\underline{\mathbf{v}' = e^{-\mathbf{n}\theta}\mathbf{v}} \qquad \text{resp.} \qquad \mathbf{v} = e^{\mathbf{n}\theta}\mathbf{v}'$$

[43] Takáto voľba nie je jediná.

[44] Vo všeobecnosti, ak $a_1, a_2 \neq 0$, platí $\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 = ... = (a_1a_2 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2\,,\ a_1\vec{v}_2 + a_2\vec{v}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2)$.

[45] V našom prípade je $\theta > 0$ pri *ľavo*točivej rotácii. Pri obvyklejšej *pravo*točivej rotácii by bola analógia s Eulerovým vzorcom ešte zrejmejšia.

a reprezentuje rotáciu v *rovine kolmej* na $\vec{n}$.

Zovšeobecnenie uvažovanej konfigurácie $\vec{n} \perp \vec{v}$ na *ľubovoľný* uhol medzi vektormi znamená rozklad $\vec{v} = \vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp$ vzhľadom k smeru $\vec{n}$, pričom $\vec{v}_\parallel$ sa rotáciou nemení, a na $\vec{v}_\perp$ sa vzťahuje uvedená analýza. Takže transformačný vzťah je v kvaterniónovom zápise

$$\underline{\mathbf{v}' = e^{-\mathbf{n}\theta}\mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel}$$

a vo vektorovom tvare vedie na Rodriguesov vzorec z kap. II.2.2

$$\vec{v}\,' = \vec{v}\,'_\perp + \vec{v}_\parallel = ... = \cos\theta\,\vec{v} - \sin\theta\,(\vec{n}\times\vec{v}) + (1-\cos\theta)\,\vec{v}_\parallel =$$

$$= \underline{\cos\theta\,\vec{v} - \sin\theta\,(\vec{n}\times\vec{v}) + (1-\cos\theta)\,(\vec{v}\cdot\vec{n})\,\vec{n}}$$

(v prípade kolmých vektorov $\vec{v}\cdot\vec{n} = 0$ posledný člen vypadne). Dá sa ľahko ukázať, že[46]

$$\mathbf{v}_\parallel = e^{-\mathbf{n}\theta/2}e^{\mathbf{n}\theta/2}\mathbf{v}_\parallel = e^{-\mathbf{n}\theta/2}\mathbf{v}_\parallel e^{\mathbf{n}\theta/2} \qquad\qquad e^{-\mathbf{n}\theta}\mathbf{v}_\perp = e^{-\mathbf{n}\theta/2}e^{-\mathbf{n}\theta/2}\mathbf{v}_\perp = e^{-\mathbf{n}\theta/2}\mathbf{v}_\perp e^{\mathbf{n}\theta/2}$$

a transformačný vzťah nadobudne tvar[47]

$$\underline{\mathbf{v}' = e^{-\mathbf{n}\theta/2}\mathbf{v}\,e^{\mathbf{n}\theta/2} = \mathbf{q}^{-1}\mathbf{v}\mathbf{q}} \qquad\qquad \underline{\mathbf{q}\text{ resp. }\mathbf{q}^{-1} = e^{\pm\mathbf{n}\theta/2} = \mathbb{1}\cos\frac{\theta}{2} \pm (n_i\mathbb{i} + n_j\mathbb{j} + n_k\mathbb{k})\sin\frac{\theta}{2}}$$

Vo vyššie uvedenej maticovej reprezentácii $\mathbb{i}, \mathbb{j}, \mathbb{k}$ majú naše vektory-kvaternióny tvar

$$\mathbf{v} = v_i\mathbb{i} + v_j\mathbb{j} + v_k\mathbb{k} = \begin{pmatrix} -iv_k & v_i - iv_j \\ -v_i - iv_j & iv_k \end{pmatrix} \qquad \mathbf{n}\ \text{analogicky}$$

a vektor pootočený napr. okolo osi $z$ (t.j. $n_k = 1$, $n_i = n_j = 0$) tvar

$$\mathbf{v}\,' = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}(v_i\mathbb{i} + v_j\mathbb{j} + v_k\mathbb{k})\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} = ... = \begin{pmatrix} -iv_k & (v_i - iv_j)e^{i\theta} \\ -(v_i + iv_j)e^{-i\theta} & iv_k \end{pmatrix}$$

Porovnaním so všeobecným kvaterniónovým zápisom $\mathbf{v}\,' = \begin{pmatrix} -iv'_k & v'_i - iv'_j \\ -v'_i - iv'_j & iv'_k \end{pmatrix}$ dostávame

$$v'_i = v_i\cos\theta + v_j\sin\theta \qquad\qquad v'_j = -v_i\sin\theta + v_j\cos\theta \qquad\qquad v'_k = v_k$$

čo je výsledok zhodný s rotáciou $\vec{v}\,' = \mathcal{R}_z(\theta)\vec{v}$ v SO(3).

Keďže jednotkové kvaternióny odpovedajú maticiam $\mathcal{U} \in$ SU(2), môžeme namiesto $\mathbf{q}, \mathbf{q}^{-1}$ písať

$$\underline{\underline{\mathbf{v}\,' = \mathcal{U}_{\theta/2}\,\mathbf{v}\,\mathcal{U}^{-1}_{\theta/2}}}$$

Vidíme teda, že nielen rotačné matice grupy SO(3), ale aj jednotkové kvaternióny/matice grupy SU(2) generujú rotáciu *vektorov* v *reálnom* 3D priestore, aj keď podľa odlišného predpisu (sendvič namiesto násobenia zľava). V porovnaní s izomorfizmom U(1)$\leftrightarrow$SO(2) je tu však zásadný rozdiel: Uhlu rotácie v SU(2) (čiže v *komplexnom* priestore) odpovedá *dvojnásobný* uhol rotácie v SO(3) (v *reálnom* priestore)! Navyše kvaterniónom $\mathbf{q}$ aj $-\mathbf{q}$ (uhlu $+\theta/2$ aj $-\theta/2$) odpovedá rovnaká rotácia v SO(3)[48]. Ako uvidíme neskôr, tieto zdanlivo „nepodstatné technické detaily" majú dôležité dôsledky, vrátane jednej z najdôležitejších zákonitostí fyziky - *Pauliho vylučovacieho princípu.*

[46]Odpovedá to všeobecnému komutačnému vzťahu pre kvaternióny, $[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2] = \mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_2\mathbf{q}_1 = 2(\vec{q}_1 \times \vec{q}_2)$.

[47]Takýto vzťah zabezpečí transformáciu vektoru na *vektor*. Výsledok jednoduchého násobenia $e^{\mathbf{n}\theta}\mathbf{v}$ (v analógii s 2D) vo všeobecnosti nemusí mať rozumnú interpretáciu.

[48]Znamená to, že guľová plocha v 3D odpovedá *polovici troj*plochy v 4D.

### II.3.2 Generátory grúp U(1) a SU(2).

Generická *komplexná* matica $D \times D$ obsahuje $2D^2$ reálnych parametrov. Už v kap. I.2.1 sme však ukázali, že generátory unitárnych transformácií musia byť *hermitovské*, $X^\dagger = X$, čo znamená $D^2$ rovníc. Grupy U($D$) teda vyžadujú $2D^2 - D^2 = D^2$ generátorov (prislúchajúcich nezávislým stupňom voľnosti). Špeciálna podmienka $\det(\mathcal{U}) = 1$ poskytuje obmedzenie na *nulovú* stopu generátoru, čiže pre grupy SU($D$) potrebujeme $\underline{p = D^2 - 1}$ generátorov.

Grupe U(1) prislúcha *jeden* hermitovský generátor. Keďže ide o násobenie (jednotkovým) komplexným číslom, tento generátor musí byť *reálne číslo* (skalár). Vo všeobecnom formalizme Lieových grúp to znamená

$$\mathcal{U}(\theta) = e^{i\theta Q}$$

namiesto obvyklejšieho $e^{i\theta}$, kde $Q$ je (fyzikálne bezrozmerný jednotkový) generátor rotácie v komplexnej rovine. V zmysle Noetherovej teorémy ide o *zachovávajúcu sa* veličinu pri U(1) symetrii, pričom v kap. I.3.6 a I.3.8 sme ho dali do súvisu so zachovávajúcim sa *počtom častíc*. Tento noetherovský náboj môžeme teda nazývať **časticovým nábojom**.[49]

Definičné podmienky grupy SU(2) spĺňa (popri generickej matici $\mathcal{U}$ z predchádzajúcej kap.) aj matica

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} n_0 + in_3 & n_2 + in_1 \\ -n_2 + in_1 & n_0 - in_3 \end{pmatrix} \qquad \sum_{j=0}^{3} n_j^2 = 1 \qquad n_j \in \mathbb{R}$$

čo sa dá zapísať ako $\quad \mathcal{U} = n_0 \mathbb{1} + i(n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2 + n_3\sigma_3) = n_0\mathbb{1} + i\vec{n}\cdot\vec{\sigma}$

kde $\vec{\sigma}$ je „vektor“, ktorého zložkami sú **Pauliho matice**

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

spĺňajúce vzťahy

$$\sigma_j\sigma_k = \delta_{jk}\mathbb{1} + i\sum_{l=1}^{3}\epsilon_{jkl}\sigma_l \qquad \underline{\underline{[\sigma_j, \sigma_k] = 2i\epsilon_{jkl}\sigma_k}} \qquad \underline{\sigma_j\sigma_k = -\sigma_k\sigma_j} \ \text{ pre } \ j \neq k$$

Ide o alternatívnu reprezentáciu SU(2) ku kvaterniónovej reprezentácii z predchádzajúcej kapitoly. Bez újmy na všeobecnosti môžeme definovať[50] $\quad n_0 = \cos\frac{\theta}{2} \quad |\vec{n}| = \sqrt{\sum_{j=1}^{3} n_j^2} = \sin\frac{\theta}{2} \quad \frac{\theta}{2} \in (0, \pi)$ (spĺňajúce $\sum_{j=0}^{3} n_j^2 = 1$), a uvedený tvar matíc $\mathcal{U}$ prepísať ako[51]

$$\mathcal{U}_{\vec{n}}(\theta) = \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)\mathbb{1} + i\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)\vec{n}^o\cdot\vec{\sigma} = \underline{e^{i\theta\vec{n}^o\cdot\vec{\sigma}/2} \ = \ e^{i\theta\vec{n}^o\cdot\vec{J}}} \qquad \vec{n}^o = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

čo odpovedá matici *rotácie* o uhol $\theta$ okolo osi $\vec{n}^0$ s generátorom $\vec{J} = \vec{\sigma}/2$ (kap. II.2.2). Rotáciám vzhľadom na kartézske osi $x, y, z$ odpovedajú matice

$$\mathcal{U}_x(\theta_x) = e^{i\theta_x\sigma_x/2} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_x/2) & i\sin(\theta_x/2) \\ i\sin(\theta_x/2) & \cos(\theta_x/2) \end{pmatrix} \qquad \mathcal{U}_y(\theta_y) = e^{i\theta_y\sigma_y/2} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_y/2) & \sin(\theta_y/2) \\ -\sin(\theta_y/2) & \cos(\theta_y/2) \end{pmatrix}$$

[49]Nateraz ide o formálnu úpravu, ktorej význam pochopíme pri interakciách.

[50]Voľbou *polovičného* uhlu eliminujeme faktor 2 z komutačných vzťahov, čo priamo súvisí so vzťahom rotácií v SO(3) a SU(2).

[51]Použili sme rozklad do Taylorovho radu (Dodatok E), s uvážením $(\vec{n}^0\cdot\vec{\sigma})^2 = \mathbb{1}$.

$$\mathcal{U}_z(\theta_z) = e^{i\theta_z\sigma_z/2} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_z/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_z/2} \end{pmatrix}$$

Z uvedeného priamo vyplýva voľba bázových generátorov $J_j$ transformácií grupy SU(2) v tejto reprezentácii

$$\underline{J_j = \frac{\sigma_j}{2}} \qquad\qquad \underline{\underline{[J_j, J_k] = i\epsilon_{jkl}J_l}}$$

Tieto *hermitovské* matice generátorov tvoria algebru $\mathfrak{su}(2)$. Vidíme, že grupy SU(2) a SO(3) majú rovnaký počet generátorov aj *rovnakú* Lieovu algebru (t.j. komutačné vzťahy medzi generátormi), čo opäť svedčí o ich hlbokom súvise.

## II.3.3 Dôležité reprezentácie SU(2).

Obvyklejšou alternatívou ku *kvaterniónovej* reprezentácii vektorov z kap. II.3.1 je ich *hermitovská* reprezentácia z kap. II.3.2, v ktorej vektor $\vec{v}$ vyjadrujeme ako hermitovskú maticu (s nulovou stopou) v báze Pauliho matíc (kap. II.3.2)

$$V = \vec{v}\cdot\vec{\sigma} = v_x\sigma_x + v_y\sigma_y + v_z\sigma_z = \begin{pmatrix} v_z & v_x - iv_y \\ v_x + iv_y & -v_z \end{pmatrix} = V^\dagger$$

Jej transformácia prostredníctvom unitárnej *jednotkovej* matice $\mathcal{U}$

$$V' = \mathcal{U}V\mathcal{U}^\dagger = (\mathcal{U}^\dagger)^\dagger V^\dagger \mathcal{U}^\dagger = (\mathcal{U}V\mathcal{U}^\dagger)^\dagger = (V')^\dagger$$

nezmení jej hermitovosť ani stopu ($\det[\mathcal{U}] = 1$). Znamená to, že $V'$ je *hermitovskou reprezentáciou* pootočeného vektoru $\vec{v} \to \vec{v}\,'$. Ako príklad uveďme opäť rotáciu okolo osi $z$ s generátorom $J_z = \sigma_z/2$,

$$\begin{pmatrix} v'_z & v'_x - iv'_y \\ v'_x + iv'_y & -v'_z \end{pmatrix} = V' = e^{i\theta\sigma_z/2} V e^{-i\theta\sigma_z/2} = \begin{pmatrix} v_z & (v_x - iv_y)e^{i\theta} \\ (v_x + iv_y)e^{-i\theta} & -v_z \end{pmatrix}$$

čo sa opäť zhoduje s transformáciou $\vec{v}\,' = \mathcal{R}_z(\theta)\vec{v}$ grupy SO(3).

Keďže grupa SU(2) má identickú algebru s grupou SO(3), rovnakým spôsobom v reprezentácii s diagonálnym generátorom $J_z$ definujme zvyšovací, znižovací a Casimirov operátor pomocou operátorov $J_j$ z predchádzajúcej kapitoly

$$J_+ = (J_x + iJ_y)/\sqrt{2} \qquad J_- = (J_x - iJ_y)/\sqrt{2} \qquad J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 = J_+J_- + J_-J_+ + J_z^2$$

pre ktoré platia komutačné vzťahy

$$[J_+, J_-] = J_z \qquad [J_z, J_\pm] = \pm J_\pm \qquad [J^2, J_i] = 0 \qquad [J^2, J_\pm] = 0$$

Pre vlastné vektory diagonálneho operátoru $J_z$ platia vzťahy

$$\underline{J_z v_m = m v_m} \qquad J_z(J_\pm v_m) = J_z v_{m\pm1} = ... = (m \pm 1)v_{m\pm1} \qquad \underline{J^2 v_m = j(j+1)v_m}$$

pričom

$$\underline{m = j, j-1, ... -j+1, -j} \qquad \underline{j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, ...}$$

Hodnota $d = 2j + 1$ - počet bázových vektorov - určuje dimenzionalitu *vektorového* priestoru. Pojem *vektor* tu používame v „zovšeobecnenom" význame stĺpcovej matice ($d \times 1$), kde $d$ nemusí byť 3. Uvedené vzťahy tvoria *neredukovateľnú reprezentáciu* Lieovej algebry $\mathfrak{su}(2)$ grupy SU(2) v tomto priestore (pre dané $j$).

V prípade $j = 0$ čiže $d = 1$ (transformujúce sa „vektory“ sú *jedno*zložkové, bez vnútornej štruktúry, teda *skaláry*) sú generátory *nulovými* maticami $1 \times 1$, v súlade s komutačnými vzťahmi, a $\mathcal{U}_j = e^0 = \mathbb{1}$, čo je identita (skaláry sa rotáciami *ne*menia).

Pre $j = 1$ dostávame „obvyklý“ *vektorový* priestor $d = 3$ s identickými bázovými vektormi a *troj*rozmernou reprezentáciou operátorov ako v prípade $\mathfrak{so}(3)$ (kap. II.2.3).

Dôležitým je práve prípad $j = \frac{1}{2}$, čiže *dvoj*rozmerná reprezentácia s diagonálnym operátorom $J_z$ (ktorá v SO(3) *postrádala* fyzikálny význam), v tvare matíc $(2 \times 2)$

$$J_z = \frac{1}{2}\sigma_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad J_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

s dvomi *bázovými* vektormi s prislúchajúcimi vlastnými hodnotami

$$m = \pm\frac{1}{2} \qquad v_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ostatné operátory *v tejto báze* sú samozrejme

$$J_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(J_- + J_+) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sigma_x \qquad J_y = \frac{i}{\sqrt{2}}(J_- - J_+) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sigma_y$$

spĺňajúce komutačné vzťahy $[J_j, J_k] = i\epsilon_{jkl}J_l$. Táto reprezentácia je *definičnou* reprezentáciou $\mathfrak{su}(2)$. Objekty, na ktoré pôsobia transformačné matice v *tejto* reprezentácii, vyšpecifikujeme v kap. II.3.4.

Analogicky konštruujeme ľubovoľnú $d$-rozmernú reprezentáciu algebry $\mathfrak{su}(2)$. Reprezentáciu samotnej *grupy* SU(2) v $d$-rozmernom priestore dostaneme dosadením jej generátorov do vzťahov $\mathcal{U}_j = e^{i\theta J_j}$, a to pre *celo*číselné aj *polo*číselné hodnoty $j$. Vidíme teda, že algebra $\mathfrak{su}(2)$ „pokrýva“ nielen grupu SU(2), ale aj SO(3).

S unitárnymi transformáciami sme sa už stretli v kap. I.2, kde transformovanými objektami boli kvantovomechanické stavy - vektory Hilbertových priestorov s konečným i nekonečným počtom rozmerov, daných bázovými stavmi príslušných *hermitovských* operátorov, definujúcimi reprezentáciu. Pri spojitých unitárnych transformáciách týchto stavov,

$$\mathcal{U}_\theta = e^{i\theta\hat{G}} \cong 1 + i\theta\hat{G}$$

sú generátormi $\hat{G}$ priamo hermitovské operátory pozorovateľných veličín. Keďže $\mathfrak{su}(2)$ je algebrou „pokrývajúcou“ aj $\mathfrak{so}(3)$, bolo prirodzené definovať generátory $\mathfrak{so}(3)$ v kap. II.2.2 ako *hermitovské operátory pozorovateľných veličín*, v zhode s kvantovou mechanikou.

## II.3.4 Spinory.

V predchádzajúcich kapitolách sme ukázali, ako pomocou „sendviču“ matíc/operátorov $\mathcal{U} \in \mathrm{SU}(2)$ dokážeme rotovať objekty vo fyzickom 3D priestore, resp. (pri *pasívnej* transformácii) rotovať *pozorovateľa* a tým aj jeho opis objektov vsadených do 3D priestoru, rovnako ako násobením maticami SO(3). Čo však reprezentujú *samostatné* matice grupy SU(2), pôsobiace *zľava* (teda nie ako sendvič) na daný objekt?

Keďže grupa SU(2) zdieľa spoločnú algebru s grupou SO(3), ktorej generátory sú generátormi *rotácií* v 3D, predstavujú aj samostatné matice $\mathcal{U} \in \mathrm{SU}(2)$ rotácie, ale v *komplexnom* priestore. Transformujúce sa objekty (na ktoré tieto matice pôsobia) teda „žijú“ v takomto komplexnom priestore - sú *komplexnými* (stĺpcovými $d$-komponentnými) „vektormi“. Prezentovaný úzky súvis rotácií prostredníctvom SU(2) a SO(3) pritom znamená *väzbu* tohto komplexného priestoru na reálny („náš“ fyzický) 3D priestor - reálnemu 3D priestoru *priraďujeme* odpovedajúci komplexný priestor.[52] Rovnako, ako hneď ukážeme, každému reálnemu 3D objektu (napr. „štandardnému“ trojkomponentnému vektoru v „našom“ priestore) môžeme priradiť odpovedajúci objekt ($d$-komponentný komplexný „vektor“) vo svojom komplexnom priestore.

V *základnej dvoj*rozmernej reprezentácii SU(2), čiže $j = \frac{1}{2}$, sú takýmito objektami *dvoj*komponentné vektory s *komplexnými* zložkami, teda objekty určené vo všeobecnosti *štyrmi* reálnymi číslami - stupňami voľnosti. Dajú sa vyjadriť ako lineárne kombinácie (s komplexnými koeficientami) bázových dvojkomponentných vlastných vektorov diagonálneho operátoru $J_z$ (kap. II.3.3)

$$v_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\uparrow\rangle_z \qquad v_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\downarrow\rangle_z \qquad J_z\, v_{\pm 1/2} = \pm\frac{1}{2}\, v_{\pm 1/2}$$

ktoré obvykle označujeme ako „*spin hore*“, resp. „*spin dole*“, a v kvantovej fyzike ich stotožňujeme s dvoma možnými priemetmi interného *momentu hybnosti* v abstraktnom vnútornom priestore - **spinu** ($\hbar = 1$). Takéto objekty sa preto nazývajú **spinory**. V kontexte tejto kapitoly je však spinor rýdzo matematickým objektom, podobne ako *vektor.*[53] Líšia sa navzájom tým ako sa *transformujú pri rotáciách* - spinor násobením maticami SU(2) a vektor maticami SO(3). V Dodatku F je vysvetlený zápis spinorov pomocou premenných $v, \vartheta, \theta, \alpha$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{v}\,\cos\frac{\vartheta}{2}\, e^{i(\alpha+\theta)/2} \\ \sqrt{v}\,\sin\frac{\vartheta}{2}\, e^{i(\alpha-\theta)/2} \end{pmatrix}$$

ako aj ich zobrazenie do reálneho 3D priestoru a súvis s vektorom $\vec{v}(v_x, v_y, v_z) = \vec{v}(v, \vartheta, \theta)$. Oproti odpovedajúcemu vektoru má spinor prebytočný stupeň voľnosti $\alpha$, ktorý nemá interpretáciu v priestore reálnych vektorov.

Dá sa ukázať (dosadením), že vzťah medzi odpovedajúcou si dvojicou vektor-spinor, resp. ich zložkami, môžeme vyjadriť aj pomocou Pauliho matíc

$$\underline{\vec{v} = \psi^\dagger \vec{\sigma} \psi} \qquad v_j = \psi^\dagger \sigma_j \psi$$

Ako príklad uvažujme rotáciu vektoru $\vec{v}$ okolo osi $z$ a jej projekciu do odpovedajúceho spinorového komplexného priestoru: Nástrojom takejto rotácie v rámci grupy SU(2) (kap. II.3.1, II.3.2) je operátor $\mathcal{U}_{\theta/2} = e^{i\sigma_z\theta/2} = \cos\frac{\theta}{2}\mathbb{1} + i\sin\frac{\theta}{2}\sigma_z$ , ktorý na spinor $\psi$ pôsobí ako $\psi \to \psi' = \mathcal{U}_{\theta/2}\psi$ . Rotácia odpovedajúceho vektoru je pritom

$$\vec{v} \to \vec{v}\,' = \left(\psi^\dagger \mathcal{U}^{-1}_{\theta/2}\right) \vec{\sigma}\, \left(\mathcal{U}_{\theta/2}\psi\right) \qquad v'_j = \psi^\dagger e^{-i\sigma_z\theta/2}\sigma_j e^{i\sigma_z\theta/2}\psi$$

S využitím Eulerovho vzorca a vlastností Pauliho matíc $\sigma_j\sigma_k = \delta_{jk}\mathbb{1} + i\epsilon_{jkl}\sigma_l$ dostávame pre jednotlivé zložky pôvodného a transformovaného vektoru

$$v'_x = (\psi^\dagger\sigma_x\psi)\cos\theta + (\psi^\dagger\sigma_y\psi)\sin\theta = v_x\cos\theta + v_y\sin\theta \qquad v'_y = ... = -v_x\sin\theta + v_y\cos\theta \qquad v'_z = v_z$$

čo je rotácia vektoru $\vec{v}$ v 3D okolo osi $z$ o uhol $\theta$.

$$\mathcal{U}_{\pm\theta/2} = e^{\pm i\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}/2} \qquad \leftrightarrow \qquad \mathcal{R}_\theta = e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{J}}$$

[52] Ide o abstraktný, fyzikálne nepozorovateľný interný priestor priradený každému bodu fyzického priestoru.

[53] Pojem *vektor* sme doteraz často používali v abstraktnom algebrickom význame ako maticu ($n \times 1$), teda stĺpec čísel. V tomto zmysle aj spinory sú takýmito vektormi - maticami ($2 \times 1$) s *komplexnými* prvkami. V ďalšom texte budeme pojem *vektor* častejšie chápať v špecifickom význame ako maticu s *reálnymi* prvkami ($3 \times 1$) v 3D, resp. ($4 \times 1$) v 4D časopriestore. Rozdiel medzi takto chápaným vektorom a spinorom (a skalárom) je v spôsobe, akým sa transformujú.

Pasívna rotácia 3D priestoru (pozorovateľa, súradnicovej sústavy) o uhol $\theta$ sa projektuje do rotácie spinorového priestoru o uhol $\frac{\theta}{2}$. Rotácia v 3D o 360° znamená v spinorovom priestore $\underline{\mathcal{U}_\pi \psi = -\psi}$, teda *zmenu znamienka* spinoru.[54] Dva spinorové stavy $|\uparrow\rangle_z$ a $|\downarrow\rangle_z$, ktoré sa javia ako *antiparalelné* v 3D, sú *ortogonálne* v spinorovom priestore.[55]

Pasívna rotácia 3D priestoru o 180° znamená *výmenu vzájomnej polohy dvojice* objektov. Im odpovedajúce spinory sa pritom v *spinorovom* priestore otočia každý o 90° (v rovnakom zmysle), dohromady teda o 180° - ich spoločná hodnota $\psi \to -\psi$. Priamym dôsledkom je Pauliho vylučovací princíp (viac v kap. III.2.8).

◇◇◇◇◇

## Dôležité závery:

• Unitárne transformácie grúp SU($D$) zachovávajú veľkosť/skalárny súčin vektorov so zložkami z oboru *komplexných* čísel - oproti SO($D$) rozširujú pôsobnosť z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{C}$. SU(2) reprezentuje rotácie v dvoch *komplexných* rozmeroch.

• Grupa SU(2) má rovnakú algebru ako SO(3), s $D^2 - 1 = 3$ generátormi rotácií. Zobrazenie medzi nimi však nie je jedno-jednoznačné: Rotácii o uhol $\theta$ v SO(3) odpovedajú v reálnom 3D priestore rotácie SU(2) o dva rôzne uhly $\pm\theta/2$. Pre 3D rotácie je teda SU(2) všeobecnejšou (fundamentálnejšou).

• SU(2) má reprezentácie odpovedajúce aj *polo*číselným vlastným hodnotám $j$ Casimirovho operátoru. (V kvantovej mechanike tomu odpovedá priestorové kvantovanie aj poločíselného momentu hybnosti - spinu 1/2.)

• Rotácia o $2\pi$ v SU(2) predstavuje identitu *vektoru* $\vec{v}$ (ako v SO(3)), a transformáciu $\psi \to -\psi$ pre *jemu odpovedajúci spinor*. Identitou pre spinor je rotácia o $4\pi$. (Touto vlastnosťou sa vyznačujú častice fermióny, a súvisí s Pauliho vylučovacím princípom.)

# II.4 Lorentzovské transformácie.

## II.4.1 Lorentzovské grupy O(1,3), SO(1,3).

**Lorentzovská grupa O(1,3)**[56] je ortogonálnou grupou transformácií $\mathcal{A} := \Lambda$

$$v^\mu \to v'^\mu = \Lambda^\mu_\nu v^\nu$$

[54] V kvantovej mechanike to nepredstavuje fyzikálny problém, keďže merateľnou je len veličina $|\psi|^2$.

[55] Označenie smeru priemetu spinu „*hore*“ a „*dole*“ sa vzťahuje na pozorovateľa v 3D priestore, tam by však tieto smery odpovedali *tomu istému* stupňu voľnosti. V spinorovom priestore ide o dva *nezávislé* stupne voľnosti.

[56] Parametre sú určené voľbou metriky: Prvá a druhá číslica určujú počet kladných a záporných diagonálnych členov matice metriky $\eta_{\mu\nu}$.

medzi *inerciálnymi* sústavami v Minkowského časopriestore, zachovávajúcich veľkosti *štvorvektorov* - štvorvektorový skalárny súčin (kap. I.3.1)

$$v_\mu v^\mu = v^\mu \eta_{\mu\nu} v^\nu = v^0 v^0 - \vec{v}\cdot\vec{v} \qquad\qquad \eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Zachovanie skalárneho súčinu pred a po transformácii, $v_\mu v^\mu = v'_\mu v'^\mu$, znamená

$$v_\mu v_\nu \eta^{\mu\nu} = \Lambda^\sigma_\mu v_\sigma \Lambda^\tau_\nu v_\tau \eta^{\mu\nu} \qquad \rightarrow \qquad \eta^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\sigma \Lambda^\nu_\tau \eta^{\sigma\tau} \qquad\qquad \underline{\eta = \Lambda^T \eta \Lambda}$$

čo je *definičná* podmienka lorentzovskej grupy. Ak by sme Minkowského metriku nahradili euklidovskou, $\eta \to \mathbb{1}$, dostali by sme definičnú podmienku grúp O($D$). Transformácie grupy O(1,3) budú teda *časo*priestorovými analógiami transformácií O(3) - ortogonálnymi transformáciami v *štvor*rozmernom časopriestore (s Minkowského metrikou).

Keďže $\det(\eta) = -1$, musí platiť $[\det(\Lambda)]^2 = 1$, a teda $\det(\Lambda) = \pm 1$ - vtedy hovoríme o *rozšírenej* lorentzovskej grupe O(1,3). Podmienke $\det(\Lambda) = -1$ vyhovujú *priestorové preklopenie súradníc*, čiže zmena *parity*, a *otočenie času*

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(\mathcal{P}) = \det(\mathcal{T}) = -1$$

Podmienka $\det(\Lambda) = +1$ znamená zachovanie *chirality* (pravá ruka ostáva pravou, kap. II.4.3), a podmienka $\Lambda^0_0 > 0$ zachovanie *orientácie času*. Tieto dodatočné podmienky definujú *špeciálnu* podgrupu **SO(1,3)**.

Z podmienky ortogonality matíc vyplýva $D(D-1)/2 = 6$ nezávislých parametrov. Keďže priestorová časť metrickej matice $\eta$ je $-\mathbb{1}$, definičnú podmienku lorentzovskej grupy SO(1,3) spĺňajú matice *priestorových* rotácií SO(3) rozšírené o časový riadok

$$\mathcal{R}_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_j^{3\times 3} \end{pmatrix}$$

Ďalším prvkom grupy SO(1,3) je *boost* $\mathcal{B}$ - prechod medzi inerciálnymi sústavami so vzájomnou rýchlosťou $u$ v smere *jednotlivých* osí (bez rotácie). Tak ako v prípade priestorových rotácií dochádza k „miešaniu“ priestorových súradníc, lorentzovský boost je „miešaním“ príslušnej priestorovej súradnice s *časovou* súradnicou (ktorá je rovnocenná priestorovým, kap. I.3.1). Môžeme teda boost považovať za *rotáciu* v *časo*priestorových rovinách. Minkowského metrika $\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ je však odlišná od priestorovej euklidovskej, $\mathrm{diag}(1,1,1)$. Kým v euklidovskej rovine $tx$ by zachovanie normy vektoru znamenalo $(ct)^2 + x^2 = \textit{konšt.}$, čo je rovnica *kružnice*, v Minkowského rovine je to $(ct)^2 - x^2 = \textit{konšt.}$, čo je rovnica *hyperboly* (platí $\cosh^2\phi - \sinh^2\phi = 1$). Konštrukciou majú preto tieto matice tvar 4D *rotačných* matíc v rovinách $tx, ty$ a $tz$, ale goniometrické funkcie nahrádzame hyperbolickými[57]

$$\mathcal{B}_x(\phi) = \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi & 0 & 0 \\ \sinh\phi & \cosh\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B}_y(\phi) = \begin{pmatrix} \cosh\phi & 0 & \sinh\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh\phi & 0 & \cosh\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[57]Podobne ako v prípade rotácií, znamienko pri nepárnej funkcii $\sinh\phi$ určuje *smer* boostu, resp. aktívnu/pasívnu transformáciu.

$$\mathcal{B}_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cosh\phi & 0 & 0 & \sinh\phi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\phi & 0 & 0 & \cosh\phi \end{pmatrix}$$

Hyperbolický „uhol“ $\phi$ je tzv. **rapidita**, pre ktorú platí

$$\tanh\phi = \frac{u}{c} = \beta \in (-1,1) \qquad \cosh\phi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma \qquad \sinh\phi = \beta\gamma$$

kde už spoznávame známe relativistické výrazy.

### II.4.2 Generátory grupy SO(1,3).

Pre *infinitezimálnu* transformáciu platí $\Lambda = \mathbb{1} + i\omega \cdot X$ ($\omega \to 0$ - matica transformačných parametrov odovedajúcich jednotlivým zložkám matice generátorov $X$). Z definičnej podmienky $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ s uvážením $\eta^2 = \mathbb{1}$ a do prvého rádu v $\omega$ platí

$$X^T = -\eta X \eta \qquad \text{čo znamená} \qquad X_{\mu\mu} = 0 \qquad X_{0j} = X_{j0} \qquad X_{jk} = -X_{kj}$$

Z 16 prvkov matice $4 \times 4$ je 10 fixovaných týmito rovnicami, a na zostavenie Lieovej algebry grupy SO(1,3) treba nájsť 6 nezávislých operátorov a komutačné vzťahy medzi nimi.

Prvú trojicu generátorov SO(1,3) tvoria generátory *priestorových* rotácií $J_j$ z kap. II.2.2 (rozšírené o časový riadok a stĺpec na matice $4 \times 4$)

$$J_x = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_y = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_z = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Generátory boostu $K$ definujme prostredníctvom *infinitezimálnej* zmeny $\mathcal{B} = \mathbb{1} + i\omega K$ ($\omega \to 0$). Boost v smere $x$ „mieša“ čas a $x$-ovú súradnicu, nemení však súradnice $y, z$ (naopak, tie sa miešajú pri rotácii okolo osi $x$). V $4 \times 4$ matici generátoru $K_x$ budú teda „aktívnymi“ len členy $k_{11}, k_{12,} k_{21}, k_{22}$ (odpovedajúce časovej *aj* $x$-ovej súradnici). Dosadením takejto matice do podmienky pre $K_x$, resp. opakovaním procedúry pre boost v smeroch $y, z$ dostávame generátory v tvare *ne*hermitovských matíc

$$K_x = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad K_y = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad K_z = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Transformačné matice boostu z predchádzajúcej kapitoly dostaneme zo vzťahu $\mathcal{B}_j(\phi) = e^{i\phi K_j}$ rozvojom funkcie s maticovým exponentom do Taylorovho radu (Dodatok E).[58]

Komutačné vzťahy medzi generátormi sú

$$\underline{[J_j, J_k] = i\epsilon_{jkl} J_l} \qquad \underline{[J_j, K_k] = i\epsilon_{jkl} K_l} \qquad \underline{[K_j, K_k] = -i\epsilon_{jkl} J_l}$$

Vidíme, že kým kombináciou dvoch rotácií je ďalšia rotácia, kombináciou dvoch boostov je tiež *rotácia*.[59] Vzťah medzi generátormi lorentzovských transformácií a *všeobecnými* maticami $\Lambda$ grupy SO(1,3) môžeme vyjadriť v tvare

$$\underline{\Lambda(\vec{\theta}, \vec{\phi}) = e^{i(\vec{J}\cdot\vec{\theta} + \vec{K}\cdot\vec{\phi})}}$$

[58] Podobným spôsobom z generátorov $J_i$ grupy SO(3) spätne odvodíme rotačné matice $\mathcal{R}_j = e^{i\phi J_j}$.

[59] Dosledkom tohto faktu je tzv. *Thomasova precesia* elektrónového spinu v atóme.

(zložky vektorov $\vec{J}, \vec{K}$ sú matice), resp. pre infinitezimálne transformácie

$$\Lambda(\vec{\theta}, \vec{\phi}) \cong \mathbb{1} + i(\vec{J} \cdot \vec{\theta} + \vec{K} \cdot \vec{\phi}) \qquad \Lambda^{\mu}_{\nu} \cong \delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}_{\nu} \qquad \omega^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \\ \phi_1 & 0 & \theta_3 & -\theta_2 \\ \phi_2 & -\theta_3 & 0 & \theta_1 \\ \phi_3 & \theta_2 & -\theta_1 & 0 \end{pmatrix}$$

kde $\omega^{\mu}_{\nu}$ je matica „uhlov“ všetkých infinitezimálnych časopriestorových rotácií, ktorej kovariantný tvar je *antisymetrická* matica[60]

$$\omega_{\mu\nu} = \eta_{\mu\sigma}\omega^{\sigma}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \\ -\phi_1 & 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ -\phi_2 & \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\phi_3 & -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{pmatrix} = -\omega_{\nu\mu} \qquad \begin{aligned} \theta_j &= -\tfrac{1}{2}\epsilon_{jkl}\omega_{kl} \\ \phi_j &= \omega_{0j} \end{aligned}$$

V 3D priestore je rotácia v rovine (napr. $xy$) rotáciou okolo osi kolmej na túto rovinu ($z$). Vo viac ako 3-rozmerných priestoroch však takáto os rotácie nie je jednoznačne definovaná, v 4D časopriestore preto často označujeme generátory rotácií prostredníctvom *rovín otáčania* (namiesto osí otáčania). Podobne boost v smere $j$ je miešaním súradnice $j$ a času, čiže rotáciou v rovine $0j$. Môžeme teda zaviesť *antisymetrickú* maticu generátorov rotácií $J^{\mu\nu}$ (prvkami matice $J^{\mu\nu}$ sú tiež matice)

$$J^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -K_1 & -K_2 & -K_3 \\ K_1 & 0 & J_3 & -J_2 \\ K_2 & -J_3 & 0 & J_1 \\ K_3 & J_2 & -J_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} J_j &= \tfrac{1}{2}\epsilon_{jkl}J^{kl} \\ K_j &= J^{0j} \end{aligned}$$

Dostávame tak kompaktný spôsob zápisu Lieovej algebry SO(1,3)

$$\underline{\Lambda(\omega^{\mu\nu}) = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}}} \qquad \underline{[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = -i(\eta^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}J^{\nu\rho} - \eta^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} + \eta^{\nu\sigma}J^{\mu\rho})}$$

Všimnime si tiež, že pre zložky matíc generátorov priestorových rotácií $J_j$ platí $(J_j)_{kl} = -i\epsilon_{jkl}$, a pre *časo*priestorové rotácie platí zovšeobecnený vzťah

$$(J^{\sigma\rho})^{\mu}_{\nu} = i(\eta^{\sigma\mu}\delta^{\rho}_{\nu} - \eta^{\rho\mu}\delta^{\sigma}_{\nu}) \qquad \text{a teda} \qquad \omega^{\mu}_{\nu} = -i\frac{\omega_{\sigma\rho}}{2}(J^{\sigma\rho})^{\mu}_{\nu}$$

### II.4.3 Dôležité reprezentácie SO(1,3)/O(1,3).

Ako sme už uviedli k kap. II.2.4, reprezentácie grúp symetrií chceme využiť na matematický opis elementárnych častíc ako stavov/excitácií príslušných polí. Ukázalo sa totiž, že práve spôsob, akým sa jednotlivé častice transformujú, je ich adekvátnou charakteristikou.[61] Keďže takýto opis má spĺňať požiadavky špeciálnej relativity, musí ísť o reprezentácie lorentzovskej grupy transformácií - *časo*priestorových rotácií, rozšírených o diskrétne symetrie (parita, inverzia času), a neskôr rozšírených aj o *časo*priestorové translácie (kap. II.4.5). Jednotlivé druhy polí sa pritom líšia počtom vnútorných stupňov voľnosti, a reprezentujeme ich rôznymi druhmi stĺpcových vektorov (skaláry, spinory, štvorvektory,...). Úlohou je teda nájsť reprezentácie lorentzovskej grupy vhodné pre jednotlivé druhy fyzikálnych polí.

[60]Podobne môžeme zaviesť kontravariantný tvar lorentzovskej grupy $\Lambda^{\mu\nu}$ ako $\Lambda^{\mu\nu}\eta_{\nu\sigma} = \Lambda^{\mu}_{\sigma}$.

[61]Častice mikrosveta nemajú tvar, vzhľad ani naozajstnú veľkosť - identifikovať ich môžeme len na základe ich „správania“. Aj vlastnosti ako elektrický náboj či hmotnosť sa manifestujú len v interakciách.

Definujme pomocou generátorov $J_j, K_j$ grupy SO(1,3) z predchádzajúcej kapitoly nové, *hermitovské* operátory[62]

$$N_j^+ = \frac{1}{2}(J_j + iK_j) \qquad\qquad N_j^- = \frac{1}{2}(J_j - iK_j)$$

pre ktoré platia komutačné vzťahy

$$\underline{[N_j^+, N_k^+] = i\epsilon_{jkl}N_l^+} \qquad\qquad \underline{[N_j^-, N_k^-] = i\epsilon_{jkl}N_l^-} \qquad\qquad [N_j^+, N_k^-] = 0$$

Dostávame hneď *dve* navzájom sa *neprekrývajúce* (viď posledný komutátor) kópie už dôverne známej algebry $\mathfrak{su}(2)$, označované $\mathfrak{su}(2)^+$ a $\mathfrak{su}(2)^-$. To potvrdzuje fundamentálny význam tejto algebry. Lorentzovské transformácie grupy SO(1,3) teda nahrádzame *v okolí identity* (čiže spojité infinitezimálne transformácie) grupou SU(2)⊗SU(2) a jej algebrou $\mathfrak{su}(2)^+ \otimes \mathfrak{su}(2)^-$ s operátormi $N_j^+, N_j^-$. Jednotlivé jej reprezentácie sú potom dané *dvojicami* čísel $(j^+, j^-)$, (odpovedajúcich $\mathfrak{su}(2)^+$ a $\mathfrak{su}(2)^-$). V rámci každej podalgebry danému $j^\pm$ odpovedá $2j^\pm + 1$ bázových stavov, maticová reprezentácia $(j^+, j^-)$ teda vyžaduje $d = d^+d^- = (2j^+ + 1)(2j^- + 1)$ nezávislých komponent (sú $d$-rozmerné).

Veličinu $j = j^+ + j^-$ nazývame **spin**. Ako vyplýva z predchádzajúcich kapitol, spin súvisí s 3D *priestorovými rotáciami* (teda *nie* v 4D Minkowského časopriestore) - tieto tvoria *pod*grupu lorentzovských *časo*priestorových rotácií. Maticové reprezentácie tejto podgrupy sú určené práve hodnotou $j$, čiže vyžadujú $d = 2j + 1$ nezávislých komponent.[63]

**Skalárna reprezentácia (0,0).**
Ak $j^\pm = 0$, čiže $d^\pm = 2j^\pm + 1 = 1$, ide o triviálnu 1-rozmernú, tzv. **skalárnu reprezentáciu**. Generátory sú reprezentované maticami $1 \times 1$, čiže sú to komplexné *skaláry*, rovnako ako objekty, na ktoré pôsobia (skalárne polia bez vnútornej štruktúry). Každá reprezentácia musí spĺňať komutačné vzťahy, a jediným riešením je v tomto prípade $N_j^+ = N_j^- = 0$ a teda $J_j = K_j = 0$ a $e^0 = 1$, čiže *žiadna zmena*. Táto neredukovateľná reprezentácia poskytuje adekvátny relativistický (lorentzovsky kovariantný) opis fyzikálnych objektov so spinom $j = 0$, nemeniacich sa pri lorentzovských transformáciách - tzv. **skalárnych častíc/polí**.[64]

**Spinorová reprezentácia ($\frac{1}{2}$,0).**
Ak $j^+ = \frac{1}{2}$, $j^- = 0$, potom $d^+ = 2$, $d^- = 1$. Ide teda o 2-rozmernú reprezentáciu, kde transformujúcimi sa objektami sú dvojprvkové objekty (matice 2×1) - *spinory* (kap. II.3.4), čiže o tzv. **spinorovú reprezentáciu**. Operátormi transformácií budú matice 2×2. Kým v *jedno*rozmernej reprezentácii $\mathfrak{su}(2)^-$ máme $N_j^- = 0$ a teda $\underline{J_j = iK_j}$, v *dvoj*rozmernej reprezentácii algebry $\mathfrak{su}(2)^+$ je $N_j^+ = \frac{\sigma_j}{2}$ (kap. II.3.3), čiže $(J_j + iK_j)/2 = \underline{iK_j = J_j = \sigma_j/2}$. V reprezentácii ($\frac{1}{2}$,0) majú teda rotácia a boost tvar

$$\mathcal{R}_\theta = e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}/2} \qquad\qquad \mathcal{B}_\phi = e^{\vec{\phi}\cdot\vec{\sigma}/2}$$

Dosadením Pauliho matíc a Taylorovým rozvojom dostávame pre jednotlivé zložky výrazy

$$\mathcal{R}_x(\theta_x) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_x}{2} & i\sin\frac{\theta_x}{2} \\ i\sin\frac{\theta_x}{2} & \cos\frac{\theta_x}{2} \end{pmatrix} \qquad \mathcal{R}_y(\theta_y) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_y}{2} & \sin\frac{\theta_y}{2} \\ -\sin\frac{\theta_y}{2} & \cos\frac{\theta_y}{2} \end{pmatrix} \qquad \mathcal{R}_z(\theta_z) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta_z}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta_z}{2}} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}_x(\phi_x) = \begin{pmatrix} \cosh\frac{\phi_x}{2} & \sinh\frac{\phi_x}{2} \\ \sinh\frac{\phi_x}{2} & \cosh\frac{\phi_x}{2} \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B}_y(\phi_y) = \begin{pmatrix} \cosh\frac{\phi_y}{2} & -i\sinh\frac{\phi_y}{2} \\ i\sinh\frac{\phi_y}{2} & \cosh\frac{\phi_y}{2} \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B}_z(\phi_z) = \begin{pmatrix} e^{\frac{\phi_z}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\phi_z}{2}} \end{pmatrix}$$

[62] Tejto procedúre hovoríme *komplexifikácia*. Pripomeňme, že samotné $K_j$ hermitovské nie sú.

[63] Ako uvidíme, niektoré ireducibilné reprezentácie lorentzovskej grupy v 4D sú v podgrupe 3D priestorových rotácií *reducibilné*.

[64] Jedinou dosiaľ známou spomedzi *elementárnych* častíc so spinom 0 je *Higgsov bozón*.

Komplexné dvojkomponentné objekty $\chi_L = \begin{pmatrix} \chi_{L1} \\ \chi_{L2} \end{pmatrix}$, transformujúce sa v tejto reprezentácii (pôsobením uvedených operátorov) sú tzv. **chirálne ľavoruké**[65] **spinory**. Definovaním *komplexného* transformačného parametru $\vec{\omega} = \vec{\theta} - i\vec{\phi}$ („uhol" rotácie a boostu) môžeme transformačnú maticu zapísať v tvare

$$\underline{\Lambda_{(\frac{1}{2},0)}(\vec{\omega}) = e^{i\vec{\omega}\cdot\vec{\sigma}/2}}$$

**Spinorová reprezentácia (0,$\frac{1}{2}$).**
Toto je *komplementárna* spinorová reprezentácia, v tomto prípade $d^- = 2$, $d^+ = 1$, čo vedie na $\underline{K_j = iJ_j = i\sigma_j/2}$, a

$$\mathcal{R}_\theta = e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}/2} \qquad\qquad \mathcal{B}_\phi = e^{-\vec{\phi}\cdot\vec{\sigma}/2}$$

Kým matice rotácie sú *rovnaké* ako v prípade reprezentácie ($\frac{1}{2}$,0), matice boostu sa zmenia na

$$\mathcal{B}_x(\phi_x) = \begin{pmatrix} \cosh\frac{\phi_x}{2} & -\sinh\frac{\phi_x}{2} \\ -\sinh\frac{\phi_x}{2} & \cosh\frac{\phi_x}{2} \end{pmatrix} \quad \mathcal{B}_y(\phi_y) = \begin{pmatrix} \cosh\frac{\phi_y}{2} & i\sinh\frac{\phi_y}{2} \\ -i\sinh\frac{\phi_y}{2} & \cosh\frac{\phi_y}{2} \end{pmatrix} \quad \mathcal{B}_z(\phi_z) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\phi_z}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{\phi_z}{2}} \end{pmatrix}$$

Objekty, ktoré sa transformujú podľa tejto *spinorovej* reprezentácie lorentzovskej grupy, sa nazývajú **chirálne pravoruké spinory**, $\chi_R = \begin{pmatrix} \chi_{R1} \\ \chi_{R2} \end{pmatrix}$, a maticu transformácie môžeme pomocou substitúcie $\vec{\omega}^* = \vec{\theta} + i\vec{\phi}$ zapísať v kompaktnom tvare

$$\underline{\Lambda_{(0,\frac{1}{2})}(\vec{\omega}^*) = e^{i\vec{\omega}^*\cdot\vec{\sigma}/2}}$$

Objekty (častice) vyhovujúce *niektorej z* týchto spinorových reprezentácií - pod súhrnným názvom **Weylove spinory**[66] - majú spin $j = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Ako ukazujú rotačné matice, priestorovou rotáciou o 360° menia znamienko, $\chi \to -\chi$, a na návrat do *pôvodného* stavu je potrebná rotácia o 720°.[67]

Chirálne ľavo- a pravoruké spinory sa teda transformujú podľa *rôznych* vzťahov (reprezentácií), a nemožno ich ľubovoľne kombinovať.[68] Dá sa však ukázať (pozri Dodatok G), že komplexným združením spinoru meníme jeho chiralitu, a lorentzovsky *invariantnými* sú kombinácie $(\chi_R)^\dagger\chi_L = (\chi_R^*)^T\chi_L$ alebo $(\chi_L)^\dagger\chi_R$ (analogicky ako pri štvorvektoroch sú lorentzovsky invariantnými výrazy $x_\mu(y_\nu)^T = x_\mu y^\nu$).

**Vektorová reprezentácia ($\frac{1}{2}$,$\frac{1}{2}$).**
V tomto prípade $d^+ = d^- = 2$, čiže máme dve *neprekrývajúce* sa *dvoj*rozmerné reprezentácie $\mathfrak{su}(2)$ - chirálne ľavo- aj pravorukú. Takáto reprezentácia, často označovaná $(\frac{1}{2},0)\otimes(0,\frac{1}{2})$, je v 4D *ne*redukovateľná, a pôsobí na dané objekty *súčasne* oboma kópiami $\mathfrak{su}(2)$ s *rôznymi* transformačnými pravidlami. Na každý takýto objekt môžeme nahliadať ako na *tenzorový* súčin spinorov oboch chiralít - každého s dvoma stavmi $|\uparrow\rangle$ a $|\downarrow\rangle$ (v danej báze), čiže *štvor*komponentný objekt

$$\begin{pmatrix} \uparrow\uparrow & \uparrow\downarrow \\ \downarrow\uparrow & \downarrow\downarrow \end{pmatrix}$$

Môžeme ho reprezentovať ako všeobecnú hermitovskú maticu $2\times 2$ v báze Pauliho matíc,

$$V_{a\dot{b}} = \begin{pmatrix} v_0+v_3 & v_1-iv_2 \\ v_1+iv_2 & v_0-v_3 \end{pmatrix} = v_0\mathbb{1} + v_1\sigma_1 + v_2\sigma_2 + v_3\sigma_3 = v_\mu\sigma^\mu_{a\dot{b}}$$

[65] ang. *left-handed, left-chiral.*
[66] Pomenované na počesť Hermanna Weyla (čítaj *vajl*).
[67] Dôsledkom je Pauliho vylučovací princíp.
[68] Na elementárnej úrovni hmoty Príroda *rozlišuje* medzi chirálnou ľavo- a pravorukosťou.

s *dvoma spinorovými* indexami $a, b$, nadobúdajúcimi hodnoty 1,2 (odpovedajúco stavom „spin hore“ a „spin dole“), každým pre jednu chiralitu. Konvenčne bodkovaný index odpovedá komplexnému združeniu (viac v Dodatku G). Lorentzovská transformácia (nebodkovanej aj bodkovanej časti) takéhoto objektu (Dodatok G) do prvého rádu transformačných parametrov je

$$V_{a\dot{b}} \underset{\Lambda}{\rightarrow} V'_{c\dot{d}} = \Lambda_{(\frac{1}{2},0)}\Lambda_{(0,\frac{1}{2})}V_{a\dot{b}} = ... = \left(e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}/2+\vec{\phi}\cdot\vec{\sigma}/2}\right)^a_c V_{a\dot{b}} \left(e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}/+\vec{\phi}\cdot\vec{\sigma}/2}\right)^{\dot{b}}_{\dot{d}} \cong$$

$$\cong \left(1 + i\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}/2 + \vec{\phi}\cdot\vec{\sigma}/2\right)^a_c V_{a\dot{b}} \left(1 - i\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}/2 + \vec{\phi}\cdot\vec{\sigma}/2\right)^{\dot{b}}_{\dot{d}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+(i\theta_3+\phi_3)/2 & (i\theta_1+\theta_2+\phi_1-i\phi_2)/2 \\ (i\theta_1-\theta_2+\phi_1+i\phi_2)/2 & 1-(i\theta_3+\phi_3)/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0+v_3 & v_1-iv_2 \\ v_1+iv_2 & v_0-v_3 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 1-(i\theta_3-\phi_3)/2 & (-i\theta_1+\theta_2-\phi_1-i\phi_2)/2 \\ (-i\theta_1+\theta_2+\phi_1+i\phi_2)/2 & 1+(i\theta_3-\phi_3)/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'_0+v'_3 & v'_1-iv'_2 \\ v'_1+iv'_2 & v'_0-v'_3 \end{pmatrix}$$

Nie náhodou $V_{a\dot{b}}$ pripomína zápis *vektoru* v hermitovskej reprezentácii (kap. II.3.3), rozšíreného o časovú zložku. Pre prvky matíc $V_{a\dot{b}}$ a $V'_{a\dot{b}}$ zapísaných do tvaru *štvorvektorov* totiž dostávame

$$\begin{pmatrix} v'_0 \\ v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \\ \phi_1 & 0 & \theta_3 & -\theta_2 \\ \phi_2 & -\theta_3 & 0 & \theta_1 \\ \phi_3 & \theta_2 & -\theta_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = (\mathbb{1} + \omega^\mu_\nu) \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

čo je lorentzovská transformácia *štvorvektoru* $v_\mu$. Reprezentácia $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ sa preto nazýva **vektorovou**, a objekty (častice) transformujúce sa v tejto reprezentácii sú *(štvor)vektormi.*[69] Majú spin $j = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$, a identitou je pre ne priestorová rotácia o 360°.[70]

Z hľadiska čisto 3D *priestorových* rotácií je (generický) štvorvektor $v^\mu$ redukovateľný na *skalár* $v_0$ („časová“ komponenta štvorvektoru) a *vektor* $\vec{v}$, pričom každý z nich sa transformuje v *inej*[71] reprezentácii, $j = 0$ resp. 1. Symbolicky

$$2 \otimes 2 = 1 \oplus 3 \qquad\qquad (\text{ pre } j = 1 \text{ je } d = 2j+1 = 3\,)$$

Takýmto postupom môžeme konštruovať $d$-rozmerné reprezentácie v ľubovoľnom $(D+1)$-rozmernom časopriestore, s $D(D-1)/2$ generátormi priestorovej rotácie a $D$ generátormi boostu (*časopriestorovej* rotácie), dohromady $(D+1)D/2$, pôsobiace vo forme matíc $d \times d$ na $d$-rozmerné objekty (stĺpcové vektory), pričom prvky transformovaného vektoru vznikajú „miešaním“ prvkov pôvodného vektoru,

$$v \rightarrow v' = \Lambda v \qquad\qquad v'_j = \Lambda_{jk} v_k \qquad\qquad j,k = 1,...n$$

**Bispinorová reprezentácia** $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$**.**
Transformácia $\mathcal{P} \in$ O(1,3) (zmena parity $\notin$ SO(1,3)) ovplyvňuje generátory algebry SO(1,3) ako

$$J_j \underset{\mathcal{P}}{\rightarrow} J_j \qquad\qquad K_j \underset{\mathcal{P}}{\rightarrow} -K_j$$

[69] Štvorvektory teda môžeme vnímať ako spinory druhého rádu (4 prvky, 2 spinorové indexy). Vidíme ale tiež, že *fundamentálnymi* objektami sú spinory a nie vektory.

[70] Ide o *bozóny*, ako napr. *fotón*.

[71] Pri 3D priestorových rotáciách sa „miešajú“ len zložky vektoru, skalár ostáva nemenný. Naproti tomu pri 4D *časo*priestorových rotáciách sa vzájomne „miešajú“ všetky zložky štvorvektoru - takáto reprezentácia je neredukovateľná.

Zmena parity $(x,y,z)\to(-x,-y,-z)$ znamená aj zmenu *znamienka* boostu, a teda zámenu reprezentácií $(\frac{1}{2},0)\leftrightarrow(0,\frac{1}{2})$. Ak požadujeme teóriu nezávislú aj od tejto transformácie (čiže rozšírenú grupu O(1,3)), definujeme tzv. **Diracove (bi)spinory**

$$\psi=\begin{pmatrix}\chi_L\\ \xi_R\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\chi_{L1}\\ \chi_{L2}\\ \xi_{R1}\\ \xi_{R2}\end{pmatrix}\qquad\qquad \psi\underset{\mathcal{P}}{\to}\psi'=\begin{pmatrix}\xi_R\\ \chi_L\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi_{R1}\\ \xi_{R2}\\ \chi_{L1}\\ \chi_{L2}\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}0&\mathbb{1}\\ \mathbb{1}&0\end{pmatrix}}_{\gamma^0}\begin{pmatrix}\chi_L\\ \xi_R\end{pmatrix}$$

kde medzi Weylovými spinormi $\chi_L$ a $\xi_R$ vo všeobecnosti nemusí byť súvislosť.[72] Túto štvorkomponentnú reprezentáciu nazývame **bispinorovou** a označujeme ako $(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})$. Ľubovoľnú maticu lorentzovskej transformácie v tejto reprezentácii môžeme schématicky zapísať ako

$$\Lambda_{(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})}=\begin{pmatrix}\Lambda_{(\frac{1}{2},0)}&0\\ 0&\Lambda_{(0,\frac{1}{2})}\end{pmatrix}\qquad\underset{\mathcal{P}}{\longleftrightarrow}\qquad\Lambda_{(0,\frac{1}{2})\oplus(\frac{1}{2},0)}=\begin{pmatrix}\Lambda_{(0,\frac{1}{2})}&0\\ 0&\Lambda_{(\frac{1}{2},0)}\end{pmatrix}$$

Ide teda o *redukovateľnú* reprezentáciu (časopriestorovou rotáciou sa „miešajú“ len zložky rovnakej chirality). Diracove (bi)spinory nie sú fundamentálnymi objektami, tými ostávajú dvojkomponentné Weylove spinory. Hoci sú Diracove (bi)spinory štvorkomponentné (rovnako ako štvorvektory), nemožno ich komponenty priamo asociovať s časopriestorovými súradnicami (rovnako ako ani komponenty Weylových spinorov). Bispinorová reprezentácia poskytuje lorentzovsky kovariantný opis objektov (spinorov), ktoré sú symetrické voči transformácii *parity* v tom zmysle, že sa nemení chiralita Weylových spinorov (mení sa len ich „poloha“ v bispinorovom zápise).[73]

**Spojitá reprezentácia.**
Ak skúmame lorentzovskú transformáciu objektov *spojite* rozložených v časopriestore - *polí* $\phi(x^\mu)$, báza takéhoto priestoru je *spojitá* ($\infty$-rozmerná) - používame **spojitú reprezentáciu** tejto grupy. Transformujú sa nielen polia $\phi$ ale aj časopriestorové súradnice

$$x^\mu\to x'^\mu=\Lambda^\mu_\nu x^\nu\qquad\qquad x^\mu=\left(\Lambda^{-1}\right)^\mu_\nu x'^\nu$$

(čo pri *pasívnej* transformácii súradnicovej sústavy reprezentuje *ten istý* časopriestorový bod). V prípade *skalárneho* poľa (bez vnútornej štruktúry, formálne sa transformujúceho v reprezentácii (0,0), čiže žiadna zmena) to znamená len transformáciu časopriestorovej súradnice

$$\phi'(x'^\mu)=\phi(x^\mu)=\phi\left((\Lambda^{-1})^\mu_\nu\, x'^\nu\right)$$

a po vyjadrení v kompaktnom zápise z kap. II.4.2 pre infinitezimálnu transformáciu

$$\phi'(x'^\mu)=\phi\left(x'^\mu+\frac{i}{2}\omega_{\sigma\rho}(J^{\sigma\rho})^\mu_\nu\, x'^\nu\right)\underset{Taylor.\,r.}{\cong}\left(1+\frac{i}{2}\omega_{\sigma\rho}(J^{\sigma\rho})^\mu_\nu\, x'^\nu\partial_\mu\right)\phi(x'^\mu)=\left(1-\frac{i}{2}\omega_{\sigma\rho}J^{\sigma\rho}_{(\infty)}\right)\phi(x'^\mu)$$

kde definujeme *diferenciálne* operátory (dosadením prvkov matice $J^{\sigma\rho}$ a vypustením apostrofu z $x'^\mu$)

$$J^{\sigma\rho}_{(\infty)}=-(J^{\sigma\rho})^\mu_\nu\, x^\nu\partial_\mu=\ldots=i\left(x^\sigma\partial^\rho-x^\rho\partial^\sigma\right)=\left(x^\sigma P^\rho-x^\rho P^\sigma\right)\qquad\qquad P^\sigma=i\partial^\sigma$$

v čom spoznáme časopriestorové operátory momentu hybnosti a hybnosti ($\hbar=1$) v Minkowského metrike.[74] Kánonické komutačné vzťahy v tejto symbolike sú $[x^\sigma,P^\rho]=-i\eta^{\sigma\rho}$.

[72] Ak $\xi_R=\chi_R$, spinor $\begin{pmatrix}\chi_L\\ \chi_R\end{pmatrix}$ nazývame **Majoranovým**.

[73] V takejto redukovateľnej reprezentácii opisujeme napr. elektrón-pozitrónový pár.

[74] Časové zložky $J^{\sigma\rho}_{(\infty)}$ resp. $P^\sigma$ odpovedajú boostom resp. energii.

V prípade poľa s *vnútornou štruktúrou* (spinorové, vektorové) transformácia obsahuje okrem uvedenej spojitej transformácie súradnice (kvôli rozlíšeniu ju označme $\Lambda_{(\infty)}$) aj transformáciu (vnútornej štruktúry) $\phi$ v príslušnej $d$-rozmernej reprezentácii

$$\phi(x^\mu) \to \Lambda_{(d)}\phi(\Lambda_{(\infty)}x^\mu) \qquad\qquad \Lambda_{(d)} = e^{-i\frac{\omega_{\mu\nu}}{2}J^{\mu\nu}_{(d)}}$$

Výsledná *infinitezimálna* transformácia je potom

$$\phi(x^\mu) \to \left(1 - \frac{i}{2}\omega_{\sigma\rho}J^{\sigma\rho}_{(d)}\right)\left(1 - \frac{i}{2}\omega_{\sigma\rho}J^{\sigma\rho}_{(\infty)}\right)\phi(x^\mu) \cong \left(1 - \frac{i}{2}\omega_{\sigma\rho}J^{\sigma\rho}\right)\phi(x^\mu) \qquad\qquad J^{\sigma\rho} = J^{\sigma\rho}_{(d)} + J^{\sigma\rho}_{(\infty)}$$

Výsledný operátor $J^{\sigma\rho}$ je *antisymetrický.*

### II.4.4 Rotačná symetria poľa - revízia.

V kap. I.3.5 sme ukázali, že pri priestorových rotáciách *skalárneho* poľa sa zachovávajú generátory týchto rotácií - zložky orbitálneho (priestorového) momentu hybnosti poľa. Zmenu poľa pri transformácii sme pritom vyjadrili práve v *spojitej* reprezentácii

$$\delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}\delta x^\mu \qquad\qquad \delta x^\mu = \omega^\mu_\nu x^\nu \qquad\qquad \text{a teda} \qquad\qquad \delta\phi = \partial_\mu\phi\,\omega^\mu_\nu x^\nu$$

Pre *skalárne* pole *jedinou* transformáciou bola transformácia *súradníc.* Ak však objekt (pole) *nie* je reprezentovaný *skalárnou* veličinou, (dimenzia reprezentácie $d > 1$, spin $j \neq 0$), musíme okrem transformácie súradníc (v spojitej reprezentácii) uvážiť aj transformáciu *vnútornej štruktúry* poľa (spinor, vektor), a to v príslušnej $d$-rozmernej reprezentácii. Vo výraze pre noetherovské štvorprúdy v kap. I.3.5 tak pribudne ďalší člen z kap. I.3.3,

$$-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\delta\phi_\phi = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\omega^\mu_\nu\phi = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\left(-i\frac{\omega_{\sigma\rho}}{2}\left(J^{\sigma\rho}_{(d)}\right)^\mu_\nu\right)\phi$$

zodpovedný za miešanie zložiek vnútornej štruktúry poľa pri rotácii/booste ($J^{\sigma\rho}_{(d)}$ sú lorentzovské generátory z kap. II.4.2 v príslušnej $d$-rozmernej reprezentácii). Uváženie *oboch* príspevkov vedie pri *priestorových* rotáciách na

$$J_j = \frac{1}{2}\epsilon_{jkl}\mathcal{Q}_{kl} = \frac{1}{2}\epsilon_{jkl}\int \pi\left[(x_k\partial_l - x_l\partial_k) + J^{(d)}_{kl}\right]\phi\, d^3x$$

Výraz v hranatej zátvorke je kombináciou generátorov rotácií v *spojitej* a $d$-rozmernej reprezentácii. V prvom z nich identifikujeme operátor *orbitálneho momentu hybnosti*, kým dodatočný druhý príspevok (rovnakého fyzikálneho rozmeru) súvisí s parametrami reprezentácie $d$ a $j$, čiže so *spinom*, preto ho nazývame **spinovým momentom hybnosti** (vo fyzikálnom žargóne skrátene *spinom*). Dôležité je, že *zachovávajúcimi sa veličinami sú diagonálne zložky celkového momentu hybnosti $J_j$, a nie orbitálneho a spinového momentu samostatne.*

Generátory lorentzovských rotácií $J^{\mu\nu}$, tak ako sú zavedené v kap. II.4.2, musíme preto odteraz rozlišovať na operátory generujúce rotácie „nášho" časopriestoru, vyjadrené v spojitej reprezentácii, a operátory rotujúce *vnútornú štruktúru* objektov, vyjadrené v $d$-rozmernej reprezentácii (v závislosti od tejto štruktúry).[75] Pre prvé budeme v ďalšom texte používať označenie $L^{\mu\nu}$ a pre druhé označenie $S^{\mu\nu}$. Pri čisto *priestorových* rotáciách to znamená rozlíšenie medzi *orbitálnym* momentom hybnosti a *spinom.*

[75] Napr. v prípade *spinorov* v kap. II.3.4 sme videli, že rotácia ich vnútornej štruktúry je netriviálna - návrat do pôvodného stavu nastane pri rotácii o 720°. Rotácia vnútornej štruktúry *vektorov* je „prirodzená" - identitou je rotácia o 360°. *Skaláry* vnútornú štruktúru nemajú.

## II.4.5 Poincarého grupa.

**Poincarého grupa**[76] je rozšírením lorentzovskej grupy o ďalšie transformácie, rešpektujúce postuláty špeciálnej teórie relativity - *časopriestorové translácie*

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}$$

čomu odpovedajú 4 ďalšie generátory posunutí *časopriestorových* súradníc $P^{\mu}$. V prípade *pasívnej translácie* platí $\phi'^{\sigma}(x'^{\mu}) = \phi^{\sigma}(x^{\mu})$ *bez ohľadu na spin*, čo pre infinitezimálne posunutie $x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu}$ znamená (Taylorov rozvoj)

$$\phi'^{\sigma}(x'^{\mu}) = \phi^{\sigma}(x'^{\mu} - \epsilon^{\mu}) \cong (1 - \epsilon^{\rho}\partial_{\rho})\, \phi^{\sigma}(x'^{\mu}) \qquad \phi'^{\sigma}(x'^{\mu}) = e^{i\epsilon_{\rho}P^{\rho}} \phi^{\sigma}(x'^{\mu}) \cong (1 + i\epsilon_{\rho}P^{\rho})\, \phi^{\sigma}(x'^{\mu})$$

Porovnaném oboch výrazov dostávame

$$P^{\mu} = i\partial^{\mu} = i\left(\frac{\partial}{c\partial t}, -\nabla\right) \qquad P_0 = P_t = i\frac{\partial}{c\partial t} \qquad P_j = -i\delta_j = -i\frac{\partial}{\partial x_j}\ , \ \ j = x, y, z$$

čo sú operátory *energie-hybnosti* (v jednotkách $\hbar$).

Lieova algebra Poincarého grupy je tvorená generátormi $J_j$, $K_j$ (resp. v alternatívnom značení $J^{\mu\nu}$) a $P^{\mu}$, a ku komutačným vzťahom lorentzovskej grupy pribudnú

$$[J_j, P_k] = i\epsilon_{jkl}P_l \qquad [J_j, P_0] = 0 \qquad [K_j, P_k] = i\delta_{jk}P_0 \qquad [K_j, P_0] = -iP_j$$

resp.

$$\underline{[P^{\mu}, P^{\nu}] = 0} \qquad \underline{[J^{\mu\nu}, P^{\rho}] = i(\eta^{\mu\rho}P^{\nu} - \eta^{\nu\rho}P^{\mu})}$$

Táto algebra obsahuje *dva* Casimirove operátory (t.j. operátory komutujúce so všetkými bázovými operátormi algebry). Prvým je $P_{\mu}P^{\mu}$. Keďže vlastnými hodnotami operátoru $P^{\mu}$ sú štvorvektory energie-hybnosti, vlastnou hodnotou tohto Casimirovho operátoru (nezávislou na pozorovateľovi) je

$$\underline{P_{\mu}P^{\mu}} = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}\cdot\vec{p} = \underline{m^2c^2}$$

určená *pokojovou hmotnosťou* objektu $m$. Druhým Casimirovým operátorom je $W_{\mu}W^{\mu}$, kde

$$\underline{W_{\mu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^{\nu}J^{\rho\sigma}}$$

je tzv. **Pauliho-Lubańského operátor** ($\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ je antisymetrický 4D Lévi-Civita). Rozkladom $J^{\sigma\rho}$ na $L^{\sigma\rho}$ a $S^{\sigma\rho}$ (kap. II.4.4) a pomocou komutačných vzťahov sa dá ukázať, že operátory *orbitálneho* momentu hybnosti $L^{\sigma\rho}$ do $W_{\mu}$ *ne*prispievajú. Pre *časovú* komponentu *štvorvektoru* $W^{\mu}$ (ako vlastnej hodnoty operátoru) dostávame potom ($J_j = \frac{1}{2}\epsilon_{jkl}J_{kl}$)

$$W_0 = \frac{1}{2}\epsilon_{0jkl}P_jJ_{kl} = P_jS_j = \vec{p}\cdot\vec{S}$$

Fyzikálny význam Pauliho-Lubańského štvorvektoru najlepšie spoznáme v *pokojovej* sústave objektu, kde

$$\vec{p} = 0 \qquad p_0 = mc \qquad W_{\mu} = \frac{mc}{2}\epsilon_{\mu 0\rho\sigma}J^{\rho\sigma} = \frac{mc}{2}\epsilon_{\mu 0kl}J_{kl} \ \ (\neq 0 \text{ len pre } \nu = 0 \text{ a teda } \mu, \rho, \sigma \neq 0)$$

Z vlastností $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ v tejto sústave tiež vyplýva

$$W_0 = 0 \qquad W_j = -\frac{mc}{2}\epsilon_{jkl}J_{kl} = -mcJ_j = -mcS_j$$

[76] Alternatívny názov je **nehomogénna lorentzovská grupa**.

Keďže operátory prislúchajúce zložkám vektoru $\vec{S}$ tvoria algebru $\mathfrak{su}(2)$ s komutačnými vzťahmi $[S_j, S_k] = i\epsilon_{jkl}S_l$, platí

$$\underline{W_\mu W^\mu} = -(\vec{W})^2 = -m^2c^2(\vec{S})^2 = \underline{-m^2c^2s(s+1)} \qquad s = 0, \frac{1}{2}, 1, ...$$

Vektor $\vec{W} = -mc\,\vec{S}$ v tejto sústave reprezentuje *spin*, a vlastná hodnota odpovedajúceho Casimirovho operátoru je *skalár* (lorentzovsky invariant - rovnaký v každej sústave). Bázu stavov tvorí $2s+1$ vlastných stavov diagonálneho operátoru ($S_z$). Takéto ireducibilné reprezentácie - tzv. **hmotnostné** (**hmotné**)[77] - sú teda určené vlastnými hodnotami Casimirových operátorov - *hmotnosťou* a *spinom*, čiže základnými charakteristikami konkrétnej *častice*.

Inou triedou ireducibilných reprezentácií (t.j. charakteristikami *iného* druhu častíc) sú **nehmotné**[78] reprezentácie, $m = 0$. V tomto prípade *nemá zmysel* uvažovať o pokojovej sústave častice,[79] pracujme teda v báze vlastných stavov operátoru $P^\mu$. Platí[80]

$$P_\mu W^\mu|p\rangle = 0 \qquad W_\mu W^\mu|p\rangle = 0 \qquad P_\mu P^\mu|p\rangle = 0$$

z čoho vyplýva

$$W_0^2 = (\vec{W})^2 \neq 0 \qquad p_0^2 = (\vec{p})^2 \neq 0$$

Štvorvektory vyhovujúce takýmto podmienkam si musia byť *navzájom úmerné*, a dosadením časových zložiek dostávame

$$\frac{W^\mu}{p^\mu} = \frac{W_0}{p_0} = \underline{\mathfrak{H} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{S}}{|\vec{p}|}}$$

kde $\mathfrak{H}$ je vlastná hodnota operátoru **helicity**. Dá sa ľahko ukázať, že takýto operátor *komutuje so všetkými* operátormi Poincarého algebry, je teda tiež Casimirovým operátorom. Jeho vlastné hodnoty sú *invariantné* voči transformáciám grupy, a sú *fixnými* charakteristikami *ne*hmotných častíc (nahrádzajúcimi hmotnosť aj spin). Pre hmotnú časticu môžeme helicitu definovať tiež, *nie je* však lorentzovským invariantom (ani Casimirom) - ako ukážeme v kap. III.2.5, *ne*charakterizuje samotnú časticu ale len jej *stav*.

[77]angl. *massive*
[78]angl. *massless*
[79]Energia *ne*hmotnej častice v jej pokojovej sústave by bola nulová - častica by *neexistovala*.
[80]Prvá rovnosť platí všeobecne ($P_\mu W^\mu = 0$) a ostatné kvôli $m = 0$.

◇ ◇ ◇ ◇ ◇

## Dôležité závery:

• Lorentzovská grupa transformácií SO(1,3) zachováva veľkosť štvorvektorov. Komplexifikovaná algebra lorentzovskej grupy je tvorená dvomi kópiami algebry $\mathfrak{su}(2)$, s dvomi Casimirovými operátormi, ktorých vlastné hodnoty $j^- + j^+ = j$ určujú *spin* transformovaného objektu.

• 4 dôležité ireducibilné $d$-rozmerné reprezentácie $(j^-, j^+)$ lorentzovskej grupy SO(1,3) v 4-rozmernom časopriestore sú: (0,0) opisuje transformáciu skaláru, ($\frac{1}{2}$,0) transformáciu chirálne ľavorukého a (0,$\frac{1}{2}$) pravorukého Weylovho spinoru, a ($\frac{1}{2}$,$\frac{1}{2}$) transformáciu vektoru.

• Pri lorentzovskej transformácii *polí* s vnútornou štruktúrou (nie skalárnych) musíme spojitú reprezentáciu kombinovať s príslušnou $(d > 1)$-rozmernou reprezentáciou, dôsledkom čoho zachovávajúcou sa veličinou pri priestorových rotáciách nie je samostatný priestorový (orbitálny) moment hybnosti, ale jeho *súčet* s vnútorným momentom hybnosti (daným vnútornou štruktúrou poľa) - *spinom*. Existencia spinu je teda dôsledkom lorentzovskej symetrie.

• Transformácia parity, ako prvok lorentzovskej grupy O(1,3), mení chiralitu Weylových spinorov. Invariantnými voči tejto transformácii sú Diracove (bi)spinory (kombinácie chirálne ľavo- a pravorukého Weylovho spinoru), ktoré sa transformujú v redukovateľnej reprezentácii $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$.

• Poincarého grupa, rozširujúca lorentzovskú o časopriestorové translácie, má dva Casimirove operátory, ktorých vlastné hodnoty určujú *hmotnosť* a *spin* transformovaných objektov. Pre nehmotné objekty je „náhradným“ Casimirovým operátorom *helicita* určujúca orientáciu spinu voči hybnosti. Ireducibilné (hmotné aj nehmotné) reprezentácie práve tejto grupy sú teda vhodným nástrojom na charakterizovanie elementárnych častíc.

# Polia

V tejto kapitole opíšeme základné druhy fundamentálnych polí, generujúcich *elementárne* častice Prírody - *voľné neinteragujúce skalárne*, *spinorové* a *vektorové* pole. Vychádzať budeme z lagrangiánov týchto polí, pri konštrukcii ktorých musia byť zohľadnené isté obmedzenia: Vyššie než druhý rád derivácii v lagrangiáne znamenajú vyššie rády derivácií v pohybových rovniciach, čo by viedlo na problémy so stabilitou riešení. Navyše pre *voľné* polia musí každý člen lagrangiánu tiež byť limitovaný druhým stupňom mocniny príslušného poľa. Jednotlivé lagrangiány sú zostavené v rámci príslušných symetrií (a určitej voľnosti) tak, aby každý ich člen bol **lorentzovským skalárom**,[1] zachovávajúcim si svoj tvar pri transformácii poľa v *príslušnej reprezentácii* lorentzovskej grupy (v závislosti od spinu poľa, kap. II.4.3). Z lagrangiánov týchto polí odvodíme pomocou ELR základné pohybové rovnice polí a ich riešenia v lorentzovsky kovariantnej forme.[2] Tieto riešenia sú rozložiteľné do rovinných vĺn, ktorých fourierovské koeficienty sa (druhým) kvantovaním stávajú operátormi, kreujúcimi a anihilujúcimi časticové stavy.[3] Z lagrangiánov tiež určíme kánonické hybnosti, ktoré potom vstupujú ako operátory do komutačných vzťahov s operátormi polí.

## III.1 Skalárne polia.

### III.1.1 Kleinova-Gordonova rovnica.

**Skalárnym** nazývame pole, ktoré každému bodu časopriestoru priradí *lorentzovský skalár*, $x^\mu \to \phi(x^\mu)$. Veľkosť (amplitúda) poľa „žije nad časopriestorom“ (ako ďalší rozmer, stupeň voľnosti). *Excitácie* poľa (okolo strednej hodnoty amplitúdy) sa šíria v časopriestore ako *vlny*, ide však o oscilácie veličiny $\phi$ v *jej abstraktnom priestore* (nie „hore-dole“ v niektorej zo súradníc $x_j$). Pre (pasívne) transformácie *rotáciu* okolo smeru $j$, $\phi \to \mathcal{R}_j\phi$, a *boost* v smere $j$, $\phi \to \mathcal{B}_j\phi$, v *skalárnej* $d$=1-rozmernej reprezentácii (0,0) grupy SO(1,3), platí $\mathcal{R}_j = \mathcal{B}_j = 1$ (čiže žiadna zmena).

Všeobecný tvar hustoty lagrangiánu *voľného* skalárneho poľa $\phi$, rešpektujúci základné obmedzenia, môže obsahovať len členy[4]

$$\mathcal{L} = A + B\phi + C\phi^2 + D\partial_\mu\phi + E\phi\partial_\mu\phi + F\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$$

[1] Pripomeňme, že „bežné“ skaláry ako zložky štvorvektorov sa lorentzovsky *transformujú*. Lorentzovským skalárom je napr. skalárny súčin vektorov.

[2] Reálnym postupom pri tvorbe teórie je „uhádnutie“ pohybovej rovnice na základe zhody jej riešení s experimentom, a *následné* zostavenie vyhovujúceho lagrangiánu v najjednoduchšom tvare.

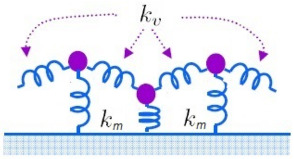
[3] Predtým než prikročíme ku kvantovaniu, predstavujú tieto riešenia *klasické polia*. Tie však, s výnimkou elektromagnetického (kap. III.3.3), v našom „fyzickom“ svete *ne*existujú - sú *nemerateľné*, a fyzikálny význam získavajú až kvantovaním.

[4] Ďalší možný člen druhého stupňa $\phi\partial_\mu\partial^\mu\phi$ je po preintegrovaní $\mathscr{L} = \int \mathcal{L} dx^\mu$ per partes ekvivalentný poslednému členu uvedeného výrazu.

Dosadením hustoty lagrangiánu do ELR konštantný člen $A$ pohybovú rovnicu *neovplyvní*, a člen $B\phi$ k nej pridá bezvýznamnú *konštantu*, čiže môžeme položiť $A = B = 0$. Výraz $\partial_\mu$ zas mení skalár $\phi$ na štvorvektor, teda aj $D = E = 0$. Potom

$$\mathcal{L} = C\phi^2 + F\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$$

Takéto skalárne pole si môžeme predstaviť ako elastické kontinuum, modelované sústavou viazaných bodových oscilátorov (na obrázku), pričom $\phi$ je lokálna výchylka z rovnovážnej hodnoty.




pružiny $k_m$ akumulujú potenciálnu energiu $\sim \phi^2$
pružiny $k_v$ akumulujú potenciálnu energiu $\sim (\phi_j - \phi_{j+1})^2 \to \partial_j\phi\partial_j\phi$
kinetická energia $\sim (\dot{\phi})^2 = \partial_t\phi\partial_t\phi$

Lagrangián takejto sústavy je

$$\mathscr{L} = \int \mathcal{L}dV = F\int \left(\partial_0\phi\partial_0\phi - \partial_j\phi\partial_j\phi - \widetilde{m}^2\phi^2\right) dV = F\int \left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \widetilde{m}^2\phi^2\right) dV$$

Vo výraze na pravej strane sa prvý člen $\mathcal{L}$ obvykle nazýva *kinetickým*[5] a druhý *hmotnostným*[6], s rozmerovým koeficientom $\widetilde{m} = -C/F$. Dosadením tohto lagrangiánu do ELR dostaneme *pohybovú rovnicu* pre *skalárne* pole - **Kleinovu-Gordonovu rovnicu** (KGR)[7]

$$\underline{\underline{\left(\partial_\mu\partial^\mu + \widetilde{m}^2\right)\phi = 0}}$$

KGR je operátorová verzia relativistického vzťahu $E^2 - m^2c^4 - p^2c^2 = 0 \;\Rightarrow\; E = \pm\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$

$$-\left(\frac{E}{c\hbar}\right)^2 + \left(\frac{p}{\hbar}\right)^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \to -\left(\frac{i\hbar\partial_t}{c\hbar}\right)^2 + \left(\frac{-i\hbar\partial_j}{\hbar}\right)^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 = \partial_0^2 - \partial_j^2 + \widetilde{m}^2 = \partial_\mu\partial^\mu + \widetilde{m}^2$$

V štandardnej kvantovej *mechanike* sú *záporné* hodnoty energie častice problémom - neobmedzený nárast energie do záporných hodnôt totiž vylučuje existenciu *stabilného základného stavu* (s najnižšou energiou). V *kvantovej teórii polí* však $\phi$ nie je *stavom* ale *operátorom* (pôsobiacim na základný stav - vákuum), ktorý sám osebe žiadnu energiu nemá. K tejto otázke sa vrátime neskôr.

### III.1.2 Riešenia Kleinovej-Gordonovej rovnice.

KGR je pohybovou rovnicou *skalárnej* častice (so spinom 0).[8] Ide o *vlnovú rovnicu* s riešeniami v tvare rovinných vĺn

$$\phi(x^\mu) \sim e^{-ik_\mu x^\mu} \qquad k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right) \qquad k_\mu x^\mu = \omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}$$

spĺňajúcich disperzný vzťah

$$k_\mu k^\mu = \widetilde{m}^2 \qquad \underline{\omega_k = c\sqrt{\vec{k}^2 + \widetilde{m}^2}}$$

[5] napriek príspevku potenciálnej energie od pružín $k$

[6] z dôvodov, ktoré budú ozrejmené nižšie - nejde totiž o hmotnosť oscilátorov v našom modeli

[7] Rozmerový koeficient lagrangiánu $F$ nevstupuje do pohybovej rovnice, v literatúre sa preto obvykle ignoruje. Pohybové rovnice systému sa nezmenia, ak lagrangián vynásobíme konštantou či pridáme divergenciu ľubovoľnej funkcie poľa. V ďalšom texte preto tento koeficient vynechávame, s výnimkou osobitných prípadoch, keď ho doplníme *ad hoc* pomocou fundamentálnych konštánt.

[8] V „botanickej záhrade“ *elementárnych* častíc (teda nie kompozitov) poznáme jedinú skalárnu časticu - *Higgsov bozón*.

V dôsledku hmotnostného členu je tento disperzný vzťah *nelineárny*, čo znamená, že vlny rôznych frekvencií sa v tomto poli šíria *rôznymi fázovými* rýchlosťami. Je to zjavné aj z nášho modelu: Pre veľké vlnové dĺžky $\lambda$ sú väzbové pružiny $k_v$ prakticky zrelaxované, a pre šírenie vĺn sú určujúce pružiny $k_m$, ktorých tuhosť reprezentuje práve $\widetilde{m}^2$. Preto $\omega_k \cong \widetilde{m}c$ pre $1/\widetilde{m} \ll \lambda = 2\pi/k$. Naopak pre krátke vlny $\lambda \ll 1/\widetilde{m}$ je vplyv väzbových pružín dominantný, a $\omega_k \cong ck$. Navyše, pre $\omega_k < \widetilde{m}c$ je vlnočet *imaginárny*, $k = i\kappa$, t.j. vlna sa poľom *nešíri*, $\phi(x) \sim e^{-\kappa x}$. Znamená to, že vzruch vyvolaný v danom mieste zaniká na vzdialenosti $\approx 1/\widetilde{m}$. Dá sa to interpretovať aj tak, že *lokalizovaný* vzruch, reprezentovaný vlnovým balíkom, sa na tejto vzdialenosti v dôsledku disperzie rozplynie.[9]

V kvantovom kontexte to znamená, že na vybudenie šíriaceho sa vzruchu je potrebná určitá minimálna energia $\hbar\omega_{min} = \hbar\widetilde{m}c$. V kvantovej teórii polí sa takýto vzruch stotožňuje s *časticou* - energetickou excitáciou príslušného poľa. Minimálna energia potrebná na vytvorenie častice je jej *pokojová* energia $mc^2$, a teda

$$\widetilde{m} = \frac{mc}{\hbar} = \frac{2\pi}{\lambda_C} = \frac{1}{\lambdabar_C} \qquad\qquad \omega_{min} = \frac{mc^2}{\hbar} = \widetilde{m}c = \frac{c}{\lambdabar_C}$$

kde $\lambdabar_C$ je **redukovaná Comptonova dĺžka**. V tomto zmysle je $\lambdabar_C$ akýmsi „rozmerom“ častice - vzdialenosťou, v akej okolie časticu „cíti“. Dosah veľmi ťažkých častíc je preto extrémne krátky,[10] a naopak, dosah častíc s $m = 0$ je nekonečný.[11]

*Všeobecné* riešenie KGR hľadáme v tvare superpozície rovinných vĺn

$$\phi(x^\mu) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \left[a(k_\mu)e^{-ik_\mu x^\mu} + b(k_\mu)e^{ik_\mu x^\mu}\right] d^4k$$

kde $a(k_\mu), b(k_\mu)$ sú *komplexné* koeficienty. Ak má byť skalárne pole $\phi$ *reálne*, musí platiť $b(k_\mu) = a^*(k_\mu)$. *Fyzikálne* riešenia musia spĺňať disperzný vzťah $k_\mu k^\mu = \widetilde{m}^2$, čo zabezpečíme vložením $\delta$-funkcie $\delta(k_\mu k^\mu - \widetilde{m}^2)$ do podintegrálneho výrazu,[12] a tiež fyzikálny význam priraďujeme len *kladným* frekvenciám, čo zabezpečíme vložením Heavisideovej (skokovej) funkcie[13] $\Theta(\omega)$. Po zdĺhavých úpravách a čiastočnom preintegrovaní cez časovú zložku $k_0$ (s využitím vlastností $\delta$-funkcie) dostávame riešenie pre *reálne* pole v tvare

$$\underline{\phi(x^\mu) = \int \frac{1}{(2\pi)^3\sqrt{2E_k}}\left[a(\vec{k})e^{-ik_\mu x^\mu} + a^*(\vec{k})e^{ik_\mu x^\mu}\right] d^3k} \qquad\qquad E_k = \hbar\omega_k = \hbar c\sqrt{\widetilde{m}^2 + k^2}$$

pričom $a(\vec{k}) = \frac{a(k_\mu)}{\sqrt{2E_k}}$ , $a^*(\vec{k}) = \frac{a^*(k_\mu)}{\sqrt{2E_k}}$ .

Lorentzovské transformácie takýchto riešení KGR, a to v *skalárnej* reprezentácii $\phi(x^\mu) \to \Lambda_{(0,0)}\phi(x^\mu)$, budú opäť riešeniami *tej istej* KGR - v tom spočíva jej *lorentzovaká kovariantnosť*.

### III.1.3 Kvantovanie skalárneho poľa.

Z lagrangiánu z kap. III.1.1 dostaneme (podľa vzťahov z kap. I.3.2) hustotu kánonickej hybnosti skalárneho poľa

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\phi)} = ... = \frac{2}{c}\partial_0\phi$$

[9] Pre *makro*skopické hmotnosti takýto rozruch zaniká na makroskopicky *ne*merateľných škálach - takéto pole je preto makroskopicky *nepozorovateľné*.

[10] Napr. *pióny* - kompozitné častice sprostredkujúce väzbu nukleónov v atómových jadrách - sú veľmi hmotné, a tým limitujú rozmery jadier.

[11] Tento argument platí aj pre častice s *ne*nulovým spinom, akými sú *fotóny*.

[12] Znamená to, že integrovanie prebieha len cez rovinné vlny spĺňajúce disperzný vzťah.

[13] $\Theta(\omega) = 1$ pre $\omega = ck_0 > 0$, inak $\Theta(\omega) = 0$.

a hamiltonián

$$H = \int (\pi \partial_t \phi - \mathcal{L}) d^3x = ... = \int \left[ (\partial_0 \phi)^2 + (\partial_j \phi)^2 + m^2 \phi^2 \right] d^3x$$

kde $\phi(x^\mu)$ je riešením KGR z predchádzajúcej kapitoly. Druhým kvantovaním sa $\phi$ a $\pi$ stávajú operátormi, vyjadrenými pomocou *operátorov* $\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k})$, pri platnosti komutačných vzťahov

$$[\hat{\phi}(\vec{r}, t), \hat{\pi}(\vec{r}\,', t)] = i\hbar \delta(\vec{r} - \vec{r}\,') \qquad [\hat{\phi}(\vec{r}, t), \hat{\phi}(\vec{r}\,', t)] = 0 \qquad [\hat{\pi}(\vec{r}, t), \hat{\pi}(\vec{r}\,', t)] = 0$$

$$[\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')] = (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}') \qquad [\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}(\vec{k}')] = [\hat{a}^\dagger(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')] = 0$$

Z posledného z uvedených komutátorov okrem iného vyplýva, že mnohočasticové stavy sú *symetrické* voči vzájomnej výmene ľubovoľných dvoch častíc - skalárne častice sú *bozóny*. S uvážením týchto vzťahov nadobudne hamiltonián KG poľa tvar

$$\hat{H} = ... \frac{\hbar}{(2\pi)^3} \int \omega_k \left[ \hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}) + \cancel{\frac{(2\pi)^3}{2} \delta(0)} \right] d^3k$$

Kvôli $\delta$-funkcii v druhom člene, reprezentujúcom energiu základných stavov - vákua, je tento výraz *nekonečný*(!), keďže sa však takéto nekonečno nachádza vo výrazoch pre energiu *každého* systému, a pre nás je relevantným vždy len *rozdiel* energií, môžeme toto nekonečno *ignorovať*. V prípade *diskrétneho* spektra $\vec{k}$ má hamiltonián tvar

$$\hat{H} = \hbar \sum_{\vec{k}} \omega_k \left[ \hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}) + \frac{1}{2} \right] = \hbar \sum_{\vec{k}} \omega_k \left[ \hat{N}(\vec{k}) + \frac{1}{2} \right]$$

kde $\underline{\hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}) = \hat{N}(\vec{k})}$ (v tomto poradí) je operátor *počtu* „častíc“ v stave $\vec{k}$, a príspevky $\frac{\hbar\omega_k}{2}$ dajú v prípade nekonečného počtu diskrétnych stavov vyššie spomínané nekonečno.

Kombinácie hamiltoniánu s operátormi $\hat{a}(\vec{k})$ a $\hat{a}^\dagger(\vec{k})$ dávajú

$$\hat{H} \hat{a}(\vec{k}) = (E - \hbar\omega_k) \hat{a}(\vec{k}) \qquad \hat{H} \hat{a}^\dagger(\vec{k}) = (E + \hbar\omega_k) \hat{a}^\dagger(\vec{k})$$

čiže operátory $\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k})$ (aplikované na *stav* systému) znižujú/zvyšujú energiu systému $E$ o energetické kvantum $\hbar\omega_k$ - sú *anihilačným/kreačným* operátorom „častice“[14] (t.j. energetického kvanta) s hybnosťou $\hbar\vec{k}$.

Rovnako ako hamiltonián môžeme prostredníctvom kreačných/anihilačných operátorov kvantovať všetkých 10 generátorov Poincarého algebry (časopriestorové rotácie a translácie) z kap. II.4.

Skalárne pole teda môžeme vnímať ako spektrum (mnohočasticových) stavov s definovaným počtom energetických kvánt s danou hybnosťou. Je dôležité si pritom uvedomiť, že v každej *fyzikálnej* konfigurácii poľa kreačné/anihilačné operátory vystupujú v *podintegrálnom* výraze, *v súlade so zákonmi zachovania*.

Dôležitou vlastnosťou je, že anihilačný operátor $\hat{a}(\vec{k})$ dá 0 ak pôsobí na stav *bez častíc* (vákuum $|0\rangle$) ale aj na stav s časticami *inej* hybnosti ($|\vec{k}' \neq \vec{k}\rangle$). Pôsobením operátoru $\hat{a}^\dagger(\vec{k})$ na vákuum $|0\rangle$ „vyrobíme časticu“ s hybnosťou $\hbar\vec{k}$, a hodnota tejto hybnosti je vlastnou hodnotou operátoru hybnosti príslušnou k tomuto stavu,

$$|1_{\vec{k}}\rangle = \hat{a}^\dagger(\vec{k})|0\rangle \qquad \hat{p}|1_{\vec{k}}\rangle = \hbar\vec{k}|1_{\vec{k}}\rangle$$

Operátor hybnosti (v smere $j$) dostaneme zo vzťahu z kap. I.3.4

$$p_j = \int T^0_j d^3x = ... = c \int \pi \partial_j \phi \, d^3x = \underset{p_j \to \hat{p}_j}{...} = \frac{\hbar}{(2\pi)^3} \int k_j \hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}) d^3k$$

[14] Ostrá hodnota hybnosti znamená *úplnú delokalizáciu v priestore*, pojem „častica“ teda nemá klasickú konotáciu, reprezentuje len kvantum energie.

Stav $|1_{\vec{k}}\rangle$ je však priestorovo úplne delokalizovaný a fyzikálne *ne*realizovateľný (nenormovateľný), ako to vyplýva z komutačných vzťahov pre kreačné/anihilačné operátory

$$\langle 1_{\vec{k}'}|1_{\vec{k}}\rangle = \langle 0|\hat{a}(\vec{k}')\hat{a}^\dagger(\vec{k})|0\rangle = ... = \langle 0|[\hat{a}(\vec{k}')\hat{a}^\dagger(\vec{k})]|0\rangle \sim \delta(\vec{k}'-\vec{k}) \qquad \text{a teda} \qquad \langle 1_{\vec{k}}|1_{\vec{k}}\rangle \sim \delta(0) \to \infty$$

Iný stav vznikne aplikovaním operátoru poľa $\hat{\phi}(\vec{r})$ na vákuum, čo je „častica“ v mieste $\vec{r}$ (ako superpozícia excitácií s ostrými hodnotami $\vec{k}$),

$$|1_{\vec{r}}\rangle = \hat{\phi}(\vec{r})|0\rangle = ... = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{1}{\sqrt{2E_k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}|1_{\vec{k}}\rangle d^3k$$

Tu je namieste preveriť, či stavy $|1_{\vec{r}}\rangle$ a $|1_{\vec{r}'}\rangle$ sú *ortogonálne* (tak ako $\langle\vec{r}|\vec{r}'\rangle = \delta(\vec{r}'-\vec{r})$ v kvantovej mechanike). Dosadením dostávame

$$\langle 1_{\vec{r}'}|1_{\vec{r}}\rangle = ... = \frac{1}{(2\pi)^6}\int\int \frac{e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r}'-\vec{k}\cdot\vec{r})}}{2\sqrt{E_kE_{k'}}}\langle 1_{\vec{k}'}|1_{\vec{k}}\rangle\, d^3k\, d^3k' = ... = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}'-\vec{r})}}{2E_k}\, d^3k \underline{\neq \delta(\vec{r}'-\vec{r})}$$

$\delta$-funkčnému charakteru tejto priestorovej korelácie „prekáža“ v menovateli faktor $2E_k = 2\hbar c\sqrt{k^2+\widetilde{m}}$, zabezpečujúci lorentzovskú kovariantnosť výrazu (kap. III.1.2). Znamená to, že „častica“ *nie je lokalizovateľná presne* v $\vec{r}$ - *bodové častice neexistujú*![15]

### III.1.4 Energia vákua.

Ukázali sme, že kvantovanie skalárneho KG poľa vedie na nekonečný člen v energii *každého* stavu, vrátane stavu bez častíc - *vákua*. Keďže pole reprezentujeme ako sústavu *kvantových* harmonických oscilátorov, túto energiu môžeme stotožniť s energiou *vákua* - základného stavu, $\frac{1}{2}\hbar\omega$, preintegrovanú cez *všetky* frekvencie. Hoci takéto nekonečno môžeme v mnohých situáciách ignorovať (keď uvažujeme *rozdiel* energií), rozhodne nie je *ne*fyzikálne.[16]

Ak vytvoríme v priestore vákua *ohraničenú* oblasť (pre jednoduchosť v jednom rozmere) s okrajovými podmienkami $\phi(t, x=0, y, z) = \phi(0, x=L, y, z) = 0$, obmedzíme tým pole ako superpozíciu rovinných vĺn na *stojaté vlny* (v smere $x$) s frekvenciami

$$\omega_k = c\sqrt{\widetilde{m}^2 + k_x^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$$

čím sa zmení aj hustota energie vákua - *zmenší sa*, a to v závislosti od vzdialenosti hraníc $L$. Ak hustotu energie vákua na jednotku plochy hranice označíme $E_S$, potom na plochy hraníc pôsobí *zvonka* sila $F = -\frac{\partial E_S}{\partial L}$ - plochy sa priťahujú. V prípade *elektromagnetického* poľa to pozorujeme ako **Casimirov jav**.[17]

### III.1.5 Komplexné skalárne pole.

Predpokladajme najprv *dvojicu reálnych* skalárnych polí $\phi_1$, $\phi_2$ o rovnakej „hmotnosti“ $\tilde{m}$. Lagrangián tejto sústavy bude

$$\mathcal{L} = \left(\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 + \partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 - \widetilde{m}^2\phi_1^2 - \widetilde{m}^2\phi_2^2\right)$$

[15] Tento výsledok odpovedá analýze KGR z kap. III.1.1. Dá sa ukázať, že pre dostatočne veľké $r = |\vec{r}' - \vec{r}|$ platí $\langle 1_{\vec{r}'}|1_{\vec{r}}\rangle \sim e^{-\widetilde{m}r}$.

[16] Podľa všetkého má kľúčový účinok *gravitačný*.

[17] Elektromagnetické pole síce nie je skalárne, pre energiu jeho vákua však uvedené argumenty platia obdobne.

Substitúcia

$$\phi_1 + i\phi_2 = \phi \qquad\qquad \phi_1 - i\phi_2 = \phi^*$$

znamená zmenu bázy pri nezmenenom počte stupňov voľnosti systému (2), a nový lagrangián bude mať tvar

$$\mathcal{L} = \left(\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - \widetilde{m}^2 \phi^* \phi\right)$$

Je zrejmé, že tento výraz je invariantný voči rotáciam v komplexnej rovine

$$\phi \to e^{-i\epsilon}\phi \cong \phi - i\phi\epsilon \qquad\qquad \phi^* \to e^{i\epsilon}\phi^* \cong \phi^* + i\phi^*\epsilon$$

čiže vykazuje symetriu U(1), ktorej odpovedá zachovávajúci sa noetherovský štvorprúd (kap. I.3.6)

$$\mathcal{J}^\mu = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)}\phi^* - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\phi\right) = \ldots = (\partial^\mu \phi)\phi^* - (\partial^\mu \phi^*)\phi$$

Fourierovským rozvojom polí a druhým kvantovaním dostávme operátory polí

$$\hat{\phi}(x^\mu) = \int \frac{1}{(2\pi)^3\sqrt{2E_k}} \left[\hat{a}(\vec{k})e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{b}^\dagger(\vec{k})e^{ik_\mu x^\mu}\right] d^3k$$

$$\hat{\phi}^\dagger(x^\mu) = \int \frac{1}{(2\pi)^3\sqrt{2E_k}} \left[\hat{a}^\dagger(\vec{k})e^{ik_\mu x^\mu} + \hat{b}(\vec{k})e^{-ik_\mu x^\mu}\right] d^3k$$

kde koeficienty/operátory $\hat{a}(\vec{k}), \hat{b}(\vec{k})$ sú *navzájom nezávislé* (na rozdiel od *reálneho* poľa). Pre operátory kánonických momentov platí

$$\hat{\pi} = \frac{1}{c^2}\,\partial_t \hat{\phi}^\dagger \qquad\qquad \hat{\pi}^\dagger = \frac{1}{c^2}\,\partial_t \hat{\phi} \qquad\qquad [\hat{\phi}(x_\mu), \hat{\pi}(x'_\mu)] = [\hat{\phi}^\dagger(x_\mu), \hat{\pi}^\dagger(x'_\mu)] = i\hbar\delta(x_\mu - x'_\mu)$$

Operátory $\hat{a}^\dagger(\vec{k}), \hat{b}^\dagger(\vec{k})$ a $\hat{a}(\vec{k}), \hat{b}(\vec{k})$ sú kreačné, resp. anihilačné operátory pre „častice typu“ $a$ alebo $b$ s rovnakou hybnosťou $\hbar\vec{k}$ a (relativistickou) energiou $\hbar c\sqrt{(\vec{k})^2 + \widetilde{m}^2}$

$$|1_{\vec{k}}\rangle = \hat{a}^\dagger(\vec{k})|0\rangle \qquad\qquad |\tilde{1}_{\vec{k}}\rangle = \hat{b}^\dagger(\vec{k})|0\rangle$$

Jediné ich *ne*nulové komutátory sú

$$[\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')] = [\hat{b}(\vec{k}), \hat{b}^\dagger(\vec{k}')] = (2\pi)^3\delta(\vec{k} - \vec{k}')$$

Hamiltonián sústavy takýchto častíc je[18]

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{(2\pi)^3}\int \omega_k \left(\hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}) + \hat{b}^\dagger(\vec{k})\hat{b}(\vec{k})\right) d^3k = \frac{\hbar}{(2\pi)^3}\int \omega_k \left(\hat{N}_a(\vec{k}) + \hat{N}_b(\vec{k})\right) d^3k$$

Podobne operátor celkovej hybnosti bude mať tvar[19]

$$\hat{\vec{p}} = \frac{\hbar}{(2\pi)^3}\int \vec{k}\left(\hat{N}_a(\vec{k}) + \hat{N}_b(\vec{k})\right) d^3k$$

Noetherovským nábojom (zachovávajúcou sa veličinou) je (kap. I.3.6)

$$\mathcal{Q} = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \hat{\phi}^\dagger)}\hat{\phi}^\dagger - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \hat{\phi})}\hat{\phi}\right) d^3x = \frac{1}{c^2}\int \left(\hat{\phi}^\dagger \partial_t \hat{\phi} - \hat{\phi}\partial_t \hat{\phi}^\dagger\right) d^3x$$

[18] Ignorujeme pritom energiu časticového *aj* antičasticového vákua, čiže $2 \times \frac{1}{2}\hbar\omega_k$ pre každé $\vec{k}$.

[19] V tomto prípade ide o *vektorovú* sumáciu, s ohľadom na smer $\vec{k}$ častíc/antičastíc.

Tento výraz (na rozdiel od Schrödingerovho poľa, kap. I.3.8) *nie je pozitívne definitný*. Interpretácia noetherovského náboja ako *počtu častíc* je tu preto *ne*prijateľná - *počet častíc sa nezachováva*. Po dosadení výrazov pre $\hat{\phi}, \hat{\phi}^\dagger$ a vynásobení *elektrickým* nábojom $q$ dostávame

$$\hat{\mathcal{Q}}_q = ... = \frac{q}{(2\pi)^3} \int \left[ \hat{N}_a(\vec{k}) - \hat{N}_b(\vec{k}) \right] d^3k$$

„Častice typu“ $a$ a $b$ teda prispievajú k celkovému náboju *navzájom opačným* nábojom $\pm q$ - „častice typu“ $b$ sú **antičasticami** k „časticiam typu“ $a$ - majú *rovnakú hmotnosť a energiu*, ale *opačný elektrický náboj*. Kreovaním/anihilovaním *párov* častica-antičastica sa teda *zachováva celkový náboj*.

Častice so *zápornou* energiou teda interpretujeme ako *anti*častice s *kladnou* energiou pohybujúce sa *opačne v čase*, čiže $\vec{p} \to -\vec{p}$. Členy v hranatej zátvorke vyššie uvedeného anihilačného operátoru poľa $\hat{\phi}(x^\mu)$ potom môžeme interpretovať ako superpozíciu častice ($E > 0$) „prichádzajúcej“ do súboru (t.j. absorbovanej, anihilovanej), $\sim \hat{a}(\vec{k}) e^{-ik_\mu x^\mu} = \hat{a}(\vec{k}) e^{-i(Et - \vec{p}\cdot\vec{r})/\hbar}$, a *anti*častice ($-E > 0$) „odchádzajúcej“ zo súboru (t.j. emitovanej, kreovanej), $\sim \hat{b}^\dagger(\vec{k}) e^{-i(-k_\mu)x^\mu} = \hat{b}^\dagger(\vec{k}) e^{-i(-Et + \vec{p}\cdot\vec{r})/\hbar}$ (a analogicky pre kreačný operátor poľa $\hat{\phi}^\dagger(x^\mu)$). Všeobecné riešenia KGR teda *nie sú jedno*časticovými riešeniami - zahŕňajú *páry* častica-antičastica.

Pre polia s $q = 0$ nevieme rozlíšiť časticu od antičastice - častica si je *sama* antičasticou. Matematicky to znamená $\hat{a}^\dagger(\vec{k}) = \hat{b}^\dagger(\vec{k})$, $\hat{a}(\vec{k}) = \hat{b}(\vec{k})$, t.j. pole je *reálne*.

### III.1.6 Rozptyl častíc.

Pod pojmom *častice* v kvantovej teórii rozumieme nielen kvantované vlnové módy (s ostrou hodnotou $\vec{k}$), ale aj ako viac-menej *lokalizované* energetické excitácie - *vlnové balíky* príslušných polí.[20] V rámci takejto predstavy skúmame ich dynamiku a vzájomné interakcie - **rozptyl** častíc.

V kap. III.1.3 sme ukázali, že častica *reálneho skalárneho* poľa *v danom okamihu* nie je *ostro* lokalizovaná, teda že $\langle 1_{\vec{r}'} | 1_{\vec{r}} \rangle \neq \delta(\vec{r}' - \vec{r})$, ale exponenciálne „mizne“ na vzdialenosti $\sim 1/\widetilde{m}$. Ak započítame aj *časový vývoj*, dostaneme

$$\langle 1_{t',\vec{r}'} | 1_{t,\vec{r}} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i[E_k(t'-t)/\hbar - \vec{k}\cdot(\vec{r}'-\vec{r})]}}{2E_k} d^3k = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{ik^\mu \cdot (x'_\mu - x_\mu)}}{2E_k} d^3k = D(x'_\mu, x_\mu)$$

Tento výraz sa nazýva **propagátor**, a vyjadruje *amplitúdu pravdepodobnosti* nájdenia častice v $x'_\mu$, ak bola „pripravená“ v $x_\mu$.[21] Propagátor kóduje potenciálny vplyv na *inú* časticu vo svojom okolí, a preto je východiskom pre opis takejto interakcie. Musíme však rešpektovať *kauzálnosť* špeciálnej relativity, čo zabezpečíme konštrukciou tzv. **Feynmanovho propagátoru**

$$D_F(x'_\mu, x_\mu) = \Theta(t' - t) D(x'_\mu, x_\mu) + \Theta(t - t') D(x_\mu, x'_\mu)$$

kde $\Theta(t' - t)$ je Heavisideova skoková funkcia. Tento výraz kóduje pohyb amplitúdy excitácie (teda vplyvu častice) $x_\mu \to x'_\mu$ pre $t' > t$ (prvý člen) a $x'_\mu \to x_\mu$ pre $t > t'$ (druhý člen). V prípade interagujúcej dvojice častíc (vlnových balíkov) A a B to vyjadruje, ako minulosť B ovplyvňuje prítomnosť A (prvý člen), a ako prítomnosť A ovplyvní budúcnosť B (druhý člen). Tento mechanizmus sa často interpretuje ako interakcia sprostredkovaná **virtuálnymi časticami**, prenášajúcimi medzi A a B

[20] Pripomeňme, že takáto definícia sa vzťahuje na prípad *mimo merania*. Meraním sa častica *lokalizuje* na detektore - *vytvorí sa* jej ostrá poloha.

[21] Propagátor je zovšeobecnením kvantovomechanickej vlnovej funkcie - amplitúdy pravdepodobnosti namerania častice v $x'_\mu$ (bez ohľadu na miesto jej „pripravenia“).

*hybnosť.*[22] Hybnosť častice A *v danom okamihu* sa zmení nielen absorbovaním virtuálnej častice vyslanej *v minulosti* z B, ale aj (podľa zákona akcie a reakcie) vyslaním virtuálnej častice pohltenej v B *v budúcnosti.*[23] K zmene hybnosti častice A dôjde *len ak* je ňou vyslaná častica následne pohltená v B - preto sprostredkujúcu „časticu“ nazývame *virtuálnou.*[24]

Podobným spôsobom vieme skonštruovať propagátory *ďalších* polí (komplexného skalárneho, spinorového či vektorového). Kvantová teória polí poskytuje matematický aparát na výpočet takýchto rozptylových procesov.

### III.1.7 Nerelativistická limita v elektromagnetickom poli.

Výjdime z lagrangiánu komplexného skalárneho poľa z kap. III.1.5

$$\mathcal{L} = \left(\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - \widetilde{m}^2 \phi^* \phi\right)$$

*Nerelativistická limita* znamená, že všetky energetické členy sú zanedbateľné voči pokojovej energii častice, $E \cong E_0 = mc^2$, a z časovej závislosti $\phi(\vec{r}, t)$ vyjmeme oscilácie s pokojovou energiou

$$\phi(\vec{r}, t) \cong e^{-iE_0 t/\hbar} \psi(\vec{r}, t)$$

Časová zložka prvého členu lagrangiánu je potom po dosadení

$$\partial_0 \phi^* \partial_0 \phi = ... = \partial_0 \psi^* \partial_0 \psi + i\widetilde{m}(\psi^* \partial_0 \psi - \psi \partial_0 \psi^*) + \widetilde{m}^2 \psi^* \psi$$

Keďže $\widetilde{m} = \frac{mc}{\hbar}$, prvý člen je zanedbateľný voči zvyšným dvom (úmerným $\widetilde{m}$, resp. $\widetilde{m}^2$), a posledný člen je zas kompenzovaný posledným členom lagrangiánu. Nerelativistický lagrangián je potom (pri vhodnom znormovaní)

$$\mathcal{L} = \frac{\hbar c}{2} \left[ i\psi^* \partial_0 \psi - i\psi \partial_0 \psi^* - \frac{1}{\widetilde{m}} \partial_j \psi^* \partial_j \psi \right]$$

(čo odpovedá výrazu z kap. I.3.8), a po dosadení do ELR pre $\psi^*$ dostávame SCHR pre voľnú časticu.

Nerelativistický lagrangián komplexného skalárneho je naďalej invariantný voči U(1) transformácii

$$\phi \to e^{-i\epsilon} \phi \qquad\qquad \phi^* \to e^{i\epsilon} \phi^*$$

a príslušným noetherovským nábojom je (po dosadení tohto *ne*relativistického lagrangiánu)

$$\mathcal{Q} = \int \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi^*)} \phi^* - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi)} \phi \right) d^3x = ... \sim \int \psi^* \psi \, d^3x$$

čo obvykle interpretujeme ako *zachovávajúci sa* (na rozdiel od relativistického prípadu) *počet častíc.* Táto symetria nám dovoľuje toto komplexné pole reprezentovať v pomocou *iných* dvoch stupňov voľnosti

$$\psi(x^\mu) = \sqrt{\rho(x^\mu)} e^{i\theta(x^\mu)} \qquad \psi^*(x^\mu) = \sqrt{\rho(x^\mu)} e^{-i\theta(x^\mu)} \qquad \rho(x^\mu) = \psi^*(x^\mu)\psi(x^\mu)$$

[22] Keďže interagujúce častice sú viac-menej priestorovo delokalizované, výmena virtuálnych častíc nastáva v celej oblasti ich lokalizácie.

[23] Tento druhý člen $D_F$ ***predpokladá*** udalosť (pohltenie hybnosti) ***v budúcnosti***, z pohľadu súčasnosti ide teda o ***spätný pohyb v čase***, jeho sprostredkovateľom je preto (virtuálna) ***anti***častica.

[24] Ak by išlo o „reálnu“ časticu, jej emitovanie v A by automaticky znamenalo ***okamžitú*** zmenu hybnosti A (spätný ráz), ***bez ohľadu*** na to, či ***v budúcnosti*** dôjde k jej pohlteniu v B.

Dosadením do vyššie uvedeného lagrangiánu dostávame

$$\mathcal{L} = \hbar c \left[ \frac{i}{2}\partial_0 \rho - \rho \partial_0 \theta - \frac{1}{8\widetilde{m}\rho}(\partial_j \rho)^2 - \frac{\rho}{2\widetilde{m}}(\partial_j \theta)^2 \right]$$

Kánonické hybnosti príslušné k novým poliam sú

$$\pi_\rho(x^\mu) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \rho)} = \frac{i\hbar}{2} \qquad \pi_\theta(x^\mu) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \theta)} = -\hbar \rho(x^\mu)$$

Prechodom k operátorom musí byť splnený komutačný vzťah

$$[\hat{\theta}(\vec{r}_1, t), \hat{\pi}_\theta(\vec{r}_2, t)] = -\hbar\, [\hat{\theta}(\vec{r}_1, t), \hat{\rho}(\vec{r}_2, t)] \stackrel{!}{=} i\hbar \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

Operátor počtu častíc je $\hat{N}(t) = \int \hat{\rho}(\vec{r}, t) d^3x$, a keďže $\int \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) d^3x = 1$, dostávame

$$\underline{[\hat{N}(t), \hat{\theta}(\vec{r}, t)] = i}$$

čo je dôležitý vzťah neurčitosti v kondenzovaných systémoch opísaných nerelativistickým komplexným skalárnym poľom, nachádzajúcich sa v tzv. **koherentnom stave** (supratekutosť, supravodivosť). Rovnako hustotu toku častíc/poľa v koherentnom stave dostaneme z priestorovej zložky noetherovského štvorprúdu (dosadením lagrangiánu do vzťahu z kap. III.1.5)

$$\mathcal{J}_j = \psi \partial_j \psi^* - \psi^* \partial_j \psi = ... \sim \underline{-\frac{\rho}{\widetilde{m}} \partial_j \theta}$$

Väzbu elektromagnetického poľa, reprezentovaného štvorvektorom $A^\mu = (\varphi/c, \vec{A})$, na skalárne pole s elektrickým nábojom $q$ zohľadníme tak, že modifikujeme[25] operátor energie/hybnosti

$$i\hbar \partial^\mu \to i\hbar \partial^\mu - qA^\mu$$

Relativistickú KGR pre takúto časticu potom môžeme prepísať do tvaru

$$\underline{(i\hbar \partial_\mu - qA_\mu)(i\hbar \partial^\mu - qA^\mu)\phi = (mc)^2 \phi}$$

resp.

$$\frac{[i\hbar \partial_t - q\varphi(\vec{r}, t)]^2}{c^2} \phi(\vec{r}, t) = \left[ \left( -i\hbar \nabla - q\vec{A}(\vec{r}, t) \right)^2 + (mc)^2 \right] \phi(\vec{r}, t)$$

Jej *ne*relativistická limita opäť znamená

$$E \cong E_0 = mc^2 \qquad \left| \frac{i\hbar \partial_t \phi}{\phi} \right| \ll E_0 \qquad |q\varphi| \ll E_0 \qquad \phi(\vec{r}, t) \cong e^{-iE_0 t/\hbar} \psi(\vec{r}, t)$$

V ľavej strane uvedenej rovnice[26] preto zanedbáme všetky členy neobsahujúce $E_0$

$$[i\hbar \partial_t - q\varphi]^2 \, e^{-iE_0 t/\hbar} \psi = ... \cong E_0 \left( E_0 e^{-iE_0 t/\hbar} \psi - 2q\varphi e^{-iE_0 t/\hbar} \psi + 2i\hbar e^{-iE_0 t/\hbar} \partial_t \psi \right)$$

a porovnaním s pravou stranou dostávame

$$\underline{i\hbar \partial_t \psi(\vec{r}, t) = \left( \frac{\left( -i\hbar \nabla - q\vec{A}(\vec{r}, t) \right)^2}{2m} + q\varphi(\vec{r}, t) \right) \psi(\vec{r}, t)}$$

čo je SCHR v elektromagnetickom poli.

[25] Hlbší význam tejto náhrady ozrejmíme v kapitole o kalibračných poliach.
[26] Pamätajme, že výraz v hranatej zátvorke je *operátor*!

◇◇◇◇◇

### Dôležité závery:

• Relativisticky kovariantnou pohybovou rovnicou skalárneho poľa je KGR, a jej riešením sú superpozície rovinných vĺn.

• *Základným* stavom skalárneho poľa je *vákuum* (bez častíc). Energia vákua je energiou nulových kmitov na všetkých frekvenciách (je nekonečná).

• Skalárne častice ako excitácie skalárneho poľa sú lokalizovateľné na svojej Comptonovej dĺžke (závislej od ich pokojovej hmotnosti).

• V *komplexnom* skalárnom poli existujú dva druhy časticových excitácií *s opačným nábojom* - častice a antičastice. Pri transformácii konfigurácie poľa sa zachováva *algebrický* (t.j. s ohľadom na znamienko) súčet nábojov.

• Excitácie *reálneho* skalárneho poľa sú *nenabité* - častice sú sami sebe antičasticami.

• Pri nerelativiskických energiách prechádza KGR na SCHR.

## III.2 Spinorové polia.

### III.2.1 Diracova rovnica.

**Spinorové polia** sú elementárnymi substanciami, ktorých excitácie stotožňujeme s časticami[27] so spinom $\frac{1}{2}$. Reprezentácia spinorového poľa musí spĺňať požiadavku lorentzovskej invariantnosti, vrátane invariantnosti voči transformácii parity. Takéto polia preto opisujeme *Diracovými* spinormi - *štvor*komponentnými objektami zloženými z chirálne ľavo- *aj* pravorukého Weylovho spinoru. Vhodnou reprezentáciou je *bispinorová* reprezentácia $(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})$ lorentzovskej grupy (kap. II.4.3) - tzv. **chirálna (Weylova) reprezentácia**, v ktorej Diracove spinory vyjadrujeme pomocou Weylových v tvare $\psi = \begin{pmatrix} \chi_L \\ \xi_R \end{pmatrix}$. Každý člen lagrangiánu poľa, ako kombinácia *spinorov* $\psi, \psi^\dagger$ a *štvorvektorových* operátorov $\partial_\mu$, musí byť *lorentzovským skalárom*, čo zabezpečíme pridaním tzv. **Diracových gama-matíc** $4\times4$ (resp. $2\times2$, ktorých prvkami sú tiež matice $2\times2$ - nulová, jednotková a Pauliho matice). V *chirálnej reprezentácii* majú tvar

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar\sigma^\mu & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^\mu = (\mathbb{1}, \sigma_j) \qquad \bar\sigma^\mu = \eta_{\mu\nu}\sigma^\nu = (\mathbb{1}, -\sigma_j) \qquad \gamma_\mu = \eta_{\mu\nu}\gamma^\nu = \begin{pmatrix} 0 & \bar\sigma^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad \gamma^1 = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad \gamma^3 = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

[27] Patria sem leptóny a kvarky, teda všetky častice tvoriace látku.

Lagrangián spinorového poľa (jeho objemová hustota) má v tomto formalizme tvar

$$\mathcal{L} = \hbar c\,\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - \widetilde{m})\psi \qquad\qquad \bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$$

kde $\psi$ a $\bar{\psi}$ sú dve (komplexné) spinorové polia, ktorých súčin

$$\bar{\psi}\psi = \psi^\dagger\gamma^0\psi = \begin{pmatrix} \chi_L \\ \xi_R \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_L \\ \xi_R \end{pmatrix} = \ldots = \chi_L^\dagger\xi_R + \xi_R^\dagger\chi_L$$

je *lorentzovský skalár* (čo vyžaduje lagrangián). Dosadením lagrangiánu do ELR pre $\psi$ aj $\bar{\psi}$ dostávame pohybovú - tzv. **Diracovu rovnicu** (DIR)[28]

$$\underline{\underline{(i\gamma^\mu\partial_\mu - \widetilde{m})\psi = 0}} \qquad \text{resp.} \qquad (-i\gamma^\mu\partial_\mu - \widetilde{m})\bar{\psi} = 0$$

Argumenty vedúce k sformulovaniu DIR (ako východisku k zostaveniu lagrangiánu sú v Dodatku H.

Lorentzovská transformácia bispinoru znamená nielen transformáciu *súradnice* $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ ($\Lambda^\nu_\mu \cong \delta^\nu_\mu + \omega^\nu_\mu$ z kap. II.4.2), a teda $\partial_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda^\nu_\mu\partial_{\nu'}$, ale aj transformáciu *vnútorného* bispinorového priestoru, čiže $\psi \to \psi' = \Lambda_s\psi$, kde $\Lambda_s$ je transformačná matica *bispinoru*. DIR vynásobenú zľava $\Lambda_s$ potom môžeme prepísať do tvaru

$$\Lambda_s(i\gamma^\mu\Lambda^\nu_\mu\partial_{\nu'} - \widetilde{m})\Lambda_s^{-1}\psi' = 0$$

a jej lorentzovská *kovariantnosť* vyžaduje splnenie podmienky

$$\Lambda_s\gamma^\mu\Lambda^\nu_\mu\Lambda_s^{-1} = \gamma^\nu \qquad \text{čiže} \qquad \Lambda_s^{-1}\gamma^\nu\Lambda_s = \Lambda^\nu_\mu\gamma^\mu$$

čo je *definičný* vzťah pre transformačnú maticu bispinoru. Dosadením $\Lambda^\nu_\mu$ a hľadaním riešenia v tvare $\Lambda_s \cong \mathbb{1} - \frac{i}{2\hbar}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}$ vieme potom maticu generátorov lorentzovských transformácií $S^{\mu\nu}$ z kap. II.4.2 vyjadriť pomocou gama-matíc ako

$$S^{\mu\nu} = \frac{i\hbar}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

Jej *priestorové* zložky $S_j = \frac{1}{2}\epsilon_{jkl}S^{kl}$ (kap. II.4.2) sú zložkami *spinového* momentu hybnosti (kap. III.2.4).

Alternatívny zápis DIR dostaneme po jej vynásobení zľava maticou $\gamma^0$, a *v chirálnej reprezentácii* má tvar

$$\underline{\left(\frac{1}{c}\partial_t + i\hat{\vec{\alpha}}\cdot\nabla - \widetilde{m}\hat{\beta}\right)\psi(\vec{r},t) = 0} \qquad \hat{\alpha}_j = \begin{pmatrix} -\sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_j \end{pmatrix} \qquad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \hat{\beta} = \gamma^0 \\ \hat{\beta}\hat{\vec{\alpha}} = \vec{\gamma} \end{matrix}$$

a nazýva sa **Schrödingerovou formou DIR**, pretože sa dá zapísať v tvare SCHR

$$i\hbar\partial_t\psi(x^\mu) = \hat{H}\psi(x^\mu) \qquad\qquad \hat{H} = -i\hbar c\,\hat{\vec{\alpha}}\cdot\nabla + mc^2\hat{\beta} = c\,\hat{\vec{\alpha}}\cdot\hat{\vec{p}} + mc^2\hat{\beta}$$

Postupom z kap. I.3.6 sa dajú odvodiť hustoty noetherovského (štvor)prúdu a náboja[29]

$$\underline{j^\nu(x^\mu) = c\bar{\psi}(x^\mu)\gamma^\nu\psi(x^\mu)} \qquad\qquad \underline{\rho(x^\mu) = \bar{\psi}(x^\mu)\gamma^0\psi(x^\mu) = \psi^\dagger(x^\mu)\psi(x^\mu)} \quad (\geq 0)$$

Druhý z výrazov spĺňa požiadavky na *časticovú pravdepodobnostnú interpretáciu* (je nezáporný, podobne ako v prípade SCHR, a na rozdiel od prípadu KGR).

[28] DIR je sústavou 4 rovníc pre $\mu = 0,1,2,3$. Pri maticovom zápise musíme pri člene $\widetilde{m}^2$ uvažovať jednotkovú maticu diag(1,1,1,1).

[29] Objemová hustota noetherovského náboja $\psi^\dagger(x^\mu)\psi(x^\mu)$ je skalár, nie však *lorentzovský* skalár - ako zložka štvorvektoru $j^\nu(x^\mu)$ sa lorentzovsky transformuje. Jej objemový integrál $\int\psi^\dagger(x^\mu)\psi(x^\mu)d^3x$ už *je* lorentzovským skalárom.

### III.2.2 Riešenia Diracovej rovnice.

Formálne môžeme DIR zapísať v tvare

$$\hat{D}\psi = 0 \qquad\qquad \hat{D} = (i\gamma^\mu\partial_\mu - \widetilde{m})$$

Stojí za povšimnutie, že aplikovaním *kvadrátu* tzv. **Diracovho operátoru** $\hat{D}$ dostaneme

$$\hat{D}^*\hat{D}\psi = (-i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \widetilde{m})(i\gamma^\nu\partial_\nu\psi - \widetilde{m})\psi = (\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu + \widetilde{m}^2)\psi = 0$$

čo po určitých úpravách a pri splnení podmienky[30]

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu) = \frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \eta^{\mu\nu} \qquad\qquad (\text{čiže } \{\gamma^0, \gamma^j\} = 0)$$

dáva KGR. Znamená to, *že každá komponenta Diracovho spinoru* (ako komplexný skalár) musí byť riešením KGR. To nás oprávňuje vnímať aj Diracovo spinorové pole (podobne ako skalárne pole) ako oscilujúce v abstraktnom spinorovom priestore „pripnutom“ ku každému bodu časopriestoru, a šíriace sa časopriestorom vo forme rovinných vĺn $f(x_\mu) = e^{\pm ik_\mu x^\mu}$ alebo ich superpozícií, rešpektujúc disperzný vzťah $\underline{k_\mu k^\mu = \widetilde{m}^2}$. Všeobecné riešenie DIR dostaneme, podobne ako v prípade KGR, integrovaním/sumovaním rovinných vĺn cez všetky dostupné hybnosti $\vec{k}$ a konfigurácie spinu $s$

$$\psi = \sum_{s=1}^{2} \int \frac{1}{(2\pi)^3\sqrt{2E_k}} \left( a_s(\vec{k})\psi_s^a(k)e^{-ik_\mu x^\mu} + b_s^*(\vec{k})\psi_s^b(k)e^{ik_\mu x^\mu} \right) d^3k$$

kde $\psi_s^a(k), \psi_s^b(k)$ sú bázové bispinory[31], obsahujúce *vnútornú* štruktúru, na ktorú sa teraz zameriame.

Skúmajme riešenie DIR v tvare Diracovho (bi)spinoru s *ostrou hodnotou* hybnosti/energie (čiže *jednej* rovinnej vlny, s vynechaným normovacím koeficientom) v *chirálnej* reprezentácii. Pre ansatz

$$\psi(x^\mu) = \begin{pmatrix} \chi_L(x^\mu) \\ \xi_R(x^\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_L \\ \xi_R \end{pmatrix} e^{-ik_\mu x^\mu} = \psi_0 e^{-ik_\mu x^\mu}$$

dostávame z DIR

$$(\gamma^\mu k_\mu - \widetilde{m})\psi_0 e^{-ik_\mu x^\mu} = 0$$

V *pokojovej* sústave objektu, kde $\vec{k} = 0$, $k_0 = \widetilde{m}$, a $E = mc^2 = \hbar c\widetilde{m} > 0$, dostávame (po dosadení matíc $\gamma^0$ a $\psi_0$)

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_L \\ \xi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\chi_L + \xi_R \\ \chi_L - \xi_R \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \chi_L = \xi_R$$

Dve lineárne nezávislé riešenia DIR sú teda

$$\psi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ic\widetilde{m}t} \qquad\qquad \psi_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ic\widetilde{m}t}$$

Obdobným spôsobom s použitím ansatzu $\psi_0 e^{ic\widetilde{m}t}$ pre $E < 0$ dostaneme $\chi_L = -\xi_R$ a ďalšie dve lineárne nezávislé riešenia

$$\psi_3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ic\widetilde{m}t} \qquad\qquad \psi_4(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{ic\widetilde{m}t}$$

[30]Táto podmienka je ekvivalentná definovaniu matíc $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ v kap. III.2.1. Výraz $\{..,..\}$ je tzv. *antikomutátor*, a uvedená podmienka definuje tzv. *Cliffordovu algebru*. Rôzne reprezentácie $\gamma$-matíc sú viazané touto podmienkou. Spĺňajú ju aj Pauliho matice.

[31]Vo všeobecnosti nemusí ísť o spinory v chirálnej báze, t.j chirálne ľavo/pravoruké, viď kap. III.2.3.

Každé z riešení má spoločnú aj konfiguráciu spinu („hore“ *alebo* „dole“ pre obe chirality). Všeobecné riešenie *v pokojovej sústave* je potom *superpozíciou týchto bázových riešení.*

Predpokladajme teraz ako „počiatočnú“ podmienku v čase $t = 0$ spinor v stave „chirálne ľavoruký spin hore“, čiže (v uvedenej báze)

$$\psi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left[\psi_1(0) + \psi_3(0)\right]$$

Jeho časový vývoj je $\psi(t) = \frac{1}{2}\left[\psi_1(t) + \psi_3(t)\right]$, a v čase $t = \frac{\pi}{2c\widetilde{m}}$ bude

$$\psi\left(\frac{\pi}{2c\widetilde{m}}\right) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\pi/2} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\pi/2}\right] = -i\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

čo je „*chirálne pravoruký* spin hore“. Znamená to, že Diracove spinory (ako riešenia DIR) v čase neustále *oscilujú* medzi stavmi *opačnej* chirality (cez ich superpozície), s frekvenciou úmernou parametru $\widetilde{m}$ - hmotnosti excitácie poľa (balíku energie, t.j. častice). Stavy oboch chiralít sú teda navzájom previazané parametrom $\widetilde{m}$ - *chiralita hmotných objektov sa nezachováva v čase* (zachováva sa však pri interakciách, a aj pri lorentzovských transformáciách). Znamená to tiež, že v Prírode nemôžme pozorovať *hmotné* Weylove spinory (fixnej chirality), ale len Diracove (bi)spinory (riešenia DIR) s kombinovanou chiralitou. Naopak, pre *ne*hmotné polia sa chirálne ľavo- a pravotočivá časť bispinoru nemiešajú, a interpretujeme ich (v chirálnej báze) ako *samostatné* častice.

### III.2.3 Diracove antičastice.

DIR a lagrangián (kap. III.2.1), vyjadrené v *chirálnej* báze (čiže v báze Weylových spinorov) nadobúdajú tvar

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - \widetilde{m})\psi = \begin{pmatrix} -\widetilde{m} & i\sigma^\mu\partial_\mu \\ i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu & -\widetilde{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi_L \\ \xi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{D}_W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi_L \\ \xi_R \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{\mathcal{L}}{\hbar c} = (\chi_L^\dagger\ \xi_R^\dagger)\begin{pmatrix} \hat{D}_W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi_L \\ \xi_R \end{pmatrix} = i\chi_L^\dagger(\partial_0 - \vec{\sigma}\cdot\nabla)\chi_L + i\xi_R^\dagger(\partial_0 + \vec{\sigma}\cdot\nabla)\xi_R - \widetilde{m}(\chi_L^\dagger\xi_R + \xi_R^\dagger\chi_L)$$

Posledný člen lagrangiánu pre $\widetilde{m} \neq 0$ mieša chirálne ľavo- a pravoruké polia, lebo matica $(\hat{D}_W)$ nie je v tejto reprezentácii diagonálna. Vieme však zvoliť inú reprezentáciu (iné *dvoj*komponentné spinory), v ktorej táto matica *môže byť* diagonálna, pričom sa transformujú aj Diracove gama-matice.[32] Takou je tzv. **hmotnostná (Diracova) reprezentácia**,[33] v ktorej

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \qquad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{\alpha}_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{\beta} = \gamma^0$$

[32] Pomocou ľubovoľnej invertovateľnej matice, $\mathcal{M}^{-1}\mathcal{M} = 1$, vieme transformovať napr.

$$\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \partial_\mu(\bar{\psi}\mathcal{M}^{-1})(\mathcal{M}\gamma^\mu\mathcal{M}^{-1})(\mathcal{M}\psi) = \partial_\mu\bar{\psi}'\gamma'^\mu\psi'$$

[33] Táto reprezentácia je vhodná pre *nízko*energetické častice s nezanedbateľným príspevkom $mc^2$ do celkovej energie.

Transformácia bispinorov z chirálnej do hmotnostnej reprezentácie je

$$\begin{pmatrix} \chi_L \\ \xi_R \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \chi_s \\ \xi_s \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \chi_L + \xi_R \\ \chi_L - \xi_R \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & -\mathbb{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi_L \\ \xi_R \end{pmatrix}$$

Matica DIR sa pritom transformuje ako

$$\left( \hat{D}_W \right) \to \left( \hat{D}_D \right) = \begin{pmatrix} i\partial_0 - \widetilde{m} & i\sigma^j\partial_j \\ -i\sigma^j\partial_j & -i\partial_0 - \widetilde{m} \end{pmatrix}$$

Predpokladajme riešenie DIR v tvare $\psi(x^\mu) = \begin{pmatrix} \chi_s \\ \xi_s \end{pmatrix} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)/\hbar}$, kde $\chi_s, \xi_s \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sú dvojkomponentné spinory v *hmotnostnej* reprezentácii (teda nie Weylove chirálne ľavo/pravoruké), odpovedajúce stavom „spin hore“ a „spin dole“. Dosadením do DIR dostávame

$$\begin{aligned} &\left(\tfrac{E}{c} - mc\right)\mathbb{1}\chi_s - (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\,\xi_s = 0 & & \chi_s = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{\frac{E}{c}-mc}\xi_s \quad \text{definovaná ak } E<0 \\ & & \Leftrightarrow & \\ &(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\,\chi_s - \left(\tfrac{E}{c} + mc\right)\mathbb{1}\xi_s = 0 & & \xi_s = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{\frac{E}{c}+mc}\chi_s \quad \text{definovaná ak } E>0 \end{aligned}$$

Riešeniami (až na normovací koeficient a po dosadení matíc $\chi_s, \xi_s$ a $\sigma_j$) sú potom bispinory

$$\psi_1(x^\mu) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{\frac{E}{c}+mc} \\ \frac{p_x+ip_y}{\frac{E}{c}+mc} \end{pmatrix} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)/\hbar} \qquad \psi_2(x^\mu) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{\frac{E}{c}+mc} \\ \frac{-p_z}{\frac{E}{c}+mc} \end{pmatrix} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)/\hbar} \qquad \text{pre } E>0$$

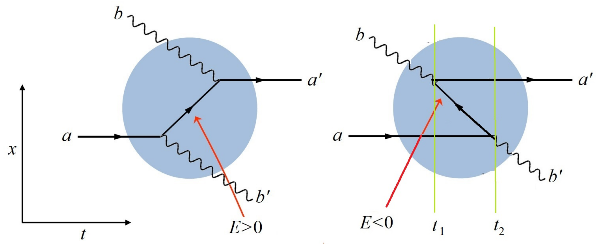
$$\psi_3(x^\mu) = \begin{pmatrix} \frac{p_z}{\frac{E}{c}-mc} \\ \frac{p_x+ip_y}{\frac{E}{c}-mc} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)/\hbar} \qquad \psi_4(x^\mu) = \begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{\frac{E}{c}-mc} \\ \frac{-p_z}{\frac{E}{c}-mc} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)/\hbar} \qquad \text{pre } E<0$$

Lineárne kombinácie *takýchto* bázových stavov tvoria všeobecné riešenie uvedené v kap. III.2.2.

Kvôli problému so stabilitou stavu voči tvorbe antičastíc s $E<0$ sa tieto interpretujú ako častice s $E>0$ pohybujúce sa *naspäť* v čase i priestore, čo vyjadríme transformovaním riešení pre $E<0$

$$\psi_{3,4}(x^\mu) = \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{\frac{E}{c}-mc}\,\xi_s \\ \xi_s \end{pmatrix} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)/\hbar} = \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\cdot(-\vec{p})}{\frac{|E|}{c}+mc}\,\xi_s \\ \xi_s \end{pmatrix} e^{-i[(-\vec{p})\cdot\vec{r}-|E|t]/\hbar}$$

Tento výraz by odpovedal častici s $E>0$ pohybujúcej sa naspäť v čase a priestore (teda pri transformácii $p^\mu \to -p^\mu$), ak by sme DIR riešili namiesto ansatzu $e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)/\hbar}$ s alternatívnym (rovnako vhodným) ansatzom $e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)/\hbar}$. Bez ohľadu na voľbu ansatzu dostaneme teda práve *štvoricu* nezávislých (ortogonálnych) riešení, dve pre časticu a dve pre antičasticu.




Na obrázku je znázornená zrážka častíc $a, b$, pričom produktami zrážky sú častice $a', b'$. Vstupujúce aj vystupujúce častice sú pre oba scenáre rovnaké (preto sú ekvivalentné), a v oboch častica $a$ vyžiari $b'$ a pohltí $b$. V druhom scenári sa však medzi týmito dvoma udalosťami pohybuje ako antičastica naspäť v čase.
Druhý scenár môžeme interpretovať tak, že v okamihu $t_1$ sa častica $b$ premení na *pár* častica $a'$ a jej antičastica, ktorá v čase $t_2$ anihiluje s $a$ do novej častice $b'$.

V *pokojovej* sústave bispinoru je $\left( \hat{D}_D \right)$ *diagonálnou*, a sústava *zviazaných* rovníc pre $\chi_s, \xi_s$ prejde na *samostatné* rovnice

$$E\chi_s = mc^2\chi_s \qquad E\xi_s = -mc^2\xi_s \qquad E = \pm mc^2 = \pm\hbar\tilde{m}c$$

Spinory $\chi_s$ a $\xi_s$ reprezentujú *časticu s kladnou* energiou a *antičasticu so zápornou* energiou. Bisponory $\psi_j$ tak tvoria bázu[34] {častica$_\uparrow$, častica$_\downarrow$, antičastica$_\uparrow$, antičastica$_\downarrow$}

$$\psi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ic\tilde{m}t} \qquad \psi_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ic\tilde{m}t} \qquad \psi_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ic\tilde{m}t} \qquad \psi_4(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ic\tilde{m}t}$$

### III.2.4 Spin.

Z tvaru hamiltoniánu

$$\hat{H} = -i\hbar c\,\hat{\vec{\alpha}} \cdot \nabla + mc^2\hat{\beta} = c\,\hat{\vec{\alpha}} \cdot \hat{\vec{p}} + mc^2\hat{\beta}$$

z kap. III.2.1 vidíme, že priestorový (orbitálny) moment hybnosti $\hat{\vec{L}} = \vec{r} \times \hat{\vec{p}}$ sa *nezachováva* - jeho komutátor s hamiltoniánom je totiž

$$[\hat{\vec{L}}, \hat{H}] \to c[\vec{r} \times \hat{\vec{p}}, \hat{\vec{\alpha}} \cdot \hat{\vec{p}}] = c[\vec{r}, \hat{\vec{\alpha}} \cdot \hat{\vec{p}}] \times \hat{\vec{p}} = ic\hbar\,\hat{\vec{\alpha}} \times \hat{\vec{p}} \qquad ([x_j, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{jk})$$

Definujme teda maticu $\hat{\vec{S}}$

$$\underline{\underline{\hat{\vec{S}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}}} = ... = -i\hbar\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2\hat{\alpha}_3\hat{\vec{\alpha}}/2 \qquad [\hat{S}_j, \hat{\alpha}_k] = i\hbar\epsilon_{jkl}\hat{\alpha}_l \qquad [\hat{\vec{S}}, \hat{\beta}] = 0$$

Potom

$$[\hat{\vec{S}}, \hat{H}] = -ic\hbar\,\hat{\vec{\alpha}} \times \hat{\vec{p}} \qquad \underline{\underline{[\hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}, \hat{H}] = 0}}$$

Zachovávajúcou sa veličinou je teda (ako už vieme z kap. II.4.4) *celkový* moment hybnosti $\underline{\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}}$, kde $\vec{S}$ je *interný* moment hybnosti Diracovho spinorového poľa - *spin*. Platí tiež

$$(\hat{\vec{S}})^2 = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma} \end{pmatrix} = ... = \frac{3\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

čo odpovedá vlastnej hodnote $j(j+1)$ Casimirovho operátoru $J^2$ algebry $\mathfrak{su}(2)$ pre $j = \frac{1}{2}$ z kap. II.3.3. V porovnaní s *ne*relativistickými spinormi s operátormi spinu reprezentovanými maticami 2×2 (Pauliho maticami) pôsobiacimi na *spinorový priestor*, operátory spinu relativistických *bi*spinorov sú matice 4×4 pôsobiace na *bispinorový priestor*. Vo *fyzickom 3D priestore* je pritom spin reprezentovaný trojicou kartézskych zložiek.

Pre *anti*častice transformácia $(E, \vec{p}) \to (-E, -\vec{p})$ znamená $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \to -\vec{L}$, a zo zákona zachovania celkového momentu hybnosti vyplýva $\vec{S} \to -\vec{S}$.

V *pokojovej* sústave bispinoru ($\vec{p} = 0$, $\vec{L} = 0$) teda platí $[\hat{H}, \hat{\vec{S}}] = 0$, a bázové stavy $\psi_{1-4}$ z predchádzajucej kap. III.2.3 sú aj *vlastnými* stavmi operátoru $\hat{S}_z$,[35] čiže energie sú *degenerované*.

[34] Sú to bázové bispinory $\psi_{1-4}(t)$ z predchádzajúcej kapitoly transformované z chirálnej do hmotnostnej bázy.

[35] Pracujeme v obvyklej spinorovej báze s diagonálnym operátorom $\hat{S}_z$.

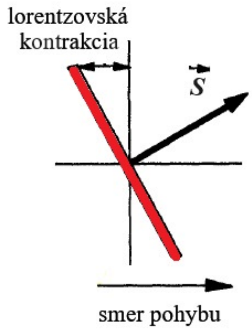
(Na každú hodnotu $E$ pripadajú dva stavy častice/antičastice.) V *laboratórnej* sústave ($\vec{p} \neq 0$) však vo všeobecnosti tieto bázové riešenia DIR nie sú vlastnými stavmi $\hat{S}_z$, s výnimkou prípadu $\vec{p} = (0, 0, p_z)$, keď ich spinorové časti (po transformácii na kladné energie) nadobúdajú tvar[36]

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{\frac{E}{c}+mc} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-p_z}{\frac{E}{c}+mc} \end{pmatrix} \qquad \underset{(E,\vec{p})\to(-E,-\vec{p})}{\psi_3 =} \begin{pmatrix} \frac{p_z}{\frac{E}{c}+mc} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underset{(E,\vec{p})\to(-E,-\vec{p})}{\psi_4 =} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-p_z}{\frac{E}{c}+mc} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Stojí za zmienku, že ak uvážime relativistické vzťahy $E = \gamma mc^2,\ p_j = \gamma m v_j\,,\ \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$, závislosť spinorových častí $\psi_{1-4}$ od $E$, $\vec{p}$ aj $m$ (ktoré vypadne) sa redukuje na výlučnú závislosť od $\vec{v}$. Navyše, v ultrarelativistickej limite $v \to c$, čiže pre častice s $m \to 0$, platí $E \cong pc$, a DIR (v hmotnostnej báze) prejde na

$$\xi_s = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{\frac{E}{c}}\chi_s = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\chi_s = \vec{\sigma}\cdot\vec{p}^{\,o}\chi_s \qquad (E>0) \qquad\qquad \chi_s = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{\frac{E}{c}}\xi_s = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\xi_s = \vec{\sigma}\cdot\vec{p}^{\,o}\xi_s \qquad (E<0)$$

Návratom do *chirálnej* bázy (vhodnejšej pre ultrarelativistické prípady), $\chi_L = \chi_s + \xi_s$ , $\xi_R = \chi_s - \xi_s$, dostávame (sčítaním/odčítaním uvedených rovníc) *samostatné* rovnice pre chirálne komponenty bispinoru




$$\vec{\sigma}\cdot\vec{p}^{\,o}\xi_R = +\xi_R \qquad \vec{\sigma}\cdot\vec{p}^{\,o}\chi_L = -\chi_L \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\sigma}\cdot\vec{p}^{\,o} \to \pm 1$$

čo sa dá (semiklasicky) interpretovať ako „natočenie spinu“ do/proti smeru pohybu. Ak by sme spin klasicky asociovali s rotujúcim diskom, potom pri translačnej rýchlosti disku blížiacej sa k $c$ dochádza v *laboratórnej* sústave k natáčaniu roviny disku v dôsledku relativistickej kontrakcie dĺžky v smere translácie (obr.). V *pokojovej* sústave (pre $v < c$) disku sa smer spinu *nemení.*

### III.2.5 Helicita.

Aplikovaním na riešenia DIR z kap. III.2.3 vieme ukázať, že *operátory* $\hat{\vec{p}}$, $(\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{p}})$ a $\hat{H}$ (pre voľnú časticu) navzájom komutujú

$$[(\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{p}}), \hat{p}_j] = [(\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{p}}), \hat{H}] = [\hat{p}_j, \hat{H}] = 0$$

Operátor $(\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{p}})$ teda reprezentuje veličinu *zachovávajúcu sa* v čase - *priemet* spinu do smeru pohybu. Samotný spin sa pritom vo všeobecnosti *ne*zachováva, $[\hat{\vec{S}}, \hat{H}] \neq 0$ (kap. III.2.4). V normovanom (bezrozmernom) tvare sa táto veličina sa nazýva **helicita**,[37] a jej operátor definujeme ako

$$\hat{\mathfrak{h}} = \frac{\hat{\vec{S}}\cdot\hat{\vec{p}}^{\,o}}{\hbar} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{p}}^{\,o} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{p}}^{\,o} \end{pmatrix} \qquad\qquad \hat{\vec{p}}^{\,o} = \frac{\hat{\vec{p}}}{|\vec{p}|}$$

Pre časticovú/antičasticovú časť bispinoru platí[38]

$$\hat{\mathfrak{h}}\chi_s = \pm\frac{1}{2}\chi_s \qquad\qquad \hat{\mathfrak{h}}\xi_s = \mp\frac{1}{2}\xi_s \qquad\qquad s = 1, 2$$

[36] Aplikovaním operátoru $\hat{S}_z$ sa tieto stavy nezmenia.

[37] Helicita je *skalárom* na fyzickom priestore, na bispinorovom priestore pôsobí ako matica $4\times 4$. Definovali sme ju už v kap. II.4.5 v nerelativistickej verzii, kde bol spin reprezentovaný maticami $2\times 2$. V celej kapitole o grupách sme pritom kládli pre jednoduchosť $\hbar = 1$, v zvyšnom texte však $\hbar$ explicitne uvádzame.

[38] Dôsledkom komutatívnosti operátorov $\hat{H}$ a $\hat{\mathfrak{h}}$ je dvojnásobná degenerácia riešení DIR - každej hodnote energie odpovedajú dve riešenia s rôznymi helicitami.

Objekty s helicitou $+\frac{1}{2}/-\frac{1}{2}$ nazývame **pravo/ľavoruké**.[39]

V pokojovej sústave pozorovateľa *predbiehajúceho* daný *hmotný* objekt sa tento objekt pohybuje *opačným* smerom (s *opačnou* hybnosťou) - helicita teda *nie je lorentzovským invariantom.* (Naproti tomu *chiralita* sa zachováva pri lorentzovskej transformácii (je ňou definovaná), ale pre hmotné objekty sa mení v čase - kap. III.2.2.)

*Nehmotné* objekty, $m = 0$, $E = |\vec{p}|c$, sa pohybujú rýchlosťou $c$ a nemožno ich predbehnúť - ich helicita *je* lorentzovským invariantom. Na druhej strane, nulová je aj frekvencia oscilácií chirality - chiralita sa *zachováva* v čase. Pre $m = 0$ teda chiralita a helicita *splývajú* (až na znamienko). Nehmotné chirálne spinory z kap. III.2.4 reprezentujú dve *nezávislé nehmotné* častice opačnej helicity/chirality. (Pre antičastice sa zmení znamienko.)

### III.2.6 Parita.

Preskúmajme kovariantnosť DIR vzhľadom na transformáciu parity $x^\mu \underset{\mathcal{P}}{\rightarrow} x'^\mu$, čiže $\vec{r} \underset{\mathcal{P}}{\rightarrow} \vec{r}\,' = -\vec{r}$, kde $\mathcal{P} = \mathrm{diag}[1, -1, -1, -1]$. Okrem zrkadlenia súradníc sa transformuje aj vnútorná štruktúra spinoru, teda

$$\psi_{\mathcal{P}}(x'^\mu) = \mathcal{P}_s\psi(x^\mu) = \mathcal{P}_s\psi(\mathcal{P}^{-1}x'^\mu) \qquad\qquad \psi(x^\mu) = \mathcal{P}_s^{-1}\psi_{\mathcal{P}}(x'^\mu)$$

S uvážením $\partial_\mu = \partial_{\mu'}\mathcal{P}$ prepíšme DIR, vynásobenú $\mathcal{P}_s$ zľava, ako

$$0 = \mathcal{P}_s[i\gamma^\mu\partial_\mu - \widetilde{m}]\psi(x^\mu) = [i\mathcal{P}_s\gamma^\mu\partial_{\mu'}\mathcal{P}\mathcal{P}_s^{-1} - \widetilde{m}]\psi_{\mathcal{P}}(x'^\mu)$$

Symetria DIR vzhľadom na zmenu parity a $\psi \underset{\mathcal{P}_s}{\rightarrow} \psi_{\mathcal{P}}$ vyžaduje $\mathcal{P}_s\gamma^\mu\mathcal{P}\mathcal{P}_s^{-1} = \gamma^\mu$. Tejto podmienke na základe vlastností gama-matíc vyhovuje $\mathcal{P}_s = \gamma^0$, čiže

$$\underline{\psi_{\mathcal{P}}(x'^\mu) = \gamma^0\psi(x^\mu)} \qquad\qquad \bar{\psi}_{\mathcal{P}}(x'^\mu) = \psi^\dagger(x^\mu)$$

$$\bar{\psi}_{\mathcal{P}}(x'^\mu)\psi_{\mathcal{P}}(x'^\mu) = \bar{\psi}(x^\mu)\psi(x^\mu) \ \ \text{(skalár)} \qquad\qquad \bar{\psi}_{\mathcal{P}}(x'^\mu)\gamma^\nu\psi_{\mathcal{P}}(x'^\mu) = \mathcal{P}\bar{\psi}(x^\mu)\gamma^\nu\psi(x^\mu) \ \ \text{(vektor)}$$

Aplikovaním operátoru parity spinoru na bázové bispinory v ich *pokojovej* sústave, v *hmotnostnej* reprezentácii (v ktorej $\gamma^0 = \mathrm{diag}(1, 1, -1, -1)$), dostávame

$$\gamma^0\psi_1(t) = \gamma^0\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}e^{-ic\widetilde{m}t} = (+1)\psi_1(t) \qquad\qquad \gamma^0\psi_2(t) = \gamma^0\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}e^{-ic\widetilde{m}t} = (+1)\psi_2(t)$$

$$\gamma^0\psi_3(t) = \gamma^0\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}e^{ic\widetilde{m}t} = (-1)\psi_3(t) \qquad\qquad \gamma^0\psi_4(t) = \gamma^0\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}e^{ic\widetilde{m}t} = (-1)\psi_4(t)$$

Parita[40] (vlastná hodnota operátoru) je teda $+1$ pre Diracove *častice* a -1 pre *antičastice*.

Vo všeobecnosti, teda ak $\vec{p} \neq 0$, môžeme napr. pre $E > 0$ transformáciu parity vyjadriť ako

$$\gamma^0\underset{s=1,2}{\psi_s}(t, \vec{r}) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{\frac{E}{c}+mc}\end{pmatrix}\chi_s e^{-i(Et-\vec{p}\cdot\vec{r})/\hbar} = \begin{pmatrix}1\\ \frac{\vec{\sigma}\cdot(-\vec{p})}{\frac{E}{c}+mc}\end{pmatrix}\chi_s e^{-i(Et+(-\vec{p})\cdot\vec{r})/\hbar}$$

Transformácia parity teda pochopiteľne mení *hybnosť*. Nemení však *spin*, a teda mení *helicitu* častice. To isté platí aj pre *anti*častice.

[39] Kvôli rozlíšeniu sa v tomto texte *chirálna* ľavo/pravorukosť vždy vyskytuje s prívlastkom *chirálna*, kým ľavo/pravorukosť *bez* prívlastku znamená *helicitu*.

[40] Hovoríme o tzv. **intrinzickej parite**.

### III.2.7 T-symetria.

Preskúmajme teraz, analogicky ako v kap. III.2.6, kovariantnosť DIR vzhľadom na otočenie *času* $x^\mu \underset{\mathcal{T}}{\rightarrow} x'^\mu$, kde $\mathcal{T} = \mathrm{diag}[-1,1,1,1]$, čiže $t \underset{\mathcal{T}}{\rightarrow} -t$. Popri zrkadlení času predpokladajme transformáciu spinoru[41]

$$\psi_\mathcal{T}(x'^\mu) = \mathcal{T}_s\psi^*(x^\mu) = \mathcal{T}_s\psi^*(\mathcal{T}^{-1}x'^\mu) \qquad\qquad \psi^*(x^\mu) = \mathcal{T}_s^{-1}\psi_\mathcal{T}(x'^\mu)$$

S uvážením $\partial_\mu = \partial_{\mu'}\mathcal{T}$ prepíšme *komplexne združenú* DIR, vynásobenú $\mathcal{T}_s$ zľava, ako

$$[-i\mathcal{T}_s(\gamma^\mu)^*\partial_{\mu'}\mathcal{T}\mathcal{T}_s^{-1} - \widetilde{m}]\psi_\mathcal{T}(x'^\mu) = 0$$

Symetria DIR vzhľadom na otočenie času a $\psi \underset{\mathcal{T}_s}{\rightarrow} \psi_\mathcal{T}$ vyžaduje $\mathcal{T}_s(\gamma^\mu)^*\mathcal{T}\mathcal{T}_s^{-1} = -\gamma^\mu$. Tejto podmienke na základe vlastností gama-matíc vyhovuje $\mathcal{T}_s = i\gamma^1\gamma^3$, čiže

$$\underline{\psi_\mathcal{T}(x'^\mu) = i\gamma^1\gamma^3\psi^*(x^\mu)}$$

Otočenie času *mení* hybnosť *aj* spin častice, *ne*mení preto jej helicitu.

### III.2.8 Kvantovanie spinorového poľa.

Kvantovaním spinorového poľa sa koeficienty $a_s(\vec{k}), b_s^*(\vec{k})$ vo všeobecnom riešení DIR stávajú anihilačnými a kreačnými operátormi $\hat{a}_s(\vec{k}), \hat{b}_s^\dagger(\vec{k})$

$$\hat{\psi} = \sum_{s=1}^{2}\int \frac{1}{(2\pi)^3\sqrt{2E_k}}\left(\hat{a}_s(\vec{k})\psi_s^a(k)e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{b}_s^\dagger(\vec{k})\psi_s^b(k)e^{ik_\mu x^\mu}\right)d^3k$$

$$\hat{\psi}^\dagger = \sum_{s=1}^{2}\int \frac{1}{(2\pi)^3\sqrt{2E_k}}\left(\hat{a}_s^\dagger(\vec{k})\psi_s^{a\dagger}(k)e^{ik_\mu x^\mu} + \hat{b}_s(\vec{k})\psi_s^{b\dagger}(k)e^{-ik_\mu x^\mu}\right)d^3k$$

kde $\psi_s^a(k), \psi_s^b(k)$ sú bázové spinory.

Preskúmajme teraz komutačné vzťahy medzi Weylovými spinormi, tvoriacimi Diracov (bi)spinor, ako aj medzi ich zložkami. Podľa fundamentálnych komutačných vzťahov medzi operátormi polí (kap. I.3.7) pre (Weylovo) spinorové pole $\chi(\vec{r},t)$ platí

$$[\hat{\chi}(\vec{r},t), \hat{\chi}(\vec{r}\,',t)] = \hat{\chi}(\vec{r},t)\hat{\chi}(\vec{r}\,',t) - \hat{\chi}(\vec{r}\,',t)\hat{\chi}(\vec{r},t) = 0 \qquad \text{pre} \qquad \vec{r}\,' \neq \vec{r}$$

Rozpísaním oboch súčinov na zložky dostávame v spinorovom značení

$$\hat{\chi}(\vec{r},t)\hat{\chi}(\vec{r}\,',t) = \hat{\chi}_a(\vec{r},t)\epsilon^{ab}\hat{\chi}_b(\vec{r}\,',t) \qquad a,b=\{1,2\} \qquad \epsilon^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\chi}(\vec{r}\,',t)\hat{\chi}(\vec{r},t) = \hat{\chi}_b(\vec{r}\,',t)\epsilon^{ba}\hat{\chi}_a(\vec{r},t) = -\hat{\chi}_b(\vec{r}\,',t)\epsilon^{ab}\hat{\chi}_a(\vec{r},t) \qquad \epsilon^{ba} = -\epsilon^{ab}$$

kde $\epsilon^{ab}$ je tzv. **spinorová metrika** (Dodatok G). Keďže oba výrazy sa musia rovnať (nulový komutátor), vzájomnou výmenou zložiek sa musí meniť znamienko,

$$\hat{\chi}_a(\vec{r},t)\hat{\chi}_b(\vec{r}\,',t) = -\hat{\chi}_b(\vec{r}\,',t)\hat{\chi}_a(\vec{r},t)$$

čo sa dá prepísať v podobe *antikomutátoru*

$$\hat{\chi}_a(\vec{r},t)\hat{\chi}_b(\vec{r}\,',t) + \hat{\chi}_b(\vec{r}\,',t)\hat{\chi}_a(\vec{r},t) = \underline{\{\hat{\chi}_a(\vec{r},t), \hat{\chi}_b(\vec{r}\,',t)\} = 0}$$

[41] Transformácia $\mathcal{T}$ je *anti*unitárna, preto komplexné združenie spinoru (kap. I.2.4).

Obdobným spôsobom sa dajú odvodiť vzťahy pre príslušné operátory kánonickej hybnosti $\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \chi)}$

$$\underline{\{\hat{\pi}_a(\vec{r},t), \hat{\pi}_b(\vec{r}\,',t)\} = 0} \qquad \underline{\{\hat{\pi}_a(\vec{r},t), \hat{\chi}_b(\vec{r}\,',t)\} = i\hbar\delta_{ab}\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')}$$

Diracove (bi)spinory $\psi$ sú zložené z Weylových spinorov, a analogické antikomutačné vzťahy platia aj pre ne. V tomto prípade

$$\hat{\pi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \hat{\psi})} = ... = i\hat{\bar{\psi}}\gamma^0 = i\hat{\psi}^\dagger \qquad \{\hat{\pi}_a(\vec{r},t), \hat{\psi}_b(\vec{r}\,',t)\} = \{i\hat{\psi}_a^\dagger(\vec{r},t), \hat{\psi}_b(\vec{r}\,',t)\} = i\hbar\delta_{ab}\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

Dosadením riešení pre $\hat{\psi}, \hat{\psi}^\dagger$ dostávame *anti*komutátory pre kreačné/anihilačné operátory, pričom jediné *ne*nulové budú

$$\underline{\{\hat{a}_s(\vec{k}), \hat{a}_{s'}^\dagger(\vec{k}\,')\} = \{\hat{b}_s(\vec{k}), \hat{b}_{s'}^\dagger(\vec{k}\,')\} = (2\pi)^3\delta_{ss'}\delta(\vec{k}-\vec{k}\,')}$$

Hamiltonián podľa vzťahu z kap. I.3.2, *s použitím antikomutačných vzťahov namiesto komutačných*[42], bude[43]

$$\hat{H} = ... = \frac{\hbar}{(2\pi)^3}\sum_{s=1}^{2}\int \omega_k \left[\hat{a}_s^\dagger(\vec{k})\hat{a}_s(\vec{k}) + \hat{b}_s^\dagger(\vec{k})\hat{b}_s(\vec{k})\right] d^3k = \frac{\hbar}{(2\pi)^3}\sum_{s=1}^{2}\int \omega_k \left[\hat{N}_{a,s}(\vec{k}) + \hat{N}_{b,s}(\vec{k})\right] d^3k$$

Podobne ako v prípade skalárneho poľa (kap. III.1.3), prostredníctvom komutátorov s hamiltoniánom identifikujeme $\hat{a}_s^\dagger(\vec{k})$, $\hat{a}_s(\vec{k})$, resp. $\hat{b}_s^\dagger(\vec{k})$, $\hat{b}_s(\vec{k})$ ako kreačné/anihilačné operátory *častíc* resp. *antičastíc* (s *kladnou* energiou) v stave $\vec{k}$ a priemetom spinu $s$. Operátor $\hat{a}_s^\dagger(\vec{k})\hat{b}_s^\dagger(\vec{k})$ teda kreuje *pár* častica-antičastica. Rovnako ako v prípade skalárneho poľa (kap. III.1.5), zachovávajúci sa noetherovský náboj (daný U(1)-symetriou lagrangiánu) je daný počtom častíc *mínus* počtom antičastíc.

Ak by sme *ne*zanedbali energiu vákua, vyplývajúcu tentokrát z *anti*komutačných vzťahov, pre každý mód $\vec{k}$ by sme dostali hamiltonián v tvare

$$\hat{H}(\vec{k}) = \hbar\omega_k \sum_{s=1}^{2}\left[\hat{N}_{a,s}(\vec{k}) - \frac{1}{2} + \hat{N}_{b,s}(\vec{k}) - \frac{1}{2}\right]$$

teda so znamienkom - namiesto + pri energii vákua.

Antikomutátor $\{\hat{a}_s^\dagger(\vec{k}), \hat{a}_s^\dagger(\vec{k})\} = 0$ zas prirodzene vedie na $\hat{a}_s^\dagger(\vec{k})\hat{a}_s^\dagger(\vec{k}) = 0$, čo pri aplikovaní na vákuum dá *ne*existenciu *dvoj*časticového stavu $|\vec{k},s\rangle$ - **Pauliho vylučovací princíp**

$$\underline{\underline{\hat{a}_s^\dagger(\vec{k})\hat{a}_s^\dagger(\vec{k})|0\rangle = \hat{b}_s^\dagger(\vec{k})\hat{b}_s^\dagger(\vec{k})|0\rangle = 0}}$$

Znamená to, že (na rozdiel od skalárneho poľa) vlastné hodnoty operátorov $\hat{N}_s(\vec{k})$ môžu byť len 0 resp. 1.

### III.2.9 Nerelativistická limita v elektromagnetickom poli.

Rovnako ako v prípade KGR (kap. III.1.7), aj v DIR sa v elektromagnetickom poli nahrádza $i\hbar\partial_\mu \to i\hbar\partial_\mu - qA_\mu$, a jej schrödingerovský tvar prejde na

$$i\hbar\partial_t\psi(x^\mu) = \left(c\,\hat{\vec{\alpha}}\cdot(-i\hbar\nabla - q\vec{A}) + q\varphi + \hat{\beta}mc^2\right)\psi(x^\mu) \qquad \psi(x^\mu) = \begin{pmatrix} \chi(x^\mu) \\ \xi(x^\mu) \end{pmatrix}$$

[42] Použitie komutačných vzťahov by viedlo k znamienku - v zátvorke, čo by znamenalo *neobmedzene záporný* druhý člen v energii, a teda nestabilitu takéhoto stavu voči generovaniu antičastíc.

[43] Sumačnou konvenciou je zahrnuté aj sčítavanie cez priemety spinu, a všadeprítomný nekonečný člen ignorujeme.

*Nerelativistické* priblíženie, so substitúciou $\hat{\vec{\pi}} = (-i\hbar\nabla - q\vec{A})$, a s rovnakými podmienkami ako v kap. III.1.7 (všetky energie zanedbateľné voči $E_0 = mc^2$), v hmotnostnej báze dá

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t\chi &= c\,\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{\pi}}\xi + q\varphi\chi + E_0\chi \\ i\hbar\partial_t\xi &= c\,\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{\pi}}\chi + q\varphi\xi - E_0\xi \end{aligned}$$

Pre $0 < E \cong E_0$ opäť kladieme

$$\chi(\vec{r},t) \cong e^{-iE_0t/\hbar}\Psi(\vec{r},t) \qquad \xi(\vec{r},t) \cong e^{-iE_0t/\hbar}\Theta(\vec{r},t) \qquad \left|\frac{i\hbar\partial_t\Psi}{\Psi}\right|, \left|\frac{i\hbar\partial_t\Theta}{\Theta}\right|, q\varphi \ll E_0$$

a dostaneme

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t\Psi &= c\,\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{\pi}}\Theta + q\varphi\Psi \\ \cancel{i\hbar\partial_t\Theta} &= c\,\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{\pi}}\Psi + \cancel{q\varphi\Theta} - 2E_0\Theta \end{aligned}$$

a odtiaľ

$$\Theta \cong \frac{\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{\pi}}}{2mc}\Psi \qquad\qquad i\hbar\partial_t\Psi = \frac{\left(\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{\pi}}\right)^2}{2m}\Psi + q\varphi\Psi$$

Komponenta $\Theta$ sa teda ukazuje byť nepodstatne malou (veľký menovateľ), a môžeme ju *ignorovať*.[44] Zdĺhavejšími úpravami dostávame

$$\left(\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{\pi}}\right)^2 = \hat{\vec{\pi}}^2 + i\vec{\sigma}\cdot[\hat{\vec{\pi}}\times\hat{\vec{\pi}}] \qquad\qquad [\hat{\vec{\pi}}\times\hat{\vec{\pi}}]_j = \epsilon_{jkl}[\hat{\pi}_k,\hat{\pi}_l] = ... = iq(\nabla\times\vec{A})_j\epsilon_{jkl} = iqB_j\epsilon_{jkl}$$

kde $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$ je magnetické pole. Nerelativistická DIR teda prejde na tzv. **Pauliho rovnicu** pre *dvoj*komponentný spinor

$$\underline{i\hbar\partial_t\Psi(\vec{r},t) \cong \left[\frac{\left(-i\hbar\nabla - q\vec{A}(\vec{r},t)\right)^2}{2m} - \frac{q\hbar}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}(\vec{r},t) + q\varphi(\vec{r},t)\right]\Psi(\vec{r},t)}$$

čo je SCHR (pre spinor) rozšírená o interakčnú energiu spinu (presnejšie spinového *magnetického momentu*) s magnetickým poľom $\vec{B}$.[45]

◇ ◇ ◇ ◇ ◇

## Dôležité závery:

• Relativisticky kovariantnou pohybovou rovnicou (Diracovho) *spinorového* poľa je DIR, a jej riešením sú superpozície rovinných vĺn s vnútornou (spinorovou) štruktúrou. Každá komponenta spinorového poľa (komplexný skalár) je pritom riešením KGR.

• Chiralita Diracových spinorov osciluje v čase s frekvenciou úmernou ich hmotnosti. V Prírode neexistujú *hmotné* spinory konštantnej chirality (Weylove spinory).

• Riešeniami DIR sú popri časticiach s kladnou energiou aj *antičastice* so *zápornou* energiou, ktoré interpretujeme ako častice s *kladnou* energiou pohybujúce sa *naspäť v čase*.

• Helicita - orientácia spinu voči smeru pohybu - sa zachováva v čase, lorentzovským invariantom je však len pre *nehmotné* častice, kedy splýva s chiralitou. Transformácia parity však mení obe.

[44] Pripomeňme, že táto časť (bi)spinoru reprezentuje *anti*časticu, ktorá sa tým v *ne*relativistickej limite stráca.
[45] Túto interakciu pozorujeme ako tzv. *Zeemanov jav*. Koeficient $\frac{1}{2}$ odlišuje *spinový* magnetický moment od *orbitálneho*.

• Vnútorná parita Diracových častíc/antičastíc je $+1/-1$.

• Pre zložky spinorov ako operátory polí platia *antikomutačné* vzťahy namiesto obvyklých komutačných (čo súvisí s ich neobvyklým správaním pri rotáciách o 360°), a dôsledkom je Pauliho vylučovací princíp.

• V *ne*relativistickom priblížení prejde DIR v elektromagnetickom poli na Pauliho rovnicu - SCHR rozšírenú o interakciu spinu s magnetickým poľom. Antičasticová časť riešenia DIR pritom zaniká.

# III.3 Vektorové polia.

## III.3.1 Procova rovnica.

**Vektorové polia** asociujeme s časticami so spinom 1, teda lorentzovsky sa transformujúcich vo *vektorovej* reprezentácii $(\frac{1}{2},0)\otimes(0,\frac{1}{2})=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Lagrangián pre vektorové pole $A_\mu$ musí pozostávať z lorentzovsky invariantných skalárnych členov, akými do druhého rádu $A_\mu$ sú len $A_\mu A^\mu$, $\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu$ a $\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu$. Vhodnou voľbou (v rámci voľnosti v konštrukcii lagrangiánu) je[46]

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{2}\left(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu-\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu\right)+\frac{\widetilde{m}^2}{2}A_\mu A^\mu=\ldots=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{\widetilde{m}^2}{2}A_\mu A^\mu$$

kde $\underline{F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu}$. Dosadením do ELR a uvážením, že napr.

$$\partial_\sigma\left[\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma A_\rho)}(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu)\right]=\partial_\sigma\left[\frac{\partial(\partial_\mu A_\nu)}{\partial(\partial_\sigma A_\rho)}(\partial^\mu A^\nu)+(\partial_\mu A_\nu)\eta^{\mu\kappa}\eta^{\nu\lambda}\frac{\partial(\partial_\kappa A_\lambda)}{\partial(\partial_\sigma A_\rho)}\right]=$$

$$=\partial_\sigma\left[\delta^\sigma_\mu\delta^\rho_\nu(\partial^\mu A^\nu)+(\partial_\mu A_\nu)\eta^{\mu\kappa}\eta^{\nu\lambda}\delta^\sigma_\kappa\delta^\rho_\lambda\right]=2\partial_\sigma\partial^\sigma A^\rho$$

dostávame **Procove rovnice**[47] (PCR) pre jednotlivé zložky štvorvektoru $A^\mu$

$$\underline{\underline{\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)+\widetilde{m}^2A^\nu=\partial_\mu F^{\mu\nu}+\widetilde{m}^2A^\nu=0}}$$

Prvý člen tradične nazývame kinetickým a druhý *hmotnostným* - reprezentuje hmotnosť častice so spinom 1 ako excitácie vektorového poľa $A^\mu$.

Prvá vec, ktorú si musíme uvedomiť, je, že kinetický člen je daný tenzorom 2. rádu (maticou), a *kánonické hybnosti* odpovedajúce zložkám $A_\nu$ môžeme vyjadriť ako dvojindexové objekty

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t A_\nu)}=\frac{\partial\mathcal{L}}{c\,\partial(\partial_0 A_\nu)}=\frac{1}{2c}\left(\partial^\nu A^0-\partial^0 A^\nu\right)=\pi^{0\nu}$$

pričom pre $\nu=0$ dostávame $\pi^{00}=0$. Znamená to, že zložka $A^0$ *nemá* vlastnú dynamiku, a je teda fyzikálne bezvýznamná. Vďaka symetrickosti $\partial_\mu\partial_\nu$ a antisymetrickosti $F^{\nu\mu}$ platí $\partial_\mu\partial_\nu F^{\nu\mu}=0$, a aplikovaním štvordivergencie na PCR teda dostávame obmedzujúcu podmienku

$$\underline{\partial_\mu A^\mu}=\partial_0 A_0-\partial_j A_j=\underline{0}$$

[46] Rozmerový koeficient kladieme kvôli prehľadnosti rovný 1.
[47] Autorom je Alexandru Proça.

ktorá je *rovnicou kontinuity* (zákonom zachovania) poľa $A_\mu$, a znamená, že len tri zo štyroch jeho komponent sú lineárne *nezávislé* - vnútorná štruktúra tohto poľa teda obsahuje *tri stupne voľnosti.* Podmienka $\partial_\mu A^\mu = 0$ tiež zjednoduší PCR do tvaru

$$\underline{\partial^\mu \partial_\mu A^\nu + \widetilde{m}^2 A^\nu = 0}$$

čo odpovedá KGR pre každú komponentu $A^\nu$ (analogicky ako v prípade DIR). Znamená to, že *časopriestorová* štruktúra vektorového poľa (ako riešenia PCR) je tvorená superpozíciou rovinných vĺn $A^\mu(x^\mu) \sim e^{ik_\mu x^\mu}$ s disperzným vzťahom $\underline{k_\mu k^\mu = \widetilde{m}^2}$.

$$A^\mu(x^\mu) = \sum_{\lambda=1}^{4} \int \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_k}} \left[ \tau^\mu_\lambda a_\lambda(\vec{k}) e^{-ik_\mu x^\mu} + \tau^\mu_\lambda a^*_\lambda(\vec{k}) e^{ik_\mu x^\mu} \right] d^3k$$

Vektorové pole má (na rozdiel od skalárneho, a rovnako ako spinorové) *vnútornú* štruktúru so 4 vnútornými stupňami voľnosti - v každom bode $x^\mu$ fyzikálneho časopriestoru je „vnorený“ vnútorný priestor so 4 *ortogonálnymi* smermi $\lambda = 1, ...4$, vyjadrenými bázovými štvorvektormi $\tau^\mu_\lambda$ - tzv. **polarizáciami**. Je teda prirodzené stotožniť tieto smery s ortogonálnymi bázovými smermi „nášho“ fyzikálneho časopriestoru.[48]

Vo všeobecnosti vieme *ľubovoľný* štvorvektor v jeho pokojovej sústave vyjadriť pomocou bázových štvorvektorov (*lineárnych* polarizácií)[49]

$$\tau^\mu_0 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \tau^\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \tau^\mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \tau^\mu_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\tau_\lambda)_\mu (\tau_\lambda)^\mu = -1$$

$$A^\mu = A_0 \tau^\mu_0 + A_1 \tau^\mu_1 + A_2 \tau^\mu_2 + A_3 \tau^\mu_3$$

Tri polarizačné švorvektory, odpovedajúce *nezávislým* zložkám štvorvektoru $A^\mu$, môžeme potom vyjadriť ako

$$\tau^\mu_l = (0, \vec{\tau}_l) \qquad \vec{\tau}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{\tau}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{\tau}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

čo odpovedá vlastným vektorom $|j, m_j\rangle$ *diagonálneho* operátoru $J_j$ v 3D reprezentácii $\mathfrak{so}(3)$ z kap. II.2.3 s vlastnými hodnotami $m_j = 1, 0, -1$ priemetu vlastného momentu hybnosti (spinu) do *daného* smeru $j$.

Pre riešenia PCR v tvare $A^\mu(x^\mu) \sim \tau^\mu_\lambda e^{ik_\mu x^\mu}$ podmienka $\partial_\mu A^\mu = 0$ vedie na

$$\underline{k_\mu \tau^\mu_\lambda = 0}$$

Znamená to, že polarizačné štvorvektory *závisia* od hybnosti poľa (častice). V *pokojovej* sústave $k_\mu = (\widetilde{m}, 0, 0, 0)$ tomu odpovedajú práve uvedené polarizačné štvorvektory $\tau^\mu_l$. V prípade $\vec{k} = (0, 0, k_z)$ vlna postupuje v smere $z$, a disperzný vzťah $k_\mu k^\mu = k_0^2 - \vec{k} \cdot \vec{k} = \widetilde{m}^2$ vedie na $k_0 = \sqrt{\widetilde{m}^2 + k_z^2}$, čiže $k^\mu = (\sqrt{\widetilde{m}^2 + k_z^2}, 0, 0, k_z)$. Podmienka $k_\mu \tau^\mu_\lambda = 0$ teda zväzuje komponenty $\tau^\mu_0$ a $\tau^\mu_3$, kým zvyšné komponenty ponecháva voľné. Polarizačnú bázu preto tvoria dva **transverzálne** (priečne voči smeru šírenia) štvorvektory $\tau^\mu_1, \tau^\mu_2$, a navzájom závislé $\tau^\mu_0, \tau^\mu_3$ nahrádzame *jedinou* **longitudinálnou** (pozdĺžnou) znormovanou polarizáciou

$$\tau^\mu_L = \frac{1}{\widetilde{m}} \begin{pmatrix} k_z \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{\widetilde{m}^2 + k_z^2} \end{pmatrix}$$

spĺňajúcou podmienku $k_\mu \tau^\mu_\lambda = 0$

vyhovujúcou normovacej podmienke $(\tau_L)_\mu (\tau_L)^\mu = -1$

$\tau^\mu_L \to \tau^\mu_3$ v pokojovej sústave poľa $\vec{k} = (0, 0, 0)$

[48]Nejde však o samozrejmosť, zhoda vnútorného priestoru s fyzikálnym časopriestorom je špecifikom *vektorových* polí.

[49]Imaginárna jednotka v prvom štvorvektore je vecou konvencie.

### III.3.2 Nehmotné vektorové polia.

Osobitnú pozornosť si zasluhuje prípad vektorových polí/častíc s *nulovou* hmotnosťou, $\widetilde{m} = 0$, pre ktoré sa PCR redukuje na

$$\underline{\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0}$$

Odpovedajúcim lagrangiánom (zvoleným v rámci danej voľnosti) je

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\left(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu\right) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

Ak navyše zohľadníme podmienku $\partial_\mu A^\mu = 0$, vyplývajúcu z PCR, dostávame zjednodušený tvar pohybovej rovnice *voľného nehmotného* poľa

$$\underline{\underline{\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0}}$$

ktorej riešeniami sú rovinné vlny $A^\mu e^{ik_\mu x^\mu}$ s disperzným vzťahom $\underline{k_\mu k^\mu = 0}$. Ak opäť predpokladáme $\vec{k} = (0, 0, k_z)$, potom disperzný vzťah vedie na $k_0 = k_z$, čiže $k^\mu = (k_z, 0, 0, k_z)$, čo s uvážením podmienky $k_\mu \tau^\mu_\lambda = 0$ dáva popri transverzálnych polarizáciách $\tau^\mu_1, \tau^\mu_2$ longitudinálnu polarizáciu

$$\tau^\mu_L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad (\tau_L)_\mu (\tau_L)^\mu = -1$$

Oproti hmotnému vektorovému poľu tu však existuje *voľnosť* v definovaní *ne*hmotného vektorového poľa v podobe tzv. **kalibračnej transformácie**

$$A^\mu(x^\nu) \to A^\mu(x^\nu) + \partial^\mu \Lambda(x^\nu)$$

kde $\Lambda(x^\nu)$ je ľubovoľná „poslušná“ *skalárna* funkcia (podmienka $\partial_\mu A^\mu = 0$ vyžaduje len splnenie podmienky $\partial_\mu \partial^\mu \Lambda = 0$). Pri takejto transformácii sa *nemení* lagrangián ani $F^{\mu\nu}$, a teda ani *dynamika* poľa $A^\mu$. Hovoríme o **kalibračnej symetrii**.[50]

S využitím tejto voľnosti vieme ukázať (kalibračnou transformáciou s $\Lambda(x^\mu) = \frac{i}{k_z} e^{ik_\mu x^\mu}$), že longitudinálna konfigurácia poľa $A^\mu_L(x^\nu) = \tau^\mu_L e^{ik_\nu x^\nu}$ je *fyzikálne ekvivalentná* triviálnej konfigurácii $A^\mu_L = 0$. Znamená to, že vnútorná štruktúra *nehmotného* vektorového poľa má len *dva* stupne voľnosti - *transverzálne* polarizácie.[51]

Kým pre *hmotné* polia je teda podmienka $\partial_\mu A^\mu = 0$ priamym *dôsledkom* PCR, v prípade *ne*hmotných polí je len pohodlnou prípustnou *možnosťou* v rámci kalibračnej voľnosti - tzv. **Lorenzovou kalibráciou**, splnenou pre neobmedzený počet konfigurácií $A_\mu(x_\mu)$ s rôznymi $\Lambda(x_\mu)$ (spĺňajúcimi podmienku $\partial_\mu \partial^\mu \Lambda = 0$).

V kap. III.2.4 (pre *spinorové* polia) sme ukázali na klasickej predstave rotujúceho disku, pohybujúceho sa relativistickou rýchlosťou $v$, že v *laboratórnej* sústave sa moment hybnosti (spin) disku natáča do/proti smeru $v$. Tá istá úvaha sa (pochopiteľne) vzťahuje aj na *vektorové* polia. Pre *ne*hmotné pole musí platiť $v = c$, natočenie spinu je teda úplné. V kvantovom svete to znamená, že hoci pre spin 1 existujú *tri* priemety $+1, 0, -1$, pre *ne*hmotné vektorové pole priemet 0 *neexistuje*! Častice takéhoto poľa sú vlastnými stavmi operátoru helicity s vlastnými hodnotami $\pm 1$, čo práve odpovedá *dvom* nezávislým stupňom voľnosti.

---

[50] Viac o kalibračnej symetrii sa dozvieme v kapitole o *kalibračných interakciách*.

[51] Zjednodušene môžeme argumentovať, že nehmotná excitácia poľa (častica) sa *musí* šíriť len rýchlosťou $c$, a teda *v smere šírenia* toto pole nemôže oscilovať.

### III.3.3 Elektromagnetické pole.

Nehmotným vektorovým poľom je aj **elektromagnetické pole**, reprezentované **elektromagnetickým štvorpotenciálom** $A^\mu = (A_0, \vec{A}) = (\varphi/c, \vec{A})$, a v PCR s $\widetilde{m} = 0$ spoznáme *ne*homogénne **Maxwellove rovnice** (MXR) *voľného* poľa, t.j. *bez prítomnosti zdrojov*, $j^\mu = 0$ (kap. I.3.1). Jednotlivé zložky elektromagnetických polí sú

$$E_j = -(\partial_t \vec{A})_j - (\nabla\varphi)_j = -c(\partial_0 A_j + \partial_j A_0) = cF_{0j} \qquad B_j = (\nabla \times \vec{A})_j = \epsilon_{jkl}\partial_k A_l = -\frac{1}{2}\epsilon_{jkl}F^{kl}$$

a $F_{\mu\nu}$ je *antisymetrický* **elektromagnetický tenzor** (ktorého kovariantný a kontravariantný zápis sa líšia znamienkom v 0-tom riadku a stĺpci)

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1/c & E_2/c & E_3/c \\ -E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2/c & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3/c & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c \\ E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2/c & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3/c & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tak ako sa navzájom pohybujúci pozorovatelia nedohodnú na *pohybe* náboja, teda prúde, nedohodnú sa ani na veľkosti elektrického a magnetického poľa - *miešanie* týchto polí pri lorentzovskej transformácii je zohľadnené v tenzore $F_{\mu\nu}$. (Odvodenie MXR s vektormi $\vec{E}, \vec{B}$ je v Dodatku I)

Lagrangián elektromagnetického poľa a kánonické hybnosti, príslušné skalárnej a vektorovej časti štvorpotenciálu, sú[52]

$$\mathcal{L} = \frac{\varepsilon_0}{2}(E^2 - c^2B^2) \qquad \pi_0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_0} = 0 \qquad \vec{\pi} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{A}}} = -\varepsilon_0\vec{E}$$

Hamiltonián (jeho objemová hustota) je potom (podľa očakávania)

$$\mathcal{H} = \vec{\pi}\cdot\dot{\vec{A}} - \mathcal{L} = ... = \frac{\varepsilon_0}{2}(E^2 + c^2B^2)$$

Z predchádzajúcich kapitol vieme, že Lorenzova kalibrácia $\partial_\mu A^\mu = 0$ redukuje počet nezávislých *vnútorných* stupňov voľnosti (polarizácií) zo 4 na 3, čiže *ne*hmotnému poľu stále ponecháva jeden prebytočný (nefyzikálny) stupeň voľnosti.[53] *Dodatočnou* kalibráciou, ktorá úplne odstraňuje túto voľnosť, je tzv. **radiačná**, **priečna** alebo **Coulombova kalibrácia**

$$\nabla\cdot\vec{A} = 0\ ,\ A_0 = 0$$

(vyhovujúca Lorenzovej kalibrácii).[54] Podmienka $\nabla\cdot\vec{A} = 0$ vedie na $\vec{k}\cdot\vec{\tau} = 0$, čiže absenciu polarizácie v smere šírenia vlny. Skutočne, pre fotón *pozdĺžna* polarizácia *neexistuje.*

Všeobecným riešením MXR pre voľné pole, $\partial_\mu\partial^\mu A^\nu = 0$, je superpozícia rovinných vĺn oboch polarizácií

$$A^\mu(x^\mu) = \sum_{s=1}^{2}\int \frac{1}{(2\pi)^3\sqrt{2E_k}}\left(a_s(\vec{k})\tau_s^\mu e^{-ik_\mu x^\mu} + a_s^*(\vec{k})\tau_s^\mu e^{ik_\mu x^\mu}\right)d^3k$$

---

[52] Rozmerovým koeficientom pri lagrangiáne v kap. III.3.2, ktorý sme kvôli prehľadnosti ignorovali, je $\varepsilon_0 c^2$ ($\varepsilon_0$ - *dielektrická konštanta*).

[53] O nehmotnom poli vieme, že má len 2 bázové polarizácie - *lineárne* alebo *kruhové*, ktoré odpovedajú 2 *helicitám nehmotných* vektorových častíc - *fotónov* (kap. II.4.5 a III.2.5). Kalibračná transformácia elektromagnetického potenciálu nemení fyzikálne polia $\vec{E}, \vec{B}$, je len využitím prebytočného stupňa voľnosti.

[54] Majme na pamäti, že táto kalibrácia *nie je* lorentzovsky kovariantná, keďže pri lorentzovských boostoch sa miešajú časové a priestorové súradnice.

### III.3.4 Kvantovanie vektorových polí.

Druhým kvantovaním sa fourierovské koeficienty $a_s(\vec{k}), a_s^*(\vec{k})$ vo všeobecných riešeniach PCR/MXR pre $A^\nu(x^\mu)$ stávajú anihilačnými/kreačnými *operátormi* hybnostných stavov danej polarizácie,[55] a pre ich *ne*triviálne komutátory platí

$$[\hat{a}_s(\vec{k}), \hat{a}_r^\dagger(\vec{k}')] = (2\pi)^3 \delta_{sr} \delta(\vec{k} - \vec{k}')$$

($\delta_{sr}$ je $\delta$-funkcia vzhľadom na smery polarizácie). Naivne by sme očakávali, že dosadením do komutátorov $A_\mu$ s $\pi^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t A^\nu)}$, dostaneme obvyklé *kánonické* komutačné vzťahy pre *všetky* zložky štvorvektorov. Pre *hmotné* vektorové pole však lorenzovská kalibrácia $\partial_\mu A^\mu = 0$, ktorá je *nutným* dôsledkom PCR, redukuje počet *nezávislých* vnútorných stupňov voľnosti (polarizácií) na *tri*. Tento rozpor pochopíme, ak uvážime, že $F_{00} = (\partial_0 A_0 - \partial_0 A_0) = 0$, čiže lagrangián nezávisí od $\partial_0 A^0$, a teda $\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{c\,\partial(\partial_0 A^0)} = 0$. To znamená, že $A_0$ *nie je fyzikálnou dynamickou premennou*, ktorej priraďujeme operátor, a formálny vzťah

$$[\hat{A}_0(t, \vec{r}), \hat{\pi}_0(t, \vec{r}\,')] = 0 \neq i\hbar\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$$

nemá fyzikálny zmysel. Kánonické komutačné vzťahy sa teda redukujú na

$$[\hat{A}_j(t, \vec{r}), \hat{\pi}_k(t, \vec{r}\,')] = i\hbar\delta_{jk}\delta(\vec{r} - \vec{r}\,') \qquad j, k = 1, 2, 3$$

Ešte vypuklejší je tento problém v prípade *ne*hmotného poľa s *dvomi* nezávislými *priečnymi* polarizáciami. Dá sa ukázať, že v coulombovskej kalibrácii $\partial_j A_j = 0$ obe priečne komponenty poľa (nezávislo od smeru šírenia vlny) spĺňajú rovnice[56]

$$A_j^\perp = \left( \underbrace{\delta_{jk} - \frac{k_j k_k}{k_l k_l}} \right) A_k = P_{jk} A_k \qquad A_j^\perp k_j = 0$$

a *kánonické* komutačné vzťahy pre priečne zložky poľa majú tvar

$$[\hat{A}_j^\perp(t, \vec{r}), \hat{\pi}_k(t, \vec{r}\,')] = i\hbar \underbrace{P_{jk}\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')} = i\hbar\delta_{jk}^\perp(\vec{r} - \vec{r}\,')$$

◇◇◇◇◇

## Dôležité závery:

• Každá zložka vektorového poľa spĺňa KGR.

• Vnútornú štruktúru *hmotných* vektorových polí tvoria tri nezávislé polarizácie. Z PCR vyplýva Lorenzova kalibrácia.

• Vnútornú štruktúru *nehmotných* vektorových polí tvoria dve nezávislé priečne polarizácie. Tretí stupeň voľnosti je prebytočný, a podlieha kalibračnej voľnosti. Lorenzova kalibrácia tvorí len jednu

[55] V prípade elektromagnetického poľa hovoríme o *fotónoch* danej hybnosti/energie. (Často sa *nekorektne* hovorí o fotónoch danej *vlnovej dĺžky/frekvencie*, toto sú však pojmy, ktoré *v mikrosvete nemajú zmysel*!)

[56] Výraz $P_{jk}$ je tzv. **projekčný operátor**, ktorý nuluje zložky poľa paralelné s $k_j$. Pre projekciu ľubovoľného vektoru $\vec{v}$ do smerov $\parallel \vec{k}$ a $\perp \vec{k}$ totiž platí

$$\vec{V}_\parallel = \frac{(\vec{V} \cdot \vec{k})\vec{k}}{k^2} \qquad V_\parallel^j = \frac{k_j k_k}{k^2} V_k \qquad \vec{V}_\perp = \vec{V} - \vec{V}_\parallel \qquad V_\perp^j = \left( \delta_{jk} - \frac{k_j k_k}{k^2} \right) V_k$$

z možností, a nevyčerpáva úplne kalibračnú voľnosť. Táto je vyčerpaná obvyklou priečnou Coulombovou kalibráciou.

• Elektromagnetické pole je nehmotným vektorovým poľom, reprezentovaným štvorpotenciálom, resp. elektromagnetickým tenzorom.

• Kánonické komutačné vzťahy sú aplikovateľné len na *fyzikálne* stupne voľnosti (polarizácie) - *tri* pre *hmotné* vektorové polia a *dva* pre *ne*hmotné.

# Interakcie

V predchádzajúcej časti sme prostredníctvom pohybových rovníc a ich riešení opísali základné triedy *voľných* (t.j. vzájomne *ne*interagujúcich) fundamentálnych polí. V tejto časti postupne opíšeme (doteraz známe) *fundamentálne interakcie* medzi elementárnymi poľami/časticami, tvoriace kostru tzv. **štandardného modelu**, a vysvetlíme podstatu trojice fundamentálnych síl - **elektromagnetickej**, **slabej** a **silnej**.

Vychádzame zo základnej predstavy priestoru vyplneného poľami (v *klasickom* chápaní), prislúchajúcimi jednotlivým druhom elementárnych častíc, pričom *lokálne* nenulové hodnoty týchto polí (v podobe *vlnových* energetických excitácí) odpovedajú *potenciálne merateľnej* prítomnosti častíc.[1] Interakcia polí znamená *energetickú výmenu* medzi nimi - excitácie jedného poľa ovplyvňujú či generujú excitácie iného poľa. O existencii a sile vzájomných interakcií jednotlivých polí rozhodujú ich *väzbové konštanty*. V prípade spomínanej trojice silových interakcií tieto konštanty - *náboje* - sú ich *generátormi*, a pri danej interakcii/transformácii sa *zachovávajú*.[2] Energia excitácie jedného poľa sa pritom môže úplne „preliať" do excitácie iného poľa („častice" pri interakciách vznikajú/zanikajú), pri splnení všetkých zákonov zachovania.

Pri interakciách často hovoríme aj o *virtuálnych* časticiach (kap. III.1.6) - *ne*merateľných matematických konštruktoch sprostredkujúcich interakcie merateľných častíc.[3] (Napr. interakcia medzi elektrónmi - „časticami" *toho istého* poľa - je sprostredkovaná virtuálnymi „časticami" elektromagnetického poľa - fotónmi emitovanými a pohltenými interagujúcimi elektrónmi.) V našom opise nerozlišujeme medzi „skutočnými" a „virtuálnymi" časticami, obmedzíme sa na opis interakcie *polí* (pri kvantovom opise reprezentovaných operátormi), zastúpených v celkovom lagrangiáne.

## IV.1 Mechanizmy interakcií polí.

### IV.1.1 Interakcia poľa s poruchou.

Pohybovými rovnicami samostatných *voľných* fundamentálnych polí sú (vlnové) rovnice v *homogénnom* tvare

$$\mathcal{D}\phi(x_\mu) = 0$$

[1] Pod pojmom *častica* tu rozumieme *produkt merania*.

[2] Napr. generátorom elektromagnetickej interakcie (kap. IV.2) je *elektrický* náboj - elektromagnetické pole interaguje *len* s elektricky nabitými poľami/časticami.

[3] Pomyselná doba života *virtuálnych* častíc spĺňa nerovnosť $\Delta t \Delta E < \hbar$ - sú preto nemerateľné. Vznikajú a zanikajú *počas* interakcie, nevstupujú do nej a ani z nej vystupujú.

kde $\mathcal{D}$ je príslušný diferenciálny „predpis" (napr. pre KGR je $\mathcal{D} = \partial_\mu \partial^\mu + \widetilde{m}^2$). V prítomnosti (všeobecnej, nateraz bližšie nešpecifikovanej) poruchy $\Gamma(x_\mu)$ takéto interakcie opisujeme *ne*homogénnymi rovnicami v tvare

$$\mathcal{D}\phi_\Gamma(x_\mu) = \Gamma(x_\mu)$$

Na riešenie takýchto nehomogénnych rovníc používame metódu **Greenovej funkcie** príslušného poľa. Podstata tejto metódy je zhrnutá v Dodatku K, pričom technickou stránkou riešení sa nebudeme zaoberať.

Základnú myšlienku demonštrujme na príklade *skalárneho* poľa. Lagrangián[4] *interagujúceho* skalárneho poľa obsahuje dodatočný člen - interakčný potenciál $V(\phi)$

$$\mathcal{L} = \left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{\widetilde{m}^2}{2}\phi^2\right) + V(\phi)$$

Dosadením tohto lagrangiánu do ELR dostávame modifikovanú KGR

$$(\partial_\mu\partial^\mu + \widetilde{m}^2)\phi = \frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi} = V'(\phi)$$

kde pravá strana predstavuje *poruchu* poľa. Najjednoduchšej, *priestorovo lokalizovanej stacionárnej* poruche v podobe Diracovej $\delta$-funkcie, $V' = \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$, odpovedá riešenie[5]

$$\underline{\phi(\vec{r}, \vec{r}\,') = \frac{e^{-\widetilde{m}r}}{4\pi r}} \qquad\qquad r = |\vec{r} - \vec{r}\,'|$$

známe ako **Yukawov potenciál**. Znamená to, že vplyv takejto lokalizovanej poruchy na voľné pole zaniká so vzdialenosťou od poruchy, a to tým prudšie, čím „hmotnejšie" je pole. Pre nehmotné pole je dosah poruchy nekonečný (pri splnení relativistických požiadaviek).

Pre viaceré poruchy, $V_j'$, s partikulárnymi riešeniami $\phi_j$ je výsledné pole vďaka *linearite* pohybových rovníc dané ich *superpozíciou*. Ľubovoľnú (časo)priestorovo *rozloženú* poruchu môžeme „skomponovať" z $\delta$-porúch (ich integrovaním). Vplyv takejto poruchy na konfiguráciu poľa v danom bode, $\phi(x^\mu)$, je potom tiež daný (časo)priestorovým integrovaním.

### IV.1.2 Yukawova interakcia.

Ak *dvojica* polí navzájom interaguje, výsledný lagrangián musí okrem lagrangiánov *jednotlivých voľných* polí obsahovať aj *interakčný člen*.[6] Uvažujme prípad interakcie *skalárneho* a *spinorového* poľa. Najjednoduchší tvar v tomto prípade je tzv. **Yukawov interakčný člen**[7]

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{scalar} + \mathcal{L}_{spinor} + \mathcal{L}_{int} = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{\widetilde{m}_\phi^2}{2}\phi^2\right)} + \underbrace{\left(i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \widetilde{m}_\psi\bar{\psi}\psi\right)} + \overbrace{g\bar{\psi}\phi\psi}$$

[4]Kvôli prehľadnosti budeme v tejto a nasledujúcich kapitolách rozmerové koeficienty lagrangiánov jednotlivých polí *spravidla vynechávať*. Výnimkou budú špecifické prípady, čo bude očividné. Ide vždy o kombinácie fundamentálnych konštánt $\hbar, c, \varepsilon_0$, ktorých hodnoty v teoretickej literatúre kladieme rovné 1.

[5]Výpočet sa realizuje zložitým integrovaním Greenovej funkcie KGR.

[6]Všetky členy lagrangiánu musia byť opäť lorentzovskými skalármi.

[7]Všetky fundamentálne *silové* interakcie v rámci ***štandardného modelu*** sú sprostredkované kalibračnými vektorovými poľami, ako uvidíme v ďalšom texte. Yukawova interakcia sa z tejto schémy vymyká - zúčastnené polia interagujú *priamo*. Kategorizácia tejto interakcie je teda otvorenou otázkou.

kde $g$ je **koeficient väzby** týchto polí - do teórie vstupuje ako *vonkajší* parameter (treba ho určiť *experimentálne*). Vplyv interakčného členu na *skalárne* pole je určený *modifikovanou* KGR, získanou dosadením lagrangiánu do ELR pre *toto* pole

$$(\partial_\mu \partial^\mu + \widetilde{m}_\phi^2)\phi = \frac{\partial V(\phi, \psi, \bar{\psi})}{\partial \phi} = g\bar{\psi}\psi$$

($\mathcal{L}_{spin}$ nezávisí od $\phi$), pričom porucha na pravej strane je *skalár*. Vplyv na *spinorové* pole je určený *modifikovanou* DIR (pre jednotlivé zložky štvorkomponentného spinoru $\psi$), získanou obdobným spôsobom

$$(i\partial_\mu \gamma^\mu - \widetilde{m}_\psi)\psi = -\frac{\partial V(\phi, \psi, \bar{\psi})}{\partial \bar{\psi}} = -g\phi\psi$$

($V$ závisí od $\psi, \bar{\psi}$, ale nie od ich derivácií), pričom porucha na pravej strane je *spinor*.

Riešením týchto rovníc (metódou Greenových funkcií) by sa dalo analyzovať, ako táto interakcia zmení jednotlivé *voľné* polia. Tieto rovnice sú však *navzájom previazané* (riešenia $\psi$ závisia od riešení $\phi$ a naopak), čo robí tento problém *vo všeobecnosti analyticky neriešiteľným*. Dekompozícia polí na rovinné vlny s následným kvantovaním - prechodom fourierovských koeficientov na kreačné/anihilačné operátory (častíc ako energetických kvánt týchto vlnových módov) tu *nie je možná* kvôli interakčnému členu „miešajúcemu“ interagujúce polia - kreačné/anihilačné operátory strácajú „príslušnosť“ ku konkrétnemu poľu, a ich *časticová interpretácia sa stráca*.

Východiskom sú *poruchové metódy*, predpokladajúce, že interakcia daného poľa s iným poľom je len *malou* poruchou tohto poľa. O veľkosti poruchy, a tým aj o „exaktnosti“ výpočtu aj jeho interpretácie, rozhodujú práve *väzbové konštanty* týchto polí. Tento problém sa pritom netýka len Yukawovej interakcie ale *všetkých druhov* interakcií.

### IV.1.3 Kalibračná interakcia.

Základné fyzikálne zákony musia byť nezávislé na voľbe pozorovateľa. Táto nezávislosť sa vzťahuje nielen na *globálny* posuv či pootočenie súradníc, škálovanie alebo globálnu *vnútornú* transformáciu (transformáciu *vnútorného* priestoru polí), teda na *globálnu zmenu kalibrácie v širšom zmysle slova*, ale aj na transformácie *lokálne* (závislé od časopriestorových súradníc).[8] *Lokálna kalibrácia* v závislosti od polohy $x^\nu$ sa dá parametrizovať tzv. **konexiou** - *vektorovým kalibračným* poľom $A_\mu(x^\nu)$, zohľadňujúcim a časopriestorovo zväzujúcim lokálne rozdiely v kalibrácii (pri *globálnej* zmene platí $A_\mu(x^\nu) = 0$). Nemusí pritom ísť len o *pasívne* prepočítavanie mier,[9] kalibračné pole môže zohrávať *aktívnu* úlohu.[10] Názorný príklad aktívneho kalibračného poľa z oblasti financií je v Dodatku J.

Dôležitým je prípad *vnútornej* symetrie U(1) pri transformácii $\phi \to e^{i\theta}\phi$ (kap. I.3.6, II.3.1). Ak $\theta \neq \theta(x^\mu)$, ide o **globálnu symetriu**, ktorou disponujú *komplexné skalárne* a *spinorové* polia z kap. III.1.5 a III.2.1. Ak však predpokladáme *lokálnu* transformáciu s $\theta = \theta(x^\mu)$ (čiže ak fázu $\theta$ *lokálne kalibrujeme*), lagrangiány spomínaných polí invariantnosť voči tejto transformácii *stratia*, keďže pole a jeho derivácia sa transformujú *odlišne*,

$$\partial_\mu \phi(x^\mu) \to \partial_\mu \left[e^{i\theta(x^\mu)}\phi(x^\mu)\right] = e^{i\theta(x^\mu)}\left[\partial_\mu \phi(x^\mu) + i\phi(x^\mu)\partial_\mu \theta(x^\mu)\right] \neq e^{i\theta(x^\mu)}\partial_\mu \phi(x^\mu)$$

Keďže derivácie polí vstupujú do ich pohybových rovníc, kalibračná voľnosť súvisiaca s danou vnútornou symetriou (v tomto prípade U(1)) by viedla k fyzikálnym (t.j. merateľným) dôsledkom, čo je neprípustné.

[8] Zásadným spôsobom sa tým rozširuje transformačná invariantnosť základných zákonov.

[9] Takým je napr. prepočítavanie teploty medzi rôznymi lokálne zaužívanými stupnicami (°C↔°F a pod.).

[10] Pre ilustráciu si predstavme teplotné pole ako funkciu výšky nad terénom, pričom samotný terén je zvlnený. Porovnanie teplôt „meter nad zemou“ medzi rôznymi miestami vyžaduje uvážiť zmenu nadmorskej výšky terénu.

Uvažujme prípad *spinorového* poľa $\psi$: Problematickým je člen lagrangiánu obsahujúci $\bar{\psi}\partial_\mu\psi$. Zabezpečiť *lokálnu* invariantnosť lagrangiánu - **lokálnu symetriu** - vzhľadom na transformácie $\psi \to e^{i\theta}\psi$, $\bar{\psi} \to e^{-i\theta}\bar{\psi}$ môžeme predefinovaním operátoru derivácie[11] $\partial_\mu$ do tvaru $D_\mu$, ktorý sa transformuje ako $D_\mu\psi \to e^{i\theta(x^\mu)}D_\mu\psi$. Správny tvar takejto tzv. **kovariantnej derivácie** nájdeme z nasledovnej úvahy: Variáciu poľa $\psi$ pri infinitezimálnej časopriestorovej zmene $\delta x^\nu$ vyjadríme prostredníctvom príslušnej konexie (vektorového poľa) $A_\mu(x^\nu)$ ako

$$\delta\psi(x^\nu) = \psi(x^\nu + \delta x^\nu) - \psi(x^\nu) = -iCdx^\mu A_\mu(x^\nu)\psi(x^\nu)$$

kde $C$ je rozmerová **väzbová konštanta** polí $\psi$ a $A_\mu$ (opäť *vonkajší* parameter, ktorý sa určuje *experimentálne*). Potom definujeme kovariantnú deriváciu ako

$$D_\mu\psi(x^\nu) = [\underbrace{\partial_\mu + iCA_\mu(x^\nu)}]\,\psi(x^\nu)$$

Požiadavka

$$D_\mu\psi \to D'_\mu\psi' = (e^{i\theta}D_\mu e^{-i\theta})(e^{i\theta}\psi) \stackrel{!}{=} e^{i\theta}D_\mu\psi \qquad \Leftrightarrow \qquad (\partial_\mu + iCA'_\mu)e^{i\theta}\psi = e^{i\theta}(\partial_\mu + iCA_\mu)\psi$$

(podľa pravidiel unitárnych transformácií operátorov a stavov) je splnená len vtedy ak sa vektorové pole *transformuje* ako

$$A_\mu \to \underline{A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{C}\partial_\mu\theta(x^\nu)}$$

Pole $A_\mu(x^\nu)$ majúce takúto *lokálnu kalibračnú voľnosť* nazývame **kalibračným**. V kap. III.3.2 sme videli, že touto voľnosťou disponujú *nehmotné vektorové polia*. Takým je aj *elektromagnetické* pole s *kalibračnou transformáciou* štvorpotenciálu $A_\mu = (\varphi/c, -\vec{A})$

$$A_\mu \to \underline{A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\Lambda} \qquad\qquad \varphi \to \underline{\varphi' = \varphi + \partial_t\Lambda} \qquad\qquad \vec{A} \to \underline{\vec{A}' = \vec{A} - \nabla\Lambda}$$

Súčasťou takejto kalibračnej transformácie je teda *zmena fázy* komplexného poľa $\underline{\psi \to e^{i\theta}\psi}$, pričom stotožnenie skalárnej funkcie $\Lambda(x^\nu)$ so zmenou fázy $\theta(x^\nu)$ tohto poľa vzťahom $\underline{\theta = -C\Lambda}$ fyzikálne predstavuje *väzbu*[12] medzi poľom $\psi(x^\nu)$ a *kalibračným* poľom $A_\mu(x^\nu)$. Zmene *globálnej* symetrie komplexného poľa na *lokálnu* hovoríme **kalibrovanie symetrie**. Pre elektromagnetické pole je väzbovou konštantou $\underline{C = \frac{q}{\hbar}}$, kde $q$ je **elektrický náboj**.[13] Takáto *lokálna* U(1)-symetria látkového poľa, spôsobená väzbou na kalibračné pole, má aj *merateľné dôsledky*.[14] Kovariantnú deriváciu, čiže zámenu

$$i\hbar\partial_\mu \to \underline{\underline{i\hbar D_\mu = i\hbar\partial_\mu - qA_\mu}}$$

vyplývajúcu z tejto väzby, sme už použili v kap. III.1.7 a III.2.9 (pre *komplexné skalárne* pole má kovariantná derivácia *rovnaký* tvar), a nazýva sa **minimálna väzba**. Rozpísaním na zložky dostávame

$$i\hbar\partial_t \to i\hbar\partial_t - q\varphi \qquad\qquad -i\hbar\partial_j \to -i\hbar\partial_j - q\vec{A}$$

Prvý výraz znamená väzbu látkového poľa $\psi$ na elektromagnetické v podobe *potenciálnej energie* v hamiltoniáne, druhý výraz predstavuje *kinematickú* hybnosť v prítomnosti elektromagnetického poľa.[15]

---

[11] Štandardná definícia derivácie $\partial_\mu\psi = \lim_{\epsilon\to 0}[\psi(x^\nu + \epsilon) - \psi(x^\nu)]/\epsilon$ stráca rozumnú interpretáciu ak transformácia $\psi \to e^{i\theta(x^\nu)}\psi$ závisí od $x^\nu$.

[12] Ľahko sa presvedčíme, že dosadením týchto transformácií sa pohybové rovnice skalárneho poľa (KGR alebo SCHR, kap. III.1.7) v prítomnosti elektromagnetického poľa *nezmenia*.

[13] Toto je definícia a fyzikálny význam elektrického náboja. Hodnota väzbovej konštanty sa určuje experimentálne.

[14] Najznámejším dôsledkom je tzv. **Aharonovov-Bohmov jav**: Dvojštrbinová interferencia *elektricky nabitých častíc*, závisiaca od fázového rozdielu interferujúcich (pravdepodobnostných) vĺn, je ovplyvnená elektromagnetickým vektorom $\vec{A}$ aj v prípade $\vec{E} = 0$, $\vec{B} = 0$.

[15] V prítomnosti elektromagnetického poľa operátor $-i\hbar\nabla$ priraďujeme *kánonickej hybnosti -súčtu* kinematickej, teda $mv$-hybnosti, a tzv. **elektromagnetickej hybnosti** $q\vec{A}$ (Dodatok B).

Z definície kovariantnej derivácie vyplýva tiež nasledovné: Ak uskutočníme posunutie $x_j \to x_j + \delta x_j$ a naspäť *po tej istej dráhe*, zmena poľa bude $\delta\psi = 0$, t.j. príspevok konexie $\sim A_j \delta x_j$ v opačných smeroch sa pripočítava s *opačnými* znamienkami. Ak sa však vrátime do pôvodného bodu *po inej dráhe*, napr. po obvode štvorca

$$(x_j, x_k) \to (x_j + \delta x_j, x_k) \to (x_j + \delta x_j, x_k + \delta x_k) \to (x_j, x_k + \delta x_k) \to (x_j, x_k)$$

celková zmena poľa bude

$$\delta\psi \sim A_j(x_k)\delta x_j + A_k(x_j + \delta x_j)\delta x_k - A_j(x_k + \delta x_k)\delta x_j - A_k(x_j)\delta x_k =$$

$$= \delta x_j \delta x_k \left[ \frac{A_k(x_j + \delta x_j) - A_k(x_j)}{\delta x_j} - \frac{A_j(x_k + \delta x_k) - A_j(x_k)}{\delta x_k} \right] = \delta x_j \delta x_k \left[ \partial_j A_k - \partial_k A_j \right]$$

Označme (pridaním všetkých časopriestorových súradníc) podľa kap. III.3.1

$$\underline{\partial_\mu A_\nu(x_\mu) - \partial_\nu A_\mu(x_\mu) = F_{\mu\nu}(x_\mu)}$$

Ak $F_{\mu\nu}(x_\mu) \neq 0$, konexie s takouto „aktívnou“ úlohou tvoria *kalibračné pole*, ktoré už nie je len „pasívnou kalibráciou“ matematického opisu, ale fyzikálnym objektom s vlastnou dynamikou (časovým vývojom), aktívne ovplyvňujúcim dynamiku poľa $\psi(x_\mu)$.[16] Ak kalibračným poľom je *elektromagnetické* pole, ovplyvňujúce dynamiku poľa $\psi$ (jeho častíc s nábojmi $q$), potom $F_{\mu\nu}(x_\mu)$ je *elektromagnetický* tenzor z kap. III.3.2.

**Kalibračnou interakciou** nazývame interakciu *kalibračného vektorového* poľa $A_\mu(x^\nu)$ s komplexným skalárnym alebo spinorovým poľom. Lagrangián takejto interakcie obsahuje tiež lagrangiány jednotlivých *voľných* polí, oproti yukawovskej interakcii (kap. IV.1.2) však úlohu interakčného člena s kalibračným poľom zohráva náhrada *časopriestorových* derivácií skalárnych/spinorových polí ich *kovariantnými* deriváciami, obsahujúcimi *príslušný náboj* $C$ ako väzbovú konštantu *danej* interakcie.[17] Vo všeobecnosti pre kovariantné derivácie vzhľadom na kalibračné pole $F^{\mu\nu}$ platí

$$F^{\mu\nu} = \frac{i}{C}[D^\mu, D^\nu]$$

Tenzor kalibračného poľa $F^{\mu\nu}$ *je* kalibračne invariantný, hoci samotné pole $A_\mu(x^\nu)$ si kalibračnú voľnosť ponecháva. Podstatou kalibračnej interakcie však je, že táto voľnosť sa „naviaže“ na voľnosť *fázy* komplexného skalárneho/spinorového poľa, a vytvorí *lokálne kalibračne invariantný* lagrangián. Tým sa eliminuje možnosť vplyvu „nefyzikálnych“ prebytočných (kalibračných) stupňov voľnosti na „fyzikálne“ (merateľné) vlastnosti systému.[18] Súčasná fyzika aj preto vníma **lokálnu kalibračnú symetriu** fundamentálnych interakcií, popri relativistickej Poincarého symetrii, ako *principiálnu* požiadavku. V nasledujúcich kapitolách postupne skalibrujeme *globálne* symetrie U(1), SU(2) a SU(3) pomocou príslušných kalibračných „silových“ polí a vytvoríme modely fundamentálnych silových interakcií Prírody.

## IV.1.4 Samointerakcia a spontánne narušenie symetrie.

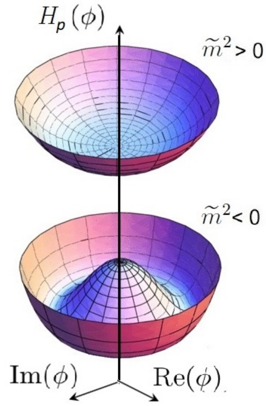
Fyzikálne dôležitým je prípad, keď poruchou komplexného skalárneho poľa $\phi$ je pole samotné, vyjadrené členom $V(\phi) \sim \phi^4$

[16] V geometrii je takáto „nedokonalosť“ konexií mierou *krivosti* (časo)priestoru.

[17] Inými slovami, väzbový člen v kovariantnej derivácii skalárneho/spinorového poľa znamená, že toto pole nesie určitý *náboj*.

[18] Dá sa to formulovať aj tak, že požiadavka *lokálnej* kalibračnej symetrie si *vynúti* existenciu kalibračného poľa.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* - \widetilde{m}^2\phi^2 - \lambda\phi^4\right)$$




pričom $\lambda > 0$ (podmienka ohraničenia energie zdola). Hustota potenciálnej časti hamiltoniánu takéhoto poľa je

$$\mathcal{H}_p = \frac{1}{2}\left(\widetilde{m}^2\phi^2 + \lambda\phi^4\right)$$

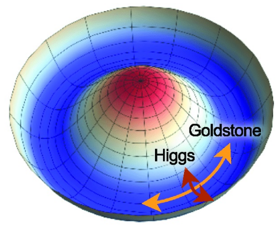
a je na obrázku, pričom pre $\widetilde{m}^2 > 0$ (čo odpovedá *reálnej* hmotnosti častice) má tento potenciál *jediné* minimum pre $\phi = 0$, teda v nulovom poli. Znamená to, že základným stavom je *vákuum* - stav *bez* častíc.

Ak však pripustíme[19] prípad $\widetilde{m}^2 < 0$, čiže *imaginárnej* hmotnosti, dostávame minimá posunuté do $|\phi| = \phi_0 = \sqrt{\frac{-\widetilde{m}^2}{2\lambda}}$. Základným stavom, t.j. stavom s najnižšou energiou, bude teraz *jeden* z týchto stavov.[20] Kým lagrangián/hamiltonián systému je naďalej U(1)-*symetrický*,[21] systém si náhodne zvolí *asymetrický* stav (s danou fázou) v *jednom* z ekvivalentných miním. Hovoríme o **spontánnom narušení symetrie**.[22] Skúmajme teda správanie poľa *v okolí* tohto základného stavu (t.j. *excitácie* zo základného stavu), $\phi(x^\mu) = (\phi_0 + \tilde{\phi}(x^\mu))e^{i\theta(x^\mu)}$. Dosadením do pôvodného lagrangiánu dostávame

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\tilde{\phi}\partial^\mu\tilde{\phi} + (\phi_0+\tilde{\phi})^2\partial_\mu\theta\partial^\mu\theta - \widetilde{m}^2(\phi_0+\tilde{\phi})^2 - \lambda(\phi_0+\tilde{\phi})^4\right) = \ldots$$

$$\ldots = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\partial_\mu\tilde{\phi}\partial^\mu\tilde{\phi}^* + (\phi_0+\tilde{\phi})^2\partial_\mu\theta\partial^\mu\theta}_{\text{kinetická energia}} - \underbrace{(-2\widetilde{m}^2)\tilde{\phi}^2}_{\text{hmotnosť}} - \underbrace{(4\lambda\phi_0\tilde{\phi}^3 + \lambda\tilde{\phi}^4)}_{\text{samointerakcia}}\right) + \text{konšt.}$$

čo reprezentuje *reálne* skalárne pole $\tilde{\phi}(x^\mu)$ excitácií s *reálnou kladnou* hmotnosťou $-\widetilde{m}^2 = \left.\frac{d^2H_p}{d\phi^2}\right|_{\phi=\phi_0}$ a *reálne* skalárne pole $\theta(x^\mu)$ excitácií s *nulovou* hmotnosťou (člen $\sim \theta^2$ absentuje). Nehmotné excitácie $\theta$ *pozdĺž* rovnocenných základných stavov (t.j. v smere s *nulovou krivosťou* potenciálu) sa nazývajú (Nambuove-)**Goldstoneove bozóny**, a sú sprievodným javom spontánneho narušenia *globálnej* symetrie. Hmotné radiálne excitácie $\tilde{\phi}$ do vyšších potenciálnych energií (obr.) budeme neskôr nazývať **Higgsovými bozónmi**.




### IV.1.5 Higgsov mechanizmus.

Skombinujme teraz poznatky predchádzajúcich dvoch kapitol. Predpokladajme *kalibračnú* interakciu *nehmotného vektorového* poľa $A^\nu(x^\mu)$ s *komplexným skalárnym* poľom $\phi(x^\mu)$ (so samointerakciou) - tzv. **Higgsovým poľom**. Celkový lagrangián má tvar

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left((D_\mu\phi)^*D^\mu\phi - \widetilde{m}^2\phi^2 - \lambda\phi^4\right) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

[19]Teórie obsahujúce tento mechanizmus predpokladajú *teplotnú závislosť* parametra $\widetilde{m}^2$, pričom zmena znamienka nastane pri poklese teploty.

[20]Hovoríme o nenulovej *strednej hodnote* poľa. Hodnota $\phi_0$ bude jedným z fundamentálnych *vonkajších* parametrov v ďalších modeloch.

[21]Symetria vzhľadom na pootočenie fázy (násobenie jednotkovým komplexným číslom) je U(1)-symetriou (kap. II.3.1).

[22]Spontánnym narušením symetrie sa *nemení* počet stupňov voľnosti komplexného poľa.

*Lokálnu* kalibračnú symetriu lagrangiánu zaručuje náhrada $\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + iCA_\mu$ (čiže väzba Higgsovho poľa na kalibračné pole), t.j. lagrangián je *kalibračne invariantný* vzhľadom na transformácie

$$A_\mu(x^\nu) \to A_\mu(x^\nu) - \frac{1}{C}\partial_\mu\theta(x^\nu) \qquad\qquad \phi(x^\nu) \to e^{i\theta(x^\nu)}\phi(x^\nu)$$

V prípade $\widetilde{m}^2 > 0$ má pole $\phi$ *dva* stupne voľnosti (je komplexné), a pole $A_\mu$ rovnako *dva transverzálne* stupne voľnosti (je nehmotné, kap. III.3.2).

V prípade $\widetilde{m}^2 < 0$ dochádza k spontánnemu narušeniu symetrie, a pole $\phi$ nadobúda nenulovú hodnotu $\phi_0 = \sqrt{\frac{-\widetilde{m}^2}{2\lambda}}$ v základnom stave (vákuum). Excitácie v okolí vákua hľadáme podľa predchádzajúcej kapitoly v tvare $\phi(x^\mu) = [\phi_0 + \tilde{\phi}(x^\mu)]e^{i\theta(x^\mu)}$, a po dosadení do lagrangiánu dostávame

$$\mathcal{L} = ... = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\partial_\mu\tilde{\phi}\partial^\mu\tilde{\phi} + \phi_0^2\,\partial_\mu\theta\partial^\mu\theta}_{\text{kinetické energie}} - \underbrace{(-2\widetilde{m}^2)\tilde{\phi}^2 - C^2\phi_0^2A_\mu^2}_{\text{hmotnosti}} + \underbrace{2C\phi^2\partial_\mu\theta A_\mu}_{\#} + \begin{matrix}\text{členy}\\ \text{vyšších}\\ \text{mocnín}\end{matrix}\right) - \frac{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{4}$$

Vidíme, že tento lagrangián reprezentuje *dve* hmotné polia - *reálne skalárne* pole $\tilde{\phi}(x^\nu)$ s (kladnou) hmotnosťou $-\widetilde{m}^2$ a *vektorové* pole $A_\mu(x^\nu)$ s hmotnosťou $\frac{C^2\phi_0^2}{2} = -\frac{C^2\widetilde{m}^2}{4\lambda}$. Vektorové pole teda *získalo hmotnosť*, úmernú *sile väzby* polí $C$. Tretie pole $\theta(x^\nu)$ je *nefyzikálne* - môžeme totiž využiť kalibračnú symetriu vektorového poľa, a zvoliť transformáciu

$$A_\mu \to A_\mu - \frac{1}{C}\partial_\mu\alpha(x^\nu) \qquad\qquad \phi \to e^{i\alpha(x^\nu)}\phi = [\phi_0 + \tilde{\phi}(x^\mu)]e^{i(\theta+\alpha)}$$

takú aby $\alpha = -\theta$, čím v lagrangiáne *vynulujeme* členy s $\theta$, vrátane kinetickej energie nehmotných Goldstoneových excitácií a členu #. Stupeň voľnosti odpovedajúci skalárnym Goldstoneovým excitáciám teda *zanikne*, ale *vektorové pole nadobudne hmotnosť a tým longitudinálny* stupeň voľnosti. Celkový počet stupňov voľnosti sa teda *nezmení.* V jazyku častíc hovoríme, že *ne*hmotné častice kalibračného poľa „zjedia“ nehmotné Goldstoneove bozóny (prameniace z *ne*nulovej strednej hodnoty vákua s narušenou symetriou) a tým *nadobudnú* hmotnosť. Tento mechanizmus sa nazýva (Broutov-Englertov-...) **Higgsov**. Skalárne pole si pritom ponecháva *hmotný* stupeň voľnosti $\tilde{\phi}$ - *Higgsove bozóny.*

◇◇◇◇◇

## Dôležité závery:

• Dosah *lokalizovanej* poruchy poľa v priestore zaniká nepriamo úmerne hmotnosti poľa.

• Lagrangián *interagujúcich* polí obsahuje okrem lagrangiánov *voľných* polí aj *interakčný* člen s koeficientom väzby polí. Pri *kalibračnej* interakcii je tento člen obsiahnutý v *kovariantnej* derivácii. Pohybovú rovnicu každého interagujúceho poľa dostaneme dosadením lagrangiánu do ELR *tohto* poľa.

• Definícia kovariantnej derivácie poľa $\phi$, a teda existencia *kalibračného* poľa a jeho transformačný vzťah, sú *dôsledkami* požiadavky *lokálnej* U(1)-symetrie poľa $\phi$.

• Elektromagnetické pole je nehmotným kalibračným poľom, jeho väzbovou konštantou je elektrický náboj.

• Stav vákua pri spontánnom narušení *spojitej globálnej* symetrie je stavom s *nenulovou* strednou hodnotou poľa - hmotnými aj nehmotnými (Goldstoneovými) excitáciami. Pri interakcii s nehmotným kalibračným poľom dochádza k pohlteniu nehmotných excitácii týmto kalibračným poľom, ktoré sa tak stane *hmotným.*

# IV.2 Elektromagnetická interakcia.

**Elektromagnetická interakcia** je jednou zo štyroch (známych) *fundamentálnych silových interakcií.* Je to *kalibračná* interakcia *elektromagnetického* poľa, teda nehmotného vektorového *kalibračného* poľa $A_\mu$, s *elektricky nabitým Diracovým* spinorovým poľom $\psi$. V jazyku *častíc - kvánt* polí ide o interakcie medzi *elektricky nabitými fermiónmi*, sprostredkované elektricky *neutrálnymi* kalibračnými bozónmi - *fotónmi.* Ich opis je predmetom **kvantovej elektrodynamiky**.[23]

## IV.2.1 Rovnice kvantovej elektrodynamiky

Väzba spinorových polí s kalibračným elektromagnetickým je v lagrangiáne zohľadnená *kovariantnou* deriváciou (kap. IV.1.3) s väzbovou konštantou je $C = q/\hbar$, a hustota celkového lagrangiánu (aj s rozmerovými konštantami) je

$$\mathcal{L} = \hbar c\,\bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - \widetilde{m}_\psi)\psi - \frac{\varepsilon_0 c^2}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \hbar c\,\bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{q}{\hbar}\gamma^\mu A_\mu - \widetilde{m}_\psi)\psi - \frac{\varepsilon_0 c^2}{2}\left(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu\right)$$

Podobne ako v prípade skalárneho poľa, lagrangián *voľného spinorového* poľa síce vykazuje *globálnu* U(1)-symetriu $\psi \to e^{i\theta}\psi$, nie však *lokálnu* symetriu, $\theta \neq \theta(x^\nu)$. Na druhej strane, lagrangián *nehmotného vektorového* poľa vykazuje *aj lokálnu vnútornú* symetriu vzhľadom na *kalibračnú* transformáciu $A_\mu(x^\mu) \to A_\mu(x^\mu) + \partial_\mu \Lambda(x^\mu)$. Väzbou oboch polí,[24] $\theta = -C\Lambda$, dostávame lagrangián, ktorý vykazuje *lokálnu* symetriu vzhľadom na kombinovanú, tzv. **U(1)-kalibračnú transformáciu**.

*Spojitá globálna* interná symetria poľa (ako špeciálny prípad *lokálnej* symetrie)

$$\psi \to e^{i\theta}\psi = e^{-iq\Lambda/\hbar}\psi \cong \left(1 - i\frac{q}{\hbar}\Lambda\right)\psi = \psi + \delta\psi$$

je vždy spojená (kap. I.3.6) so *zachovávajúcim sa* noetherovským štvorprúdom

$$\partial_\mu \mathcal{J}^\mu = \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)}\,\delta\psi\right] = \dots = \partial_\mu \left[(i\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu)\left(-i\frac{q}{\hbar}\Lambda\psi\right)\right] = \partial_\mu \left[cq\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\Lambda\right] = 0$$

Keďže $\Lambda$ je *ľubovoľná* premenná, zachovávajúcou veličinou je $\underline{j^\mu = cq\bar{\psi}\gamma^\mu\psi}$. Noetherovským nábojom je potom

$$\mathcal{Q} = \int j^0 d^3x = cq\underbrace{\int \bar{\psi}\gamma^0\psi\, d^3x}_{1} = cq$$

Dôsledkom tejto vnútornej symetrie je teda **zákon zachovnia elektrického náboja**. Pripomeňme, že zachovávajúcimi sa veličinami sú práve *generátory spojitých symetrií.* V tomto prípade operátorom

[23] Vzhľadom na malú hodnotu väzbovej konštanty $q$ je elektromagnetická interakcia *jedinou*, ktorá spĺňa kritéria *poruchy*, poruchová metóda preto poskytuje výpočty v extrémne dobrej zhode s experimentom.

[24] Väzbová konštanta $C$ je pomerom transformačných parametrov interagujúcich polí.

transformácie (pootočenia fázy) je $e^{-iq\Lambda/\hbar} \cong (1 - i\frac{q}{\hbar}\Lambda) \in \mathcal{U}(1)$, a teda generátorom symetrie (v $\mathcal{U}(1)$ jediným) je náboj $q$.

Dosadením lagrangiánu do ELR *pre príslušné pole* dostávame pohybovú rovnicu *tohto* poľa. Pohybovou rovnicou *elektromagnetického* poľa (interagujúceho s Diracovým poľom) je teda

$$\underline{\underline{\varepsilon_0 c^2 \partial_\mu \left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) = cq\bar{\psi}\gamma^\nu\psi = j^\nu}}$$

pričom $j^\nu(x^\mu)$ je hustota *elektricky nabitého* štvorprúdu (ako *porucha* voľného elektromagnetického poľa). Zámenou $A^\mu \to \vec{E}, \vec{B}$ v tejto rovnici spoznávame *ne*homogénne MXR v prítomnosti zdrojov $\rho, \vec{j}$ (Dodatok I).

Pohybovou rovnicou interagujúceho *elektricky nabitého Diracovho* poľa $\psi$ bude zase (dosadením do ELR pre $\psi$)

$$\underline{\underline{(i\gamma^\mu\partial_\mu - \widetilde{m}_\psi)\psi = \frac{q}{\hbar}\gamma^\mu A_\mu \psi}}$$

a pre $\bar{\psi}$ analogicky (s $-i$ namiesto $i$).[25]

## IV.2.2 Nábojové združenie.

*Náboj*[26] $q$ častíc Diracovho poľa $\psi$ kvantifikuje *väzbu* tohto poľa na *kalibračné*. Pre *anti*častice musí platiť *identická* rovnica s nábojom $-q$ (rovnica pre $\bar{\psi}$ takou *nie je*), teda

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - \widetilde{m}_\psi)\psi_\mathcal{C} = -\frac{q}{\hbar}\gamma^\mu A_\mu \psi_\mathcal{C}$$

kde symbolom $\psi_\mathcal{C}$ označíme *anti*časticové pole *príslušné* k poľu $\psi$. Transformáciu $\psi \underset{\mathcal{C}}{\rightarrow} \psi_\mathcal{C}$ nazývame **nábojovým združením**[27] a odpovedajúcu symetriu pohybovej rovnice **C-symetriou**. Transformačnú maticu hľadajme v tvare, pre ktorý platí $\psi_\mathcal{C} = \mathcal{C}\psi^*$, a teda $\psi^* = \mathcal{C}^{-1}\psi_\mathcal{C}$. *Komplexne združenú* pohybovú rovnicu poľa $\psi$, vynásobenú $\mathcal{C}$ zľava, potom môžeme zapísať v tvare

$$\left[-i\mathcal{C}(\gamma^\mu)^*\mathcal{C}^{-1}\left(\partial_\mu - i\frac{q}{\hbar}A_\mu\right) - \widetilde{m}_\psi\right]\psi_\mathcal{C} = 0 \overset{!}{=} \left[i\gamma^\mu\left(\partial_\mu - i\frac{q}{\hbar}A_\mu\right) - \widetilde{m}_\psi\right]\psi_\mathcal{C}$$

a odtiaľ $\mathcal{C}(\gamma^\mu)^*\mathcal{C}^{-1} = -\gamma^\mu$. Z vlastností gama-matíc v hmotnostnej báze vyplýva $\mathcal{C}\gamma^\mu = -\gamma^\mu\mathcal{C}$ pre $\mu = 0, 1, 3$, ale $\mathcal{C}\gamma^2 = \gamma^2\mathcal{C}$. Týmto podmienkam vyhovuje $\mathcal{C} = i\gamma^2$,

$$\underline{\psi_\mathcal{C} = i\gamma^2\psi^*} = i\gamma^2\gamma^0(\gamma^0\psi^*) = i\gamma^2\gamma^0\bar{\psi}^T$$

Vplyv nábojového združenia na *helicitu* preskúmame na prípade riešenia DIR $\psi_1(x^\mu)$ (kap. III.2.3), teda častice s $E > 0$, $\mathfrak{h} > 0$. V hmotnostnej báze

$$\psi_{1\mathcal{C}}(x^\mu) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}}_{i\gamma^2} \underbrace{\left[\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{\frac{E}{c}+m_\psi c} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\chi_1} e^{-ip_\mu x^\mu/\hbar}\right]^*}_{\psi_1^*(x^\mu)} = \begin{pmatrix} i\sigma_2\frac{\vec{\sigma}^*\cdot\vec{p}}{\frac{E}{c}+m_\psi c} \\ -i\sigma_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ip_\mu x^\mu/\hbar} =$$

[25] Alternatívnym zápisom je použitie kovariantnej derivácie.
[26] Pre *elektromagnetické* pole ide o *elektrický* náboj, pre iné kalibračné polia ide o *iné* náboje.
[27] ang. *charge conjugation*

$$\underset{\sigma_2\vec{\sigma}^*=-\vec{\sigma}^*\sigma_2}{=} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{\frac{E}{c}+m_\psi c} \\ 1 \end{pmatrix} \underbrace{(-i\sigma_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\chi_2} e^{ip_\mu x^\mu/\hbar} = \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{\frac{E}{c}+m_\psi c} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ip_\mu x^\mu/\hbar}$$

čo je *anti*častica s $E > 0$, čiže s *opačnou* hybnosťou $\vec{p} \to -\vec{p}$ (kap. III.2.3), a s *preklopeným* spinom $\chi_1 \to \chi_2$, čiže s *nezmenenou* helicitou $\mathfrak{h} > 0$ (kap. III.2.5). *Nábojové združenie nemení helicitu.* Častice reprezentované $\psi$ a $\psi_\mathcal{C}$ sú teda *identické až na náboj.* Z výrazu $\psi_\mathcal{C} = i\gamma^2\psi^*$ dostávame $\bar{\psi}_\mathcal{C} = i\gamma_2\gamma_0\psi^T$, a pre nábojovo konjugovanú prúdovú hustotu antičastíc $j^\nu_\mathcal{C} = -j^\nu$, čo je očakávaný výsledok.[28]

## IV.2.3 PCT-symetria.

Podľa kap. III.2.6 transformácia *parity* Diracovho spinoru je $\mathcal{P}_s\psi = \gamma^0\psi$, pričom pre vektorové pole takáto transformácia znamená $A_j \to -A_j$.

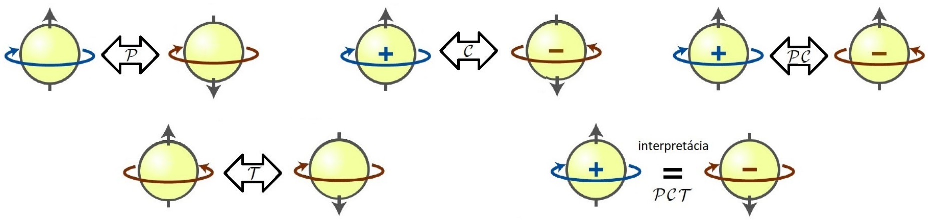
Podľa kap. III.2.7 operátor otočenia *času* pre $\psi^*$ je $\mathcal{T}_s = i\gamma^1\gamma^3$, a pre samotné $\psi$ definujeme nový operátor $\bar{\mathcal{T}}_s\psi = \mathcal{T}_s\psi^* = i\gamma^1\gamma^3\psi^*$. Pre vektorové pole takáto transformácia znamená $A_0 \to -A_0$.

Rovnako definujeme operátor *nábojového združenia* pre $\psi$ ako $\bar{\mathcal{C}}\psi = \mathcal{C}\psi^* = i\gamma^2\psi^*$, pričom pre vektorové pole takáto transformácia znamená $A^\mu \to -A^\mu$.

Kombinácia $\mathcal{P}_s\bar{\mathcal{C}}\bar{\mathcal{T}}_s$ teda pre vektorové pole znamená $A^\mu(-x^\mu) = A^\mu(x^\mu)$, čiže *žiadnu zmenu.* Bispinor $\psi(x^\mu)$ sa transformuje ako

$$\psi_{\mathcal{PCT}}(-x^\mu) = \mathcal{P}_s\bar{\mathcal{C}}[\bar{\mathcal{T}}_s\psi(x^\mu)] = \mathcal{P}_s\mathcal{C}[\bar{\mathcal{T}}_s\psi(x^\mu)]^* = i\,\mathcal{P}_s\mathcal{C}\mathcal{T}_s^*\psi(x^\mu) = \underbrace{\gamma^0(i\gamma^2)(i\gamma^1\gamma^3)^*}\psi(x^\mu) = \underbrace{i\gamma^5}\psi(x^\mu)$$

čo je *anti*častica *opačnej helicity*, pohybujúca sa *opačne v časopriestore*, a $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Táto tzv. **PCT-symetria** je *fundamentálnou* symetriou Prírody.[29]




Uvedené transformačné vzťahy platia pre *klasické* pole. Pre kvantové pole sa $\psi$ stáva *operátorom* s transformačnými vzťahmi (podľa kap. I.2)

$$\hat{\psi}_\mathcal{P} = \mathcal{P}_s\hat{\psi}\mathcal{P}_s^{-1} \qquad \hat{\bar{\psi}}_\mathcal{P} = \mathcal{P}_s\hat{\bar{\psi}}\mathcal{P}_s^{-1}$$

$$\mathcal{T}_s\hat{\bar{\psi}}\hat{\psi}\mathcal{T}_s^{-1} = \hat{\bar{\psi}}\hat{\psi} \qquad \mathcal{T}_s\hat{\bar{\psi}}\vec{j}\mathcal{T}_s^{-1} = -\vec{j}$$

$$\hat{\psi}_\mathcal{C} = \mathcal{C}\hat{\psi}\mathcal{C}^{-1} = \mathcal{C}\hat{\bar{\psi}}^T \qquad \hat{\bar{\psi}}_\mathcal{C} = \mathcal{C}\hat{\bar{\psi}}\mathcal{C}^{-1} = -\hat{\psi}^T\mathcal{C}^{-1} \qquad \mathcal{C}j_\mu\mathcal{C}^{-1} = -j_\mu$$

[28]Ak zmeníme znamienko elektrického náboja, prúdu *aj* elektromagnetického poľa, pohybové rovnice sa nezmenia.

[29]Na rozdiel od čiastkových symetrií PCT-symetria platí pre *všetky pozorované procesy* v Prírode, a to *nezávislo na poradí.* Symetria ľubovoľnej dvojice transformácií je ekvivalentná symetrii tretej.

◇◇◇◇◇

### Dôležité závery:

• Kalibračná elektromagnetická interakcia *elektricky nabitého* spinorového poľa je jednou z *fundamentálnych* interakcií. Lagrangián tejto interakcie vykazuje kalibračnú U(1)-symetriu. Jej dôsledkom je zákon zachovania elektrického náboja.

• Pohybová rovnica elektromagneticky interagujúceho spinorového poľa je symetrická voči nábojovému združeniu - zámene častice za antičasticu.

• Kombinácia nábojového združenia, transformácie parity a časovej inverzie je *univerzálnou* symetriou Prírody.

## IV.3 Slabá interakcia.

V ďalšom texte predstavíme mechanizmus druhej fundamentálnej *silovej* interakcie - **slabej interakcie**. Ide o interakciu (výlučne) *chirálne ľavorukých* Diracových častíc (excitácii poľa) sprostredkovanú *hmotnými vektorovými* časticami - **bozónmi $\mathbf{W}^+$, $\mathbf{W}^-$ a Z**. *Zjednotená* teória slabej a elektromagnetickej interakcie - tzv. **elektroslabej interakcie** zahŕňa tiež *nehmotné* elektromagnetické pole s excitáciami **fotónmi**. Jednotlivé aspekty tejto interakcie rozoberieme postupne v nasledujúcich kapitolách.

### IV.3.1 SU(2)-kalibračná teória.

Základnou schémou slabej interakcie je *symetria* lagrangiánu pri *premene jednej Diracovej častice na inú za účasti sprostredkujúcej vektorovej častice.* Uvažujme preto dvojicu - **dublet** - *spinorových* polí $\psi_1, \psi_2$, pričom premena jedného na druhé, čiže *transformácia* $\mathcal{U}$ jednej zložky dubletu do druhej je *symetriou* (podobne ako pri rotácii vektoru)

$$\psi_1 \to \psi_1' = \alpha\psi_1 + \beta\psi_2 \qquad\qquad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \underset{\mathcal{U}}{\to} \psi' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \mathcal{U}\psi$$
$$\psi_2 \to \psi_2' = \gamma\psi_1 + \delta\psi_2$$

Podmienka normovanosti vyžaduje aby $\mathcal{U} \in \mathrm{SU}(2)$, čiže (kap. II.3.2) $\mathcal{U} = e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}/2}$. Kvôli invariantnosti lagrangiánu predpokladajme (pre začiatok), že polia $\psi_1, \psi_2$ sú *nehmotné.*[30]

Požiadavku *lokálnej* invariantnosti pre $\vec{\theta} = \vec{\theta}(x^\nu)$ dokážeme naplniť prítomnosťou *kalibračných* polí (kap. IV.1.3). Oproti prípadu U(1) symetrie však algebra SU(2) obsahuje *tri* generátory (kap. II.3.2), potrebujeme teda *trojicu* kalibračných (čiže *ne*hmotných vektorových) polí, $W^j_\mu$. Požiadavka lokálnej invariantnosti celkového lagrangiánu pri transformácii

$$\psi \to e^{i\theta_j(x^\nu)\frac{\sigma_j}{2}}\psi = e^{-ig_W\Lambda_j(x^\nu)\frac{\sigma_j}{2}}\psi \cong \left(1 - ig_W\Lambda_j(x^\nu)\frac{\sigma_j}{2}\right)\psi = \psi + \delta\psi$$

[30]Symetrickým dubletom sú aj polia *rovnakej* hmotnosti, Príroda však túto alternatívu nevyužíva. Neskôr nájdeme mechanizmus, ktorý týmto poliam dodá, bez újmy na invariantnosti, hmotnosť zhodnú s experimentálnym pozorovaním.

kde $g_W = -\theta_j/\Lambda_j$ je *väzbová konštanta* Diracovho dubletu na kalibračné polia (obdobne ako v kap. IV.2.1), opäť vyžaduje kalibračné transformácie týchto polí, a to tentokrát v tvare

$$W^j_\mu \to W'^j_\mu = W^j_\mu + \partial_\mu \Lambda_j + \underbrace{g_W \epsilon_{jkl} \Lambda_k W^l_\mu}_{\#}$$

tak aby opäť platilo $D_\mu \psi \to \mathcal{U}(D_\mu \psi)$. Lagrangiány *interagujúceho* Diracovho dubletu (s *kovariantnou* deriváciou) a trojice kalibračných polí s príslušnými tenzormi polí $(F^{W^j})_{\mu\nu}$ sú potom

$$\mathcal{L}_{\psi_1+\psi_2} = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi \qquad\qquad D_\mu = \partial_\mu + i g_W \frac{\sigma_j}{2} W^j_\mu$$

$$\mathcal{L}_{W^1+W^2+W^3} = -\frac{1}{4}(F^{W^j})_{\mu\nu}(F^{W^j})^{\mu\nu} \qquad\qquad (F^{W^j})_{\mu\nu} = \partial_\mu W^j_\nu - \partial_\nu W^j_\mu - \underbrace{g_W \epsilon_{jkl} W^k_\mu W^l_\nu}_{\#}$$

Prítomnosť *dodatočných* členov # (vektorové súčiny) oproti predchádzajúcim kapitolám je dôsledkom *nekomutatívnosti* generátorov $\mathfrak{su}(2)$ (Pauliho matíc), ako aj nekomutatívnosti $\mathcal{U}$ s $\sigma_j W^j_\mu$. Lagrangián trojice kalibračných polí tentokrát zjavne obsahuje aj členy 3. a 4. rádu $W^j_\mu$, vyjadrujúce zložitú *vzájomnú interakciu* týchto polí. *Celkový* U(2)-*kalibračne invariantný* lagrangián má potom tvar (bez rozmerových koeficientov a hmotnostného členu)

$$\mathcal{L} = \underbrace{i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi}_{2\times Dirac} - \underbrace{g_W \bar{\psi}\gamma^\mu W^j_\mu \frac{\sigma_j}{2}\psi}_{interakcia} - \underbrace{\frac{1}{4}(F^{W^j})_{\mu\nu}(F^{W^j})^{\mu\nu}}_{3\times Maxwell}$$

Analogicky ako v kap. IV.2.1, zachovávajúci sa noetherovský štvorprúd dostaneme (až na rozmerový koeficient) ako

$$\partial_\mu \mathcal{J}^\mu = \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)}\,\delta\psi\right] = ... = \partial_\mu \left[(i\bar{\psi}\gamma^\mu)\left(-i g_W \Lambda_j \frac{\sigma_j}{2}\psi\right)\right] = \partial_\mu \left[g_W \bar{\psi}\gamma^\mu \Lambda_j \frac{\sigma_j}{2}\psi\right] = 0$$

čiže $\underline{j^j_\mu = g_W \bar{\psi}\gamma^\mu \frac{\sigma_j}{2}\psi}$ pre *každý z troch* generátorov symetrie. Zachovávajúcimi sa noetherovskými nábojmi (na jednotkový objem) sú

$$\underline{\mathcal{Q}_j = \bar{\psi}\gamma_0 \frac{\sigma_j}{2}\psi = \psi^\dagger \frac{\sigma_j}{2}\psi = \psi^\dagger \hat{I}_j \psi} \qquad\qquad \underline{\hat{I}_j = \frac{\sigma_j}{2}}$$

Keďže generátory symetrií $\hat{I}_j$ *ne*komutujú, ostrú hodnotu môžeme priradiť *len jednému* z nich. V báze s diagonálnou $\sigma_3$ platí

$$\mathcal{Q}_3 = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}^\dagger \frac{\sigma_3}{2} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\psi_1^\dagger \psi_1 - \frac{1}{2}\psi_2^\dagger \psi_2$$

Časticiam oboch polí môžeme[31] teda priradiť *kvantové čísla* $I_3(\psi_1) = \frac{1}{2}$, resp. $I_3(\psi_2) = -\frac{1}{2}$. Náš dublet je analogický „učebnicovému" spinoru - objektu s dvoma *ortogonálnymi* stavmi v 2-rozmernej reprezentácii SU(2) (kap. II.3.3), s hodnotou $I = \frac{1}{2}$ prislúchajúcou Casimirovmu operátoru $\hat{I}^2$ , a jedným (z trojice) diagonálnym (Cartanovým) generátorom $\hat{I}_3 = \frac{\sigma_3}{2}$ s vlastnými hodnotami $\pm\frac{1}{2}$, čiže $z$-ovými priemetmi *spinu* (v jednotkách $\hbar$). V tomto prípade však hovoríme o $z$-ových zložkách tzv. **slabého izospinu**.[32] Zachovávajúcim sa „nábojom" pri tejto *symetrii dubletu* je teda $z$-ová zložka izospinu (opäť v jednotkách $\hbar$) s kvantovými číslami $I_3 = \pm\frac{1}{2}$. Slabému izospinu sa tiež hovorí **slabý náboj**.

[31] V tejto báze napr. $\mathcal{Q}_1 = \frac{1}{2}\psi_1^\dagger \psi_2 + \frac{1}{2}\psi_2^\dagger \psi_1$, čiže, kvantové čísla nemôžeme priradiť *jednotlivým* poliam.

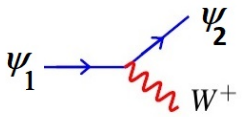
[32] Tak ako spin častice/poľa je momentom hybnosti vo vlastnom spinorovom priestore, aj izospin *je* momentom hybnosti „žijúcim" vo vnútornom priestore dubletu.

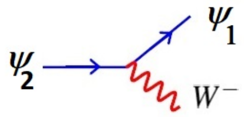
Kovariantnú deriváciu môžeme prepísať do tvaru

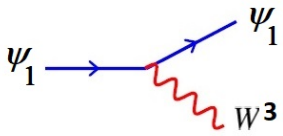
$$D_\mu = \partial_\mu + i\frac{g_W}{2}\begin{pmatrix} W^3_\mu & W^1_\mu - iW^2_\mu \\ W^1_\mu + iW^2_\mu & -W^3_\mu \end{pmatrix} = \partial_\mu + i\frac{g_W}{2}\begin{pmatrix} W^3_\mu & \sqrt{2}W^+_\mu \\ \sqrt{2}W^-_\mu & -W^3_\mu \end{pmatrix}$$

kde sme definovali polia $W^\pm_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(W^1_\mu \mp iW^2_\mu)$. Polia $W^\pm_\mu$ svojou konštrukciou pripomínajú zvyšovacie/znižovacie operátory algebry SU(2), a takúto úlohu naozaj plnia - pri interakciách s Diracovými časticami zvyšujú/znižujú *ich* „náboj“ $I_3$. *Triplet* $\begin{pmatrix} W^+_\mu \\ W^3_\mu \\ W^-_\mu \end{pmatrix}$ odpovedá 3-rozmernej reprezentácii SU(2) s hodnotou Casimirovho operátoru (slabého izospinu) $I = 1$, s hodnotami *priemetu* $I_3 = 1, 0, -1$. Pri interakciách sa teda *celkový* priemet izospinu *zachováva*

$$+\frac{1}{2} \to -\frac{1}{2} + 1 \qquad -\frac{1}{2} \to +\frac{1}{2} + (-1) \qquad \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} + 0$$








Keďže vektorové W-bozóny „nesú“ *slabý* náboj, teória pripúšťa aj slabé interakcie *výlučne* medzi nimi - *samointerakciu* (súvisí to s nekomutatívnosťou generátorov). Naproti tomu vektorové *fotóny elektrický* náboj „nenesú“ a teda (na tejto úrovni teórie) navzájom elektromagneticky neinteragujú.

Izospinová symetria teda „organizuje“ častice/polia zúčastňujúce sa slabej interakcie do príslušných *multipletov*. Uvedená schéma sa dá zovšeobecniť na *ľubovoľnú spojitú lokálnu* grupu symetrií s generátormi $t^a$ ($\sigma_j/2 \to t^a$) s komutačnými vzťahmi $[t^a, t^b] = if^{abc}t^c$, čo využijeme v kap. IV.4.1. Aby však tento tzv. **Yangov-Millsov** model (v alternatívnej verzii s poľami $\psi_1, \psi_2$ *rovnakej nenulovej* hmotnosti) korešpondoval s experimentálnymi pozorovaniami, musíme ho doplniť mechanizmami dodávajúcimi správne (t.j. merateľné) *hmotnosti* vektorovým *aj* Diracovým poliam, čo urobíme v nasledujúcich kapitolách.

## IV.3.2 U(1)xSU(2)-kalibračná teória.

Podľa súčasných predstáv v prvých okamihoch po Veľkom Tresku „panovala“ **U(1)×SU(2)-kalibračná symetria** *elektroslabých* interakcií s 1+3 generátormi. Postupným chladnutím Vesmíru však došlo k jej spontánnemu narušeniu, a *oddeleniu* elektromagnetickej a slabej interakcie. Tri kalibračné polia $W^j_\mu$ nadobudli *hmotnosť*, a pôvodná symetria *zanikla*. Namiesto nej vznikla *nová* U(1)-kalibračná symetria *ne*hmotného *elektromagnetického* poľa. V tejto kapitole uvedený mechanizmus rozoberieme.

Lagrangián *ne*hmotných Diracových polí, interagujúcich so *štvoricou kalibračných* polí - tripletom $W^j_\mu$ a singletom $B_\mu$, s odpovedajúcimi tenzormi $(F^{W^j})_{\mu\nu}$, resp. $(F^B)_{\mu\nu}$, a väzbovými konštantami $g_W$ a $g_B$ odpovedajúci *pôvodnej* U(1)×SU(2)-kalibračnej symetrii, je

$$\mathcal{L}^{U(1)\times SU(2)}_{2\times Dirac+4\times Maxwell} = \bar{\psi}\gamma^\mu\left(i\partial_\mu - g_W W^j_\mu \hat{I}_j - g_B B_\mu \hat{Y}_w\right)\psi - \frac{1}{4}(F^{W^j})_{\mu\nu}(F^{W^j})^{\mu\nu} - \frac{1}{4}(F^B)_{\mu\nu}(F^B)^{\mu\nu}$$

Generátormi SU(2)-symetrie sú $\hat{I}_j = \frac{\sigma_j}{2}$ (priemety izospinu), a generátorom *pôvodnej* U(1)-symetrie (zachovávajúcou sa veličinou) je tzv. **slabý hypernáboj** $\hat{Y}_w$ (v spinorovom zápise matíc $2\times 2$ je to $\hat{Y}_w = Y_w \mathbb{1}_{2\times 2}$), - analóg *elektrického* náboja $q$ z kap. IV.2.1.[33]

[33] V zásade sme mohli hypernáboj $Y_w$ zahrnúť do väzbového koeficientu $g_B$ (ako v kap. IV.2.1), použijeme však zaužívaný opis.

V kap. IV.1.5 sme ukázali mechanizmus, akým kalibračné polia nadobúdajú hmotnosť v interakcii so skalárnym Higgsovým poľom so spontánne narušenou symetriou. Uvažujme teda *dublet hmotných komplexných skalárnych* Higgsových polí

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}$$

v interakcii s trojicou kalibračných polí $W^j_\mu$ a kalibračným poľom $B_\mu$. Lagrangián *tejto* interakcie je

$$\mathcal{L}^{U(1)\times SU(2)}_{4\times KleinGordon} = (D^\mu\phi)^\dagger(D_\mu\phi) - \widetilde{m}^2(\phi^\dagger\phi) - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2 \qquad D_\mu = \partial_\mu + ig_W W^j_\mu \hat{I}_j + ig_B B_\mu \hat{Y}_w$$

Posledné dva členy lagrangiánu predstavujú Higgsov potenciál $\mathcal{H}_p$ z kap. IV.1.4. Podľa spomenutej predstavy v počiatočnej fáze Vesmíru došlo poklesom teploty k zmene $\widetilde{m}^2 > 0 \to \widetilde{m}^2 < 0$ a posunu minima $\mathcal{H}_p$ k nenulovým hodnotám. Dôsledkom bolo spontánne narušenie symetrie - fázový prechod Vesmíru do jedného z rovnocenných stavov (miním $\mathcal{H}_p$), pre ktoré platí

$$\phi^\dagger\phi = \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2 = \frac{-\widetilde{m}^2}{2\lambda} \stackrel{!}{=} \phi_0^2 \quad (>0)$$

Keďže tento potenciál závisí len od $\phi^\dagger\phi$, môžeme využiť túto voľnosť a zvoliť

$$\phi_{min} = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} \qquad \phi_1 = \phi_2 = \phi_4 = 0$$

Stratégia je identická ako v kap. IV.1.5: Skúmame skalárne excitácie Higgsovho poľa $\tilde{\phi}$ okolo nového minima $\phi_0$, teda $\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 + \tilde{\phi} \end{pmatrix}$. Väzba kalibračných polí $W^j_\mu$ na skalárne polia s *lokálnou* vnútornou SU(2)-symetriou $\phi \to e^{i\theta_j \frac{\sigma_j}{2}}\phi = e^{-ig_W\Lambda_j\frac{\sigma_j}{2}}\phi$ nám umožňuje vhodnou kalibráciou $W^j_\mu \to W^j_\mu + \partial_\mu\Lambda_j + g_W\epsilon_{jkl}\Lambda_k W^l_\mu$ *eliminovať* z teórie *ne*hmotné skalárne excitácie (Goldstoneove bozóny) - tieto sú teda *ne*fyzikálne (nemerateľné). Im prislúchajúce stupne voľnosti sa však transformujú do *longitudinálnych* polarizácií vektorových polí $W^j_\mu$, ktoré sa tým stanú *hmotnými.* Zo štyroch pôvodných stupňov voľnosti skalárneho dubletu $\phi$ zostane po spontánnom narušení SU(2)-symetrie jediné *hmotné reálne* skalárne pole excitácií $\tilde{\phi}$ - Higgsove bozóny.

Hmotnosti polí $W^j_\mu$, čiže kvadratické členy v lagrangiáne, vzídu z výrazu[34]

$$\Delta\mathcal{L} = (D^\mu\phi)^\dagger(D_\mu\phi) \underset{\phi\to\phi_0}{\overset{Y_w=-\frac{1}{2}}{=\ldots=}} \frac{1}{4}\left|\begin{pmatrix} g_W W^3_\mu - g_B B_\mu & g_W(W^1_\mu - iW^2_\mu) \\ g_W(W^1_\mu + iW^2_\mu) & -g_W W^3_\mu - g_B B_\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 \end{pmatrix}\right|^2 =$$

$$= \ldots = \frac{\phi_0^2}{4} g_W^2 \left[(W^1_\mu)^2 + (W^2_\mu)^2\right] + \frac{\phi_0^2}{4}\left[g_W W^3_\mu - g_B B_\mu\right]^2$$

Definovaním štvorice nových vektorových polí ako lineárnych kombinácií pôvodnej štvorice (čiže zmenou bázy)

$$(W^1_\mu)^2 + (W^2_\mu)^2 = 2(W^+)_\mu(W^-)^\mu \qquad W^\pm_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(W^1_\mu \mp iW^2_\mu)$$

$$Z_\mu = \frac{1}{\sqrt{g_W^2 + g_B^2}}(g_W W^3_\mu - g_B B_\mu) \qquad A_\mu = \frac{1}{\sqrt{g_W^2 + g_B^2}}(g_B W^3_\mu + g_W B_\mu)$$

môžeme $\Delta\mathcal{L}$ zapísať ako[35]

$$\Delta\mathcal{L} = \underbrace{\frac{\phi_0^2}{2} g_W^2}_{\widetilde{m}_W^2}(W^+)_\mu(W^-)^\mu + \underbrace{\frac{\phi_0^2}{4}(g_W^2 + g_B^2)}_{\widetilde{m}_Z^2} Z_\mu^2 + \underbrace{0}_{\widetilde{m}_A^2} \cdot A_\mu^2$$

[34]Kladieme $Y_w = -\frac{1}{2}$, čo je prípad chirálne ľavorukých leptónov (kap. IV.3.3), a vysvetlenie podáme neskôr.

[35]Už v predchádzajúcom lagrangiáne sú členy $W^{1,2}_\mu$ vyjadrené v hmotnostnej báze, teda $\sim (W^j_\mu)^2$, potrebujeme ich však vyjadriť v novom SU(1)-invariantnom tvare.

Tri zo štyroch nových polí, $W^+$, $W^-$ a $Z$, sú teda *hmotné*, a ich excitácie - častice so spinom 1 - nazývame W$^+$, W$^-$ a Z bozónmi. Je zrejmé, že W$^+$ a W$^-$ bozóny predstavujú páry častica-antičastica. Štvrté nové pole - *elektromagnetické* - ostáva *ne*hmotným (fotóny), a zachováva *novú* U(1)-kalibračnú symetriu. „Nespotrebovaný“ stupeň voľnosti skalárneho poľa patrí hmotnému Higgsovmu poľu $\widetilde{\phi}$ (s merateľnými excitáciami). Dôležité je, že fotóny a Z-bozóny sú excitáciami navzájom ortogonálnych lineárnych kombinácií pôvodných polí - majú teda *spoločný pôvod*. Z-bozón *nie je* totožný s W$^3$, a SU(2)-symetria tripletu z predchádzajúcej kapitoly je teda *narušená*. Dôsledkom hmotnosti W a Z-bozónov je *krátkodosahovosť* slabej interakcie.

Ak kovariantnú deriváciu vyjadríme prostredníctvom nových vektorových polí ($\{W^\pm_\mu, Z_\mu, A_\mu\}$), dostaneme tvar

$$D_\mu = \partial_\mu + (\text{členy } W^\pm_\mu, Z_\mu) + i\frac{g_W g_B}{\sqrt{g_W^2 + g_B^2}} A_\mu \Big( \underbrace{\hat{I}_3 + \hat{Y}_w}_{Q} \Big)$$

Nový operátor $\underline{\hat{Q} = \hat{I}_3 + \hat{Y}_w}$ je generátorom novovzniknutej symetrie U(1) elektromagnetického poľa a odpovedá **elektrickému náboju** s *kvantovým číslom* $Q$. Výraz $\frac{g_W g_B}{\sqrt{g_W^2+g_B^2}} \stackrel{!}{=} e$ preto identifikujeme ako **elementárny náboj**, a elektrický náboj Diracovej častice ako $\underline{q = eQ}$.

Definujme tzv. **uhol slabého miešania**[36] $\theta_w$

$$\cos\theta_w = \frac{g_W}{\sqrt{g_W^2 + g_B^2}} = \frac{e}{g_B} \qquad\qquad \sin\theta_w = \frac{g_B}{\sqrt{g_W^2 + g_B^2}} = \frac{e}{g_W}$$

Pre hmotnosti vektorových bozónov platí $m_W = \cos\theta_w m_Z$ , a transformáciu $\{W^3_\mu, B_\mu\} \to \{Z_\mu, A_\mu\}$ môžeme vyjadriť ako rotáciu

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_w & -\sin\theta_w \\ \sin\theta_w & \cos\theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^3_\mu \\ B_\mu \end{pmatrix}$$

Môžeme to interpretovať tak, že spontánne narušenie symetrie Higgsovho poľa „rotuje rovinu“ $W^3 - B$ do roviny $Z - A$. Pod „rotovaním“ máme na mysli miešanie jednotlivých komponent polí (takých, ktoré majú spoločný pôvod). Uhol slabého miešania je *voľným* (t.j. vonkajším) parametrom teórie, a fixuje sa experimentálne.

### IV.3.3 Narušenie parity.

V predchádzajúcej analýze slabej interakcie sme uvažovali s *nehmotným* Diracovým dubletom bez bližšej špecifikácie. Skôr než ozrejmíme mechanizmus, akým tieto Diracove polia nadobúdajú hmotnosť, musíme do nášho modelu zakomponovať experimentálne získaný fakt, že

*slabých interakcií sa zúčastňujú len chirálne ľavoruké Diracove polia.*

V kap. III.2.2 sme sa pritom dozvedeli, že chiralita *hmotných* objektov sa v čase *nezachováva* - Diracove spinory oscilujú medzi stavmi opačnej chirality. Tieto dva fakty však *nie sú ne*zlúčiteľné - treba len zabezpečiť, že pri opise *slabých interakcií* pracujeme len s chirálne ľavorukými spinormi. Vhodným „filtrom“ je tzv. **projekčný operátor**[37]

$$\hat{P}_{L,R} = \frac{1 \mp \gamma^5}{2} \qquad\qquad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

[36]angl. *weak mixing angle*. Táto veličina vyjadruje mieru „primiešania“ singletu $B_\mu$ do W$^3$-komponenty pôvodného tripletu SU(2).

[37]Takáto definícia je *nezávislá* na výbere bázy, ktorý podmieňuje tvar $\gamma$-matíc.

V *chirálnej* báze, v ktorej sú zložky Diracovho dubletu $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ vyjadrené ako $\psi_a = \begin{pmatrix} \chi_L^a \\ \xi_R^a \end{pmatrix}$, platí

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \hat{P}_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{P}_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Všetky *slabointerakčné* členy lagrangiánu, t.j. členy obsahujúce $W_\mu^\pm$ a $Z_\mu$ , musia teda obsahovať $\hat{P}_L$,[38] pričom pre Diracov *dublet* platí

$$\hat{P}_L\psi = \begin{pmatrix} \hat{P}_L & 0 \\ 0 & \hat{P}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\psi_1)_L \\ (\psi_2)_L \end{pmatrix}$$

Toto obmedzenie na chirálne ľavoruké Weylove spinory má závažný dôsledok: Konštrukcia Diracových (bi)spinorov ako kombinácia chirálne ľavo- a pravorukých Weylových spinorov totiž zabezpečovala symetriu vzhľadom na transformáciu parity (kap. II.4.3 rep. $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$). Vylúčením chirálne pravorukých spinorov sa táto symetria stráca. Vidíme to na *slabointerakčnom* člene kovariantnej derivácie v $\mathcal{L}_{Dirac}$, kde s uvážením, že $\{\gamma^5, \gamma^0\} = 0$ a teda $\gamma^\mu \hat{P}_L = \hat{P}_R \gamma^\mu$, vieme ukázať, že transformácia parity $\mathcal{P}$ tento člen *mení*,[39]

$$\bar{\psi}\gamma^\mu W_\mu^j \sigma_j \hat{P}_L \psi \underset{\mathcal{P}}{\rightarrow} \bar{\psi}\gamma^\mu W_\mu^j \sigma_j \hat{P}_R \psi \neq \bar{\psi}\gamma^\mu W_\mu^j \sigma_j \hat{P}_L \psi$$

*Transformácia parity nie je symetriou slabej interakcie.*[40]

Znamená to, že uvažovaný Diracov dublet v slabointerakčných členoch može obsahovať *len* chirálne ľavoruké objekty.[41] Keďže však *fyzikálne* (merateľné) Diracove častice, ako napr. elektrón, sú reprezentované bispinormi s *oboma* chiralitami, musí ich obsahovať aj lagrangián, aj keď v *odlišných reprezentáciách*. Slabointeragujúce chirálne *ľavoruké* komponenty tvoria SU(2) *dublety*, a transformujú sa v 2-rozmernej reprezentácii SU(2) (kap. II.3.3), teda $\psi_L \rightarrow e^{i\theta_j\sigma_j/2}\psi_L$, kým im prislúchajúce chirálne *pravoruké* komponenty slabo *ne*interagujú (nemiešajú sa navzájom) a teda tvoria SU(2) *singlety*, a transformujú sa v 1-rozmernej reprezentácii, $\psi_R \rightarrow e^0\psi_R = \psi_R$ (teda nijako).

### IV.3.4 Leptóny.

Jednu triedu elementárnych Diracových častíc/polí (spin $\frac{1}{2}$) zúčastňujúcich sa *elektroslabých* interakcií tvoria **leptóny**.[42] Poznáme šesť druhov leptónov - tzv. **vôní** (angl. **flavour**), zoradených do *troch generácií*, navzájom sa líšiacich hmotnosťou:

**elektrón** $e^-$ ($m_e \neq 0, Q = -1$), $e$-**neutríno** $\nu_e$ ($m_\nu \rightarrow 0, Q = 0$) a ich antičastice $e^+, \bar{\nu}_e$

$\mu$-**leptón** $\mu^-$ ($m_\mu \neq 0, Q = -1$), $\mu$-**neutríno** $\nu_\mu$ ($m_\nu \rightarrow 0, Q = 0$) a ich antičastice $\mu^+, \bar{\nu}_\mu$

$\tau$-**leptón** $\tau^-$ ($m_\tau \neq 0, Q = -1$), $\tau$-**neutríno** $\nu_\tau$ ($m_\nu \rightarrow 0, Q = 0$) a ich antičastice $\tau^+, \bar{\nu}_\tau$

Platí $m_\tau \gg m_\mu \gg m_e$. V každej generácií priraďujeme časticiam **leptónové číslo** 1 a antičasticiam -1, a celkové leptónové číslo sa v interakciách *zachováva*.[43] Elektromagnetických interakcií sa

[38] Hoci členy $\mathcal{L}_{Dirac}$ obsahujú $\bar{\psi}\psi$, postačuje *jeden* operátor $\hat{P}_L$.

[39] Spinory a vektory treba transformovať osobitne, $\mathcal{P}_{spin} = \gamma^0$, $\mathcal{P}_{vec}$ =diag$[0, -1, -1, -1]$.

[40] Zachováva sa však PCT-symetria.

[41] Zápis vo forme dubletu (podobne ako vektoru či spinoru) predpokladá, že jednotlivé komponenty sa môžu navzájom *miešať* (ako pri rotácii vektoru).

[42] Druhú triedu tvoria **kvarky**, ktoré sa *navyše* zúčastňujú aj tzv. **silných interakcií** (kap. IV.4).

[43] Toto zachovávajúce sa kvantové číslo súvisí s globálnou U(1)-symetriou voči transformácii $e^{i\vartheta}$, resp. $e^{-i\vartheta}$ pre antičastice.

*ne*zúčastňujú neutrína ($Q=0$), kým slabých interakcií sa *nezúčastňujú* chirálne *pravo*ruké leptóny. Elektricky neutrálne neutrína sa zúčastňujú len slabých interakcií, koncepciu chirálne *pravo*rukých neutrín preto *nepotrebujeme*.

Diracov dublet z predchádzajúcich kapitol je v *prvej* generácii tvorený chirálne *ľavo*rukým elektrónom a jeho neutrínom, $\psi_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$, so slabým izospinom $I_3^\nu = +\frac{1}{2}$, $I_3^e = -\frac{1}{2}$. Pred „zapnutím“ mechanizmu, ktorý leptónom dodáva hmotnosť, sú obe zložky dubletu nehmotné, a opisujeme ich ako dva SU(2)-symetrické *stavy* jedného systému (s možným vzájomným miešaním). Interakčná spinor-vektorová časť lagrangiánu je

$$\mathcal{L}_{int,L}^{U(1)\times SU(2)} = \bar{\psi}_L\gamma^\mu\left(i\partial_\mu - g_W W_\mu^j \hat{I}_j - g_B B_\mu \hat{Y}_w\right)\psi_L = ... = (\bar{\nu}_L, \bar{e}_L)\gamma^\mu \times$$

$$\times\left[i\partial_\mu - \begin{pmatrix} e\left(\frac{1}{2}+Y_w\right)A_\mu + e\left(\frac{g_W}{2g_B} - Y_w\frac{g_B}{g_W}\right)Z_\mu & \frac{g_W}{\sqrt{2}}W_\mu^+ \\ \frac{g_W}{\sqrt{2}}W_\mu^- & e\left(-\frac{1}{2}+Y_w\right)A_\mu + e\left(-\frac{g_W}{2g_B} - Y_w\frac{g_B}{g_W}\right)Z_\mu \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$$

Z experimentov vieme, že neutrína *ne*interagujú elektromagneticky, preto v prvom diagonálnom člene uvedeného výrazu $\left(\frac{1}{2}+Y_w\right) \overset{!}{=} 0$, čiže pre chirálne *ľavo*ruké leptóny platí $Y_w = -\frac{1}{2}$ (a $+\frac{1}{2}$ pre ich antičastice). Rovnako vidíme, že mimodiagonálne operátory $W_\mu^\pm$ pôsobia na *obe* zložky Diracovho dubletu líšiace sa elektrickým nábojom, a teda ho menia pri ich miešaní, čiže bozóny $\mathrm{W}^\pm$ musia niesť elektrický náboj $Q=\pm 1$. Rovnakou úvahou zistíme, že pre Z-bozón je $Q=0$.

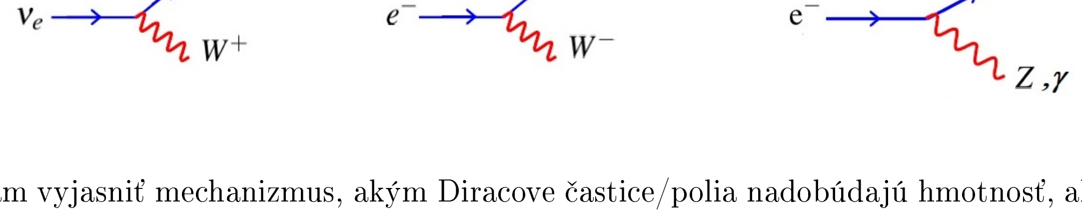
Keďže však *fyzikálne* elektróny *majú* hmotnosť, a teda sú supepozíciou *stavov oboch chiralít* (kap. III.2.2), realistický model vyžaduje doplnenie dubletu o chirálne *pravo*ruký *singlet* ($e_R$). (Rovnaká schéma opäť platí pre ostatné generácie leptónov.) Interakčný lagrangián musí preto obsahovať aj chirálne *pravo*rukú časť (pre singlet v 1-rozmernej reprezentácii SU(2), $I_3 = 0$)

$$\mathcal{L}_{int,R} = \bar{\psi}_R\gamma^\mu\left(i\partial_\mu - g_B B_\mu \hat{Y}_w\right)\psi_R = ... = (\bar{e}_R)\gamma^\mu\left[i\partial_\mu - eY_w\left(A_\mu - \frac{g_B}{g_W}Z_\mu\right)\right](e_R)$$

Keďže $e_R$ a $e_L$ musia mať *rovnaký* elektrický náboj (t.j. koeficient väzby na elektromagnetické pole), musí pre chirálne *pravo*ruké leptóny platiť $Y_w = -1$ (a $+1$ pre antičastice).

V tabuľke sú hodnoty kvantových čísel $Q, I_3, Y_w$ pre leptóny a antileptóny prvej generácie, W,Z-bozóny, fotón a Higgsov bozón.[44] Hodnoty platia aj pre leptóny ostatných generácií. Pomocou nej môžeme preveriť zachovanie kvantových čísel pri rozptylových procesoch z kap. IV.3.1, konkretizovaných pre prvú generáciu leptónov.

| | $e_L$ | $\bar{e}_L$ | $e_R$ | $\bar{e}_R$ | $\nu$ | $\bar{\nu}$ | $W^+$ | $W^-$ | $Z$ | $\gamma$ | $H$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q$ | $-1$ | $+1$ | $-1$ | $+1$ | $0$ | $0$ | $+1$ | $-1$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $I_3$ | $-\frac{1}{2}$ | $+\frac{1}{2}$ | $0$ | $0$ | $+\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $+1$ | $-1$ | $0$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ |
| $Y_w$ | $-\frac{1}{2}$ | $+\frac{1}{2}$ | $-1$ | $+1$ | $-\frac{1}{2}$ | $+\frac{1}{2}$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $+\frac{1}{2}$ |




Ostáva nám vyjasniť mechanizmus, akým Diracove častice/polia nadobúdajú hmotnosť, akú pozorujeme v experimentoch. Keďže objekty rôznych chiralít sa transformujú podľa rôznych reprezentácií

[44] V alternatívnej konvencii je hypernáboj definovaný s faktorom $\frac{1}{2}$, a teda jeho kvantové čísla sa oproti našej tabuľke líšia o faktor 2.

SU(2), požiadavka SU(2)-symetrie *vylučuje* (lorentzovsky invariantný) *hmotnostný* člen lagrangiánu $\sim \bar{\psi}\psi = \bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L$. Vieme ho však nahradiť SU(2)×SU(1)-invariantným členom $\bar{\psi}\phi\psi$, reprezentujúcim *yukawovskú* interakciu so *skalárnym dubletom* $\phi$ (kap. IV.1.2).

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = -y\left[\bar{\psi}_L\phi\psi_R + \bar{\psi}_R\phi^\dagger\psi_L\right] = -y\left[(\bar{\nu}_L, \bar{e}_L)\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} e_R + \bar{e}_R(\phi_1^*, \phi_2^*)\begin{pmatrix}\nu_L\\ e_L\end{pmatrix}\right]$$

kde $y$ je yukawovský koeficient väzby - ďalší voľný parameter modelu. Singlet $e_R$, chirálne *pravo*ruký elektrón, je ekvivalentný chirálne *ľavo*rukému *anti*elektrónu (pozitrónu), a na tejto úrovni modelu vystupuje ako *samostatná* častica, *bez* väzby na chirálne ľavoruký dublet. Opäť však nastupuje Higgsov mechanizmus - spontánne narušenie symetrie skalárneho poľa s jeho novým (opäť vhodne zvoleným) minimom $\phi_{min} = \begin{pmatrix}0\\ \phi_0\end{pmatrix}$. Po jeho dosadení dostávame

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = -y\phi_0[\bar{e}_Le_R + \bar{e}_Re_L] = -\underbrace{y\phi_0}_{\widetilde{m}_e}(\bar{e}e)$$

teda hmotnostný člen fyzikálneho elektrónu.[45]

◇◇◇◇◇

## Dôležité závery:

• Slabá interakcia je zmena slabého izospinu a elektrického náboja Diracových častíc pri interakcii s hmotnými vektorovými časticami - elektricky nabitými W-bozónmi, ako aj interakcia s hmotnými neutrálnymi Z-bozónmi (bez zmeny nábojov). V dôsledku veľkej hmotnosti týchto bozónov je to *krátkodosahová* interakcia.

• Zjednotená *elektroslabá* interakcia je kalibračnou interakciou Diracových polí so štvoricou *ne*hmotných vektorových polí, teda SU(2)×U(1)-kalibračnou symetriou so zachovávajúcim sa priemetom slabého izospinu (SU(2)) a hypernábojom (U(1)). Interakciou so skalárnym Higgsovým poľom so spontánne narušenou symetriou (a nenulovou vákuovou hodnotou) vektorové častice SU(2)-tripletu nadobúdajú hmotnosť, čím narušujú SU(2)-symetriu - slabá interakcia (s *hmotnými* bozónmi W,Z) sa oddelí od U(1)-kalibračnej elektromagnetickej interakcie (s *ne*hmotnými fotónmi).

• Leptóny sú Diracove častice, existujúce v šiestich vôňach, zučastňujúce sa slabých a elektromagnetických (ak sú elektricky nabité) interakcií. Chirálne *pravo*ruké časti hmotných leptónov pritom interagujú len s fotónmi a bozónmi Z (nemenia slabý ani elektrický náboj). Yukawovskou interakciou so skalárnym Higgsovým poľom (s nenulovou vákuovou hodnotou) získavajú leptóny hmotnosť.

# IV.4 Silná interakcia.

**Silná interakcia** je poslednou - a najsilnejšou - z trojice fundamentálnych *silových* (kalibračných) interakcií *Štandardného modelu.* Tejto interakcie sa zúčastňujú *Diracové* častice/polia - **kvarky** - nesúce tzv. **farebný náboj**, preto hovoríme o **chromodynamike** (v analógii s *elektro*dynamikou častíc nesúcich *elektrický* náboj). Sprostredkujúcimi silovými *vektorovými* časticami - *ne*hmotnými

[45]Mechanizmus hmotnosti *neutrín* zostáva v rámci Štandardného modelu zatiaľ otvorenou otázkou.

kalibračnými bozónmi - v chromodynamike sú **gluóny**. Nasledujúci text je venovaný charakterizovaniu tejto interakcie. Keďže viaceré jej čiastkové mechanizmy sú analogické či identické s vyššie opísanými interakciami, obmedzíme sa v týchto prípadoch na odkazy.

## IV.4.1 Kvarky.

*Kvarky* sú *hmotné* Diracove spinory, pozostávajúce z chirálne ľavo- a pravorukého Weylovho spinoru. Existuje *šesť* druhov - *vôní* kvarkov, pričom, na rozdiel od leptónov, každá vôňa existuje v *troch farbebných* nábojoch, $r$ (*red*), $g$ (*green*), $b$ (*blue*). Rovnako ako pri leptónoch, aj vône kvarkov sú zoradené do *troch generácií*, *výrazne* sa líšiacich hmotnosťami:

**up** $u_{r,g,b}$ $(Q = +\frac{2}{3})$, **down** $d_{r,g,b}$ $(Q = -\frac{1}{3})$ a ich antičastice $\bar{u}_{r,g,b}, \bar{d}_{r,g,b}$

**charm** $c_{r,g,b}$ $(Q = +\frac{2}{3})$, **strange** $s_{r,g,b}$ $(Q = -\frac{1}{3})$ a ich antičastice $\bar{c}_{r,g,b}, \bar{s}_{r,g,b}$

**top** $t_{r,g,b}$ $(Q = +\frac{2}{3})$, **bottom** $b_{r,g,b}$ $(Q = -\frac{1}{3})$ a ich antičastice $\bar{t}_{r,g,b}, \bar{b}_{r,g,b}$

Jednotlivé „farby“ sú vnútorné stupne voľnosti, tvoriace *abstraktný farebný priestor*, a každý kvark danej vône tvorí v tomto priestore farebný *triplet* (jednotlivé komponenty tripletu majú rovnakú vôňu a hmotnosť, líšia sa farebným nábojom). Podstatou *silných interakcií* sú „rotácie“ v tomto *farebnom* priestore, tvoriace grupu symetrií SU(3). Algebra tejto grupy (bližšie ju charakterizujeme v kap. IV.4.2) má $3^2 - 1 = 8$ generátorov $\hat{T}_a$ $(a = 1, 2, ...8)$. Globálnu farebnú symetriu SU(3) vzhľadom na transformácie $e^{i\hat{T}_a\theta_a}$ *kalibrujeme* (globálna → lokálna) analogicky ako v prípade slabej interakcie - každému z ôsmych generátorov priradíme kalibračné vektorové - *gluónové* pole $G^a_\mu$, s príslušným tenzorom a kovariantnou deriváciou

$$(F^{G^a})_{\mu\nu} = \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu - g_G f^{abc} G^b_\mu G^c_\nu \qquad\qquad D_\mu = \partial_\mu + i g_G G^a_\mu \hat{T}^a$$

kde $g_G$ je *koeficient väzby* gluónových a kvarkových polí. Opäť vidíme, že gluónové polia *interagujú medzi sebou* (nesú *farebný* náboj).

Súčasne chirálne *ľavo*ruké *dvojice* kvarkov *jednej generácie* tvoria *dublety približne rovnakej* hmotnosti - tvoria teda *približnú* symetriu SU(2) (miešanie prvkov dubletu, každý prvok dubletu je pritom *farebným* tripletom), kalibrovanú trojicou vektorových polí $W^j_\mu$ sprostredkujúcich *slabú interakciu* (kap. IV.3). A napokon, keďže kvarky nesú aj *elektrický* náboj, zúčastňujú sa aj *elektromagnetických* interakcií grupy U(1), sprostredkovaných pôvodným kalibračným poľom $B_\mu$ (po narušení symetrie SU(2) sa nahradí fotónmi). Ide teda o kombinovanú SU(3)×SU(2)×U(1)-kalibračnú symetriu. Kovariantné derivácie chirálne ľavorukého dubletu a pravorukých singletov[46] prvej generácie kvarkov majú tvar[47]

$$D_\mu \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} = \left[\partial_\mu + i g_G G^a_\mu \hat{T}_a + i g_W W^j_\mu \hat{I}_j + i g_B B_\mu \hat{Y}_L\right] \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$$

$$D_\mu u_R = \left[\partial_\mu + i g_G G^a_\mu \hat{T}_a + i g_B B_\mu \hat{Y}_{u_R}\right] u_R \qquad\qquad D_\mu d_R = \left[\partial_\mu + i g_G G^a_\mu \hat{T}_a + i g_B B_\mu \hat{Y}_{d_R}\right] d_R$$

Prvky dubletu majú $z$-ovú zložku slabého izospinu $I_3 = \pm\frac{1}{2}$, kým pre singlety $I_3 = 0$. Keďže pre elektrický náboj má platiť $Q = I_3 + Y$ , pre slabý hypernáboj $Y$ chirálne ľavo/pravorukých kvarkov kladieme

$$Y_L = \frac{1}{6} \qquad\qquad Y_{u_R} = \frac{2}{3} \qquad\qquad Y_{d_R} = -\frac{1}{3}$$

[46]Slabej interakcie SU(2) sa zúčastňuje len chirálne ľavoruká časť Diracovho poľa.

[47]Toto je zjednodušený zápis, prvý výraz platí pre ***každú zložku*** tripletu dubletov, a ostatné výrazy pre každú zložku tripletov.

Kvarky nadobúdajú hmotnosť identickým (Higgsovým) mechanizmom ako leptóny (kap. IV.3.4) - pri yukawovskej interakcii so skalárnym Higgsovým dubletom $\phi$. V prípade kvarkov prvej generácie vedie yukawowský interakčný člen $\bar{\psi}\phi\psi$ na

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = -y_u(\bar{u}_L, \bar{d}_L)\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}u_R - y_d(\bar{u}_L, \bar{d}_L)\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}d_R - y_u\bar{u}_R(\phi_1^*, \phi_2^*)\begin{pmatrix}u_L\\ d_L\end{pmatrix} - y_d\bar{d}_R(\phi_1^*, \phi_2^*)\begin{pmatrix}u_L\\ d_L\end{pmatrix}$$

kde $y_u, y_d$ sú yukawovské *koeficienty väzby* kvarkov $u$ a $d$ na Higgsovo pole - ďalšie *voľné* parametre modelu. Spontánnym narušením symetrie Higgsovho poľa a nadobudnutím *ne*nulovej vákuovej hodnoty $\phi_0$ nadobudnú *jednotlivé* kvarky hmotnosti $\widetilde{m} \sim y_u\phi_0$, resp. $y_d\phi_0$, čím dôjde k narušeniu *presnej* SU(2)-symetrie kvarkového dubletu.

Experimenty ukazujú, že gluóny sú *nehmotné*, čo znamená (na rozdiel od slabej interakcie), že symetria SU(3) ostáva *zachovaná.*

## IV.4.2 Gluóny.

Algebra grupy SU(3) má $3^2 - 1 = 8$ generátorov $\hat{T}_a$ $(a = 1, 2, ...8)$, ktoré v *definičnej* reprezentácii vyjadrujeme pomocou tzv. **Gell-Mannových matíc** $\lambda_a$ (navzájom ortogonálnych, hermitovských a s nulovou stopou, v analógii s Pauliho maticami pre SU(2))

$$\underline{\hat{T}_a = \frac{\lambda_a}{2}} \text{ (v jednotkách } \hbar) \qquad \lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0\\ i & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i\\ 0 & 0 & 0\\ i & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{pmatrix} \qquad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

Medzi generátormi platia komutačné vzťahy $\underline{[\hat{T}_a, \hat{T}_b] = if^{abc}\hat{T}_c}$, kde $f^{abc}$ sú štruktúrne konštanty algebry.[48] Každému generátoru síce prislúcha jedna zachovávajúca sa veličina, v analógii s $\mathfrak{su}(2)$ však relevantnými sú len noetherovské náboje prislúchajúce *diagonálnym* (Cartanovým) generátorom, v tomto prípade $\hat{T}_3$ a $\hat{T}_8$. Dá sa tiež ukázať, že algebra $\mathfrak{su}(3)$ má *dva Casimirove operátory,* $\hat{C}_1, \hat{C}_2$, a teda bázové stavy sú určené vlastnými hodnotami tejto *štvorice* operátorov, $|C_1, C_2, T_3, T_8\rangle$ (obdobne ako $|j, m\rangle$ v $\mathfrak{su}(2)$).

Ľahko zistíme, že prvá trojica generátorov tvorí algebru $\mathfrak{su}(2)$ (v 3D-reprezentácii) s bázovými vektormi a odpovedajúcimi vlastnými hodnotami diagonálneho operátoru $\hat{T}_3$ - operátoru $z$-ovej zložky tzv. **farebného izospinu**

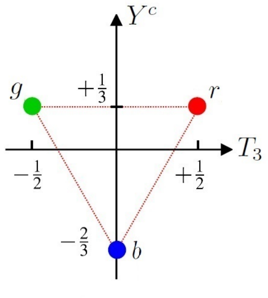
$$r = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \qquad T_3 = +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0$$

Pomocou generátorov $\hat{T}_1, \hat{T}_2$ teda definujeme zvyšovací/znižovací operátor $\hat{T}_\pm = \hat{T}_1 \pm i\hat{T}_2$ meniaci $T_3$ medzi hodnotami $+\frac{1}{2} \leftrightarrow -\frac{1}{2}$. Pomocou $\hat{T}_8$ zas konvenčne definujme tzv. operátor **farebného**

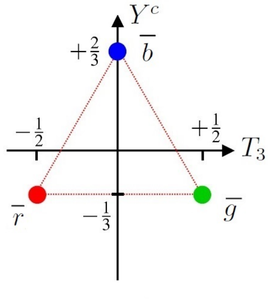
[48] Ich konkrétne hodnoty nie sú pre potreby tohto textu podstatné. Pre úplnosť, jediné nenulové a *antisymetrické* kombinácie sú $f^{123} = 1$, $f^{147} = f^{165} = f^{246} = f^{257} = f^{345} = f^{376} = \frac{1}{2}$, $f^{458} = f^{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

**hypernáboja** $\hat{Y}^c = \frac{2}{\sqrt{3}}\hat{T}_8$ s vlastnými hodnotami $Y^c = +\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$. Zo zvyšných generátorov konštruujeme operátory $\hat{V}_\pm = \hat{T}_4 \pm i\hat{T}_5$ , $\hat{U}_\pm = \hat{T}_6 \pm i\hat{T}_7$ pôsobiace nasledovne:

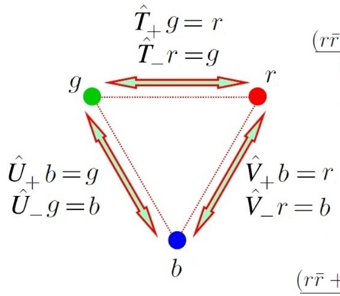
$\hat{U}_\pm$ zvyšuje/znižuje $Y^c$ o 1 a znižuje/zvyšuje $T_3$ o $\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\hat{V}_\pm$ zvyšuje/znižuje $Y^c$ o 1 a $T_3$ o $\frac{1}{2}$

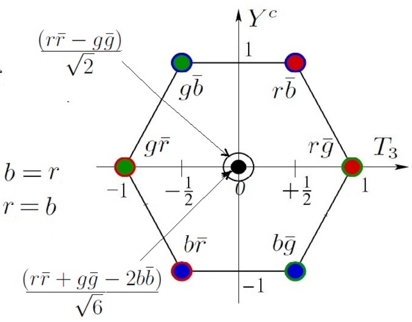


kvarky



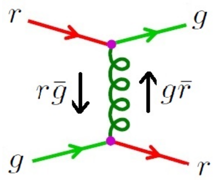
antikvarky




Každý z tejto *šestice* operátorov predstavuje jeden *farebný gluón*, meniaci farbu kvarku vo farebnom priestore - kreuje novú a anihiluje pôvodnú:[49]

$\hat{T}_+ = r\bar{g} \qquad \hat{T}_- = g\bar{r} \qquad \hat{U}_+ = g\bar{b} \qquad \hat{U}_- = b\bar{g} \qquad \hat{V}_+ = r\bar{b} \qquad \hat{V}_- = b\bar{r}$




Interakcie sprostredkované týmito gluónmi môžeme interpretovať nasledovne: Kvark $r$ emituje gluón $r\bar{g}$, čím sa zmení na kvark $g$. Gluón je následne pohltený kvarkom $g$, ktorý sa zmení na $r$. Transfér farby opačným smerom zase zabezpečí gluón $g\bar{r}$. Fyzikálny proces na obrázku je teda *superpozíciou oboch* transférov, a gluónové stavy zapisujeme ako $(r\bar{g} + g\bar{r})/\sqrt{2}$, $i(r\bar{g} - g\bar{r})/\sqrt{2}$, atď. pre iné farby, čo odpovedá generátorom $\hat{T}_a$. Všetkých šesť uvedených gluónov je *farebných.* V analógii so slabou interakciou (SU(2)), gluóny ako generátory symetrií (resp. ich lineárne kombinácie) sprostredkujú „rotácie“ vo farebnom priestore tripletov.

Zvyšné tri možné kombinácie farba-antifarba, $r\bar{r}, g\bar{g}, b\bar{b}$, predstavujú *bez*farebný stav, ktorý v kvantovom svete existuje opäť len ako *superpozícia* týchto stavov.[50] Pri *troch lineárne nezávislých* kombináciách je vhodnou voľbou

$$(r\bar{r} - g\bar{g})/\sqrt{2} \qquad\qquad (r\bar{r} + g\bar{g} - 2b\bar{b})/\sqrt{6} \qquad\qquad (r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b})/\sqrt{3}$$

Prvé dva gluóny konštrukciou odpovedajú diagonálnym operátorom $\hat{T}_3, \hat{T}_8$, čiže *ne*menia farbu kvarkov. Posledný operátor je však bezfarebný *singlet.*[51] Ako uvidíme v nasledujúcej kapitole, fyzikálnymi (merateľnými) časticami sú *len* takéto bezfarebné singlety, interagujúce zas len s inými singletmi. Ak by takýto *nehmotný gluón* reálne existoval, znamenal by *nekonečný dosah* silnej interakcie, čo je *v rozpore s pozorovaniami.* Gluóny teda tvoria len farebný *oktet* (na obr.), odpovedajúci algebre $\mathfrak{su}(3)$.[52]

## IV.4.3 Hadróny.

Keďže gluóny nesú farebný náboj, interagujú aj *medzi sebou* (bez účasti kvarkov). Dôsledkom toho je, že farebné pole vytvorené gluónmi medzi pármi kvark-antikvark nepripomína elektromagnetické

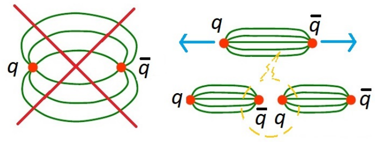
[49]Napr. $r\bar{g} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}(0\,1\,0) = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right] = \hat{T}_1 + i\hat{T}_2 = \hat{T}_+$

[50]Bezfarebný gluón typu $r\bar{r}$ by síce mohol byť vyžiarený kvarkom $r$ (pričom by tento kvark nezmenil farbu), iný kvark farebného tripletu by ho však nemohol absorbovať. Takéto gluóny sú nefyzikálne.

[51]Tento generátor nespĺňa definičné podmienky $\mathfrak{su}(3)$, patrí algebre rozšírenej grupy U(3).

[52]Ide o rozklad $3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$.

pole (vyjadrené siločiarami na obr.), ale *vzájomná* interakcia gluónov sústreďuje toto pole do trubice s *konštantnou hustotou* energie. S odďaľovaním kvarkov teda rastie *celková* energia poľa (t.j. rastie sila vzájomného priťahovania kvarkov), a po prekročení istej hodnoty vedie k tvorbe *nových párov* kvark-antikvark z vákua. Jednotlivé kvarky teda nie je možné od seba izolovať - vytvárajú *viazané* stavy (častice), tzv. **hadróny**. Celkový farebný náboj hadrónov je vždy *nulový*. Tento efekt sa nazýva **farebné uzavretie** (angl. *colour confinement*). Gluóny sú uväznené „vnútri" hadrónov[53] ($\approx 10^{-15}$m, čo je dosah silnej interakcie), čiže hadróny ako farebne *neutrálne* celky sa *nezúčastňujú* silnej interakcie. V analógii s SU(2) ich opisujeme ako *singlety*, $T = 0\,,\, T_3 = 0\,,\, Y^c = 0$, teda v 1D reprezentácii SU(3). *Elektrický* náboj hadrónov je *celo*číselný (v jednotkách $e$).



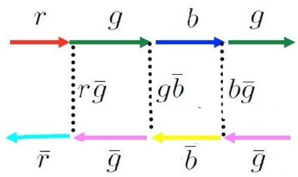

Podmienka nulového *farebného* a celočíselného *elektrického* náboja, ako aj Pauliho vylučovací princíp (platný pre Diracove častice) dovoľujú len určité viazané stavy kvarkov: **baryóny** $qqq$ a *anti*barióny $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$ s *polo*čiselným celkovým spinom, a **mezóny** $q\bar{q}$ s *celo*číselným celkovým spinom.

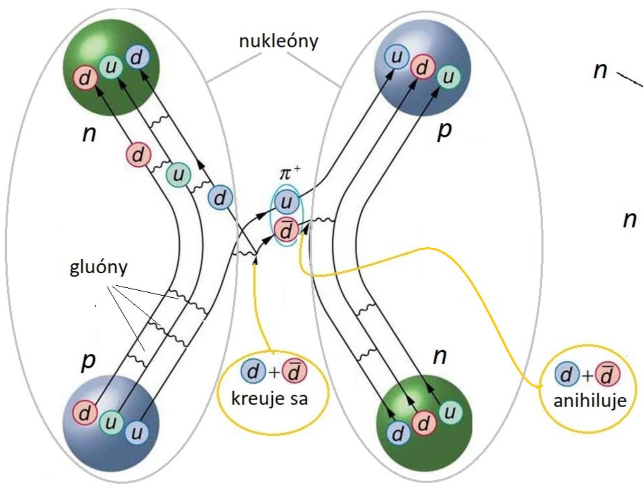
Najľahšími (a preto *najstabilnejšími*) *baryónmi* so spinom $\frac{1}{2}$ sú **nukleóny**: **protón** $uud$ ($Q = 1$) a **neutrón** $udd$ ($Q = 0$). Hmotnosti kvarkov pritom tvoria len $\approx 1\%$ hmotnosti nukleónov!!! Takmer celá ich hmotnosť je tvorená *väzbovou energiou* kvarkov, zahrňujúcou kinetickú energiu kvarkov a gluónov. V nukleónoch totiž neustále prebieha výmena gluónov medzi kvarkami (čiže rotácia $rgb$ trojíc kvarkov vo farebnom priestore).

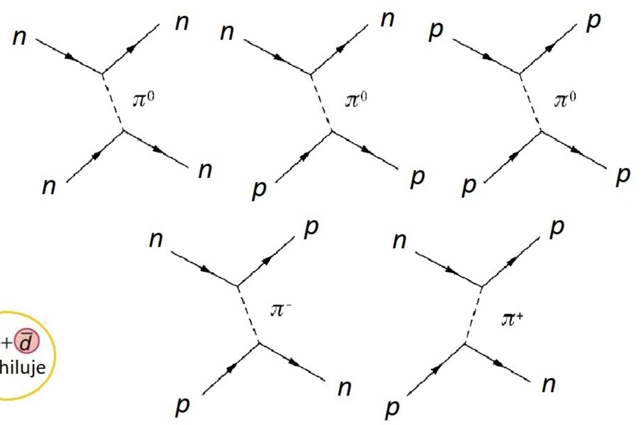
Najľahšími *mezónmi* so spinom 0 sú **pióny** tvoriace izospinový *triplet*[54]

$$\pi^+ = u\bar{d} = |1,1\rangle \qquad \pi^- = d\bar{u} = |1,-1\rangle \qquad \pi^0 = (u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2} = |1,0\rangle$$

Existujú v neustále sa meniacich farebne neutrálnych kombináciách farba-antifarba (obr.).



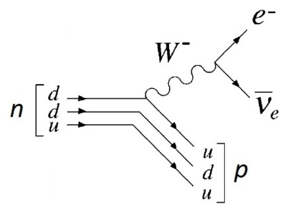




*Pióny* vznikajú pri výmene gluónov medzi kvarkami v nukleónoch, a sprostredkujú *väzbu nukleónov v atómových jadrách*. Nukleóny ako farebné *singlety* môžu emitovať/absorbovať tiež len *singlety* - *bezfarebné* pióny, *nie* gluóny! Väzba protónov a neutrónov v atómových jadrách teda *nie je* silnou (čiže farebnou) interakciou, hovoríme o **zvyškovej silnej interakcii**.

[53] Keďže hadróny sú *kompozitné* častice, *má* zmysel uvažovať o ich rozmeroch, daných dosahom väzbovej sily.
[54] $u = \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\,,\; d = \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\,,\; \bar{u} = \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\,,\; \bar{d} = \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$

Vďaka tomuto mechanizmu je väčšina atómových jadier *stabilných*. *Izolovaný* neutrón má totiž dobu života asi 15 min, a rozpadá sa prostredníctvom *slabej* interakcie kvarkov, $d \to u + W^-$, na protón, elektrón a jeho antineutríno - tzv. $\beta^-$ **rádioaktívny rozpad**.




Všetky interakcie medzi časticami sa riadia príslušnými zákonmi zachovania (noetherovských nábojov). Najdôležitejšími sú zákon zachovania *elektrického* (pri silnej, slabej i elektromagnetickej interakcii) a *farebného* náboja (pri silnej interakcii - slabá a a elektromagnetická interakcia *ne*ovplyvňujú farebný náboj). Ďalším zachovávajúcim sa nábojom pri silných interakciách je **baryónové číslo** ($\pm 1$ pre baryón/antibarión, resp. $\pm\frac{1}{3}\times$počet kvarkov/antikvarkov). Na rozdiel od leptónov, baryónové číslo sa zachováva *naprieč generáciami* kvarkov, a to vďaka účasti kvarkov na slabej interakcii. Na druhej strane, nezachováva sa *vôňa* kvarkov.

◇ ◇ ◇ ◇ ◇

## Dôležité závery:

• Silná interakcia je kalibračnou interakciou Diracových častíc - kvarkov, nesúcich *elektrický* a jeden z troch *farebných* nábojov, pri ktorej dochádza k výmene farebného náboja, sprostredkovanej oktetom *ne*hmotných, elektricky neutrálnych, farebných vektorových častíc - gluónov.

• Kvarky existujú v šiestich vôňach, a zúčastňujú sa aj slabých a elektromagnetických interakcií. Pri slabých interakciách sa menia vône kvarkov. Hmotnosť získavajú kvarky interakciou s Higgsovým poľom s nenulovou vákuovou hodnotou.

• Gluóny, nesúce farebný náboj, interagujú aj sami medzi sebou. Táto interakcia spôsobuje *tzv. uväznenie farieb* - neexistujú izolované objekty s *ne*vykompenzovaným farebným nábojom - kvarky vytvárajú viazané objekty - hadróny.

• Baryóny sú hadróny tvorené tromi (resp. nepárnym počtom) kvarkov, s celkovým *polo*číselným spinom. Mezóny sú hadróny tvorené dvomi (resp. párnym počtom) kvarkov, s celkovým *celo*číselným spinom.

• Najľahšie kvarky, $u, d$, vytvárajú nukleóny - protóny a neutróny (baryóny) - aj pióny (mezóny), sprostredkujúce väzbu nukleónov do atómových jadier. Táto interakcia je *zvyškovou* silnou interakciou.

# Gravitácia

**Newtonov gravitačný zákon** pre silové pôsobenie gravitačného poľa telesa o hmotnosti $M$ na teleso o hmotnosti $m$ vo vzdialenosti $r$ je

$$\vec{F} = -\frac{\kappa_N m M}{r^2}\vec{r}^0 = -m\nabla\phi(\vec{r}_m) = m\vec{g}(\vec{r}_m)$$

kde $\kappa_N$ je **Newtonova gravitačná konštanta**, a

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{\kappa_N M}{r} \qquad\qquad \vec{g}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r})$$

sú *potenciál* a *intenzita* tohto gravitačného poľa, odpovedajúca *gravitačnému zrýchleniu*. Pre objemovú hustotu hmotnosti $\rho(\vec{r})$ (ako *žriedla* gravitačného poľa) platí

$$-\nabla\cdot\vec{g}(\vec{r}) = \underline{\nabla^2\phi(\vec{r}) = 4\pi\kappa_N\rho(\vec{r})}$$

Očividnými nedostatkami tejto teórie, z pohľadu teórie relativity, sú *okamžité pôsobenie na diaľku* (vyjadrené potenciálom $\phi(\vec{r})$) a koncepcia *absolútneho priestoru* (a času). Táto časť sa preto venuje zovšeobecneniu newtonovskej teórie aj na prípady *veľkých rýchlostí a hmotností* - **všeobecnej teórii relativity**, jej základným myšlienkam, koncepciám a rovniciam.

## V.1 Zakrivený časopriestor.

### V.1.1 Princíp ekvivalencie.

Jedným zo základných princípov všeobecnej relativity je **princíp ekvivalencie**:

*Pozorovateľ voľne padajúci v gravitačnom poli nevie odlíšiť svoj stav od stavu pokoja.*[1]

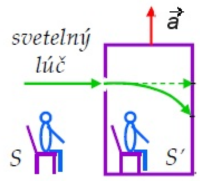
Gravitačné pole je teda *relatívne* - voľne padajúci pozorovateľ ho (vo svojom okolí) necíti. Ostatné voľne padajúce objekty sa voči nemu nehýbu - môže vyhlásiť, že je v pokoji. Ani pozorovateľ v uzavretej kabíne nevie rozlíšiť účinok tiaže v *stojacej* kabíne od ekvivalentného rovnomerného zvislého *zrýchlenia* kabíny nahor.[2] Ekvivalencia *gravitačnej* a *zotrvačnej* hmotnosti implikuje, že

[1] Kozmonauti a parašutisti dôverne poznajú „beztiažový“ stav.

[2] Nenechajme sa zmiasť fyziologickým *prechodným* pocitom *pri zmene* zrýchlenia - v okamihu skoku do prázdna či rozbehnutia kabíny.

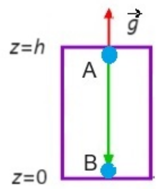
*gravitačné pole môžeme zrušiť alebo vytvoriť zrýchlením.*

Lúč svetla prenikajúci zboku do *zrýchľujúcej* kabíny sa z pohľadu pozorovateľa v kabíne zakrivuje akoby gravitačne padal (obr.). Vieme však, že svetelný lúč sa (v rovnorodom prostredí) šíri po najkratšej dráhe - znamená to, že priestor zrýchľujúcej kabíny je (z pohľadu pozorovateľa v kabíne) *zakrivený*. Podľa princípu ekvivalencie to isté platí o gravitačnom poli.




Pozorovateľ na *rovnomerne rotujúcom* disku pozoruje, že v dôsledku relativistickej kontrakcie dĺžky nehybných meradiel, rozostavených okolo disku pozdĺž jeho obvodu, s rastúcou rýchlosťou narastá pomer jeho obvodu ku polomeru, $\frac{l}{r} = 2\pi\gamma$. Znamená to, že rotujúci disk - *ne*inerciálna sústava s dostredivým *zrýchlením* - má zakrivenú geometriu.[3] Podľa princípu ekvivalencie rovnaké zakrivenie priestoru existuje v gravitačnom poli hmotného objektu.

Predpokladajme kabínu o výške $h$ štartujúcu v čase $t = 0$ zo zeme $z = 0$ so zvislým zrýchlením $\vec{g}$ (obr.). Zdroj A (na strope) vysiela nadol sériu svetelných pulzov v časoch $t_A, t_A + \Delta_A, ...$, a detektor B (na podlahe) ich prijíma v časoch $t_B, t_B + \Delta_B, ....$ Pre okamžité polohy zdroja a detektoru v rôznych časoch platí (pre jednoduchosť predpokladajme $t_A = 0$ a malé rýchlosti, takže relativistické efekty môžeme zanedbať)




$$z_B(t) = \frac{1}{2}gt^2 \qquad\qquad z_A(t) = \frac{1}{2}gt^2 + h$$

$$z_A(t_A) - z_B(t_B) = ct_B \cong h \qquad\qquad z_A(t_A + \Delta_A) - z_B(t_B + \Delta_B) = c[t_B + \Delta_B - (t_A + \Delta_A)]$$

Kombinovaním (predpokladajúc krátke periódy pulzov, $\Delta^2_{A,B} \to 0$) dostávame

$$\Delta_B = \Delta_A \left(1 - \frac{gh}{c^2}\right)$$

Pre pozorovateľa B teda medzi dvoma po sebe idúcimi pulzmi ubehol *kratší* čas než pre pozorovateľa A. Podľa princípu ekvivalencie v kabíne v pokoji čas plynie *pomalšie*[4] v silnejšom gravitačnom poli so *zápornejším* potenciálom $\phi_B$ (pamätajme, že $\phi(r) < 0$, $\phi(\infty) \stackrel{!}{=} 0$).

Pre frekvencie svetla $\nu_{A,B} \sim 1/\Delta_{A,B}$ v zrýchľujúcej kabíne to znamená (dopplerovský) posuv spektra medzi zdrojom A a prijímačom B na opačnom konci kabíny. Podľa princípu ekvivalencie rovnaký posuv spôsobuje gravitačné pole. Ak uvážime, že v gravitačnom poli $gh = |\phi_A - \phi_B|$, čo je rozdiel gravitačných potenciálov, vo veľkej vzdialenosti A ($\phi_A = 0$) od povrchu žiariaceho telesa B o hmotnosti $M$ a polomere $R_M$ ($\phi_B = -\frac{\kappa_N M}{R_M}$) dostaneme **gravitačný červený posuv**

$$\nu_A = \nu_B \left(1 + \frac{\phi_B}{c^2}\right) = \nu_B \left(1 - \frac{\kappa_N M}{R_M c^2}\right)$$

Zakrivenie časopriestoru v zrýchľujúcej sústave/gravitačnom poli znamená obmedzenie platnosti zákonov špeciálnej relativity. Princíp ekvivalencie však umožňuje *v rozumnom okolí každého bodu* ľubovoľne zakriveného časopriestoru nahradiť jeho metriku Minkowského metrikou - **lokálnou inerciálnou** sústavou s *ortogonálnou* štvorvektorovou bázou. Voľne padajúce laboratórium (dostatočne malé) je tiež takouto lokálnou inerciálnou sústavou.

[3]Je to tzv. *Ehrenfestov paradox.*

[4]Naozaj, s narastajúcou nadmorskou výškou na povrchu Zeme pozorujeme *zrýchľovanie* chodu hodín - času, približne o 1ns za deň na každých 100m nadmorskej výšky. Táto skutočnosť limituje jeden zo základných postulátov špeciálnej relativity: rýchlosť $c$ je invariantom len *lokálne*!

### V.1.2 Metrika zakriveného časopriestoru.

Začnime metrikou plochého euklidovského 3D priestoru: Kvadrát vzdialenosti dvoch bodov nezávisí od výberu súradnicovej sústavy,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \;\; \to \;\; \left(\sum_\mu^D \sum_\nu^D\right) g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g'_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu$$

kde $g_{\mu\nu}$ je **metrika** (metrický tenzor, $x^\mu$ a $x'^\mu$ odpovedajú *rovnakému* bodu v rôznych súradnicových sústavách, $\mu, \nu = 1, 2, 3,$ ). Tá sa však pri prechode medzi súradnicovými sústavami *mení.* V *kartézskej* sústave $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, v *sférických* súradniciach $g_{11} = g_{rr} = 1$, $g_{22} = g_{\theta\theta} = r^2$, $g_{33} = g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\theta$, a ostatné nulové (prvky matice nemusia mať rovnaký rozmer, a diagonálnosť je vecou praktickej voľby). Lineárna *infinitezimálna* transformácia súradníc (konečná transformácia súradníc je vo všeobecnosti *ne*lineárna) je

$$dx'^\mu = \underbrace{\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}} dx^\nu = \underbrace{\mathcal{A}^\mu{}_\nu(x)}\, dx^\nu \qquad (\mu \text{ - riadok, } \nu \text{ - stĺpec}) \qquad dx^\mu = \underbrace{\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}} dx'^\nu = \underbrace{(\mathcal{A}^{-1})^\mu{}_\nu(x')}\, dx'^\nu$$

V porovnaní napr. s maticou rotácie sa transformačná matica $\mathcal{A}^\mu{}_\nu(x)$ vo všeobecnosti *mení* s polohou, a odpovedajúco sa mení aj metrika

$$g'_{\sigma\rho}(x') = g_{\mu\nu}(x)\, (\mathcal{A}^{-1})^\mu{}_\sigma (\mathcal{A}^{-1})^\nu{}_\rho$$

Dá sa ukázať, že *invariantným* voči transformácii súradníc v $D$-rozmernom priestore je jeho objemový element v tvare

$$d^D x \sqrt{\mathfrak{g}} = d^D x' \sqrt{\mathfrak{g}'}$$

kde $\mathfrak{g}$ je determinant matice metriky $g_{\mu\nu}$. V kartézskych/sférických súradniciach 3D euklidovského priestoru to znamená $dxdydz = drd\theta d\varphi r^2 \sin\theta$, keďže $\mathfrak{g}_{xyz} = 1$ a $\mathfrak{g}_{r\theta\varphi} = r^4 \sin^2\theta$.

Pri *zakrivenom* časopriestore je z hľadiska všeobecnej relativity podstatná len tzv. **vnútorná krivosť**.[5] Na rozdiel od Minkowského metriky (kap. I.3.1), v zakrivenom časopriestore

$$c^2 d\tau^2 \neq c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

V predchádzajúcej kapitole V.1.1 sme videli, ako *newtonovské* gravitačné pole s potenciálom $\phi$ zakrivuje (spomaľuje) *čas.* V ďalšom texte ukážeme zakrivenie *priestoru* týmto poľom. Ani metrika newtonovskej gravitácie teda *nie* je metrikou plochého časopriestoru. Nerelativistická limita účinku pre (voľnú) časticu o hmotnosti $m$ (kap. I.3.1) rozšírená o potenciálnu energiu v gravitačnom potenciáli $\phi$ je

$$S = -mc \int_a^b ds \;\; \to \;\; \int_{t_a}^{t_b} \left(\frac{1}{2}mv^2 - mc^2 - m\phi\right) dt = -mc^2 \int_{t_a}^{t_b} \left(1 + \frac{\phi}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2}\right) dt$$

Porovnaním podintegrálnych výrazov dostávame v slabom gravitačnom poli a v limite $\frac{v^2}{c^2} \to 0$ faktor zmeny časomiery z kap. V.1.1, $dt\left(1 + \frac{\phi}{c^2}\right) \cong dt\sqrt{1 + \frac{2\phi}{c^2}}$ , ako aj **newtonovskú metriku**

$$\underline{ds^2 = \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - dr^2}$$

[5]Napr. plášť cylindra má len *vonkajšiu krivosť* (rozstrihnutím dostaneme rovinu) - je to 2D plocha vložená do 3D euklidovského priestoru. Nedá sa to urobiť s plášťom gule - má aj *vnútornú krivosť.* Keďže nedokážeme vystúpiť z nášho Vesmíru, vonkajšia krivosť nás nezaujíma!

### V.1.3 Geodetika.

V Minkowského časopriestore je (času podobná) *vzdialenosť* dvoch udalostí A,B daná vzťahom

$$l_{AB} = c\int_A^B d\tau = \int_A^B \sqrt{(cdt)^2 - (d\vec{r})^2} = \int_0^1 \sqrt{\left(c\frac{dt}{d\xi}\right)^2 - \left(\frac{\vec{r}}{d\xi}\right)^2}\, d\xi = \int_0^1 \sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\xi}\frac{dx^\nu}{d\xi}}\, d\xi$$

kde v posledných výrazoch sme svetočiaru parametrizovali monotónne sa meniacou premennou $\xi$, nadobúdajúcou v krajných bodoch A,B hodnoty 0,1. Keďže táto vzdialenosť odpovedá *extremálnemu vlastnému času*, považujme integrand za „lagrangián“, a ELR zapíšme v tvare

$$\frac{\partial\tilde{\mathscr{L}}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\xi}\left(\frac{\partial\tilde{\mathscr{L}}}{\partial(dx^\mu/d\xi)}\right) = 0 \qquad\qquad \tilde{\mathscr{L}}\left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{d\xi}\right) = \sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\xi}\frac{dx^\nu}{d\xi}} = \frac{d\tau}{d\xi}$$

Po dosadení a úprave dostávame klasické pohybové rovnice pre *voľnú* časticu

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = \frac{du^\mu}{d\tau} = 0$$

Vo *všeobecnej* relativite je častica *voľnou*, ak na ňu nepôsobí *žiadna sila okrem gravitačnej* (tá sa, v zmysle princípu ekvivalencie, za silu nepovažuje - je to *vlastnosť časopriestoru*). Svetočiara *voľnej* častice medzi dvomi udalosťami (v času podobnej vzdialenosti) odpovedajúca extremálnemu vlastnému času sa nazýva **geodetikou**. (Predpokladáme, že častica samotná ku zakriveniu časopriestoru *ne*prispieva.) V tomto prípade $\eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}(x)$

$$\tilde{\mathscr{L}}\left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{d\xi}\right) = \sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\xi}\frac{dx^\nu}{d\xi}}$$

a **rovnica geodetiky** (po analogickom odvodzovaní) nadobúda tvar

$$\underline{\frac{d^2x^\sigma}{d\tau^2} = -\Gamma^\sigma_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}} \qquad \text{resp.} \qquad \underline{\frac{du^\sigma}{d\tau} = -\Gamma^\sigma_{\mu\nu}(x)u^\mu u^\nu}$$

kde

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(x)[\partial_\mu g_{\nu\rho}(x) + \partial_\nu g_{\mu\rho}(x) - \partial_\rho g_{\mu\nu}(x)]$$

sú tzv. **Christoffelove symboly** ($\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \Gamma^\sigma_{\nu\mu}$). Ide o relativistickú verziu Newtonovho gravitačného zákona

$$\frac{d^2x_j}{dt^2} = -\frac{\partial\phi(x_j)}{\partial x_j}$$

pričom klasická koncepcia gravitačného potenciálu $\phi$ sa úplne premietla do zakrivenia metriky $g_{\mu\nu}$ vyjadreného prostredníctvom $\Gamma^\mu_{\nu\sigma}$. Zdrojom sily/zrýchlenia, nahrádzajúcim priestorové variácie newtonovského gravitačného potenciálu, sú časopriestorové variácie metriky, čiže zakrivenie časopriestoru.

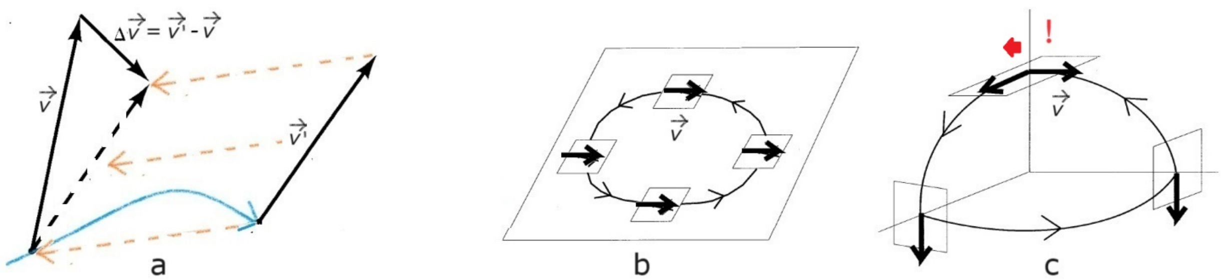
Svetelný lúč sa takisto šíri pozdĺž tzv. **nulovej geodetiky**[6], $ds^2 = 0$. V rámci newtonovskej mechaniky by gravitačné pôsobenie telesa o hmotnosti $M$ spôsobilo prostredníctvom dostredivého zrýchlenia svetla (ako nositeľa energie-hmotnosti) zmenu (smeru) rýchlosti $\Delta\vec{v} = -\int \frac{\kappa_N M\vec{r}(t)}{r(t)^3}dt = -\int_0^t \frac{\kappa_N M}{cr^2}dr$ a odpovedajúci uhol ohybu svetla $\Delta\varphi \cong \frac{\Delta v}{c} \cong \frac{2\kappa_N M}{c^2 r} = \frac{R_S}{r}$. Po započítaní zakrivenia časopriestoru však dostávame správny *dvojnásobný* uhol. Pre *vzdialeného* pozorovateľa toto zakrivenie dráhy lúča v prítomnosti hmotnosti znamená časové oneskorenie - *relatívne globálne spomalenie* svetla (pri *konštantnej lokálnej* rýchlosti $c$).

[6] Na nulovej geodetike vlastný čas $\tau$ stráca svoj význam, a nemožno ním geodetiku parametrizovať. V rovnici geodetiky preto $\tau \to \xi$, a $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\xi}$ je jednotkový tangenciálny vektor.

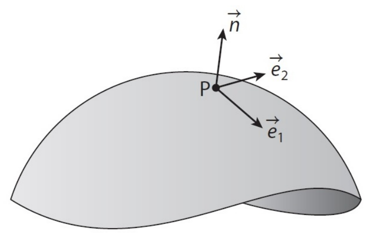
### V.1.4 Kovariantná derivácia.

V *zakrivenom* (časo)priestore je vektor v danom bode trajektórie definovateľný *len* v **tangenciálnom plochom priestore** - akomsi *lokálnom laboratóriu* - len tam sa vektory riadia obvyklou algebrou. Vektory definované v rôznych bodoch teda žijú v *rôznych* tangenciálnych priestoroch - polohový vektor a vektor *konečného* posunutia nemajú zmysel. Takéto lokálne laboratórium sa posúva po trajektórii, pričom každému bodu priraďujeme *vlastnú ortonormálnu* (štvor)vektorovú bázu $\vec{e}_\mu(x^\nu)$, v ktorej „žijú" experimentálne merateľné veličiny.

Zmeny *vektorov* pozdĺž (časo)priestorovej trajektórie - a teda aj ich derivácie - konštruujeme pomocou **paralelného posuvu** (obr. a). V *plochom* (časo)priestore sa paralelným posuvom smer vektora zachová, čo vidíme aj pri uzavretej trajektórii na 2D euklidovskej ploche (obr. b). Paralelným posuvom po uzavretej trajektórii na *guľovej ploche* (obr. c) sa však do východiskového bodu vektor vráti so *zmeneným* smerom.




Uvažujme *vnútorne* zakrivenú 2D plochu povrchu gule, vnorenú do 3D euklidovského priestoru.[7] Súradnice bodu P na tejto ploche v *jej* súradnicovej sústave sú $x^\mu$, $\mu = 1, 2$, kým v 3D súradniciach sú $X_j$, $j = 1, 2, 3$. Z pohľadu 3D súradníc definujme dvojicu bázových (3-zložkových) vektorov $\vec{e}_\mu = \frac{\partial X_j}{\partial x^\mu} = \partial_\mu X_j$ ležiacich v 2D zakrivenej ploche (resp. v rovine tangenciálnej k bodu P), určujúcich polohu každého bodu zakrivenej plochy. Keďže $dX_j = \frac{\partial X_j}{\partial x^\mu} dx^\mu = \vec{e}_\mu dx^\mu$, pre kvadrát vzdialenosti dvoch infinitezimálne blízkych bodov platí




$$ds^2 = dX_j^2 = \vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu \, dx^\mu dx^\nu \overset{!}{=} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

čiže pre metriku platí $g_{\mu\nu} = \vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu$. Posúvaním bodu P po zakrivenej ploche sa bázové vektory budú meniť ako

$$\partial_\nu \vec{e}_\mu = \frac{\partial \vec{e}_\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial X_j}{\partial x^\mu} = \partial_\nu \partial_\mu X_j$$

Takýto vektor obsahuje vo všeobecnosti okrem tangenciálnej aj zložku normálovú k povrchu, čo môžeme zapísať v tvare

$$\partial_\nu \vec{e}_\mu = \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \vec{e}_\sigma + K_{\mu\nu} \vec{n}$$

kde $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ (Christoffelove symboly) a $K_{\mu\nu}$ sú symetrické vzhľadom na $\mu\nu$. Definujme teraz na tejto ploche (resp. v tangenciálnej rovine, z pohľadu 3D súradníc) vektorové pole $\vec{v}(x) = v^\mu(x)\vec{e}_\mu(x)$. Keďže bázové vektory sa menia s posunom po zakrivenej ploche, odpovedajúca zmena vektorového poľa je

$$\partial_\nu \vec{v}(x) = [\partial_\nu v^\mu(x)]\vec{e}_\mu(x) + \vec{v}(x)\partial_\nu \vec{e}_\mu(x) = [\partial_\nu v^\mu(x)]\vec{e}_\mu(x) + v^\sigma(x)\Gamma^\mu_{\sigma\nu}\vec{e}_\mu + v^\mu(x) K_{\mu\nu}\vec{n}$$

Pre pozorovateľa, ktorého „životným priestorom" je zakrivená plocha, dimenzia kolmá na tento povrch (posledný člen) *neexistuje* - na zakrivenej ploche teda definuje **kovariantnú deriváciu** podľa *súradníc*[8]

$$D_\nu \vec{v} = [\underbrace{\partial_\nu v^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} v^\sigma}]\vec{e}_\mu = \underbrace{(D_\nu v^\mu)}\,\vec{e}_\mu \qquad \underline{D_\nu v^\mu = \partial_\nu v^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} v^\sigma}$$

[7]Táto 2D plocha je zjednodušením 4D časopriestoru.

[8]Index $\nu$ tu znamená derivačnú premennú $x^\nu$, *nie* index štvorvektorovej komponenty!

ako mieru zmeny vektorového poľa, zahrnujúcu krivosť plochy (resp. časopriestoru, po rozšírení úvahy na 4D). Prvá zložka - *tenzor*[9] $\partial_\nu v^\mu$ - je mierou zmeny vektorového poľa, kým druhá zložka zohľadňuje zmenu *metriky.*

Ak opäť parametrizujeme trajektóriu monotónne sa meniacou premennou $\xi$, teda $x^\mu = x^\mu(\xi)$, kovariantná derivácia (štvor)vektoru *podľa* $\xi$ nadobudne tvar[10]

$$D_\nu v^\mu \frac{dx^\nu}{d\xi} = \left(\partial_\nu v^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} v^\sigma\right) \frac{dx^\nu}{d\xi}$$

Ak stotožníme $\xi$ s vlastným časom $\tau$, potom $\frac{dx^\mu}{d\tau} = u^\mu$ je štvorvektor rýchlosti, a

$$u^\nu D_\nu v^\mu = u^\nu \left(\partial_\nu v^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} v^\sigma\right) = \underline{\frac{dv^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} u^\nu v^\sigma \overset{!}{=} D_u v^\mu} \qquad \left(\frac{dv^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\nu}{d\tau}\partial_\nu v^\mu = u^\nu \partial_\nu v^\mu\right)$$

Výraz $D_u v^\mu$ má teda význam *kovariantnej časovej derivácie vektoru* $v^\mu$ podľa *vlastného* času. Ak za vektor $v^\mu$ dosadíme samotné $u^\mu$, dostávame

$$D_u u^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} u^\nu u^\sigma$$

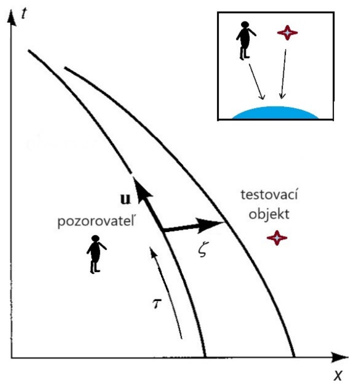
Výraz na pravej strane je ale podľa rovnice geodetiky (kap. V.1.3) *nulový.* Rovnicu geodetiky teda môžeme zapísať v tvare

$$\underline{D_u u^\mu = 0}$$

## V.1.5 Tenzory krivosti.

Pozorovanie zakrivenia (časo)priestoru je možné pomocou merania vzájomnej vzdialenosti (najmenej) dvoch voľne padajúcich objektov. Predpokladajme teda voľný pád pozorovateľa a testovacieho objektu pozdĺž svojich geodetík.

Nech okamžité súradnice pozorovateľa a (infinitezimálne) *blízkeho* pozorovaného objektu sú $x_j(t)$ a $x_j(t)+\zeta_j(t)$. V newtonovskej mechanike v gravitačnom poli s potenciálom $\phi$ (obr.) platí




$$\frac{d^2 x_j}{dt^2} = -\frac{\partial \phi(x_j)}{\partial x_j}$$

$$\frac{d^2(x_j+\zeta_j)}{dt^2} = -\frac{\partial \phi(x_j+\zeta_j)}{\partial x_j} \cong -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\phi(x_j) + \frac{\partial \phi(x_j)}{\partial x_k}\zeta_k + ...\right)$$

Odčítaním oboch rovníc dostávame pre časový vývoj vzájomnej vzdialenosti

$$\frac{d^2\zeta_j}{dt^2} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j x_k}\zeta_k$$

Tenzor $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j x_k}$ je mierou tzv. **slapovej sily** - *vzájomného* priťahovania[11] pozorovateľa a testovacieho objektu, a výraz $\frac{d^2\zeta_j}{dt^2}$ predstavuje *zrýchlenie* vektoru $\zeta_j$, odpovedajúce tejto slapovej sile.

[9]Podobne ako gradientom skaláru je vektor, gradientom vektoru musí byť tenzor, rozlišujúci smer zložiek vektoru od smeru derivovania.

[10]Využili sme pravidlo derivovania zloženej funkcie.

[11]Ak by $\zeta$ bola vzdialenosťou objektov *pozdĺž* pohybu (pádu), slapová sila by odpovedala ich *odpudzovaniu.* (Dôsledkom slapových síl je príliv-odliv morí.) V zmysle princípu ekvivalencie na *zrýchľujúce* teleso pôsobia rovnaké sily. Keďže pôsobenie sily sa pozdĺž telesa prenáša *konečnou* rýchlosťou (spravidla rýchlosťou zvuku), zrýchľujúce tuhé teleso sa roztrhne.

V *zakrivenom* (časo)priestore treba časové derivácie nahradiť *kovariantnými* deriváciami (podľa vlastného času, kap. V.1.4), $\frac{d^2\zeta_j}{dt^2} \to D_u D_u \zeta^\mu$, čo po dosadení a úpravách dá tvar

$$\underline{D_u D_u \zeta^\mu = -R^\mu_{\nu\sigma\rho} u^\nu \zeta^\sigma u^\rho} \qquad\qquad R^\mu_{\nu\sigma\rho} = \frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\rho}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\sigma}}{\partial x^\rho} + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \Gamma^\mu_{\rho\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma}$$

kde $R^\mu_{\nu\sigma\rho}$ je **Riemannov tenzor krivosti**, komplexne mapujúci krivosť časopriestoru.[12] Táto rovnica je relativistickým zovšeobecnením predchádzajúcej (newtonovskej) rovnice pre slapové sily. *Slapové sily sú teda prejavom zakrivenia časopriestoru.*

Alternatívnymi veličinami úspornejšie opisujúcimi krivosť časopriestoru (využijúc symetrie Riemannovho tenzoru) sú symetrický **Ricciho tenzor**[13]

$$\underline{R_{\nu\rho} = R^\sigma_{\nu\sigma\rho} = g^{\mu\sigma} R_{\mu\nu\sigma\rho}} \qquad\qquad R_{\nu\rho} = R_{\rho\nu}$$

**Ricciho skalár** (skalárna krivosť)[14]

$$\underline{R = R^\nu_\nu = g^{\nu\rho} R_{\nu\rho}}$$

a symetrický **Einsteinov tenzor**[15]

$$\underline{G_{\nu\rho} = R_{\nu\rho} - \frac{1}{2} g_{\nu\rho} R} \qquad\qquad G_{\nu\rho} = G_{\rho\nu}$$

Všetky uvedené formy kvantifikovania krivosti časopriestoru sú nástrojmi na opis časopriestorových trajektórií hmoty-energie. Pojem gravitačného poľa sa prevtelil do zakrivenosti časopriestoru. O *zdrojoch* tejto zakrivenosti pojednáva nasledujúca kapitola.

◇◇◇◇◇

## Dôležité závery:

• Podľa princípu ekvivalencie sústava v gravitačnom poli je lokálne ekvivalentná sústave so zrýchlením.

• Gravitačné pole spôsobuje zakrivenie časopriestoru. V silnejšom gravitačnom poli plynie čas pomalšie. Pozorovateľ zaznamená gravitačný červeny posuv signálov prichádzajúcich zo silnejšieho gravitačného poľa. Svetlo sa šíri rýchlosťou $c$ len lokálne. Prejavom zakrivenia priestoru sú slapové sily.

• V gravitačnom poli sa voľná častica pohybuje po geodetike.

• Časopriestorovú deriváciu štvorvektoru v zakrivenom časopriestore nahrádzame kovarianou deriváciou, zahrňujúcou aj časopriestorovú zmenu metriky. Zmenu metriky vyjadrujeme prostredníctvom Christoffelových symbolov.

• Zakrivenie časopriestoru kvantifikujeme (v závislosti od miery podrobnosti) Riemannovým tenzorom, Ricciho tenzorom, Ricciho skalárom a Einsteinovým tenzorom.

[12]Vďaka viacerým symetriám má tento tenzor 4×4×4×4 len 20 nezávislých komponent.

[13]Predstavme si sférický oblak voľne padajúcich častíc. Slapové sily splošťujú oblak v smere kolmom na pohyb a rozťahujú ho v smere pohybu. Objem oblaku sa pritom nemení. Ricciho tenzor opisuje tieto relatívne zmeny v rôznych smeroch.

[14]V Einsteinovej konvencii ide o *dvojitú* sumu, čiže *skalár*. Ricciho skalár vyjadruje akúsi spriemerovanú krivosť cez priestor aj čas.

[15]Einsteinov aj Ricciho tenzor majú vďaka symetriám len 10 nezávislých zložiek. Einsteinov tenzor obsahuje zložky úmerné $\Gamma^2 \sim (\partial g)^2$ a $\partial\Gamma \sim \partial^2 g$.

# V.2 Rovnice gravitačného poľa.

## V.2.1 Zdroje zakrivenia časopriestoru.

Pozorovaním Vesmíru vieme, že zdrojmi zakrivenia časopriestoru sú veľké hmotnosti, a teda veľké energie. Prirodzeným kandidátom na ich matematickú reprezentáciu je preto *tenzor energie-hybnosti-napätia* (kap. I.3.4 a Dodatok D). V *plochom* časopriestore špeciálnej relativity platia zákony zachovania

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$$

Najjednoduchším (kozmologicky relevantným) modelom rozloženia hmoty je *ideálna tekutina*[16] v pokoji s tenzorom $T^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(\rho c^2, P, P, P)$, kde $\rho$ a $P$ sú jej hustota a tlak. Tento diagonálny tenzor môžeme prepísať na tvar

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (c\ 0\ 0\ 0) - P\eta^{\mu\nu}$$

Kde stĺpcový/riadkový vektor predstavuje vektor štvorrýchlosti v pokojovej sústave hmoty. Vo všeobecnosti pre systém pohybujúci sa štvorrýchlosťou $u^\mu$ môžeme písať[17]

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) u^\mu u^\nu - \eta^{\mu\nu} P$$

Hustota energie a tlak však vo všeobecnosti nie sú nezávislé - súvis medzi nimi upravuje modelová *stavová rovnica* v tvare

$$P = w\rho c^2$$

kde $w$ je koeficient závislý od druhu energie. Rozlišujeme tri základné prípady:

Prípad $w = 0$, čiže $P = 0$, opisuje hmotný *„prach“* - hmotné časti *látky* - telesá. Náš modelový tenzor energie-hybnosti sa redukuje na tvar $T^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(\rho c^2, 0, 0, 0)$.

Iným typom energie je *žiarenie*. Pre *elektromagnetické* žiarenie má tenzor energie-hybnosti podľa teórie tvar $T^\mu_\nu = \varepsilon_0 c^2 [F^{\mu\rho} F_{\nu\rho} - \frac{1}{4}\delta^\mu_\nu F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}]$ ($F^{\mu\nu}$ je elektromagnetický tenzor, kap. III.3.3), čo je tenzor s *nulovou* stopou. Na základe toho požadujeme nulovú stopu aj pre náš modelový tenzor $T^\mu_\nu = T^{\mu\rho}\eta_{\rho\nu} = \mathrm{diag}(\rho c^2, -P, -P, -P)$ pre prípad žiarenia, čo vedie na $\rho c^2 = 3P$, a teda $w = \frac{1}{3}$ pre žiarenie.

Špeciálnym je prípad $w = -1$, čiže $P = -\rho c^2$ a $T^\mu_\nu = \rho c^2 \delta^\mu_\nu$. Týmto členom modelujeme energiu *vákua* - tzv. **temnú energiu**[18] - o objemovej hustote (konvenčne vyjadrenej ako)

$$\rho_{vac} c^2 = \frac{c^4 \Lambda}{8\pi\kappa_N} \qquad T^{\mu\nu}_{vac} = \rho_{vac} c^2 \eta^{\mu\nu} = \frac{c^4\Lambda}{8\pi\kappa_N}\eta^{\mu\nu}$$

kde $\Lambda$ je tzv. **kozmologická konštanta** (s rozmerom $\mathrm{m}^{-2}$). Podľa súčasných predstáv zostáva táto hustota *koštantnou* (pozostáva s konštánt) aj pri rozpínaní Vesmíru (na rozdiel od hustoty látky). Fyzikálny význam kozmologickej konštanty podrobnejšie rozoberieme v kap. V.3.2.[19] Výraz $P_{vac} = -\rho_{vac} c^2$ interpretujeme ako *záporný* tlak. Ako uvidíme neskôr, tento záporný tlak je zdrojom *gravitačného odpudzovania* (rozpínania Vesmíru).

[16] Atribútmi ideálnej tekutiny sú ideálna tepelná vodivosť a zanedbateľná viskozita/dissipácia.

[17] Otázkou referenčnej sústavy, vzhľadom na ktorú túto rýchlosť určujeme, sa budeme zaoberať v kap. V.3.1.

[18] angl. *dark energy*

[19] Fyzikálna *podstata* temnej energie je však v súčasnosti nevyjasnená.

Prechod ku metrike *zakriveného* časopristoru znamená nielen $\eta^{\mu\nu} \to g^{\mu\nu}$, ale aj prechod ku kovariantným deriváciám. Vyššie uvedené zákony zachovania prejdú na tvar

$$\underline{D_\nu T^{\mu\nu} = 0}$$

### V.2.2 Einsteinova rovnica.

Pri hľadaní súvisu tenzoru energie-hybnosti, ako zdroja časopriestorového zakrivenia, s tenzormi opisujúcimi toto zakrivenie (kap. V.1.5) vychádzame zo zákonov zachovania $D_\nu T^{\mu\nu} = 0$. Dá sa ukázať, že práve Einsteinov tenzor $G^{\mu\nu}$ (kap. V.1.5) spĺňa pre *ľubovoľnú* metriku tzv. **Bianchiho identitu**

$$D_\nu G^{\mu\nu} = D_\nu \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = 0$$

Je teda namieste formulovať tzv. **Einsteinovu rovnicu** (ER) v tvare

$$\underline{\underline{G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \frac{8\pi\kappa_N}{c^4} \left(T^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}_{vac}\right)}} \qquad \text{resp.}^{20} \qquad \underline{\underline{R^\mu_\sigma - \frac{1}{2} g^\mu_\sigma R - \Lambda g^\mu_\sigma = \frac{8\pi\kappa_N}{c^4} T^\mu_\sigma}}$$

ER je *fundamentálnou* rovnicou fyziky, a ako taká je *postulovaná.* Koeficient úmernosti na pravej strane je zvolený tak, aby zabezpečil správnu newtonovskú limitu. Energia vákua, čiže pridanie kozmologickej konštanty $\Lambda$, pritom nemá vplyv na zákony zachovania,[21] a je tiež vecou postulovania. ER predstavuje 10 *ne*lineárnych diferenciálnych rovníc pre metriku $g_{\mu\nu}$ ako *pole*, tieto rovnice však nie sú nezávislé - sú zviazané 4 Bianchiho identitami. Ostáva teda 6 nezávislých rovníc.

Ak v ER položíme $\sigma = \mu$, dostávame[22]

$$R - \frac{4}{2} R + 4\Lambda = \frac{8\pi\kappa_N}{c^4} T \quad \Rightarrow \quad R = 4\Lambda - \frac{8\pi\kappa_N}{c^4} T \qquad\qquad T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = T^\mu_\mu$$

a po dosadení $R$ do pôvodného tvaru ER jej alternatívny tvar

$$\underline{\underline{R^{\mu\nu} = \frac{8\pi\kappa_N}{c^4} \left( T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} T \right) + g^{\mu\nu} \Lambda}}$$

V *prázdnom priestore*, teda pri absencii zdrojov zakrivenia, $T_{\mu\nu} = 0$, $\Lambda \to 0$, má ER tvar

$$\underline{\underline{R_{\mu\nu} = 0}}$$

K ER sa dopracujeme aj spôsobom obvyklým z predchádzajúcich častí textu - zo správne zostaveného lagrangiánu a princípu extremálneho účinku (resp. z ELR). Lagrangián zakriveného časopriestoru za prítomnosti zdrojov zakrivenia musí pozostávať zo skaláru opisujúceho zakrivenie - Ricciho skaláru $R$, lagrangiánu hmoty $\mathcal{L}_m$ a kozmologickej konštanty $\Lambda$, a jeho integrál - účinok - musí obsahovať invariantný časopriestorový element $d^4x\sqrt{\mathfrak{g}}$ (kap. V.1.2). Tzv. **Einsteinov-Hilbertov účinok** má tvar

$$S = \int \left[ \frac{c^4}{16\pi\kappa_N} (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_m \right] \sqrt{\mathfrak{g}} d^4x$$

Po určitej námahe, a s využitím definičného vzťahu pre $T^{\mu\nu}$ pri danom $\mathcal{L}_m$ (kap. I.3.4), dostaneme napokon ER. Princíp extremálneho (minimálneho) účinku nám v tomto prípade napovedá, že

*priestor a pohyb hmoty v ňom sa vyvíja v čase tak, aby sa minimalizovalo jeho zakrivenie.*[23]

---

[20] po vynásobení $g_{\nu\sigma}$

[21] Pre metriku platí $D_\nu g^{\mu\nu} = 0$.

[22] Výrazy $X^\mu_\mu$ v Einsteinovej konvencii znamenajú *stopu* tenzoru - skalár. Navyše $g^\mu_\mu = \delta^\mu_\mu$ =Tr(diag[1,1,1,1])=4.

[23] Analogicky ako v špeciálnej relativite sa hmota pohybuje tak aby minimalizovala svoje „stárnutie“.

### V.2.3 Linearizovaná Einsteinova rovnica.

ER môžeme *linearizovať* v prípade *malej* poruchy *plochej* metriky časopriestoru

$$g_{\mu\nu}(x^\sigma) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x^\sigma) \qquad\qquad |h_{\mu\nu}(x^\sigma)| \ll 1$$

Ricciho tenzor a skalár v *lineárnom* priblížení poruchy (členy kvadratické v $\Gamma$ zanedbávame, a pre samotné $\eta_{\mu\nu}$ je $R_{\mu\nu} = 0$) a po dosadení metriky majú tvar

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^\sigma_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \Gamma^\sigma_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} = ... = \frac{1}{2}\left(\Box h_{\mu\nu} + \Omega_{\mu\nu}\right) \qquad\qquad R = \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} + \Box h$$

kde[24] $\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = \partial_\mu\partial^\mu$ je d'Alembertov (vlnový) operátor, a

$$\Omega_{\mu\nu} = \partial_\mu\partial_\sigma h^\sigma_\mu + \partial_\nu\partial_\sigma h^\sigma_\nu - \partial_\nu\partial_\mu h \qquad\qquad (\, h^\sigma_\mu = \eta^{\sigma\nu} h_{\nu\mu}\, ,\; h^\mu_\mu = h\,)$$

ER s takýmito členmi je už *lineárnou* diferenciálnou rovnicou pre poruchu metriky $h$. Navyše, člena $\Omega_{\mu\nu}$ vo výraze pre $R_{\mu\nu}$ sa môžeme zbaviť vhodnou *kalibráciou*[25] - *malou* transformáciou súradníc $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$ tak aby

$$\underline{h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h \eta_{\mu\nu}} \qquad \text{a} \qquad \underline{\partial^\mu h'_{\mu\nu} = 0}$$

V tejto - tzv. **lorenzovskej kalibrácii** nadobudne linearizovaná ER tvar[26]

$$\underline{\Box h'_{\mu\nu} = 2R_{\mu\nu} = \frac{16\pi\kappa_N}{c^4} T_{\mu\nu}}$$

a je analógiou *ne*homogénnej MXR pri *lorenzovskej* kalibrácii[27] (kap. I.3.1)

$$\Box A_\mu = \mu_0 j_\mu \qquad\qquad \partial_\mu A^\mu = 0$$

### V.2.4 Gravitačné vlny.

Hmota-energia zakrivuje časopriestor, a *pohyb* hmoty-energie spôsobuje *pohyb zakrivenia* časopriestoru. Predpokladajme opäť *malé* zakrivenie ako *poruchu plochého* časopriestoru

$$g_{\mu\nu}(x^\sigma) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x^\sigma) \qquad\qquad |h_{\mu\nu}(x^\sigma)| \ll 1$$

V lorenzovskej kalibrácii nadobudne linearizovaná ER *vo vákuu* (v neprítomnosti hmoty) tvar

$$\underline{R_{\mu\nu} = \Box h'_{\mu\nu} = 0}$$

[24]V tomto lineárnom priblížení zvyšujeme/znižujeme indexy pomocou Minkowského metriky.

[25]Počet rovníc (10) totiž nepostačuje na úplné určenie všetkých zložiek $h_{\mu\nu}$, máme teda kalibračnú voľnosť, ktorá nám umožňuje zjednodušiť úlohu. Inak povedané, metrika nemá význam *sama osebe*, ale len v kontexte daného súradnicového systému - pasívnou transformáciou súradníc teda meníme metriku, pri zachovaní kovariantnosti fyzikálnych zákonov. Pre malé $\xi$ platí

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \cong \delta^\mu_\nu + \partial_\nu \xi^\mu \qquad \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \cong \delta^\mu_\nu - \partial_\nu \xi^\mu \qquad g'_{\mu\nu} \cong g_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu \qquad h'_{\mu\nu} \cong h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu$$

[26]Linearizácia ER je podmienená dostatočne malými hodnotami $T_{\mu\nu}$.

[27]Preto sa aj uvedená kalibrácia pre metriku nazýva *lorenzovskou.*

Táto homogénna *vlnová* rovnica pre metriku (ako *pole*) je analógiou *homogénnej* MXR pre elektromagnetické pole $A^\mu$ pri lorenzovskej kalibrácii

$$\Box A^\mu = \partial_\nu \partial^\nu A^\mu = 0$$

Jej riešeniami sú teda *vlny zakrivenia metriky* - **gravitačné vlny** - šíriace sa *plochým* časopriestorom ako superpozícia harmonických rovinných vĺn

$$h'_{\mu\nu}(x^\sigma) = \epsilon_{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma}$$

kde $\epsilon_{\mu\nu}$ je *symetrický* **tenzor polarizácie** vlny. Dosadením do linearizovanej homogénnej ER dostávame

$$k_\sigma k^\sigma \epsilon_{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - (\vec{k})^2 = 0}$$

čo znamená, že *gravitačné vlny sa šíria rýchlosťou c*. Súčasne lorenzovská kalibrácia $\partial^\mu h'_{\mu\nu} = 0$ vedie na

$$k^\mu \epsilon_{\mu\nu} = 0$$

čo odpovedá *priečnej polarizácii.* Z 10 nezávislých prvkov symetrickej $(4 \times 4)$ matice $\epsilon_{\mu\nu}$ táto podmienka fixuje 4. Dá sa ukázať, že dodatočnou transformáciou súradníc (pri dodržaní lorentzovskej podmienky) môžeme dosiahnúť

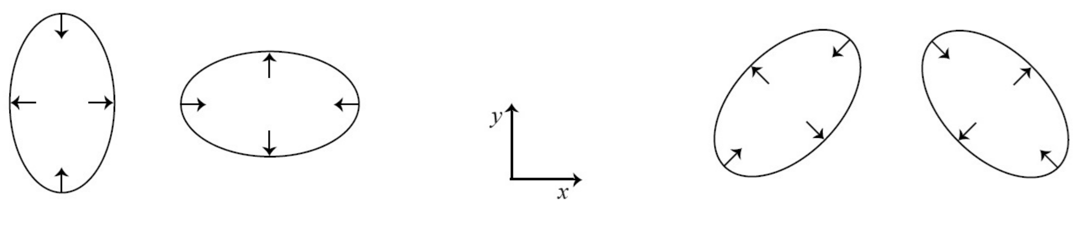
$$\epsilon^\mu_\mu = 0 \qquad \text{a súčasne} \qquad \epsilon_{0\mu} = \epsilon_{\mu 0} = 0$$

čím fixujeme ďalšie 4 stupne voľnosti. Ostávajú teda *dva nezávislé polarizačné stupne voľnosti.*

Predpokladajme (pre ilustráciu) vlnu postupujúcu v smere osi $z$, $k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, 0, 0, \frac{\omega}{c}\right)$, čo dodatočne znamená $\epsilon_{3\mu} = \epsilon_{\mu 3} = 0$, a dve nezávislé priečne polarizované vlny s amplitúdami $h_+$, $h_\times$ potom sú

$$h'^{\mu\nu}_+(z,t) = h_+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{i\omega(z-ct)/c} \qquad h'^{\mu\nu}_\times(z,t) = h_\times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{i\omega(z-ct)/c}$$

Účinok slapových síl takýchto vĺn na sférický „testovací hmotný oblak“ by sa prejavil v jeho *priečnom* deformovaní do elipsoidu, a to v smeroch $x, y$ pre vlnu $h_+$ a v diagonálnych smeroch pre vlnu $h_\times$, *bez zmeny* v pozdĺžnom smere osi $z$ (obr.).




Z charakteru polarizácie gravitačnej vlny (a porovnania s elektromagnetickou vlnou) môžeme vydedukovať jej *zdroje*: Kým na generovanie *elektromagnetickej* vlny (vektoru) postačuje *oscilujúci dipólový moment* (vektor), na generovanie *gravitačnej* vlny (tenzoru) je potrebný *oscilujúci kvadrupólový moment* (tenzor).[28]

[28]Takým je napr. „činka“ rotujúca okolo inej než pozdĺžnej osi. Rotujúca *sféricky symetrická* hmota gravitačné vlny *ne*vyžaruje (zákon zachovania momentu hybnosti). Taktiež nevyžaruje hmota v rovnomernom pohybe (zákon zachovania hybnosti).

### V.2.5 Spin 2.

Z predchádajúceho textu vidíme, že gravitačné pole je reprezentované tenzorom krivosti 4×4. Lorentzovská transformácia generického tenzoru $X^{\mu\nu}$ je

$$X^{\mu\nu} \to \Lambda^\mu_\sigma \Lambda^\nu_\rho X^{\sigma\rho}$$

Táto 16-zložková reprezentácia je však *reducibilná*: Ľubovoľný tenzor môžeme rozložiť na symetrický a antisymetrický tenzor na základe identity

$$X^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(X^{\mu\nu} + X^{\nu\mu}\right) + \frac{1}{2}\left(X^{\mu\nu} - X^{\nu\mu}\right) = \mathcal{S}^{\mu\nu} + \mathcal{A}^{\mu\nu}$$

pričom symetrickosť/antisymetrickosť sa pri lorentzovskej transformácii *zachováva*. (Znamená to, že zložky $\mathcal{S}^{\mu\nu}$ a $\mathcal{A}^{\mu\nu}$ sa medzi sebou *ne*miešajú.) Rovnako sa pri lorentzovskej transformácii zachováva stopa (symetrického) tenzoru $\mathcal{S} = \eta_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu}$, čiže pôvodná 16-rozmerná reprezentácia sa redukuje na 9-rozmernú (symetrickú s nulovou stopou), 6-rozmernú (antisymetrickú) a 1-rozmernú (stopu),

$$4 \otimes 4 = 9 \oplus 6 \oplus 1$$

Keďže tenzor energie-hybnosti $T^{\mu\nu}$ je symetrický, podľa ER musia byť symetrickými aj tenzory zakrivenia, pracujeme teda v 9-rozmernej reprezentácii.[29] Podľa kap. II.4.3 tomu odpovedá

$$9 = (2j^+ + 1)(2j^- + 1) \qquad\qquad j = j^+ + j^- = 1 + 1 = 2$$

čiže spin 2. V podgrupe čisto priestorových rotácií sa táto reprezentácia opäť redukuje na

$$3 \otimes 3 = 5 \oplus 3 \oplus 1$$

kde 5-rozmerná reprezentácia odpovedá práve hodnote $j = 2$ (5 možných priemetov spinu).

Tak ako v prípade nehmotného vektorového poľa (spin 1) je identitou priestorová rotácia o 360° a uhol medzi dvoma priečnymi polarizáciami 90°, v prípade gravitačného poľa (spin 2) je identitou priestorová rotácia o 180° a uhol medzi dvoma priečnymi polarizáciami 45° (kap. V.2.4).

### V.2.6 Energia gravitačnej vlny.

V newtonovskej fyzike definujeme hustotu energie gravitačného poľa

$$w_g = -\frac{1}{8\pi\kappa_N}(\nabla\phi(\vec{r})^2) = -\frac{1}{8\pi\kappa_N}\rho^2(\vec{r})$$

(záporné znamienko svedčí o príťažlivej sile). V zmysle princípu ekvivalencie vo všeobecnej relativite však voľbou *lokálnej inerciálnej sústavy* (lokálne plochý časopriestor vo voľne padajúcej kabine) dokážeme gravitačné pole *eliminovať* ($\nabla\phi(\vec{r})$ odpovedá lokálnemu zakriveniu časopriestoru). Koncept lokálnej hustoty gravitačnej energie teda stráca zmysel.[30] Voľné hmotné objekty sa pohybujú po geodetikách daných zakrivením časopriestoru, súčasne však časopriestor zakrivujú (podľa ER). Gravitačný potenciál je teda len *ne*relativistickou aproximáciou - pre veľké alebo rýchlo sa pohybujúce

[29] Antisymetrickými sú napr. tenzor lorentzovských rotácií $J^{\mu\nu}$ z kap. II.4.2 alebo tenzor elektromagnetického poľa $F^{\mu\nu}$ z kap. III.3.3.

[30] Konštantná energia je dôsledkom symetrie Minkowského časopriestoru voči časovej translácii, a to pri meniacej sa metrike zakriveného časopriestoru neplatí.

hmotnosti ho nevieme dobre definovať. Zakrivenie časopriestoru generované hmotnosťou sa pohybuje spolu s ňou.

Napriek tomu však môžeme gravitačnej vlne v *konečnom objeme* (dostatočne veľkom vzhľadom na relevantné vlnové dĺžky) prostredníctvom ER priradiť tenzor energie-hybnosti[31] *spriemerovaním* zakrivenia v tomto objeme,

$$t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{8\pi\kappa_N}\left(\langle R_{\mu\nu}\rangle - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\langle R\rangle\right)$$

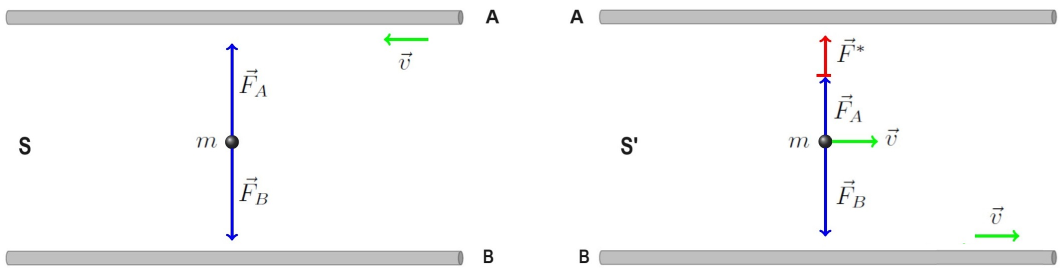
Ricciho tenzor a skalár vypočítame dosadením linearizovaných vlnových riešení $h_+^{\prime\mu\nu}(z,t)$ a $h_\times^{\prime\mu\nu}(z,t)$ z kap. V.2.4 do narušenej plochej metriky $g_{\mu\nu}(x^\sigma) = \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}(x^\sigma)$, a pre hustotu energie vlny dostaneme potom výraz[32]

$$w_g = t_{00} = \frac{c^4}{16\pi\kappa_N}\langle(\partial_0 h'_+)^2 + (\partial_0 h'_\times)^2\rangle = ... \sim \frac{c^2}{\kappa_N}\langle\partial_t h'_{jk}\partial_t h'_{jk}\rangle$$

Opäť vidíme analógiu s elektromagnetickou vlnou s hustotou energie $w_{em} = \varepsilon_0|E|^2 = \varepsilon_0|\partial_t A|^2$ vo vákuu ($|E| = c|B|$). Veľkosť *toku* energie elektromagnetickej vlny (daného *Poyntingovým vektorom*) je $cw_{em} = c\varepsilon_0|\partial_t A|^2$, a analogicky tok energie gravitačnej vlny je $\sim \frac{c^3}{\kappa_N}\langle\partial_t h'_{jk}\partial_t h'_{jk}\rangle$. Obrovská hodnota $\frac{c^3}{\kappa_N} \approx 10^{35}\mathrm{Js/m^2}$ napovedá, že na nepatrné zakrivenie časopriestoru je potrebná gigantická hodnota toku energie.[33]

### V.2.7 Gravitomagnetizmus.

Analógie medzi linearizovanými rovnicami gravitačného a elektromagnetického poľa majú svoj pôvod v požiadavke lorentzovskej kovariantnosti v priblížení *plochého* časopriestoru. Preskúmajme ju hlbšie na príklade dvoch paralelných (nekonečne) dlhých homogénnych hmotných tyčí A,B s (pokojovými) dĺžkovými hustotami $\bar{\rho}_A$, $\bar{\rho}_B$ vo vzájomnom pozdĺžnom pohybe konštantnou rýchlosťou $\vec{v}$, a testovacieho objektu hmotnosti $m$, umiestneného symetricky medzi tyčami a v kľude voči tyči B (obr.). Predpokladajme, že gravitačné pôsobenie oboch tyčí na testovací objekt je *vzájomne vykompenzované.*




V sústave S (spojenej s tyčou B a testovacím objektom) rovnováha síl $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$ znamená $\bar{\rho}_B = \gamma\bar{\rho}_A$ ($\gamma > 1$), kvôli relativistickej kontrakcii dĺžky pohybujúcej sa tyče A. (*Pokojová* hustota tyče A teda musí byť $\gamma$-krát *menšia* oproti tyči B.) V sústave S' spojenej s tyčou A potom platí

$$F_A \sim \bar{\rho}_A = \frac{\bar{\rho}_B}{\gamma} \qquad F_B \sim \gamma\bar{\rho}_B = \gamma^2\bar{\rho}_A \qquad \Rightarrow \qquad F_B \neq F_A$$

[31] V nerelativistickej fyzike hovoríme, že *gravitačné pole koná prácu.*
[32] Sčítavame cez opakujúce sa indexy.
[33] To je príčinou extrémnej vzácnosti pozorovania gravitačných vĺn.

Rovnováha síl teda musí byť „zabezpečená“ dodatočnou silou $\vec{F}^*$ závislou od rýchlosti $\vec{v}$. Kvôli analógii s elektromagnetizmom[34] túto silu nazývame **gravitomagnetickou**. Gravitačná sila má teda dva zdroje - **gravitoelektrické pole** o intenzite $\vec{E}_g = \vec{g}$ („štandardné“ pole newtonovskej gravitácie) generované hmotnosťou, a **gravitomagnetické pole** $B_g$ generované *pohybujúcou sa* hmotnosťou (ako analóg magnetickej indukcie $\vec{B}$).[35]

Kombinovaním lorentzovských vzťahov pre transformácie síl a rýchlostí vieme celkovú gravitačnú silu pôsobiacu na objekt o hmotnosti $m$, pohybujúci sa (v danej referenčnej sústave) rýchlosťou $\vec{u}$ v gravitačnom poli tvorenom hmotou *pohybujúcou sa* rýchlosťou $\vec{v}$, vyjadriť v lorentzovskom tvare

$$\underline{\vec{F} = m(\vec{E}_g + \vec{u} \times 4\vec{B}_g)} \qquad \vec{B}_g = \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}_g \qquad \vec{E}_g = \vec{g} = \frac{\vec{F}_{Newton}}{m}$$

kde faktor 4 je korekcia na malé zakrivenie časopriestoru, ktoré špeciálna relativita nezahrňuje.[36] Lorentzovským *boostom* gravitačného poľa tvoreného *statickým* rozložením hmoty, spĺňajúcim rovnice

$$\nabla \cdot \vec{E}_g = -4\pi\kappa_N \rho \qquad \nabla \times \vec{E}_g = 0 \qquad \partial_t \vec{E}_g = 0$$

dostávame rovnice pre gravitačné pole tvorené hmotou pohybujúcou sa rýchlosťou $\vec{v}$ - tzv. **gravitačné MXR**

$$\underline{\nabla \cdot \vec{E}_g = -4\pi\kappa_N \rho} \qquad \underline{\nabla \cdot \vec{B}_g = 0} \qquad \underline{\nabla \times \vec{E}_g = -\partial_t \vec{B}_g}$$

$$\underline{\nabla \times \vec{B}_g = -\frac{4\pi\kappa_N}{c^2}\vec{j} + \frac{1}{c^2}\partial_t \vec{E}_g} \qquad \text{kde} \quad \vec{j} = \rho\vec{v}$$

Od rovníc elektromagnetického poľa sa líšia len[37] *záporným* znamienkom pred zdrojmi $\rho, \vec{j}$, čo odzrkadľuje vzájomné *priťahovanie* hmotností (na rozdiel od *odpudzovania* nábojov rovnakej polarity). Prostredníctvom vektorov $\vec{E}_g, \vec{B}_g$ môžeme zostrojiť tenzor $F_g^{\mu\nu}$ analogický $F^{\mu\nu}$ z kap. III.3.3 a štvorvektor $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$, a nehomogénne gravitačné MXR vyjadriť v tvare

$$\partial_\mu F_g^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c^2} j^\nu \qquad (\text{ analogicky ako } \partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \text{ pre elektromagnetické pole})$$

Rovnako ako v elektromagnetickom prípade, kombináciou MXR dostávame vlnové rovnice

$$\Box \vec{E}_g = -4\kappa_N \left( \nabla\rho + \frac{1}{c^2}\partial_t \vec{j} \right) \qquad \Box \vec{B}_g = \frac{4\kappa_N}{c^2} \left( \nabla \times \vec{j} \right)$$

čo pri absencii zdrojov $\rho, \vec{j}$ vedie na *homogénne* rovnice s riešeniami v tvare gravitačných vĺn s gravitačným Poyntingovým vektorom, hustotou energie vlny a zákonom zachovania *celkovej* energie hmoty a poľa/vlny[38]

$$\vec{\mathcal{S}}_g = -\frac{c^2}{4\pi\kappa_N}(\vec{E}_g \times \vec{B}_g) \qquad w_g = -\frac{1}{8\pi\kappa_N}(E_g^2 + c^2 B_g^2) \qquad \partial_t w_g + \nabla \cdot \vec{\mathcal{S}}_g = -\vec{E}_g \cdot \vec{j}$$

Rovnica kontinuity pre *hybnosť* vlny je zákonom zachovania *celkovej* hybnosti hmoty *a* poľa/vlny

$$\partial_t \left( \frac{\vec{\mathcal{S}}_g}{c^2} \right) + \nabla \cdot \mathcal{M} = -(\rho\vec{E}_g + \vec{j} \times \vec{B}_g) \qquad \mathcal{M} = -\frac{1}{8\pi\kappa_G} \left[ (E_g^2 + c^2 B_g^2)\mathbb{1} - 2(\vec{E}_g \otimes \vec{E}_g + c^2 \vec{B}_g \otimes \vec{B}_g) \right]$$

[34] Analogicky v prípade *elektricky* nabitých tyčí a testovacieho náboja odvodzujeme magnetickú Lorentzovu silu ako relativistický efekt elektrickej sily.

[35] Jedným z dôsledkov gravitomagnetizmu je *absencia* vzájomného priťahovania *paralelných* svetelných lúčov - gravitomagnetická sila (pri rýchlosti $c$) *presne* kompenzuje vzájomné (gravitoelektrické) priťahovanie energie. Naopak, dráhy *anti*paralelných lúčov sa navzájom ovplyvňujú.

[36] Tieto vzťahy sa dajú odvodiť z linearizovanej ER v príslusnej limite a kalibrácii.

[37] Táto zhoda napovedá, že tvar MXR je daný *výlučne* lorentzovskou kovariantnosťou vektorových polí, resp. platnosťou rovnice kontinuity pre $\rho$ a $\vec{j}$.

[38] Záporné znamienka na pravých stranách odrážajú gravitačné *priťahovanie* a požiadavku *nulovej* potenciálnej energie v nekonečnej vzdialenosti od zdrojov. Voľne padajúce teleso ju *stráca* v prospech energie kinetickej.

kde[39] $\mathcal{M}$ je 3×3 Maxwellov tenzor napätia *poľa* (vlny) - jeho zložky sú $t^{jk}$-zložkami tenzoru energie-hybnosti *poľa*

$$t^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} w_g & \vec{\mathcal{S}}_g/c \\ \vec{\mathcal{S}}_g/c & \mathcal{M} \end{pmatrix}$$

V tenzorovom zápise tieto rovnice kontinuity nadobudnú tvar

$$\partial_\nu t^{\mu\nu} = -j_\nu F_g^{\mu\nu}$$

kde pravú stranu interpretujeme ako *interakciu* gravitačného poľa s hmotou. Súhrnne sa teda zachováva *celková* energia-hybnosť *poľa* ($t^{\mu\nu}$) *a hmoty* ($T^{\mu\nu}$),

$$\partial_\mu \left( t^{\mu\nu} + T^{\mu\nu} \right) = 0$$

Na záver treba znovu pripomenúť, že maxwellovská limita je limitou *plochého* časopriestoru. Všeobecná teória relativity premieta energiu gravitačného poľa/vlny do *zakrivenia* časopriestoru, a silovú interakciu s hmotou do voľného pohybu hmoty po geodetikách. V tomto zmysle *ne*dochádza k transféru energie-hybnosti medzi poľom a hmotou - gravitačná sila *neexistuje*, a teda $t^{\mu\nu} = 0$. Môžeme to interpretovať tak, že energia-hybnosť poľa/vlny $t^{\mu\nu} = 0$, vystupujúca v scenári s plochým časopriestorom, sa spotrebuje na jeho zakrivenie.

### V.2.8 Newtonovská limita.

Newtonovskú limitu Einsteinovej rovnice dostaneme ak obe jej strany - tenzor krivosti i tenzor energie - vyjadríme v limite *malých rýchlostí a hustôt energie*. Predpokladajme teda, že metrika časopriestoru sa len málo líši od Minkowského metriky, a *ne*závisí od času

$$g_{\mu\nu}(\vec{r}) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(\vec{r}) \qquad\qquad |h_{\mu\nu}(\vec{r})| \ll 1$$

Potom

$$ds^2 = (cd\tau)^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{ds}{cdt}\right)^2 = \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = [\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(\vec{r})]\frac{dx^\mu}{cdt}\frac{dx^\nu}{cdt}$$

a v limite $v/c \to 0$ len zložky $\mu = \nu = 0$ dávajú nezanedbateľný príspevok ($dx^0 = cdt$), a teda

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 \cong 1 + h_{00}(\vec{r})$$

Tomu odpovedá práve newtonovská metrika diag($1+\frac{2\phi}{c^2}$,-1,-1,-1) z kap. V.1.2 s $h_{00} = \frac{2\phi}{c^2}$. Dosadením do výrazov kvantifikujúcich krivosť dostávame

nenulové Christoffelove symboly $\qquad \Gamma^j_{00} = ... = \frac{\partial_j \phi}{c^2}$

rovnicu geodetiky ($dt \cong d\tau$, $u^0 = c$) $\qquad \frac{d^2x_j}{dt^2} = -\partial_j\phi \qquad$ (čo je Newtonova pohybová rovnica)

Ricciho tenzor $\qquad R_{00} = ... = \frac{1}{c^2}\nabla^2\phi$

Einsteinov tenzor $\qquad G_{00} = ... = \frac{2}{c^2}\nabla^2\phi$

Tenzor energie pre hmotu *v pokoji* je daný výlučne pokojovou hmotnosťou, čiže $T_{00} = \rho c^2$, a Einsteinova rovnica nadobudne správny newtonovský tvar

$$\nabla^2\phi(\vec{r}) = 4\pi\kappa_N\rho(\vec{r})$$

[39]Využili sme tenzorovú identitu $(\nabla \cdot \vec{a})\vec{a} + (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{a} = \nabla \cdot (\vec{a} \otimes \vec{a})$.

⋄ ⋄ ⋄ ⋄ ⋄

## Dôležité závery:

• Fundamentálnou rovnicou všeobecnej relativity je Einsteinova rovnica (ER). Podľa nej hmota/energia zakrivuje časopriestor, a zakrivenie časopriestoru určuje *pohyb* hmoty/energie. Priestor a pohyb hmoty v ňom sa v čase vyvíjajú tak, aby sa minimalizovalo jeho zakrivenie.

• Pre malé zdroje zakrivenia sa ER dá linearizovať do podoby vlnovej rovnice pre *poruchu* plochej metriky ako *pole*, v analógii s elektromagnetickým poľom. Jej riešením sú gravitačné vlny - vlny zakrivenia metriky, šíriace sa rýchlosťou $c$.

• Gravitačná vlna je *priečne* polarizovaná, s dvoma nezávislými polarizáciami, navzájom pootočenými o 45°. Takejto rotačnej priestorovej symetrii (identitou je pootočenie o 180°) odpovedá spin 2.

• Klasický koncept gravitačného poľa nahrádzame zakriveným časopriestorom, ktorému energiu nepriraďujeme. Lokálne však môžeme hovoriť o energii gravitačnej vlny, resp. práci ňou konanej.

• *Pohyb* hmoty/energie má dodatočný gravitačný účinok - gravitomagnetizmus, analogicky magnetizmu (ako silovému účinku pohybujúceho sa náboja). V lineárnom priblížení pre gravitoelektrické (t.j. „štandardné“ gravitačné) a gravitomagnetické pole platia Maxwellove rovnice analogické elektromagnetickým.

# V.3 Expandujúci Vesmír.

## V.3.1 Metrika expandujúceho časopriestoru.

Táto časť textu je venovaná fyzike Vesmíru ako celku, na priestorových škálach rádovo prevyšujúcich rozmery vesmírnych telies či galaxií. Pozorovania Vesmíru nás vedú k postulovaniu tzv. **kozmologického princípu**:

*Na kozmických škálach je Vesmír homogénny a izotropný - všetky miesta a smery sú rovnocenné.*

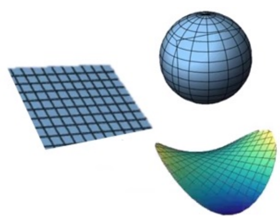
Pozorujeme však jeho *časový vývoj* - priestorovú *expanziu*[40] každého rozmeru s daným bázovým vektorom $\vec{e}_j \to \alpha(t)\vec{e}_j$, a to s rýchlosťou danou empirickým **Hubbleovým zákonom**

$$v = Hr = \frac{\dot{\alpha}(t)}{\alpha(t)} r$$

kde $v$ je rýchlosť vzďaľovania sa vesmírneho objektu v radiálnej vzdialenosti $r$ (od pozorovateľa v ľubovoľnom mieste Vesmíru), a $H$ je tzv. **Hubbleov parameter (konštanta)**.

[40]Expanziou Vesmíru rozumieme zväčšovanie vzdialeností medzi hmotnými objektami pri zachovaní veľkosti týchto objektov (v dôsledku síl ich súdržnosti) . Ak by sa totiž meradlá vzdialenosti zväčšovali súčasne s expanziou Vesmíru, žiadnu expanziu by sme nepozorovali!

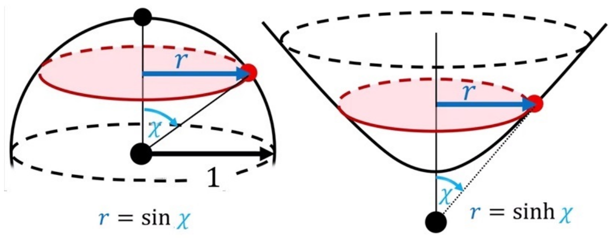
Požiadavke priestorovej homogenity a izotropnosti, čiže rovnoprávnosti všetkých bodov na (jednoducho súvislej) ploche (bez „dier“) vyhovujú tri triedy zakrivených plôch (obr.) - *plochá*, *sférická* (kladná krivosť) a *hyperbolická* (záporná krivosť). Bod v plochom 3D priestore je parametrizovaný sférickými súradnicami $\chi, \theta, \varphi$ ($\chi$ vo význame tradičného $r$). Zakrivené 3D priestory odpovedajú zakriveným 3-plochám vnoreným v 4D, a bod na takejto 3-ploche je určený obdobnou trojicou premenných. Priestorové časti jednotlivých metrík sú[41]



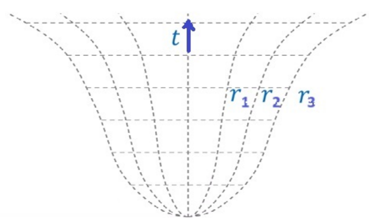
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \chi^2 & 0 \\ 0 & 0 & \chi^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \qquad \Omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2\chi & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2\chi\sin^2\theta \end{pmatrix} \qquad \Omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh^2\chi & 0 \\ 0 & 0 & \sinh^2\chi\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

(Ricciho skalár je pre všetky prípady konštantou, v súlade s kozmologickým princípom.) Keďže pre prvky metrického tenzoru vo všeobecnosti platí $g_{\mu\nu} = \vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu$ (kap. V.1.4), nenulové *priestorové* prvky *expandujúcej* metriky budú navyše vynásobené faktorom $\alpha^2(t)$.[42] Jednotný tvar metriky pre všetky tri druhy zakrivenia získame prechodom k novej premennej $r = \chi$ resp. $r = \sin\chi$ resp. $r = \sinh\chi$ pre plochý/sférický/hyperbolický priestor. Pre zmenu bázy vo všeobecnosti platí $\vec{e}_\chi = \frac{\partial r}{\partial \chi}\vec{e}_r$, a teda $g_{\chi\chi} = \left(\frac{\partial r}{\partial \chi}\right)^2 g_{rr}$, čo pre jednotlivé priestory dáva odpovedajúco $\left(\frac{\partial r}{\partial \chi}\right)^2 = 1,\ 1 - r^2,\ 1 + r^2$, alebo zjednotene $1 - kr^2$, kde $k = 0, \pm 1$. Parameter $k$ je teda akousi mierou (konštantnej) vnútornej krivosti priestoru - nulovej pre plochý, kladnej pre sférický a zápornej pre hyperbolický priestor. V premennej $r$ (v rôznych významoch pre jednotlivé krivosti - obr.) dostávame teda jednotný zápis expandujúcich *časo*priestorových metrík - tzv. **FLRW metriku**[43]

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha^2(t)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha^2(t)r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$




Dôsledkom expanzie priestoru je časový nárast fyzikálnej vzdialenosti medzi bodmi s *konštantnými* priestorovými súradnicami $(r, \theta, \varphi)$. Ak pre $t = 0$ je táto vzdialenosť $L(0) = r_0$, jej časový vývoj bude $L(t) = \alpha(t) r_0$, resp. $L(t) = \alpha(t) \arcsin r_0$, resp. $L(t) = \alpha(t) \operatorname{arsinh} r_0$.




Svetlo sa šíri *lokálne* rýchlosťou $c$. Vzhľadom na expandujúcu súradnicu $r$ napr. v plochom priestore je však rýchlosť svetla $c_r = \frac{dr}{dt} = \frac{c}{\alpha(t)}$. Keďže $c_r$ *ne*závisí od miesta (v homogénnom priestore závisí len od času), susedné maximá sa šíria rovnakou rýchlosťou všade. Ich fyzikálna (t.j. merateľná) vzdialenosť, určujúca vlnovú dĺžku $\lambda$, sa však mení v čase ako $\lambda(t) = \alpha(t)\lambda_0$ ($\lambda_0$ je vzdialenosť *ne*meniaca sa v FLRW súradniciach). V expandujúcom Vesmíre teda vlnové dĺžky šíriacich sa elektromagnetických vĺn postupne *narastajú* (ich frekvencie sa znižujú) - hovoríme o **kozmologickom červenom posuve**.

Pozorovaný Vesmír je vyplnený homogénnym tepelným žiarením - **kozmickým mikrovlnným po-**

[41] Pre guľovú (2-)plochu v 3D platí $x^2 + y^2 + z^2 = \chi^2$, kde $x = \chi\cos\theta,\ y = \chi\sin\theta\cos\varphi,\ z = \chi\sin\theta\sin\varphi$. Pre guľovú 3-plochu o polomere $\Omega$ v 4D platí $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = \Omega^2$, kde $x = \Omega\cos\theta,\ y = \Omega\sin\theta\cos\varphi,\ z = \Omega\sin\theta\sin\varphi\cos\chi$, $w = \Omega\sin\theta\sin\varphi\sin\chi$.
Pre (2-)plochu rotačného hyperboloidu v 3D platí $x^2 + y^2 - q^2 = \Omega^2$, kde $x = \Omega\sinh\chi\cos\theta,\ y = \Omega\sinh\chi\sin\theta$, $q = \Omega\cosh\chi$. Rozšírením na 3-plochu $x^2 + y^2 + z^2 - q^2 = \Omega^2$ sa $y$ zmení na $y = \Omega\sinh\chi\sin\theta\cos\varphi$ a pribudne $z = \Omega\sinh\chi\sin\theta\sin\varphi$.

[42] Faktor $\Omega^2$ môžeme bez újmy na všeobecnosti zahrnúť do $\alpha^2(t)$.

[43] Friedmann, Lemaitre, Robertson, Walker

**zadím** (CMB),[44] ktorého teplota v dôsledku kozmologického červeného posuvu počas expanzie priestoru klesla až na súčasných asi 2,7K. Pri jeho meraní sa však prejavuje slabá *smerová* závislosť - červený/modrý dopplerovský posuv jeho spektra v navzájom opačných smeroch, svedčiaci o pohybe detektorov (družica, Zem, Galaxia,...) voči CMB. To nám umožňuje pomocou CMB definovať (v každom bode priestoru) **univerzálnu vesmírnu pokojovú vzťažnú sústavu** - takú, v ktorej má CMB *nulový* dopplerovský posuv.[45] Časová súradnica FLRW metriky odpovedá práve tejto sústave.

### V.3.2 Friedmannove rovnice.

Predpokladajme model homogénneho izotropného Vesmíru ako ideálnej tekutiny s *konštantnou strednou hodnotou* hustoty hmoty $\rho$ a tlaku $P$, s tenzorom energie-hybnosti $T_{\mu\nu}$ z kap. V.2.1, a FLRW metrikou z kap. V.3.1. Dosadením týchto predpokladov do ER (a po vypočítaní všetkých nenulových prvkov tenzoru krivosti) dostávame tzv. **Friedmannove rovnice** (FR) pre rýchlosť a zrýchlenie expanzie[46]

$$\underline{\frac{\dot{\alpha}^2(t) + kc^2}{\alpha^2(t)} = \frac{8\pi\kappa_N\rho + \Lambda c^2}{3}} \qquad\qquad \underline{\frac{\ddot{\alpha}(t)}{\alpha(t)} = -\frac{4\pi\kappa_N}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}}$$

Časový vývoj expanzie Vesmíru teda závisí od štvorice parametrov $\rho, P, k, \Lambda$. Analyzujme jednotlivé scenáre:

Začnime *statickým* Vesmírom.[47] Podmienky $\dot{\alpha} = \ddot{\alpha} = 0$, ($\alpha$ konštantné) vedú na

$$\Lambda = \frac{4\pi\kappa_N}{c^2}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) \qquad\qquad \frac{k}{\alpha^2} = \frac{4\pi\kappa_N}{c^2}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)$$

V prípade „prachovej“ látkovej hmoty (kap. V.2.1) navyše $P = 0$, a teda $\Lambda = \frac{4\pi\kappa_N}{c^2}\rho = \frac{k}{\alpha^2} > 0$ (keďže $\rho > 0$). To ale odpovedá sférickému Vesmíru s $k = +1$, a teda $\Lambda = \frac{1}{\alpha^2}$.

Uvažujme teraz zdanlivo kuriózny prípad *prázdneho* Vesmíru,[48] $\rho, P = 0$, navyše pre jednoduchosť plochého,[49] $k = 0$. FR v tomto prípade vedú na dif. rovnicu

$$\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} = \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}} = H \quad \text{(Hubbleov parameter)} \qquad\qquad \text{s riešením} \quad \alpha(t) = \alpha(0)\exp\left\{\sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}}\,t\right\}$$

Ide o *expandujúci* vesmír. Temná energia $\Lambda$ je teda *generátorom* expanzie, a to aj pri $\rho \neq 0$. Navyše, pri $\rho \neq 0$ expanzia priestoru vedie k neustálemu poklesu $\rho$, v limite $\rho \to 0$ teda ide o realistický model.

Uvažujme napokon prípad $\Lambda = 0$. Teraz môžeme 1.FR prepísať do tvaru

$$\frac{8\pi\kappa_N\rho}{3H^2} - 1 = \frac{kc^2}{\alpha^2 H^2}$$

z ktorého je zrejmé, že $k$ bude *kladné* len ak $\rho > \frac{3H^2}{8\pi\kappa_N} = \rho_{krit}$. Hustota hmoty/energie teda rozhoduje o krivosti Vesmíru: Pre $\rho > \rho_{krit}$ bude Vesmír sférický (uzavretý do seba), a pre $\rho < \rho_{krit}$ bude hyperbolický (otvorený). Hraničná hodnota $\rho = \rho_{krit}$ odpovedá plochému Vesmíru, $k = 0$.

[44] angl. ***C**osmic **M**icrowave **B**ackground*

[45] Môžeme ju interpretovať ako sústavu s nulovou priemernou rýchlosťou hmoty rozloženej na kozmických škálach.

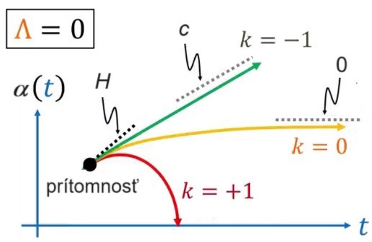
[46] Prvú z rovníc dostaneme z 00-komponenty ER a druhú z jej stopy.

[47] Tento model je v rozpore s pozorovaniami. Ide o pôvodný Einsteinov model Vesmíru. Na zabezpečenie jeho statickosti Einstein *ad hoc* zaviedol kozmologickú konštantu $\Lambda$.

[48] Ide o tzv. de Sitterov model.

[49] Nenulová krivosť $k = \pm 1$ neovplyvní *kvalitatívne* prezentované závery. Navyše, astronomické pozorovania hovoria v prospech plochého Vesmíru.

Krivosť Vesmíru zas rozhoduje o osude expanzie: Z 2.FR totiž v prípade $\Lambda = 0$ vyplýva, že $\ddot{\alpha} < 0$ - expanzia Vesmíru sa *spomaľuje*. Ako ukážeme neskôr, súčin $\rho\alpha^2 \to 0$ pre $\alpha \to \infty$, a teda podľa 1.FR




$$\dot{\alpha}^2 \underset{\alpha\to\infty}{\longrightarrow} -kc^2$$

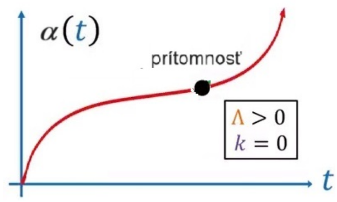
Pre hyperbolický Vesmír ($k = -1$) to znamená $\dot{\alpha} \to c$, pre plochý Vesmír ($k = 0$) $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha} \to 0$ (ustálenie veľkosti Vesmíru), a pre uzavretý sférický Vesmír ($k = +1$) *preklopenie do zmršťovania.*[50]

„Viditeľná“ hmota/energia (látka a žiarenie) teda, podľa očakávania, svojím gravitačným účinkom brzdí expanziu, a pri jej dostatočnej hustote spôsobuje zmršťovanie a kladné zakrivenie Vesmíru. Naopak, *kladná* temná energia vákua (kozmologická konštanta $\Lambda > 0$) vyvoláva jeho expanziu. Ak $\Lambda \neq 0$, hraničná podmienka medzi nepretržitou expanziou a prechodom ku zmršťovaniu je

$$\rho + \frac{\Lambda c^2}{8\pi\kappa_N} = \frac{3H^2}{8\pi\kappa_N}$$

Pre $\Lambda > 0$ len dostatočná hustota hmoty/energie dokáže zvrátiť expanziu. FR však vo všeobecnosti pripúšťajú aj *zápornú* energiu vákua, $\Lambda < 0$.[51] V takomto prípade expanzia nevyhnutne prejde do zmršťovania.

Podľa súčasných astronomických pozorovaní sa Vesmír javí ako takmer plochý, $k \cong 0$, a jeho expanzia sa *zrýchľuje*, čo svedčí o (malej) kladnej hodnote $\Lambda$. Počiatočné spomaľovanie expanzie v minulosti v dôsledku dostatočnej hustoty hmoty/energie sa jej sústavným zrieďovaním zmenilo na zrýchľovanie vďaka dominantnému vplyvu $\Lambda$.




## V.3.3 Zachovanie energie v nestacionárnom Vesmíre.

Nepretržitá expanzia Vesmíru prirodzenie vedie na zmeny hustoty hmoty/energie, avšak odlišne pre jednotlivé jej formy. Podľa 1. vety termodynamickej pre objem Vesmíru $V \approx \alpha^3$ ako uzavretého systému v termodynamickej rovnováhe (bez možnosti výmeny tepla a látky) platí[52]

$$c^2\partial_t(\rho V) = \partial_t E = -P\partial_t V \qquad \Leftrightarrow \qquad c^2\partial_t(\rho\alpha^3) = -P\partial_t\alpha^3 \qquad \to \qquad \underline{\dot{\rho} = -3\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)}$$

Pre $\dot{\alpha} > 0$ hustota energie *klesá* s časom. Dosadením modelovej stavovej rovnice Vesmíru $P = w\rho c^2$ (kap. V.2.1) dostávame dif. rovnicu

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}(1+w) \qquad \text{s riešením} \quad \rho(\alpha) = C\alpha^{-3(1+w)}$$

($C$ zahrňuje všetky konštanty pri integrácii.) Parameter $w$ pritom závisí od konkrétnej formy energie (kap. V.2.1):

[50] Tieto scenáre *ne*odpovedajú súčasným pozorovaniam.

[51] Podľa jednej z neoverených predstáv je hodnota $\Lambda$ daná súčtom príspevkov $\pm\frac{\hbar\omega}{2}$ od všetkých bozónových/fermiónových módov (kap. I.3.8, III.2.8).

[52] Tento časový vývoj hustoty energie sa dá odvodiť aj z FR (kap. V.3.2) či lokálneho zákona zachovania energie (kap. V.2.1).

Pre *látkovú hmotu* („prach“) $w = 0$, a teda $\rho(\alpha) \sim \alpha^{-3}$, čo prirodzene odpovedá expanzii priestoru v 3 rozmeroch.

Pre *žiarenie* $w = \frac{1}{3}$, a teda $\rho(\alpha) \sim \alpha^{-4}$. Súčasne s expanziou priestoru dochádza ku kozmologickému červenému posuvu žiarenia (kap. V.3.1) - narastaniu vlnových dĺžok $\lambda \to \alpha\lambda$, a teda $E = \frac{hc}{\lambda} \to E\alpha^{-1}$ - odtiaľ dodatočný „rozmer“.

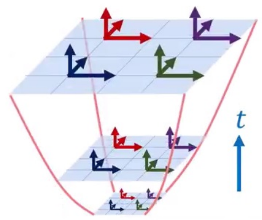
Pre *temnú energiu* $w = -1$, a teda $\rho = konst$. Hustota temnej energie sa expanziou Vesmíru nemení!

Tieto závery majú zásadný dopad na naše chápania zákona zachovania energie:

*Pri expanzii Vesmíru sa globálne zachováva len energia látky!*
*Celková energia žiarenia sa v expandujúcom Vesmíre stráca, kým celková temná energia pribúda.*

Podľa Noetherovej teorémy (kap. I.1.2) sa energia Vesmíru *globálne* zachováva ak je Vesmír translačne symetrický *v čase*. Expandujúci vesmír všeobecnej relativity takým však *nie je*. *Lokálny* zákon zachovania $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$ síce ostáva v platnosti (ako lokálne rovnice kontinuity), nemožno ho však rozšíriť na integrálny zákon.

Univerzálna vesmírna pokojová sústava (kap. V.3.1) je súborom súradnicových sústav v každom bode priestoru (obr.). Porovnávanie energií medzi jednotlivými bodmi/sústavami na *konečných* vzdialenostiach v *zakrivenom* (časo)priestore nie je možné - potrebujeme totiž *paralelný posuv* (vektorov, kap. V.1.4), a ten pre rôzne zvolené dráhy vedie k rôznym výsledkom.




◇◇◇◇◇

## Dôležité závery:

• Na kozmických škálach je Vesmír homogénny a izotropný. Jeho rozpínanie pozorujeme prostredníctvom kozmologického červeného posuvu.

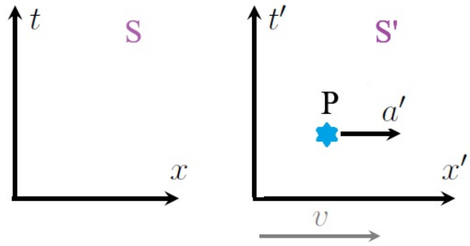
• Časový vývoj Vesmíru opisujú FR. Viditeľná hmota/energia vo Vesmíre spomaľuje expanziu, temná hmota (kladná hodnota kozmologickej konštanty) ju naopak zrýchľuje.

• Hustota temnej energie sa expanziou Vesmíru nemení - energia Vesmíru sa globálne *ne*zachováva (zachováva sa len *lokálne*).

# V.4 Fyzika pri horizonte udalostí.

## V.4.1 Rovnomerne zrýchľujúca sústava.

Princíp ekvivalencie (kap. V.1.1) *lokálne* zrovnoprávňuje *stacionárneho* pozorovateľa v gravitačne *zakrivenom* časopriestore s *konštantne zrýchľujúcim* pozorovateľom (so zrýchlením $\vec{a} = \vec{g}$) v *plochom* Minkowského časopriestore. Aké sú však transformačné vzťahy medzi pozorovateľom v laboratórnej sústave S („v pokoji“) a zrýchľujúcim pozorovateľom P s okamžitou rýchlosťou $u(t)$ a zrýchlením $a = \frac{du}{dt}$ (vzhľadom na S)? Keďže štandardné lorentzovské transformačné vzťahy platia *len medzi inerciálnymi* sústavami, potrebujeme „pomocnú“ *inerciálnu* sústavu S', ktorá sa *v danom okamihu* $t$ pohybuje (v smere pohybu P) *konštantnou* rýchlosťou $v = u(t)$ - (len a len) *pre tento daný okamih* je to **okamžitá pokojová** sústava pre P, a v nej $u'(t) = 0$. (Každému času $t$ odpovedá *iná* sústava S'.) V takejto sústave S' definujeme pre P *konštantné vlastné* zrýchlenie[53] $a' = \frac{du'}{d\tau}$ (derivujeme podľa *vlastného* času $\tau = t'$).




Teraz môžeme použiť lorentzovské transformačné vzťahy medzi S a S' a vzťahy pre relativistické skladanie rýchlostí, $u' = \frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}$, z ktorých pre prípad $u = v$ vyplynie

$$a' = \frac{du'}{d\tau} = ... = \frac{\gamma^2 du}{d\tau} = \gamma^2 \frac{du}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma^3 a$$

Pre *konštantné* (z pohľadu P) *vlastné* zrýchlenie $a' > 0$ rýchlosti $v$ (momentálne odpovedajúcich inerciálnych sústav S') pre laboratórneho pozorovateľa S narastajú s časom, a teda zrýchlenie P musí *klesať* ($a \to 0$ pre $v \to c$). Integrovaním dostávame pre rýchlosť a trajektóriu (vzhľadom na S)[54]

$$v(t) = \frac{a't}{\sqrt{1 + \frac{a'^2t^2}{c^2}}} \qquad \left(\text{resp. } t(v) = \frac{\gamma v}{a'}\right) \qquad x(t) = \frac{c^2}{a'}\sqrt{1 + \frac{a'^2t^2}{c^2}}$$

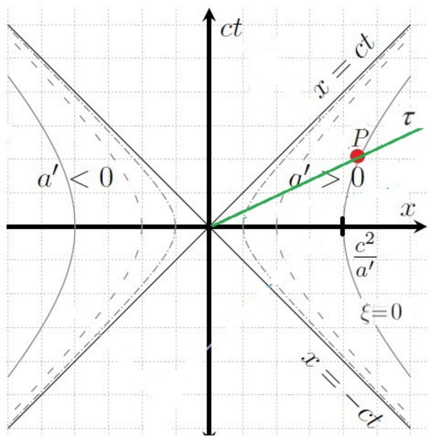
kde pre jednoduchosť pri $t = 0$ kladieme $u(0) = 0$, $x(0) = \frac{c^2}{a'} = x_0$ ($a'$ v úlohe voliteľného parametra) Dostávame správne limity $v(t) \to at$, $x(t) \to x_0 + \frac{at^2}{2}$, resp. $v(t) \to c$, $x(t) \to ct$. Túto trajektóriu vieme parametrizovať vlastným časom $\tau$ pozorovateľa P ($dt = \gamma d\tau$)

$$x(\tau) = x_0 \cosh \frac{a'\tau}{c} \qquad t(\tau) = \frac{x_0}{c} \sinh \frac{a'\tau}{c}$$

Svetočiara zrýchľujúceho pozorovateľa P v Minkowského časopriestore sústavy S sa dá prepísať do tvaru

$$(x(t))^2 - (ct)^2 = x_0^2 = \left(\frac{c^2}{a'}\right)^2$$

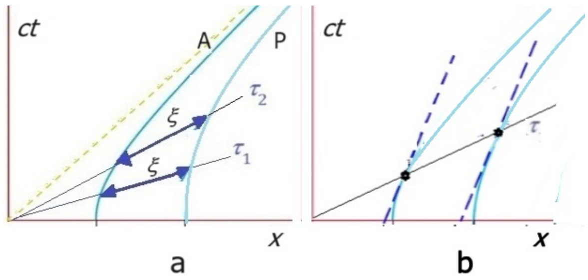
Z pohľadu S sa teda pozorovateľ P pohybuje po *hyperbole* prislúchajúcej danému $x_0$ (čiže $a'$): Prichádza z $x \to \infty$ spomaľujúc z $v = -ct$ na nulu v $t = 0$, a následne zrýchlene smeruje naspäť do $x = \infty$. Príslušnou voľbou $a' > 0$ je pre P dostupné ľubovoľné $x > c|t|$. Pozorovateľ P meria vzdialenosti a čas *vlastnými* súradnicami $\xi$ a $\tau$, pričom jeho poloha je $\xi = 0$. Každá z hyperbol na obr. odpovedá z pohľadu P určitej konštantnej vzdialenosti $\xi$, a poloha na *tejto* hyperbole určuje $\tau$ ($\tau = 0$ pre $t = 0$). Čiary súčasnosti pre dané $\tau$ sú priamky prechádzajuce bodom $x = 0, t = 0$ (počiatkom v S).



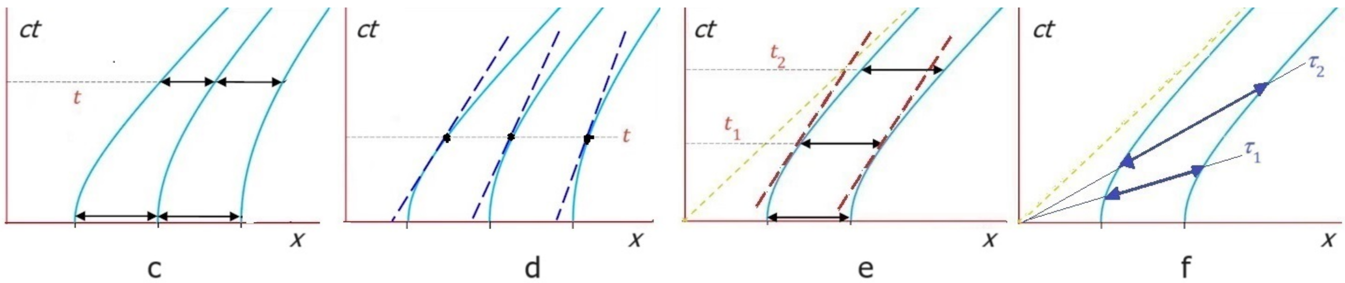

[53]Pozorovateľ P, sediaci v smere zrýchlenia, vníma/meria toto zrýchlenie ako *konštantnú* zotrvačnú (pseudo)silu, ktorú reálne pociťuje od operadla stoličky. Jeho *vlastná* okamžitá rýchlosť (meraná v S') je pritom stále *nulová*.

[54]Súradnice $y, z$ sa pochopiteľne *ne*transformujú.

Rozdielnosť opisov v sústavách S a P navádza k tzv. **Bellovmu „rakerovému“ paradoxu**: Predpokladajme pozorovateľa P v prednej časti *rovnomerne* zrýchľujúcej rakety (hyperbola $\xi = 0$) a ľubovoľný bod A v jej zadnej časti (hyperbola $\xi < 0$, proti smeru zrýchlenia). Z pohľadu P je v každom okamihu $\tau$ vzdialenosť $|\mathrm{PA}| = \xi$ konštantná (obr. a) a okamžité rýchlosti $v_A(\tau) = v_P(\tau)$ (obr. b, dotyčnice k hyperbolám).




V sústave S je však pre rôzne časy $t$ vzdialenosť $|\mathrm{PA}|$ *rôzna* (obr. c), a $v_A(t) \neq v_P(t)$ (obr. d) - raketa sa *deformuje* (zmršťuje). Rigidnosť rakety z pohľadu S vyžaduje *konštantné zrýchlenie v tejto sústave* (obr. e), čo však pre P znamená *roztrhnutie* rakety (obr. f).




Riešením tohto paradoxu je (prirodzene) rigidnosť rakety pre P (obr. a) a jej postupná relativistická kontrakcia z pohľadu S (obr. c). Z pohľadu laboratórnej sústavy to ale znamená, že

*rozne časti rigidného telesa majú rôzne zrýchlenie.*

## V.4.2 Horizont udalostí, rýchlosť svetla a čierne diery.

Zo vzťahov z predchádzajúcej kapitoly vieme odvodiť transformačné vzťahy medzi *vlastnými* súradnicami $(\tau, \xi)$ v zrýchľujúcej sústave P (S') a laboratórnymi súradnicami $(t, x)$ v S v tvare

$$t(\tau,\xi) = \frac{x_0 + \xi}{c} \sinh \frac{a'\tau}{c} \qquad\qquad x(\tau,\xi) = (x_0 + \xi) \cosh \frac{a'\tau}{c}$$

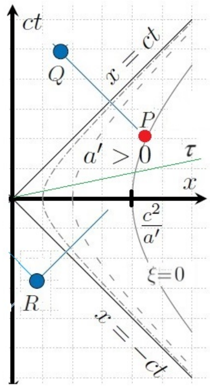
$$\tau(t,x) = \frac{x_0}{2c} \ln \frac{x + ct}{x - ct} \qquad\qquad \xi(t,x) = -x_0 + \sqrt{x^2 - c^2 t^2}$$

Z týchto vzťahov vidíme, že pre pozorovateľa P existujú *reálne* hodnoty vlastných súradníc v intervaloch $-\infty < \tau < \infty$ a $\underline{-x_0 < \xi < \infty}$. Znamená to, že v *opačnom* smere voči zrýchleniu (znamienko -) pozorovateľ P *nemôže* zmerať[55] vzdialenosti väčšie než $x_0$! Zrýchľujúci pozorovateľ P vníma **horizont udalostí** daný čiarami[56]

[55] V relativite akt merania vzdialenosti predpokladá rozmiestnenie a synchronizáciu hodín. Synchronizácia však vyžaduje obojstranný prenos signálov.

[56] Pre jednoduchosť tu uvažujeme 2D časopriestor $t - x$. V 4D časopriestore horizonty predstavujú *3-plochy* (plochy v priestore).

$$\underline{\xi = -\frac{c^2}{a'}} \qquad\qquad (x^2 = c^2t^2)$$




pre ktoré $\tau \to \pm\infty$. Môže prijať signál vyslaný z R (obr.), vníma ho však ako vyslaný z horizontu v $\tau \to -\infty$. Podobne P môže vyslať signál do Q (nemôže však prijať signál z Q). Pozorovateľ S vidí ako sa P neustále vzďaľuje (s klesajúcim zrýchlením). Pozorovateľ P tiež spočiatku vidí ako sa S vzďaľuje, ale napokon postupne „zamŕza“ na vzdialenosti $-x_0 = -\frac{c^2}{a'}$.

*Každý akcelerujúci objekt vytvára horizont udalostí v smere opačnom voči zrýchleniu.*

Znamená to, že rozmer každého (rovnomerne) zrýchľujúceho kompaktného objektu je v smere pohybu limitovaný[57] jeho vlastným zrýchlením $a'$,[58]

$$l_{max} = \frac{c^2}{a'}$$

Invariantnosť časopriestorového intervalu vedie na

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 = ... = \left(1 + \frac{\xi}{x_0}\right)^2 (cd\tau)^2 - (d\xi)^2$$

Pre svetelný lúč platí (pre všetkých pozorovateľov) $ds = 0$. V laboratórnej sústave S a pre nášho zrýchľujúceho pozorovateľa P je rýchlosť svetla

$$\frac{dx}{dt} = ... = c \qquad \text{ale} \qquad \underline{\frac{d\xi}{d\tau} = ... = \left(1 + \frac{\xi}{x_0}\right) c}$$

Znamená to, že

*pre pozorovateľa v neinerciálnej sústave je rýchlosť svetla (vo vákuu) rovná c len lokálne,*

t.j. pre $\xi \to 0$, vo všeobecnosti je *ľubovoľná* (v závislosti od smeru a veľkosti $a'$ a $\xi$)!! Z *konečnej* vzdialenosti $\xi = -x_0$ na horizonte obdrží P signál v $\tau \to \infty$.

V zmysle princípu ekvivalencie je *zrýchlený* pozorovateľ (v plochom časopriestore) rovnocenný *stacionárnemu* pozorovateľovi v gravitačnom poli, $\vec{a}' = -\vec{g}$. Všetky doterajšie závery tejto časti teda platia aj v gravitačnom poli: Prepisom faktoru pri časovej zložke metriky do newtonovského tvaru

$$\left(1 + \frac{\xi}{x_0}\right) = \left(1 + \frac{a'\xi}{c^2}\right) \to \left(1 - \frac{gh}{c^2}\right) = \left(1 + \frac{\phi}{c^2}\right)$$

dostávame výrazy z kap. V.1.1, resp. V.1.2. Z pohľadu stacionárneho pozorovateľa „vznášajúceho sa“ nad povrchom hmotného telesa (napr. stojaceho na podlahe rozhľadne) vytvára gravitačné pole/zrýchlenie v hĺbke pod jeho nohami horizont udalostí. V okolí (homogénnej *ne*rotujúcej) *sférickej* hmotnosti $M$ je adekvátna tzv. **Schwarzschildova metrika**

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2dt^2 - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \qquad\qquad \underline{R_S = \frac{2\kappa_N M}{c^2}}$$

[57] Pre bežné zrýchlenia je to gigantická veľkosť. V tuhých látkach sa však ťažná sila prenáša pozdĺž telesa rýchlosťou zvuku $c_z \ll c$, teda na dĺžke $l$ za čas $t_l \approx \frac{l}{c_z}$. Ak sa teleso nemá roztrhnúť, nesmie jeho predná časť akcelerovať rýchlejšie než $a'_{max} = \frac{2l}{t_l^2} \approx \frac{c_z^2}{l}$. Odtiaľ dĺžkové obmedzenie pri danom zrýchlení, $l < \frac{c_z^2}{a'}$.

[58] Ak by sme namiesto tuhého telesa uvažovali zrýchľujúci vlnový balík s rozptylom frekvencií $\Delta f$ o rozmere $\Delta l \cong \frac{c}{\Delta f}$ a s rozptylom zrýchlení $\Delta a \cong \frac{c}{\Delta t}$, potom vzťah $\Delta l \Delta a < c^2$ je ekvivalentný fourierovskému princípu neurčitosti $\Delta f \Delta t > 1$.

Faktor $\left(1-\frac{R_S}{r}\right)$ je mierou korekcie vzhľadom na metriku *plochého* časopriestoru pre $r > R_S$, a tzv. **Schwarzschildov polomer** $R_s$ definuje práve *guľovú plochu horizontu udalostí* (pre $r \to R_S$ časová metrika zaniká a radiálna časť metriky diverguje).[59] Pre bežné telesá vo Vesmíre o hmotnostiach $M$ a polomeroch $R$ platí[60] $R_S \ll R$. Telesá, ktorých celá hmotnosť je stlačená do gule o polomere $R < R_S$ sú **čierne diery** (korekcie metriky sú *záporné*[61]). *Radiálna* rýchlosť svetla $\frac{dr}{dt} \to 0$ na horizonte, žiadne svetlo (signál/hmota/energia) teda z oblasti $r \leq R_S$ neprenikne k vonkajšiemu pozorovateľovi.[62] Svetlo prichádzajúce z oblastí $r > R_S$ sa posúva do červenej časti spektra - hovoríme o **gravitačnom červenom posuve**.[63]

Vonkajší pozorovateľ P nad horizontom teda sleduje, ako sa voľný pád pozorovateľa Q do čiernej diery postupne spomaľuje, až kým sa jeho obraz (asymptoticky) nezastaví na horizonte. Súčasne sa však (z pohľadu P) spomaľuje čas v Q, svetlo vysielané z Q sa sfarbuje do červena a mizne z viditeľnej časti spektra. Naproti tomu, pozorovateľ Q preletom cez horizont nepozoruje nič neobvyklé, až kým ho slapové sily nezdeformujú.[64] Pozorovateľ P sa mu stráca z dohľadu ako v bežnom živote (žiaden horizont), dopplerovský červený posuv však registruje.

### V.4.3 Unruhov jav a Hawkingovo žiarenie.

V blízkosti horizontu čiernych dier si už nevystačíme s *klasickou* relativistickou fyzikou, ale musíme uvažovať aj relativistické *kvantové* javy, ako ich opisuje kvantová teória poľa. Základom tejto teórie je fourierovská dekompozícia polí do vlnových módov $f_k(t,\vec{r}) = e^{-i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$ a kánonické kvantovanie polí, v podobe (pre jednoduchosť uvažujme *skalárne* pole, kap. III.1.2)

$$\hat{\phi}(t,\vec{r}) \sim \int \left[\hat{a}_k f_k(t,\vec{r}) + \hat{a}_k^\dagger f_k^*(t,\vec{r})\right] d^3k$$

teda ako lineárna superpozícia anihilačných a kreačných operátorov vlnových módov $f_k(t,\vec{r}), f_k^*(t,\vec{r})$. Hoci samotné (skalárne) pole je invariantné voči zmene pozorovateľa, *zrýchľujúci* pozorovateľ s vlastnými súradnicami $(\tau,\vec{\xi})$ rozkladá toto pole do bázy *iných* módov $g_{k'}(\tau,\vec{\xi}), g_{k'}^*(\tau,\vec{\xi})$ a im odpovedajúcich koeficientov/operátorov $\hat{b}_{k'}, \hat{b}_{k'}^\dagger$. Každý z bázových módov jednej bázy je pritom vyjadriteľný ako lineárna kombinácia bázových vĺn druhej bázy, a medzi operátormi oboch báz existujú transformačné vzťahy[65]

$$\hat{b}_{k'} = \int [\alpha_{kk'}\hat{a}_k + \beta_{kk'}\hat{a}_k^\dagger] d^3k \qquad\qquad \hat{a}_k = \int [\alpha_{kk'}^*\hat{b}_{k'} - \beta_{kk'}\hat{b}_{k'}^\dagger] d^3k'$$

Operátory počtu/hustoty častíc pre oboch pozorovateľov sú $\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k$, resp. $\hat{b}_{k'}^\dagger\hat{b}_{k'}$. Predpokladajme, že pozorovateľ A v inerciálnej sústave detektorom častíc zmeria stav bez častíc - vákuum $|0_A\rangle$. Znamená to, že pre *stredný* počet častíc platí $\langle 0_A|\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k|0_A\rangle = 0$. Ak však tento istý stav $|0_A\rangle$ meria *zrýchľujúci*

[59] Paradoxne, k správnemu odhadu polomeru čiernej diery dospejeme aj pomocou „nepresných“ newtonovských argumentov: Gravitačná potenciálna energia telesa o hmotnosti $m$ na povrchu objektu o polomere $R$ a hmotnosti $M$ je $E_p = -\kappa_N \frac{mM}{R}$. Na únik z povrchu objektu potrebuje prinajmenšom rovnakú kinetickú energiu, čo dáva únikovú rýchlosť $v_{min} = \sqrt{\frac{2\kappa_N M}{R}}$. Maximálna možná rýchlosť je $c$, ak teda $R < \frac{2\kappa_N M}{c^2}$, objekt je čiernou dierou.

[60] Napr. $R_S < 1\,\mathrm{cm}$ pre Zem a $R_S \cong 3\,\mathrm{km}$ pre Slnko. Pre biliardovú guľu $R_S \approx 10^{-10}\mathrm{m}$.

[61] Dá sa to interpretovať tak, že čas a priestor si „vymieňajú úlohy“ - oblasti $r < R_S$ sú *mimo* chápania súčasnej fyziky.

[62] Majme na pamäti, že vonkajší pozorovateľ „vznášajúci sa“ nad horizontom udalostí je *ne*inerciálny - pre neho rýchlosť svetla (v predchádzajúcom texte ju označujeme $\frac{d\xi}{d\tau}$) v okolí horizontu nie je konštantná.

[63] V zmysle princípu ekvivalencie môžeme *gravitačný* červený posuv interpretovať aj ako *dopplerovský* posuv.

[64] Pre *extrémne masívne* čierne diery je $R_S$ veľmi veľké, a zbiehavosť geodetík v oblasti $R_S$ je ešte zanedbateľná. Slapové sily sa teda prejavia až pre $r \ll R_S$.

[65] tzv. *Bogoľubovove transformácie*

pozorovateľ B, *jeho* stredný počet častíc je

$$\langle 0_A | \hat{b}^\dagger_{k'} \hat{b}_{k'} | 0_A \rangle = ... = \int |\beta_{kk'}|^2 d^3k \ \geq 0 \quad \text{(vo všeobecnosti)}$$

Nenulovosť tohto výsledku znamená, že

*počet častíc nie je relativistickým invariantom - častica*[66] *je relativistický jav.*

„Generovanie" častíc zrýchľujúcim pozorovateľom sa nazýva **Unruhov jav**[67]. Kvalitatívne vysvetlenie je nasledovné: V kvantovej teórii polí *vákuum* je vyplnené fluktuujúcimi poľami - neustále vznikajúcimi a zanikajúcimi pármi častica-antičastica, s dobou života $\Delta t \leq \hbar/\Delta E$. Pre inerciálneho pozorovateľa sa tieto fluktuácie vykompenzujú na *nulový stredný* počet častíc. Dostatočne zrýchľujúci pozorovateľ však po dobu *medzi* vznikom a zánikom častíc *zmení svoju okamžitú pokojovú sústavu* (S', kap. V.4.1), t.j. príslušné pole sa lorentzovsky *transformuje*, vznik a zánik častíc teda *nie sú* vykompenzované. [68]

Dá sa spočítať, že stredný počet takto „generovaných" (nehmotných *skalárnych*) častíc s energiou $E$ je

$$\langle N(E) \rangle = \frac{1}{\exp\left(\frac{2\pi c E}{a' \hbar}\right) - 1}$$

v čom spoznáme Boseho-Einsteinovo[69] rozdelenie pri teplote

$$\underline{T_U = \frac{a' \hbar}{2\pi c k_B}}$$

- tzv. **Unruhovej teplote**. Zrýchľujúci pozorovateľ sa teda nachádza akoby v tepelnom kúpeli o teplote $T_U \sim a'$. Energia častíc kúpeľa pochádza zo zdroja zrýchlenia.[70]

Komplementárny efekt nastáva v *gravitačnom* poli na horizonte čiernych dier: Pri fluktuáciách virtuálnych párov častica-antičastica môže nastať situácia, že jedna z častíc sa ocitne *pod* horizontom (t.j. spadne do čiernej diery) a druhá *nad* horizontom s *ne*nulovou pravdepodobnosťou uniknúť a stať sa *reálnou časticou* detekovateľnou pozorovateľom (nad horizontom). Voči nej je (z pohľadu pozorovateľa) pohltená (virtuálna) častica *anti*časticou s formálne *zápornou* energiou, *znižujúcou* hmotnosť čiernej diery (energia sa zachováva). Tento jav nazývame **Hawkingovo žiarenie**, a čierna diera sa prostredníctvom neho „*vyparuje*".

V zmysle princípu ekvivalencie je stacionárny pozorovateľ nad horizontom zrýchľujúci so zrýchlením $\vec{a}' = -\vec{g}$ (inak by sa neudržal nad horizontom), a častice žiarenia detekuje v dôsledku Unruhovho javu. Ak teda vo výraze pre $T_U$ zameníme zrýchlenia[71]

$$a' \to g(R_S) \approx \frac{\kappa_N M}{R_S^2} = \frac{c^4}{4\kappa_N M}$$

dostávame teplotu Hawkingovho žiarenia - **Hawkingovu teplotu**

$$\underline{T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B \kappa_N M} = \frac{\hbar c}{4\pi k_B R_S}}$$

[66] *častica*, ako ju chápe kvantová teória polí

[67] tiež *Fullingov-Daviesov-Unruhov jav*

[68] Dekompozícia vákua na zložky s kladnými a zápornými frekvenciami - častice a antičastice - je *odlišná* pre pozorovateľov s odlišným zrýchlením. Rovnako by sme mohli „pripraviť" vákuum $|0_B\rangle$ v zrýchľujúcej sustave B, a v inerciálnej sústave A by sme pozorovali častice. Takto pripravený stav pre A *nie je* stavom s najnižšou energiou.

[69] V prípade *Diracovho* poľa (bispinorov) výpočet povedie na Fermiho-Diracovo rozdelenie.

[70] Vyjadrené v číslach, ide o extrémne neefektívny spôsob generovania častíc.

[71] Použitý newtonovský vzťah pre $g$ nemá v prvom priblížení vplyv na výsledok.

Hawkingovo žiarenie má charakter žiarenia *absolútne čierneho telesa.* Keďže $T_H \sim M^{-1}$, masívnejšie čierne diery sa vyparujú pomalšie. Navyše, gravitačným pohltením okolitej hmoty a žiarenia môžu svoju hmotnosť zvyšovať.[72] So stratou hmotnosti sa rýchlosť vyparovania prudko vyšuje.

Hawkingovu teplotu teda priraďujeme *horizontu* čiernej diery - sférickej ploche o polomere $R_S$ a obsahu $A = 4\pi R_S^2$. Z termodynamickej vety $dS = dE/T$ vieme určiť *entropiu* čiernej diery, ak položíme $T = T_H$ a $E = Mc^2$. Preintegrovaním dostávame

$$S = ... = \frac{4\pi k_B \kappa_N M^2}{\hbar c} = \frac{k_B c^3}{4\hbar \kappa_N} A$$

Entropia čiernej diery je teda daná *výlučne* plochou horizontu.

### V.4.4 Horizont a Planckova škála.

Einsteinov-Hilbertov účinok a všetky tvary ER (kap. V.2.2), ako aj výrazy pre energiu gravitačnej vlny (kap. V.2.6) obsahujú prefaktor $\frac{c^4}{\kappa_N}$, ktorý má fyzikálny rozmer sily/časovej zmeny hybnosti, a jeho fyzikálny význam pochopíme z nasledovnej úvahy: Čierne diery predstavujú najhustejšie objekty vo Vesmíre, a ich „objem" ($\sim R_S^3$) je daný výlučne hmotnosťou $M$ v nich sústredenou. Existuje teda *hraničná hustota* hmoty, a tým aj *hraničná sila* $F_{max}$, ktorá dokáže hmotu stlačiť. Táto sila je daná prácou, čiže transférom energie $E = Mc^2$ do objemu $\approx R_S^3$ cez plochu horizontu $\approx R_S^2$ na vzdialenosť $\approx R_S$ maximálnou rýchlosťou $c$. Z rovnice kontinuity vyplynie práve

$$\underline{F_{max} = (\partial_t p)_{max} \approx \frac{E}{R_S} \approx \frac{c^4}{\kappa_N}} \qquad \text{resp.} \qquad \underline{(\partial_t E)_{max} \approx \frac{c^5}{\kappa_N}}$$

Tak ako *špeciálna* teória relativity je vybudovaná na (experimentálne overenom) fakte *konečnej a invariantnej maximálnej* rýchlosti šírenia hmoty-energie, $v_{max} = c$, pri formulovaní[73] *všeobecnej* teórie relativity môžeme vychádzať z postulátu o

*konečnom a invariantnom maximálnom toku hybnosti/energie.*[74]

Plošná hustota hraničnej energie pretekajúcej elementom plochy horizontu $\delta A$ je (daná pomerom celkovej energie ku celkovej ploche)

$$\frac{\delta E_{max}}{\delta A} \approx \frac{c^4 R_S}{\kappa_N} \frac{1}{R_S^2} \qquad \Rightarrow \qquad \delta E_{max} \approx \frac{c^4}{\kappa_N R_S} \delta A$$

Dá sa ukázať, že pre všeobecnú geometriu horizontu aj súradnicový systém odpovedá ľavá strana poslednej rovnosti plošnému integrálu tenzoru energie-hybnosti $T_{\mu\nu}$, a pravá strana rovnakému integrálu Ricciho tenzoru $R_{\mu\nu}$ (vyjadrujúceho krivosť horizontu[75]), čo nás privádza (s uvážením zákona zachovania energie, kap. V.2.2) k ER, s faktorom úmernosti $\approx \frac{c^4}{\kappa_N}$, vyjadrujúcim „elasticitu" časopriestoru.[76]

---

[72]Pre ilustráciu, čierna diera hmotnosti Slnka má $T_H \approx 10^{-8}$K, naproti tomu pohlcované reliktné žiarenie má 2,7 K (čo by odpovedalo čiernej diere hmotnosti Mesiaca).

[73]Prezentujeme tu alternatívnu cestu k ER.

[74]Tieto extremélne hodnoty sa realizujú na horizontoch udalostí, na rozdiel od priamych meraní maximálnej rýchlosti teda priame merania uvedených limitov neexistujú (resp. sú *nedostupné*, $\frac{c^4}{\kappa_N} \approx 10^{43}$N). Sú však konzistentné s výstavbou teórie vychádzajúcou z alternatívnych princípov, a žiadne dostupné experimenty týmto tvrdeniam neprotirečia. Prípadné pridanie číselného faktoru nemá hlbší fyzikálny význam, zabezpečuje len správnu newtonovskú limitu. Horný limit pre výtok *energie/hmoty* môžeme myšlienkovo manifestovať na príklade reaktívneho pohonu, keď limitné množstvo emitovaných spalín gravitačným pôsobením ohraničí ďalší nárast rýchlosti.

[75]Horizont čiernej diery je plochou s maximálnou možnou krivosťou.

[76]Dôsledkom existencie *hraničnej* deformovateľnosti/krivosti časopriestoru je *ne*existencia *bodových* hmotných objektov. Pre Newtonov gravitačný zákon musí platiť obmedzenie $F = \frac{\kappa_N M n}{l^4} \leq F_{max}$, a odtiaľ $l \geq R_S$. Princíp, podľa ktorého musí byť každá časopriestorová singularita pred vonkajším pozorovateľom „zahalená" oblasťou pod horizontom udalostí, nazývame **kozmickou cenzúrou**.

Hraničná sila definovaná ako $F_P = \frac{c^4}{\kappa_N}$ - **Planckova sila** - je súčasťou tzv. **Planckovej škály**, tvorenej „*prirodzenými*" jednotkami, zostavenými výlučne z fundamentálnych konštánt $c, \hbar, \kappa_N, k_B$. Jej základ tvorí **Planckova dĺžka** a **Planckov čas**

$$l_P = \sqrt{\frac{\hbar\kappa_N}{c^3}} \qquad (\approx 10^{-35}\mathrm{m}) \qquad\qquad t_P = \frac{l_P}{c} = \sqrt{\frac{\hbar\kappa_N}{c^5}} \qquad (\approx 10^{-44}\mathrm{s})$$

Vzdialenosti $\Delta l \leq l_P$ a časové úseky $\Delta t \leq t_P$ sú *principiálne nemerateľné*. Musí totiž platiť[77] $\Delta l > R_S \approx \frac{\kappa_N m}{c^2}$ a súčasne $\Delta l > \lambda\!\!\!^{-}_C = \frac{\hbar}{mc}$, a pre presnosť hodín o rozmere $l$ zase $\Delta t > \frac{l}{c}$. Pre Planckovu silu potom dostávame

$$F_P = \frac{\hbar}{l_P t_P} \qquad (\approx 10^{44}\mathrm{N})$$

Ďalšími prirodzenými jednotkami sú **Planckova hmotnosť** (daná podmienkou $\lambda\!\!\!^{-}_c \geq l_P$) a **Planckova hustota**

$$m_P = \sqrt{\frac{c\hbar}{\kappa_N}} \qquad (\approx 10^{-8}\mathrm{kg}) \qquad\qquad \rho_P = \frac{m_P}{l_P^3} = \frac{c^5}{\hbar\kappa_N^2} \qquad (\approx 10^{96}\mathrm{kgm^{-3}})$$

Pre čiernu dieru o hmotnosti $m_P$ platí $R_S \approx l_P$, a $\rho_P$ je hraničná hustota. Obdobným spôsobom definujeme **Planckovu teplotu**

$$T_P = \frac{m_P c^2}{k_B} = \sqrt{\frac{c^5\hbar}{\kappa_N k_B^2}} \qquad (\approx 10^{32}\mathrm{K})$$

ktorej odpovedá tepelné žiarenie o vlnovej dĺžke $\approx l_P$.

Tieto jednotky definujú hranice súčasného fyzikálneho chápania sveta.[78] Posunutie týchto hraníc predpokladá dobudovanie **kvantovej gravitácie** - kvantovej teórie časopriestoru.

◇◇◇◇◇

## Dôležité závery:

• Miesta s *rovnakým* zrýchlením z pohľadu *svojej* pokojovej sústavy majú *rôzne* zrýchlenia v laboratórnej sústave. Pozorovateľ v zrýchľujúcej sústave vníma horizont udalostí - udalosti za týmto horizontom sú preňho nedostupné.

• Horizont udalostí existuje aj pre stacionárneho pozorovateľa v gravitačnom poli, pozorovateľný je však len v okolí čiernych dier. Čas na horizonte čiernej diery sa zastavuje.

• Stav vákua pre laboratórneho pozorovateľa je tepelným kúpeľom častíc pre zrýchľujúceho pozorovateľa, s teplotou úmernou jeho zrýchleniu (Unruhov jav). Stacionárny pozorovateľ nad horizontom (ekvivalentný zrýchľujúcemu pozorovateľovi) pozoruje tepelné žiarenie - Hawkingovo žiarenie, prostredníctvom ktorého sa čierna diera zbavuje hmoty.

• Čiernej diere priraďujeme entropiu, úmernú ploche jej horizontu.

---

[77]Meradlo nesmie byť čiernou dierou, a pri jeho dĺžke $\Delta l \leq \lambda\!\!\!^{-}_C$ generujeme z vákua nové meradlo. Pre rozmer meradla musí platiť $mc > \Delta p > \frac{\hbar}{\Delta l}$.

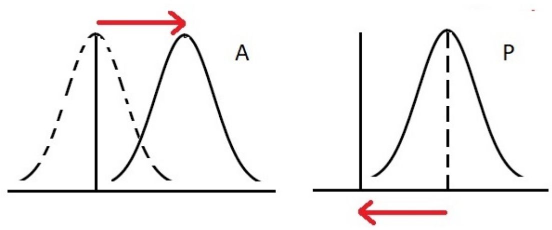
[78]Planckova škála predstavuje prirodzenú energetickú hranicu platnosti štandardného modelu (časť IV). Dnes dostupná energerická hranica je však stále o niekoľko rádov nižšia, existuje tu teda ešte dostatočný priestor pre „novú fyziku".

# DODATKY

## A Aktívna a pasívna transformácia.

Uvažujme skalárnu funkciu $\phi(x)$. *Aktívnou* transformáciou je napr. posunutie *funkcie doprava* $T$,

$$\phi(x) \underset{T}{\rightarrow} \phi'(x) = T\phi(x) = \phi(T^{-1}x)$$




*Pasívnou* transformáciou je posunutie *súradnicového systému doľava*, pričom funkcia sa *nemení*

$$x \underset{T}{\rightarrow} x' = Tx \qquad \phi(x) \underset{T}{\rightarrow} \phi'(x') = \phi(x) = \phi(T^{-1}x')$$

Premenovaním premenných dostávame v *oboch* prípadoch transformačný vzťah $\underline{\phi'(y) = \phi(T^{-1}y)}$. Obe transformácie sú teda *formálne ekvivalentné.*

Platí to vo *kvantovomechanickom* formalizme pre *unitáru* transformáciu, $T^\dagger = T^{-1}$, a stavovú funkciu $\phi(x) = \langle x|\phi\rangle$

$$T\phi(x) = \langle x|T|\phi\rangle = \langle T^\dagger x|\phi\rangle = \langle T^{-1}x|\phi\rangle = \phi(T^{-1}x)$$

## B Kánonická hybnosť hmotného telesa.

Preskúmajme definičný vzťah pre kánonickú hybnosť $p_j = \frac{\partial \mathscr{L}(q_j,\dot{q}_j)}{\partial \dot{q}_j}$ pre niektoré dôležité prípady.

Pre teleso v poli *konzervatívnej* sily v *kartézskych* súradniciach $q_j = x_j$ platí

$$\mathscr{L} = K(\dot{x}_j) - V(x_j) = \sum_j \frac{m\dot{x}_j^2}{2} - V(x_j) \qquad\qquad p_j = \frac{\partial K(\dot{x}_j)}{\partial \dot{x}_j} = m\dot{x}_j$$

Kánonická hybnosť tu splýva s newtonovskou *kinematickou* hybnosťou. Pre pohyb v *polárnych* súradniciach $q_j = r, \vartheta$ však platí

$$\mathscr{L} = K(r, \dot{r}, \dot{\vartheta}) - V(r, \vartheta) = \frac{m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2\right)}{2} - V(r, \vartheta) \qquad\qquad \begin{aligned} p_r &= m\dot{r} \\ p_\vartheta &= mr^2\dot{\vartheta} \end{aligned}$$

Zložka kánonickej hybnosti $p_\vartheta$ tu odpovedá *momentu hybnosti.*

Dôležitým je prípad *ne*konzervatívnej elektromagnetickej **Lorentzovej sily** pôsobiacej na časticu nabitú elektrickým nábojom[79] $\mathfrak{q}$, pohybujúcu sa v poli rýchlosťou $\vec{v}$,

$$F_j = \mathfrak{q}(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})_j = \mathfrak{q}\left(-\nabla\varphi - \partial_t\vec{A} + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{A})\right)_j$$

S použitím rovností $\vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A}$ a $\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A}$ (*pohybujúca sa* častica „cíti“ zmenu poľa ak sa pole mení *v čase* a/alebo *pozdĺž dráhy* pohybu) dostávame ($v_j = \dot{q}_j$)

$$F_j = \mathfrak{q}\left[-\frac{\partial(\varphi - \dot{q}_j A_j)}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\,(\varphi - \dot{q}_j A_j)}{\partial \dot{q}_j}\right]$$

Definujeme *zovšeobecnenú* (kánonickú) silu

$$F_j = -\frac{\partial V(q_j, \dot{q}_j, t)}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\frac{\partial V(q_j, \dot{q}_j, t)}{\partial \dot{q}_j}$$

Porovnaním výrazov dostávame *zovšeobecnenú* potenciálnu energiu (vyhovujúcu ELR) a lagrangián

$$V(q_j, \dot{q}_j, t) = \mathfrak{q}\,[\varphi(q_j, t) - \dot{q}_j A_j(q_j, t)] \qquad \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) = \frac{1}{2}m\dot{q}_j^2 - \mathfrak{q}\,[\varphi(q_j, t) - \dot{q}_j A_j(q_j, t)]$$

Kánonická hybnosť prislúchajúca $j$-temu stupňu voľnosti je potom

$$p_j = \frac{\partial\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)}{\partial \dot{q}_j} = m\dot{q}_j + \mathfrak{q}A_j(q_j, t) \qquad \text{resp.} \qquad \underline{\vec{p} = m\vec{v} + \mathfrak{q}\vec{A}(\vec{r}, t)}$$

a Newtonova pohybová rovnica má tvar

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v} + \mathfrak{q}\vec{A}) = -\mathfrak{q}\nabla(\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A})$$

Zovšeobecnený potenciál v lagrangeovskom formalizme je potenciál, ktorý „cíti“ pohybujúci sa náboj (pre *pohybujúceho* pozorovateľa sa elektromagnetické pole transformuje), a pravá strana je teda akousi *konzervatívnou* silou. Interpretácia kánonickej hybnosti je nasledovná: Predpokladajme časticu v kľude v nulovom poli, teda $\vec{p} = m\vec{v} = 0$ ($\vec{A} = 0$). Pri zapnutí poľa z 0 na hodnotu $B_0$ po dobu $\Delta t$ je $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \neq 0$ (z 0 na $A_0$) $\Rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \neq 0$. Toto elektrické pole udelí nabitej častici hybnosť

$$\Delta\vec{p} = \mathfrak{q}\vec{E}\Delta t = -\mathfrak{q}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\Delta t \approx -\mathfrak{q}\vec{A}_0$$

Kánonická hybnosť sústavy častica-pole je *zachovávajúcou sa* veličinou, tento prírastok *kinematickej* hybnosti je kompenzovaný opačnou hybnosťou *elektromagnetického poľa* $\mathfrak{q}\vec{A}$. (Iným príkladom zachovania kánonickej hybnosti zakrivenie dráhy náboja pri vlietnutí do oblasti s magnetickým poľom.)

# C Vzťah Poissonových zátvoriek a komutátorov.

Pre dva páry funkcií na fázovom priestore platí (z využitím Leibnizovho pravidla)

$$\{F_1F_2, G_1G_2\} = \{F_1, G_1G_2\}F_2 + F_1\{F_2, G_1G_2\} = ... =$$

[79] Kvôli rozlíšeniu elektrického náboja od zovšeobecnenej súradnice v tomto dodatku používame symbol $\mathfrak{q}$.

$$= \{F_1, G_1\}G_2F_2 + G_1\{F_1, G_2\}F_2 + F_1\{F_2, G_1\}G_2 + F_1G_1\{F_2, G_2\}$$

Pri alternatívnom postupe dostávame

$$\{F_1F_2, G_1G_2\} = \{F_1F_2, G_1\}G_2 + G_1\{F_1F_2, G_2\} = ... =$$

$$= \{F_1, G_1\}F_2G_2 + F_1\{F_2, G_1\}G_2 + G_1\{F_1, G_2\}F_2 + G_1F_1\{F_2, G_2\}$$

Ekvivalentnosť týchto výrazov znamená

$$\{F_1, G_1\}(F_2G_2 - G_2F_2) = (F_1G_1 - G_1F_1)\{F_2, G_2\}$$

a po úprave

$$\frac{(F_1G_1 - G_1F_1)}{\{F_1, G_1\}} = \frac{(F_2G_2 - G_2F_2)}{\{F_2, G_2\}} \stackrel{!}{=} \lambda$$

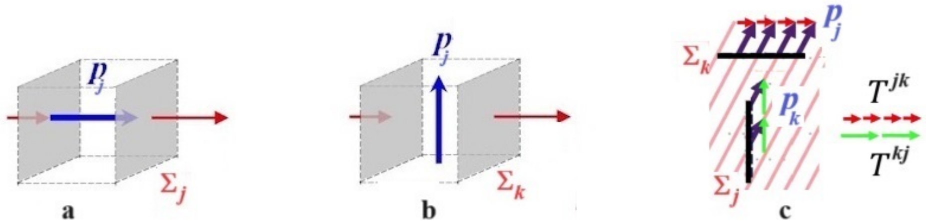
čo vedie na výsledný vzťah $\underline{\{F, G\} = \frac{1}{\lambda}[F, G]}$.

# D Tenzor napätia-energie-hybnosti.

Predpokladajme pole s energiou-hybnosťou $c\delta p^\mu = c(\delta p^0, \delta p^x, \delta p^y, \delta p^z)$ v objeme $\delta x \delta y \delta z$. Nultý stĺpec ($\nu = 0$) tenzoru $T^{\mu\nu}$ pozostáva podľa kap. I.3.4 z objemových *hustôt* štvorvektoru $c\delta p^\mu$, teda $c\delta p^\mu / \delta x \delta y \delta z$. Z tam uvedeného definičného vzťahu pre tento tenzor, a s uvážením $\partial_j \phi = \dot{\phi} / \dot{x}_j$, pre ďalšie stĺpce tenzoru platí $T^{\mu j} = \dot{x}_j T^{\mu 0}/c$, čiže

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T^{tt} & T^{tx} & T^{ty} & T^{tz} \\ T^{xt} & T^{xx} & T^{xy} & T^{xz} \\ T^{yt} & T^{yx} & T^{yy} & T^{yz} \\ T^{zt} & T^{zx} & T^{zy} & T^{zz} \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \frac{\delta p^0}{\delta x \delta y \delta z} & \frac{\delta p^0}{c\delta t \delta y \delta z} & \frac{\delta p^0}{c\delta t \delta x \delta z} & \frac{\delta p^0}{c\delta t \delta x \delta y} \\ \frac{\delta p^x}{\delta x \delta y \delta z} & \frac{\delta p^x}{c\delta t \delta y \delta z} & \frac{\delta p^x}{c\delta t \delta x \delta z} & \frac{\delta p^x}{c\delta t \delta x \delta y} \\ \frac{\delta p^y}{\delta x \delta y \delta z} & \frac{\delta p^y}{c\delta t \delta y \delta z} & \frac{\delta p^y}{c\delta t \delta x \delta z} & \frac{\delta p^y}{c\delta t \delta x \delta y} \\ \frac{\delta p^z}{\delta x \delta y \delta z} & \frac{\delta p^z}{c\delta t \delta y \delta z} & \frac{\delta p^z}{c\delta t \delta x \delta z} & \frac{\delta p^z}{c\delta t \delta x \delta y} \end{pmatrix}$$

Fyzikálny význam prvkov týchto stĺpcov je nasledovný:
Členy $T^{tj}$ vyjadrujú *tok* energie $\delta p^0$ plôškou *kolmou* na smer $j$ za čas $\delta t$.
Diagonálne členy $T^{jj}$ vyjadrujú *tok* zložky hybnosti $\delta p_j$ plôškou *kolmou* na smer $j$ za čas $\delta t$ (obr. a).
Mimodiagonálne členy $T^{jk}$ vyjadrujú *tok* zložky hybnosti $\delta p_j$ plôškou *kolmou* na smer $k$ za čas $\delta t$ (obr. b).
Symetrickosť tenzoru $T^{\mu\nu}$ je zrejmá z jeho definície, prípadne z obr. c.




Nulová divergencia 0-tého *riadku* tenzoru predstavuje zákon zachovania energie

$$\frac{\partial T^{tt}}{c\partial t} + \frac{\partial T^{tx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{ty}}{\partial y} + \frac{\partial T^{tz}}{\partial z} \;=\; \frac{\partial T^{tt}}{c\partial t} + \nabla \cdot \vec{T}^t \;=\; \partial_\nu T^{t\nu} = 0$$

a nulové divergencie ostatných riadkov zákony zachovania $j$-tej zložky hybnosti

$$\frac{\partial T^{jt}}{c\partial t}+\frac{\partial T^{jx}}{\partial x}+\frac{\partial T^{jy}}{\partial y}+\frac{\partial T^{jz}}{\partial z} \quad = \quad \frac{\partial T^{jt}}{c\partial t}+\nabla\cdot\vec{T}^{j} \quad = \quad \partial_\nu T^{j\nu}=0$$

Naopak, $j$-tý *stĺpec* tenzoru predstavuje *tok* štvorvektoru $p^\mu$ v smere $j$.

Členy $T^{jk}$ sa dajú prepísať do tvaru $\frac{1}{\Sigma_k}\frac{\delta p_j}{\delta t}$, kde $\frac{\delta p_j}{\delta t}$ je *sila* pôsobiaca v smere $j$ na plôšku $\Sigma_k$ kolmú na smer $k$. Samotný 3×3 tenzor $T^{jk}$ je teda **tenzorom napätia**. Pre $j=k$ ide o napätie v *tlaku*, pre $j\neq k$ o napätie v *šmyku*.

# E Taylorov rozvoj maticových exponenciál.

Generátor boostu v smere $x$ je (v blokovej schéme)

$$K_x=-i\begin{pmatrix} k_x & \\ & 0\end{pmatrix} \qquad\qquad k_x=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Pre „aktívnu“ časť matice, $k_x$, platí $k_x^{2n}=\mathbb{1}$ a $k_x^{2n+1}=k_x$. Potom matica tejto transformácie je

$$\mathcal{B}_x(\phi)=e^{i\phi K_x}=e^{\phi k_x}=\sum_0^\infty\frac{\phi^n}{n!}k_x^n=\sum_0^\infty\frac{\phi^{2n}}{(2n)!}\mathbb{1}+\sum_0^\infty\frac{\phi^{2n+1}}{(2n+1)!}k_x=$$

$$=\mathbb{1}\cosh\theta+k_x\sinh\theta=\begin{pmatrix}\cosh\phi & \sinh\phi\\ \sinh\phi & \cosh\phi\end{pmatrix}$$

Analogicky, generátor rotácie v rovine $xy$ je

$$J_z=-i\begin{pmatrix} 0 & & \\ & j_z & \\ & & 0\end{pmatrix} \qquad\qquad j_z=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

Pre „aktívnu“ časť matice, $j_z$, platí $j_z^{2n}=(-1)^n\mathbb{1}$ a $j_z^{2n+1}=(-1)^n j_z$. Potom matica transformácie je

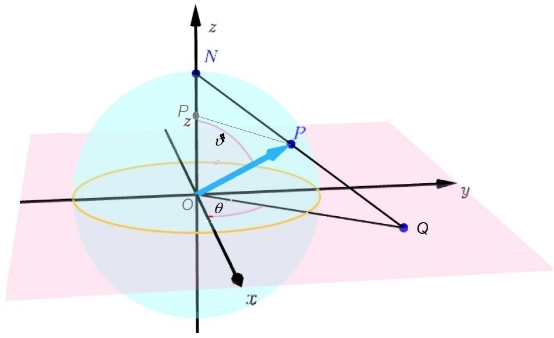
$$\mathcal{R}_z(\theta)=e^{i\theta J_z}=e^{\theta j_z}=\sum_0^\infty\frac{\theta^n}{n!}j_z^n=\sum_0^\infty\frac{(-1)^n\theta^{2n}}{(2n)!}\mathbb{1}+\sum_0^\infty\frac{(-1)^n\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}j_z=$$

$$=\mathbb{1}\cos\theta+j_z\sin\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

# F Stereografická projekcia a priestorové zobrazenie spinoru.

V tomto dodatku ukážeme spôsob projekcie medzi *reálnym* a *komplexným* priestorom.

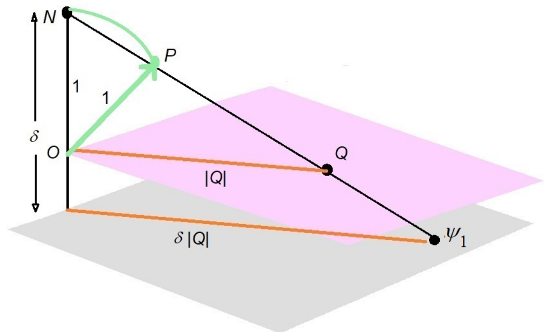
Predpokladajme najprv *jednotkový vektor* $\vec{v} = (1, \vartheta, \theta)$ v sférických súradniciach ($\vartheta$ - uhol voči osi $z$, $\theta$ - uhol v rovine $xy$). Množina takýchto vektorov vo všetkých možných smerov tvorí jednotkovú guľovú plochu. Každému bodu $P$ na tejto ploche môžeme *jednoznačne* priradiť *komplexné číslo* $Q$ ako bod v komplexnej rovine $z = 0$ - priesečník tejto roviny s priamkou $NP$ kde $N = (1, 0, \theta)$ („severný pól" jednotkovej guľovej plochy). Body „severnej/južnej" časti sa premietajú mimo/dovnútra jednotkovej kružnice v komplexnej rovine ($xy$). Odpovedajúce komplexné číslo je (z podobnosti trojuholníkov $NQO$ a $NPP_z$, dodržujúc ľavotočivú konvenciu)




$$Q(\vartheta, \theta) = |Q(\vartheta)|e^{i\theta} = \frac{\sin\vartheta}{1 - \cos\vartheta}\, e^{i\theta} = ... = \cot\frac{\vartheta}{2}\, e^{i\theta}$$

Samotnému bodu $N$ odpovedá $|Q(0)| = \cot(0) \rightarrow \infty$.

Uvedené zobrazenie premieta *dva* stupne voľnosti reálneho priestoru do *dvoch* stupňov voľnosti komplexnej roviny. Na projekciu *všeobecného vektoru* $\vec{v} = (v, \vartheta, \theta)$, $v \neq 1$, potrebujeme ďalší stupeň voľnosti: Je zrejmé, že so zmenou $v$ (polomeru guľovej plochy) sa bude škálovať aj $|Q|$. Rovnaký škálovací efekt však dosiahneme aj vertikálnym posuvom komplexnej roviny do vzdialenosti $\delta$ od bodu $N$. Nové komplexné číslo v *posunutej* rovine bude




$$\psi_1(\delta, \vartheta, \theta) = \delta Q(\vartheta, \theta) = \delta \cot\frac{\vartheta}{2}\, e^{i\theta}$$

Ak by sme namiesto reálneho čísla $\delta$ použili komplexné číslo $\psi_2 = \delta e^{i\varphi}$, znamenalo by to otáčanie komplexnej roviny okolo osi $z$, a teda dodatočný fázový posuv $\psi_1$ o $\varphi$

$$\psi_1 = \psi_2 Q = \delta \cot\frac{\vartheta}{2}\, e^{i(\varphi+\theta)}$$

Týmto spôsobom sme vektor $\vec{v}$ v reálnom 3D priestore projektovali (s jedným prebytočným stupňom voľnosti $\varphi$) do *dvojice* komplexných čísel $\psi_1, \psi_2$, ktoré môžeme vnímať ako zložky komplexného dvojkomponentného „vektoru"

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

- tzv. **spinoru**. Ak definujeme (v analógii s vektormi) *veľkosť* spinoru $|\psi| := \sqrt{|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2}$ , a *požadujeme* priradenie $|\psi|^2 \stackrel{!}{=} |\vec{v}| = v$, dostaneme

$$\delta = \sqrt{v} \sin\frac{\vartheta}{2}$$

Súčasne substitúciou $\alpha := 2\varphi + \theta$ „symetrizujeme" zložky spinoru do konečného tvaru

$$\underline{\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{v}\, \cos\frac{\vartheta}{2}\, e^{i(\alpha+\theta)/2} \\ \sqrt{v}\, \sin\frac{\vartheta}{2}\, e^{i(\alpha-\theta)/2} \end{pmatrix}}$$

Spinor v tomto zápise je definovaný *štyrmi* parametrami $(v, \vartheta, \theta, \alpha)$, pričom odpovedajúci vektor $\vec{v}(v, \vartheta, \theta)$ je definovaný len tromi z nich. Kartézske súradnice tohto vektoru sú

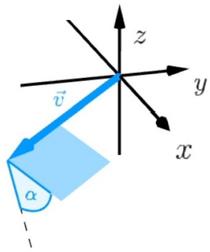
$$v_x = v \sin\vartheta \cos\theta = ... = \psi_1\psi_2^* + \psi_1^*\psi_2$$

$$v_y = -v \sin\vartheta \sin\theta = ... = i(\psi_1\psi_2^* - \psi_1^*\psi_2)$$

$$v_z = v \cos\vartheta = ... = |\psi_1|^2 - |\psi_2|^2$$

V smeroch osi $z$ ($\vartheta = 0$, resp. $\pi$) sa $\vec{v}$ projektuje do spinoru $\psi$ ako

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{v}\, e^{i(\alpha+\theta)/2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -v \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{v}\, e^{i(\alpha-\theta)/2} \end{pmatrix}$$




Parameter $\alpha$ je pre vektor *ľubovoľný*. Do reálneho 3D priestoru ho však môžeme projektovať ako ďalší stupeň voľnosti - *orientáciu* plochy „vlajky“ *pevne* pripnutej na vektor $\vec{v}$ (otáčajúcej sa spolu s ním) vzhľadom na referenčnú rovinu (napr zvislú).

Zmenou uhlu $\theta$ o 360° sa vektor $\vec{v}$ *úplne* otočí okolo osi $z$, a zmenou uhlu $\alpha$ o 360° sa *úplne* otočí aj s „vlajkou“ okolo *svojej* osi. V oboch prípadoch sa komplexná rovina otočí o 180°, a obe zložky spinoru *zmenia znamienko* ($e^{i\pi} = -1$). Znamená to, že spinory $\psi$ aj $-\psi$ sa do reálneho 3D priestoru premietajú *rovnako*, táto projekcia je teda 2:1.

# G Spinorová metrika a symbolika.

Analogicky ako v prípade duálneho zápisu štvorvektorov, aj v prípade spinorov definujeme ich *kontra-* a *kovariantný* tvar

$$\chi^a = \begin{pmatrix} \chi^1 \\ \chi^2 \end{pmatrix} \qquad \chi_a = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \epsilon_{ab}\chi^b = \begin{pmatrix} -\chi^2 \\ \chi^1 \end{pmatrix} \qquad \chi^a = \epsilon^{ab}\chi_b \qquad a, b = 1, 2$$

kde

$$\epsilon^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \epsilon \qquad \epsilon_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \epsilon^{-1}$$

je tzv. **spinorová metrika**. V tomto formalizme elegantne definujeme **skalárny súčin** spinorov

$$\chi^a\xi_a = \chi^1\xi_1 + \chi^2\xi_2 = -\chi^1\xi^2 + \chi^2\xi^1$$

Odtiaľ vyplýva dôležitý záver, že *skalárny súčin spinorov je antikomutatívny*

$$\underline{\chi^a\xi_a = -\xi^a\chi_a}$$

Keďže zložky spinorov sú *komplexné* čísla, definujeme *komplexne združené* spinory, a to v zaužívanom označení (bodka nad indexom = komplexné združenie)

$$(\chi^a)^* = \chi^{\dot{a}} \qquad (\chi_a)^* = \chi_{\dot{a}} \qquad \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} = \epsilon^{ab} \qquad \epsilon_{\dot{a}\dot{b}} = \epsilon_{ab}$$

Konvenčne v tomto označení pre chirálne *ľavo*ruký spinor používame *ko*variantný tvar, $\chi_L = \chi_a$. Lorentzovsky sa transformuje (kap. II.4.3) v reprezentácii $\Lambda_{(\frac{1}{2},0)}(\vec{\omega}) = e^{i\vec{\omega}\cdot\vec{\sigma}/2}$, kde $\vec{\omega} = \vec{\theta} - i\vec{\phi}$. Spinor *komplexne združený* k chirálne *ľavo*rukému sa potom transformuje ako

$$\chi_L^* = \chi_{\dot a} \underset{\Lambda}{\rightarrow} \chi'_{\dot a} = (\chi'_a)^* = \Bigg(\underbrace{\left(e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}/2+\vec{\phi}\cdot\vec{\sigma}/2}\right)_a^{\ b}}_{\Lambda_{(\frac{1}{2},0)}}\Bigg)^* \chi_b^* = \left(e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}^*/2+\vec{\phi}\cdot\vec{\sigma}^*/2}\right)_{\dot a}^{\ \dot b} \chi_{\dot b}$$

pričom platí

$$\vec{\sigma}^* = (\sigma_1, -\sigma_2, \sigma_3) \qquad \epsilon\sigma_i^*\epsilon^{-1} = -\sigma_i \qquad \epsilon\vec{\sigma}^*\epsilon^{-1} = -\vec{\sigma}$$

Definujme nový spinor v tvare

$$\tilde{\chi}_L := \epsilon^{ab}(\chi_L)^* = \epsilon^{ab}\chi_{\dot b} = \chi^{\dot a}$$

a pomocou rovnosti $\epsilon\Lambda(\vec{\omega})\epsilon^{-1} = \Lambda(\epsilon\vec{\omega}\epsilon^{-1})$ dostaneme transformačný vzťah

$$\tilde{\chi}_L \underset{\Lambda}{\rightarrow} \ldots = \underbrace{\left(e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}/2-\vec{\phi}\cdot\vec{\sigma}/2}\right)_{\dot a}^{\ \dot b}}\chi_{\dot b}$$

v čom spoznáme reprezentáciu $\Lambda_{(0,\frac{1}{2})}(\vec{\omega}) = e^{i\vec{\omega}^*\cdot\vec{\sigma}/2}$ - spinor $\tilde{\chi}_L$ sa transformuje ako - a teda *je* - chirálne *pravo*ruký, $\tilde{\chi}_L = \chi^{\dot a} = \chi_R$, konvenčne vyjadrený v *kontra*variantnom tvare.

Analogicky, komplexne konjugovaný chirálne *pravo*ruký spinor sa transformuje ako

$$\chi_R^* = \chi^a \underset{\Lambda}{\rightarrow} \chi'^a = (\chi'^{\dot a})^* = \Bigg(\underbrace{\left(e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}/2-\vec{\phi}\cdot\vec{\sigma}/2}\right)^{\dot a}_{\ \dot b}}_{\Lambda_{(0,\frac{1}{2})}}\Bigg)^* \left(\chi^{\dot b}\right)^* = \left(e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}^*/2-\vec{\phi}\cdot\vec{\sigma}^*/2}\right)^a_{\ b}\chi^b$$

a nový spinor

$$\tilde{\chi}_R := \epsilon_{ab}(\chi_R)^* = \epsilon_{ab}(\chi^{\dot b})^* = \chi_a$$

bude chirálne *ľavo*ruký. V tomto zmysle sú chirálne ľavo- a pravoruké spinory navzájom *komplexne konjugované.* (Chirálnu pravorukosť symbolizuje *bodka* nad indexom, poloha indexu je konvenciou.) Platí

$$\chi_L^* = \chi_a^* = \chi_{\dot a} \qquad \epsilon^{ab}\chi_L = \epsilon^{ab}\chi_b = \chi^a \qquad \chi_R^* = (\chi^{\dot a})^* = \chi^a \qquad \epsilon_{ab}\chi_R = \epsilon_{ab}\chi^{\dot b} = \chi_{\dot a}$$

$$\tilde{\chi}_L := \epsilon^{ab}\chi_L^* = \epsilon^{ab}\chi_b^* = \chi^{\dot a} = \chi_R \qquad \text{alebo} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi_{L1}^* \\ \chi_{L2}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_{L2}^* \\ -\chi_{L1}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_{R1} \\ \chi_{R2} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\chi}_R := \epsilon_{ab}\chi_R^* = \epsilon_{ab}(\chi^{\dot b})^* = \chi_a = \chi_L \qquad \text{alebo} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi_{R1}^* \\ \chi_{R2}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\chi_{R2}^* \\ \chi_{R1}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_{L1} \\ \chi_{L2} \end{pmatrix}$$

a súvis medzi spinorovými reprezentáciami je

$$\underline{\epsilon\left(\Lambda_{(\frac{1}{2},0)}(\vec{\omega})\right)^*\epsilon^{-1} = \Lambda_{(0,\frac{1}{2})}(\vec{\omega}^*)}$$

Pri lorentzovskej transformácií sa zachováva skalárny súčin spinorov[80] *rovnakej reprezentácie*[81]

$$(\chi_R)^\dagger\chi_L = (\chi_R^*)^T\chi_L = (\chi^a)^T\chi_a \underset{\Lambda}{\rightarrow} \left(\left(e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}^*/2-\vec{\phi}\cdot\vec{\sigma}^*/2}\right)^a_{\ b}\chi^b\right)^T \left(e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}/2+\vec{\phi}\cdot\vec{\sigma}/2}\right)_a^{\ c}\chi_c =$$

[80] Pri skalárnom súčine spinorov jeden z nich musí byť transponovaný. V označení $(\chi^a)^T\chi_a$ sa symbol $T$ zvykne vynechať, ak však spinor $(\chi^a)^T$ transformujeme, musíme transponovať transformačný predpis.
[81] Platí $(\sigma^*)^T = \sigma^\dagger = \sigma$.

$$= \left(\chi^b\right)^T \left(e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}/2-\vec{\phi}\cdot\vec{\sigma}/2}\right)^a_b \left(e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}/2+\vec{\phi}\cdot\vec{\sigma}/2}\right)^c_a \chi_c = \left(\chi^a\right)^T \chi_a$$

Výraz $V_{a\dot{b}}$ z kap. II.4.3 sa transformuje v reprezentácii $\Lambda_{(\frac{1}{2},0)\otimes(0,\frac{1}{2})}$ ako

$$V_{a\dot{b}} \to V'_{c\dot{d}} = \Lambda_{(\frac{1}{2},0)} \left(\Lambda_{(\frac{1}{2},0)}\right)^* V_{a\dot{b}} = \left(e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}/2+\vec{\phi}\cdot\vec{\sigma}/2}\right)^a_c V_{a\dot{b}} \left(\left(e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}^*/+\vec{\phi}\cdot\vec{\sigma}^*/2}\right)^{\dot{b}}_{\dot{d}}\right)^T =$$

$$\underset{(\sigma^*)^T=\sigma^\dagger=\sigma}{=} \left(e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}/2+\vec{\phi}\cdot\vec{\sigma}/2}\right)^a_c V_{a\dot{b}} \left(e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}/+\vec{\phi}\cdot\vec{\sigma}/2}\right)^{\dot{b}}_{\dot{d}}$$

# H Cesta k Diracovej rovnici.

Relativistické diferenciálne (vlnové) rovnice 2. rádu (akou je KGR) nepodporujú *pravdepodobnostnú* interpretáciu vlnových funkcií (výrazy ašpirujúce na hustotu pravdepodobnosti nie sú *pozitívne definitné*). Riešenie tohto problému spočíva v nájdení relativistickej diferenciálnej rovnice 1. rádu, ktorá však spĺňa relativistický vzťah (z ktorého vychádza KGR)

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2c^2 \qquad \text{resp.} \qquad p^\mu p_\mu = m^2c^2$$

Využijeme skutočnosť, že pomocou Pauliho matíc, spĺňajúcich podmienky

$$\{\sigma_j, \sigma_k\} = \sigma_j\sigma_k + \sigma_k\sigma_j = 2\delta_{jk}$$

dokážeme pre *ľubovoľný* vektor, vrátane $\vec{p}$, napísať[82]

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}) = (\vec{p}\cdot\vec{p})\mathbb{1} = \vec{p}\cdot\vec{p}$$

Pre *ne*hmotné pole ($m = 0$), t.j. v *ultra*relativistickej limite, potom platí

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}\cdot\vec{p} = \frac{E^2}{c^2} - (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2 = \left(\frac{E}{c} + \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\right)\left(\frac{E}{c} - \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\right) = 0$$

s riešeniami $\vec{\sigma}\cdot\vec{p} = \pm\frac{E}{c}$. Prechodom k operátorom dostávame dve samostatné rovnice pre *dvoj*komponentné Weylove spinory opačnej chirality/helicity (kap. III.2.4).

Pre *hmotné* polia však faktorizácia výrazu $p^\mu p_\mu - m^2c^2$ už nie je možná pomocou $\sigma$-matíc $2\times 2$, ale pomocou matíc $\gamma$-matíc $4\times 4$, spĺňajúcich podmienky

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}$$

a pomocou ktorých vieme zapísať veľkosť štvorvektoru ako

$$p^\mu p_\mu = \gamma^\mu p_\mu \gamma^\nu p_\nu$$

Potom

$$p^\mu p_\mu - m^2c^2 = (\gamma^\mu p_\mu + mc)(\gamma^\mu p_\mu - mc) = 0$$

a prechodom k operátorom dostávame DIR pre štvorkomponentné bispinory $\psi$ a $\bar{\psi}$ (kap. III.2.1).

[82]Výraz $\vec{\sigma}\cdot\vec{p}$ je skalárom vo fyzickom priestore ale maticou $2\times 2$ v spinorovom priestore. Môže vyvstať otázka, prečo potrebujeme na faktorizáciu takýto výraz namiesto $\vec{p}\cdot\vec{p} = p^2$. Faktorizácia $p^2$ by viedla na *skalár* $p$, ktorému *nedokážeme priradiť operátor* (operátor hybnosti je generátorom priestorového posunutia, a teda vyžaduje zadaný smer). Uvedenému problému sa požartom hovorí „hľadanie odmocniny z operátoru“.

# I Odvodenie Maxwellových rovníc.

*Nehomogénne* MXR *bez* zdrojov v najznámejšom tvare odvodíme z relativistického vzťahu (kap. III.3.2) pre elektromagnetický tenzor $F^{\mu\nu}$

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_0 F^{0\nu} + \partial_j F^{j\nu} = 0 \qquad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c \\ E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2/c & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3/c & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nu = k: \quad \partial_0 F^{0k} + \partial_j F^{jk} = -\partial_0 E_k/c + \epsilon_{kjl}\partial_j B_l = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\nabla \times \vec{B} - \partial_t \vec{E}/c^2 = 0}$$

$$\nu = 0: \quad \partial_0 F^{00} + \partial_j F^{j0} = 0 + \partial_j E_j/c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\nabla \cdot \vec{E} = 0}$$

V prítomnosti zdrojov $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$ (kap. IV.2.1) by pravé strany obsahovali zložky štvorprúdu $\mu_0 j^\mu$.

Definujme teraz **duálny elektromagnetický tenzor**

$$G^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}F_{\sigma\rho} = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & E_3/c & -E_2/c \\ B_2 & -E_3/c & 0 & E_1/c \\ B_3 & E_2/c & -E_1/c & 0 \end{pmatrix}$$

pre ktorý platia **homogénne MXR**

$$\underline{\partial_\mu G^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_\mu \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) = ... = 0}$$

$$\nu = k: \quad \partial_0 G^{0k} + \partial_j G^{jk} = -\partial_0 B_k - \epsilon_{kjl}\partial_j E_l = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0}$$

$$\nu = 0: \quad \partial_0 G^{00} + \partial_j G^{j0} = 0 + \partial_j B_j = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\nabla \cdot \vec{B} = 0}$$

# J Hračkársky model finančného kalibračného poľa.

Uvažujme *kruhovú zmenu peňazí* (peniaze za peniaze) podľa nasledujúcej schémy: Majme 4 krajiny (*súradnice*) s rôznou menou $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

$$\begin{array}{ccc} \delta : (x, y+dy) & \leftarrow & \gamma : (x+dx, y+dy) \\ \downarrow & & \uparrow \\ \alpha : (x,y) & \rightarrow & \beta : (x+dx, y) \end{array}$$

a v nich 4 zmenárne so zmenami mien v daných kurzoch $Z_\rightarrow(x,y) = \frac{\beta}{\alpha}$, atď.

$$\begin{array}{ccc} Z_\downarrow(x, y+dy) & \leftarrow & Z_\leftarrow(x+dx, y+dy) \\ \downarrow & & \uparrow \\ Z_\rightarrow(x,y) & \rightarrow & Z_\uparrow(x+dx, y) \end{array}$$

Bilancia v $(x, y)$ po uzavretí kruhu $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \rightarrow \delta \rightarrow \alpha$ je

$$B(x,y) = Z_\rightarrow(x,y) \cdot Z_\uparrow(x+dx,y) \cdot Z_\leftarrow(x+dx,y+dy) \cdot Z_\downarrow(x,y+dy)$$

Upravmeme označenia zmenných kurzov podľa smeru osí:

$$Z_{\rightarrow}(x,y) = Z_x(x,y) \qquad\qquad Z_{\leftarrow}(x+dx,y+dy) = Z_{-x}(x+dx,y+dy) = \frac{1}{Z_x(x,y+dy)}$$

$$Z_{\uparrow}(x+dx,y) = Z_y(x+dx,y) \qquad\qquad Z_{\downarrow}(x,y+dy) = Z_{-y}(x,y+dy) = \frac{1}{Z_y(x,y)}$$

$$B(x,y) = \frac{Z_x(x,y)\cdot Z_y(x+dx,y)}{Z_x(x,y+dy)\cdot Z_y(x,y)}$$

Ak by táto bilancia bola rovná 1, úloha zmenární by bola čisto *pasívnou*. Z praxe však vieme, že to tak *nie je*.

Definujme logaritmy:

$$A = \ln Z \quad (Z = e^A) \qquad\qquad F = \ln B \quad (B = e^F)$$

$$F(x,y) = ... = [A_y(x+dx,y) - A_y(x,y)] - [A_x(x,y+dy) - A_x(x,y)]$$

čo prechodom od 2D mriežky ku spojitej 2D resp. 4D limite prejde na

$$F(x,y) = \partial_x A_y - \partial_y A_x \qquad\qquad \underline{F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu}$$

(Nulté zložky štvorvektorov tu znamenajú obchodovanie *v čase* - nákup a predaj v rôznych časoch na rovnakom mieste.)

Pripusťme *lokálnu kalibráciu* (devalváciu/revalváciu) meny v jednotlivých krajinách (napr. škrtanie núl):

$$\alpha \rightarrow G(x,y)\alpha \qquad \beta \rightarrow G(x+dx,y)\beta \qquad \gamma,\delta \text{ analogicky}$$

Zmenné kurzy po kalibráciách prejdú na

$$Z_x(x,y) = \frac{\beta}{\alpha} \rightarrow \frac{G(x+dx,y)}{G(x,y)} Z_x(x,y) \qquad \text{atď.}$$

Definujme logaritmus $\Lambda = \ln G \quad (G = e^\Lambda)$ :

$$A_x(x,y) \rightarrow A_x(x,y) + \Lambda(x+dx,y) - \Lambda(x,y) \quad \rightarrow \quad \underline{A_x(x,y) + \partial_x\Lambda(x,y)}$$

Lokálna kalibrácia mien *nemôže* ovplyvniť bilanciu po uzavretí kruhu ($\oint \nabla\Lambda \cdot \vec{dl} = 0$) - $B$ a $F$ sú *kalibračne invariantné* (fyzikálne), a *ne*nulovosť $F$ je dôsledkom *aktívnej* úlohy zmenární.

Uvažujme teraz *obchodovanie tovaru*. Ak $T$ je zmena tovaru na peniaze (predaj komodity), potom $\frac{1}{T}$ je zmena peňazí na tovar (nákup komodity). Predpokladajme nákup v krajine $(x,y)$ v mene $\alpha$, jej predaj v krajine $(x+dx,y)$ v mene $\beta$ a spätnú konverziu meny $\beta \rightarrow \alpha$:

Výsledná bilancia je

$$B'(x,y) = \frac{T(x+dx,y)}{T(x,y)Z_x(x,y)}$$

Opäť zaveďme logaritmy

$$\varphi = \ln T \quad (T = e^\varphi) \qquad\qquad F' = \ln B' \quad (F' = e^{B'})$$

$$F'_x(x,y) = \varphi(x+dx,y) - \varphi(x,y) - A_x(x,y) \quad \rightarrow \quad \partial_x\varphi(x,y) - A_x(x,y)$$

Aj keby by šlo o nákup a predaj *v tej istej mene*, tj. $A_x = 0$, potom by $F'_x \neq 0$ nepochybne znamenalo vznik gradientu danej komodity ($\varphi$) - tovar by sa hromadil na miestach výnosnejšej obchodovateľnosti. $F'$ má teda vo všeobecnosti ($A \neq 0$) fyzikálny význam gradientu $\varphi$ pri aktívnej účasti zmenární, s novým označením

$$F' \quad \rightarrow \quad \underline{D_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi - A_\mu}$$

Ak by sa ktorákoľvek centrálna banka rozhodla pre kalibráciu meny, prejavilo by sa to na oboch členoch výrazu rovnako,

$$D_\mu \varphi \rightarrow (\partial_\mu \varphi + \partial_\mu \Lambda) - (A_\mu + \partial_\mu \Lambda) = D_\mu \varphi$$

Takto definovaný gradient poľa $\varphi$ je teda *kalibračne invariantný*.

# K Metóda Greenových funkcií.

Základom tejto metódy je fakt, že ľubovoľnú *skalárnu* funkciu $\Gamma(x_\mu)$ na pravej strane *lineárnej* diferenciálnej rovnice pre skalárne pole $\phi(x_\mu)$

$$\mathcal{D}\phi(x_\mu) = \Gamma(x_\mu)$$

vieme vyjadriť pomocou Diracovej $\delta$-funkcie ako

$$\Gamma(x_\mu) = \int \Gamma(x'_\mu)\delta(x_\mu - x'_\mu) d^4x'$$

čiže ľubovoľný priebeh funkcie vieme rozložiť a spätne „skomponovať“ pomocou $\delta$-píkov s „váhou“ $\Gamma(x'_\mu)$. Linearita pohybovej rovnice zaručí, že jej riešenie je *superpozíciou* čiastkových riešení pre pravé strany v podobe jednotlivých $\delta$-píkov,

$$\mathcal{D}\phi_G(x_\mu, x'_\mu) = \delta(x_\mu - x'_\mu)$$

Tieto čiastkové - *fundamentálne* - riešenia $\phi_G(x_\mu, x'_\mu)$ nazývame **Greenovými funkciami** príslušnej diferenciálnej rovnice. Riešenie rovnice s pravou stranou $\Gamma(x_\mu)$ je potom

$$\underline{\phi(x_\mu) = \int \Gamma(x'_\mu)\phi_G(x_\mu, x'_\mu) d^4x'}$$

Ako príklad uveďme Greenovu funkciu KGR

$$\phi_G(x_\mu, x'_\mu) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{m_\phi^{*2} - k_\mu k^\mu} e^{-ik^\mu(x_\mu - x'_\mu)} d^4k$$