

CESTA K MODERNEJ FYZIKE



Michal Mahel'

Bratislava
2025

Úvod

Klasická fyzika sa zrodila z úsilia generácií mysliteľov, pozorujúcich Prírodu a snažiacich sa uhádnuť jej zákonitosti. Snaha sformulovať nájdené, tušené či pochopené zákonitosti do zrozumiteľných *výrokov* si vynucovala potrebu definovať základné *pojmy* - akési stavebné kocky, z ktorých bolo možné takéto výroky poskladať. S istou dávkou zjednodušenia histórie môžeme tvrdiť, že to, čo po stáročia odlišovalo „fyzikov“ od „mystikov“ či „ezoterikov“, bolo hľadanie inšpirácie pre voľbu základných pojmov v nepredpojatom *pozorovaní* Prírody, a nie v mystických a náboženských predstavách (čo však nemuselo nevyhnutne znamenať odklon alebo rozpor s týmito predstavami). Napríklad zmyslové vnímanie vecí rozmiestnených v priestore a neustále sa meniacich takto viedlo k zrodu dvoch základných pojmov klasickej fyziky - **polohy** v priestore a **času** ako „súradnice okamihu“ v plynutí udalostí.

Zrod fyziky takej ako ju vnímame dnes nastal ruka v ruke s požiadavkou zákonitostiam Prírody nielen porozumieť, ale dokázať ich aj *kvantifikovať*, t.j. vyjadriť v číselných mierach. Každý zo základných fyzikálnych pojmov musel odvtedy „zniest“ dve otázky: „*Čo je to?*“ a „*Kolko je toho?*“. Géniovia ako I. Newton, G.W. Leibniz a ďalší súbežne s fyzikou rozvíjali matematický aparát ako nástroj poskytujúci jednoznačné odpovede na otázky „*Kolko ...?*“. Pre pojmy *čas* a *priestor* tieto požiadavky prirodzene viedli k ich *univerzálnosti* - stali sa „javiskom s nástennými hodinami“, v ktorom boli rozmiestnené všetky fyzické objekty a odohrávali sa tu všetky fyzikálne deje. Táto univerzálnosť pritom nebola nijako narušená výberom súradnicových sústav a časomier.

Ďalšími fundamentálnymi pojmami, ktoré sa postupne etablovali vo fyzike, boli **hybnosť** a **energia**. Motivovaná pozorovaním Prírody (napr. skál rútiacich sa dolu svahom) sa prirodzeným kvantifikátorom „množstva pohybu“ (*quantitas motus*, R. Descartes, I. Newton) ukazovala byť hybnosť $\vec{p} = m\vec{v}$, a kvantifikátorom schopnosti hmoty konať mechanickú prácu (napr. roztrhnúť kotol) - akejsi „živej sily“ (*vis viva*, G.W. Leibniz) schovanej vo vnútri hmoty - energia (pohybová, polohová, tepelná,...). Ani rozvoj matematických metód vo fyzike, sprevádzaný definovaním abstraktnejších pojmov ako lagrangian či Hamiltonova funkcia, neznamenal odklon fyziky od „hmatateľných“ prejavov Prírody - tieto nové pojmy ostali skĺbené s pôvodnými, majúcimi empiricky zrozumiteľný a *predstaviteľný* obsah.

Toto sa však zmenilo s príchodom 20. storočia a rozvojom nových experimentálnych techník prinášajúcich objavy (nespochybniteľné výsledky meraní), ktoré do jestvujúcich fyzikálnych schém nezapadali. Dnes už chápeme, že jadro problému nespočívalo ani tak v chybnosti schém, ale skôr v *obmedzenej použiteľnosti základných pojmov*. Ukázalo sa, že ak chceme Prírodu chápať čoraz detailnejšie, a konfrontovať toto naše chápanie s výsledkami experimentov, ktorých citlivosť leží *hlboko pod prahom nášho zmyslového vnímania*, nevystačíme si už s pojmami vytvorenými v minulosti len na základe našej zmyslovej skúsenosti. Toto poznanie však prichádzalo postupne a kľukatými cestami, čo sťažovalo (a dodnes sťažuje) fyzikom odhodlanie odpútať sa od starých pojmov, ktoré navyše veľmi dobre slúžia v klasickej fyzike. Neostáva nám teda nič iné, než do týchto starých pojmov vliať nový, všeobecnejší obsah (zahrňujúci pôvodný len ako limitný „klasický“ prípad). Daň, ktorú pritom musíme zaplatiť, je odklon od „hmatateľných“ predstáv k abstraktnejším, často uchopiteľným len pomocou matematického formalizmu. Veľmi často to dokonca vyvoláva aj pocit odklonu od „zdravého rozumu“. Naozajstný zdravý rozum nám však velí držať sa experimentálnych faktov (za predpokladu, že sú získané korektne, overiteľne a nespochybniteľne), a dôsledne im prispôbiť naše predstavy o

Prírode, nech by sa na prvý pohľad javili akokoľvek bizarnými.

Obľúbené učebnice úvodu do modernej fyziky (Beiser: *Concepts of Modern Physics* alebo Serway, Moses, Moyer: *Modern Physics*) pútavým a prístupným spôsobom opisujú historický sled kľúčových experimentov a s tým súvisiaci vývoj fyzikálnych predstáv. Vývoj sa však nikdy nevyhne omylom a slepým uličkám, a aj keď chronologický prístup má nepochybné čaro pre záujemcov o *vývoj* poznania, pre študentov fyziky budujúcich si *prvé predstavy* o „nepredstaviteľných“ vlastnostiach sveta mimo hraníc zmyslového vnímania takýto prístup môže byť kontraproduktívnym. Na miestach vyžadujúcich interpretáciu preto tento text dôsledne prezentuje *súčasný* pohľad, a historicky prekonané interpretácie komentuje len okrajovo. Predovšetkým však nabáda čitateľa nepodľahnúť pokušeniu za každú cenu vtesnávať modernú fyziku do *klasických* predstáv, ale vychádzajúc z prezentovaných experimentálnych faktov hľadať a prijímať vysvetlenia minimalizujúce zložitosť opisu (podľa tzv. princípu Occamovej britvy), hoci aj na úkor ich predstaviteľnosti a „prirodzenosti“.

Text v žiadnom prípade nie je učebnicou teórie relativity, kvantovej či atómovej fyziky - túto úlohu prenecháva dostupným kvalitným učebniciam. Takisto nekonkuruje spomínaným učebniciam úvodu do modernej fyziky v ich opise kľúčových experimentov či technických aplikácií. Nekopíruje ani šírku ich záberu - naopak, rozširuje tento záber o témy, ktoré podľa názoru autora *doplňajú a sceľujú* obraz modernej fyziky. Na úrovni základných kurzov totiž nevyhnutne, a z pochopiteľných dôvodov, ostávajú mnohé otázky nezodpovedané. Pre začiatočníka dychtiaceho po poznaní tak vznikajú „biele miesta na mape“, ktoré sa snaží vyplniť *pomocou vlastnej predstavivosti a prirodzenej intuície*. Obe však v prípade modernej fyziky zlyhávajú, a rodiaci sa obraz môže byť deformovaný.

Základným cieľom textu je zdôrazniť, že moderná fyzika nie je fyzikou *inou* (oproti klasickej) ale len *zovšeobecnenou*. Akokoľvek bizarné sú obrazy, ktoré nám moderná fyzika ponúka, v limite „bežných každodenných“ škál musia splynúť s klasickým obrazom. Hoci všetky zákonitosti klasickej fyziky sú jednoznačne a *jednosmerne odvoditeľné* zo zákonov - postulátov modernej fyziky, v tomto texte zväčša postupujeme „v protismere“. Míľnikmi na tejto ceste sú pre nás kľúčové experimenty, a majúkom na jej konci je súčasný obraz, oprostý od generáciami zaužívaných ale dnes už prekonaných predstáv, a tento obraz sa budeme snažiť (tak trochu riadene) „uhádnuť“. Na tejto ceste budeme postupne revidovať (v zmysle *zovšeobecnenia* ich obsahu) základné fyzikálne pojmy, akými sú *poloha, čas, hybnosť, energia, hmotnosť* či *náboj*, vrátane tých najzákladnejších fyzikálnych pojmov - *hmotná častica* a jej *pohyb*. V texte sa striedajú kapitoly bohatšie na matematický aparát s kapitolami s obsiahlym slovným komentárom. Obsahom prvých sú témy, pri ktorých práve matematický opis ponúka najvýstižnejší a zrozumiteľný výklad. V prípade tých druhých ide o témy atakujúce skôr našu predstavivosť, a pri ktorých by formálny (aj keď exaktný) matematický aparát mohol pôsobiť ako neprimeraná záťaž.

Znalému čitateľovi isto neunikne množstvo zjednodušení a nepresností, prítomných kvôli autorovej snahe nezaťažovať čitateľa-začiatočníka prílišnými detailami. Pre neúmyselné nepresnosti autor výhovorku nemá.

Obsah

I	CESTA K RELATIVISTICKEJ FYZIKE	1
I.1	Relativita priestoru a času.	1
I.1.1	Lorentzove transformácie.	1
I.1.2	Časopriestor a štvorvektory.	3
I.1.3	Relativita súčasnosti.	4
I.2	Relativistická kinematika a dynamika.	5
I.2.1	Transformácie a skladanie rýchlostí.	5
I.2.2	Vlastná rýchlosť telesa.	7
I.2.3	Relativistická hybnosť telesa.	7
I.2.4	Relativistické pohybové zákony.	9
I.2.5	Relativistická hybnosť kontinua.	11
I.3	Relativita elektromagnetizmu.	12
I.3.1	Transformácie elektromagnetického poľa.	12
I.3.2	Elektromagnetický potenciál.	14
I.3.3	Energia a hybnosť elektromagnetického poľa.	15
I.3.4	Elektromagnetická hybnosť náboja.	16
I.3.5	Čo je to vlastne hybnosť?	18
I.4	Od špeciálnej relativity ku všeobecnej.	20
I.4.1	Princíp ekvivalencie.	20
I.4.2	Metrika zakriveného časopriestoru.	21
I.4.3	Gravitačné Maxwelllove rovnice.	23
II	CESTA KU KVANTOVEJ FYZIKE	25
II.1	Fotón.	25
II.1.1	Šírenie svetla ako interferencia vln.	25

II.1.2	Interferujúci fotón.	26
II.1.3	Fotón ako kvantum energie.	29
II.1.4	Je fotón časticou?	31
II.1.5	Spin fotónu.	33
II.1.6	Polarizácia svetla.	34
II.1.7	Polarizácia fotónu.	37
II.2	Kvantová previazanosť.	38
II.2.1	Vlnová funkcia.	38
II.2.2	Princípy korešpondencie a komplementarity.	40
II.2.3	Skryté premenné a Bellove nerovnosti.	42
II.2.4	Experimenty s oneskorenou voľbou.	44
II.2.5	Symetrickosť vlnovej funkcie.	46
II.3	Elektrón.	48
II.3.1	Duálny charakter elektrónu.	48
II.3.2	Princíp neurčitosti.	50
II.3.3	Interferencia elektrónov na sústave štrbín.	51
II.3.4	Pohybová rovnica elektrónu.	52
II.3.5	Časový vývoj elektrónu.	54
II.3.6	Je elektrón časticou?	57
II.4	Náčrt formalizmu kvantovej mechaniky	58
II.4.1	Stavy a reprezentácie.	58
II.4.2	Operátory.	60
II.4.3	Operátory v súradnicovej reprezentácii.	63
II.4.4	Komutátory a transformácie.	64
II.4.5	Ehrenfestova teoréma.	66
II.4.6	Operátory momentu hybnosti.	67
II.4.7	Elektromagnetický potenciál v kvantovej mechanike.	69
II.4.8	Kvantovanie elektromagnetického poľa.	71
II.5	Relativistická častica.	73
II.5.1	Kleinova-Gordonova rovnica.	73

II.5.2	Častica a antičastica.	74
II.5.3	Diracova rovnica.	75
II.5.4	Operátor spinu.	77
II.5.5	Interpretácia spinu.	79
II.5.6	Pauliho vylučovací princíp.	81
II.6	Spinový magnetický moment.	81
II.6.1	Pauliho rovnica.	81
II.6.2	Precesia magnetického momentu.	82
II.6.3	Spinová polarizácia a interferencia.	83
III	CESTA K ATOMOVEJ FYZIKE	86
III.1	Atóm.	86
III.1.1	Základný model atómu.	86
III.1.2	Atómové orbitály.	88
III.1.3	Periodická tabuľka prvkov.	90
III.1.4	Chemická väzba a molekuly.	91
III.1.5	Stimulovaná a spontánna emisia a absorpcia.	92
III.1.6	Výberové pravidlá pri kvantových preskokoch.	94
III.2	Jadrové sily.	96
III.2.1	Fundamentálne interakcie.	96
III.2.2	Kvarky, gluóny a hadróny.	98
III.2.3	Nukleóny.	99
III.2.4	Slabá jadrová interakcia a leptóny.	100
III.3	Premeny atómového jadra.	101
III.3.1	Stabilita jadier.	101
III.3.2	Spontánny rádioaktívny rozpad jadier.	103
III.3.3	Štiepenie a syntéza jadier.	104
DODATKY		106
A	Skalárny a vektorový potenciál.	106
B	Tok energie v okolí prúdovodiča.	107

C	Maxwellov tenzor napätia.	107
D	Interferencia svetla na sústave štrbín.	108
E	Planckov zákon.	109
F	Comptonov jav.	110
G	Moment hybnosti elektromagnetickej vlny.	111
H	Stupne voľnosti elektromagnetickej vlny.	111
I	Machov-Zehnderov interferometer.	112
J	Bellove nerovnosti.	113
K	Vlnový balík a grupová rýchlosť.	114
L	Difrakcia vlny na štrbine.	115
M	Schrödingerova rovnica.	116
N	Dopad elektrónu na potenciálový skok.	116
O	Unitárne transformácie operátorov.	118
P	Kvantovanie operátorov momentu hybnosti.	119
Q	Znižovací a zvyšovací operátor.	120
R	Moment hybnosti Diracovho poľa.	121
S	Odvedenie Pauliho rovnice.	121

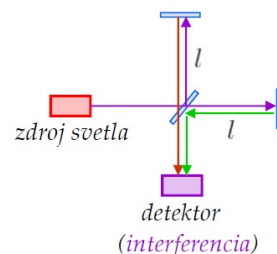
CESTA K RELATIVISTICKEJ FYZIKE

I.1 Relativita priestoru a času.

I.1.1 Lorentzove transformácie.

Završenie klasickej elektrodynamiky sformulovaním Maxwellových rovníc (r. 1862) prinieslo aj zásadný poznatok o povahe svetla: Svetlo je elektromagnetické (EM) vlnenie. Podľa vtedajších predstáv však každý druh vlnenia potrebuje ku svojmu šíreniu určité prostredie, a pre svetlo mal byť týmto prostredím **éter** - bližšie nešpecifikovaná substancija prestupujúca celým Vesmírom. Rýchlosť EM vlny $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$, vyplývajúca z Maxwellových rovníc, bola teda chápaná ako rýchlosť vzhľadom na éter. Nebolo pritom jasné, či sa Zem pri svojej rotácii pohybuje tiež vzhľadom na éter, alebo ho strháva so sebou. Rozhodnúť však mohli už vtedy pomerne presné merania rýchlosti svetla šíriaceho sa v rôznych smeroch, a vektorovo sa sčítavajúcej s rýchlosťou pohybu Zeme.

K tomu mal slúžiť Michelsonov-Morleyho interferometer. Polopriepustné zrkadlo v jeho strede rozdeľuje lúč zo zdroja do dvoch navzájom kolmých ramien rovnakej dĺžky l , zakončených zrkadlami. Pri rovnakej rýchlosti vo všetkých smeroch lúče odrazené z koncov oboch ramien interferujú na detektore *konštruktívne*. Pri pohybe interferometra voči éteru v smere jedného z ramien rýchlosťou u by malo dôjsť (v dôsledku skladania rýchlostí) k fázovému posuvu medzi interferujúcimi lúčmi a narušeniu konštruktívnej interferencie. Takýto výsledok však nikdy nebol zaznamenaný. (Detailnejšie sa interferenciou svetla zaoberá kap. II.1.1.)



Tento zásadný experimentálny poznatok je obsiahnutý v postulátoch **špeciálnej teórie relativity**,¹ vzťahujúcej sa na pozorovateľov v *inerciálnej* vzťažnej sústave - takej, v ktorej platí 1. Newtonov zákon:²

1. *Rýchlosť svetla vo vákuu je c (konštanta), bez ohľadu na pohybový stav pozorovateľov.*
2. *Neexistuje privilegovaná vzťažná sústava (éter). Základné rovnice fyziky majú rovnaký tvar vo všetkých inerciálnych sústavách.*

Invariantnosť rýchlosti svetla však rúca klasicke predstavy o priestore a čase. Predpokladajme pohyb Michelsonovho-Morleyho interferometra v smere jedného z ramien konštantnou rýchlosťou u . Pre pozorovateľa spojeného s interferometrom sú dráhy lúčov v oboch ramenách rovnaké, a na detektore nastáva konštruktívna interferencia (v súhlase s experimentami). Pre „klasického“ (newtonovského) pozorovateľa v stacionárnej *laboratórnej* sústave však lúč prechádzajúci polopriepustným centrálnym zrkadlom v smere pohybu interferometra musí preletieť vzdialenosť l zväčšenú o dráhu unikajúceho

¹Špeciálnu teóriu relativity sformuloval A. Einstein v r. 1905.

²*Teleso zotrúva v pokoji alebo priamočiarom rovnomernom pohybe, pokiaľ naň nepôsobí žiadna sila.* Pozorovateľ spojený s inerciálnou sústavou nepociťuje žiadnu zotrvačnú (pseudo)silu, ktorú by vyvolávalo zrýchlenie.

koncového zrkadla za čas t_1 , a po odraze naopak vzdialenosť zmenšenú o dráhu centrálného zrkadla približujúceho sa za čas t_2 .

$$ct_1 = l + ut_1 \Rightarrow t_1 = \frac{l}{c - u}$$

$$ct_2 = l - ut_2 \Rightarrow t_2 = \frac{l}{c + u}$$

Celková doba preletu pozdĺžnym ramenom je teda

$$t_1 + t_2 = \frac{\frac{2l}{c}}{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

Pre celkovú dobu preletu priečnym ramenom platí (podľa Pythagorovej vety)

$$(ct_3)^2 = l^2 + (ut_3)^2 \Rightarrow 2t_3 = \frac{\frac{2l}{c}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad \text{a teda} \quad \underline{t_1 + t_2 \neq 2t_3}$$

Časy dopadu lúčov *sa líšia* - tento výsledok narušuje konštruktívnu interferenciu. Experimentálny výsledok však *nemôže byť kvalitatívne odlišný* z pohľadu rôznych pozorovateľov! Tento paradox zanikne ak pripustíme *relatívne skrátenie* ramena *v smere pohybu* interferometra a z *pohľadu stacionárneho pozorovateľa*³ o faktor $\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$.

Vo všeobecnosti je teda dĺžka objektu *v smere jeho pohybu relatívna* (ako aj pohyb samotný). Pre pozorovateľa S' spojeného s objektom je tento objekt v pokoji, a jeho dĺžka je **vlastnou dĺžkou** l' . Laboratórny pozorovateľ S však pozoruje tzv. **FitzGeraldovu-Lorentzovu kontrakciu dĺžky** objektu v smere pohybu

$$l = x_2 - x_1 = (x'_2 - x'_1) \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{l'}{\gamma}$$

kde sme použili obvyklú relativistickú notáciu

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \beta = \frac{u}{c}$$

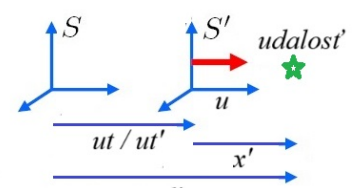
Vráťme sa k celkovej dobe preletu lúča priečnym ramenom interferometra. Pre pozorovateľa S' je to **vlastný čas** $T' = 2\frac{l'}{c}$, čo je *rôzne* od $T = 2t_3$ pre pozorovateľa S . Riešením tohto paradoxu je opäť *relatívne „spomalenie hodín“* v pohybujúcej sa sústave z *pohľadu laboratórnej sústavy* - **dilatácia času**

$$T = \gamma T'$$

Majme pritom na pamäti, že (v zmysle 2. postulátu) označenie jednej inerciálnej sústavy za laboratórnu a druhej za pohybujúcu sa je vzhľadom na relatívnosť ich vzájomného pohybu *zameniteľné*.⁴

Prechod od opisu v jednej inerciálnej sústave k opisu v druhej sa nazýva **Lorentzovou transformáciou**. Na základe uvedených vzťahov môžeme odvodiť transformačné vzťahy medzi priestorovými a časovými súradnicami určitej udalosti z pohľadu oboch sústav.

$$S : \quad x = ut + \frac{x'}{\gamma} \quad S' : \quad \frac{x}{\gamma} = ut' + x'$$



³Spôsob zmerania takéhoto skrátenia opíšeme v kap. I.1.3.

⁴Každý z dvojice takýchto pozorovateľov závidí tomu druhému, že stárne pomalšie.

Odtiaľ dostávame **Lorentzove transformačné vzťahy** (LTV) súradníc *v smere relatívneho pohybu* sústav

$$\underline{x' = \gamma(x - ut) = \gamma(x - \beta[ct])} \qquad \underline{x = \gamma(x' + ut') = \gamma(x' + \beta[ct'])}$$

Priestorové súradnice *kolmé* na smer vzájomného pohybu sústav sa transformáciou nemenia. LTV *časových* súradníc dostaneme eliminovaním x resp. x' v priestorových LTV,

$$\underline{ct' = \gamma(ct - \beta x)} \qquad \underline{ct = \gamma(ct' + \beta x')}$$

V limite malých rýchlostí $\beta = \frac{u}{c} \rightarrow 0$ dostávame $\gamma \rightarrow 1$, a LTV prejdú na klasické Galileove transformácie.

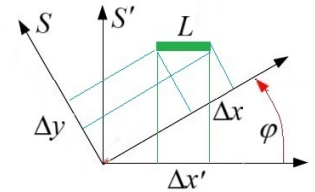
I.1.2 Časopriestor a štvorvektory.

LTV nám ukazujú, ako sa prechodom od jednej inerciálnej sústavy k druhej „miešajú“ priestorové a časové súradnice - priestorová zložka v jednej sústave je daná priestorovou *aj* časovou zložkou v druhej. Takáto transformácia pripomína rotáciu pravouhlých súradníc v rovine $x - y$ o uhol φ : x -ová zložka dĺžky tyče $\Delta x'$ v S' je kombináciu x -ovej a y -ovej zložky v (relatívne) pootočenej sústave S ,

$$\Delta x' = \Delta x \cos \varphi + \Delta y \sin \varphi \qquad (\Delta y' \text{ obdobne})$$

Súčasne platí, že pootočením sústavy sa dĺžka tyče nezmení, teda

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 = L^2 \qquad (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1)$$



Táto rovnica je formálne rovnicou *kružnice*, a teda rotácia súradnicovej sústavy v rovine je ekvivalentná pohybu po kružnici so stredom v spoločnom počiatku súradnicových sústav S a S' . Aj tu nájdeme podobnosť s LTV, z ktorých môžeme ukázať, že pre vzdialenosti dvoch udalostí v čase a priestore z pohľadu S aj S' platí

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (c\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = (\Delta s')^2 = \text{konst.}$$

Toto je pre zmenu rovnica *hyperboly*, a Lorentzova transformácia je teda ekvivalentná pohybu po hyperbole v rovine $x-ct$. Ak uvážime, že pre hyperbolické funkcie platí $\cosh^2 \phi - \sinh^2 \phi = 1$, nabáda nás to vyjadriť LTV analogicky ako bežné rotácie, no nahradením goniometrických funkcií v uvedených vzťahoch hyperbolickými. Potom⁵

$$\cosh \phi = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \qquad \sinh \phi = \beta\gamma \qquad \tanh \phi = \beta = \frac{u}{c} \in (-1, 1)$$

Celá táto úvaha nás vedie k tomu, že časovú os môžeme vnímať ako *fyzikálne rovnocennú* priestorovým, a náš 3D priestor môžeme rozšíriť na 4D **časopriestor**, v ktorom body priestoru („tu“) nahradzame časopriestorovými **udalosťami** („tu a teraz“). Jedinou netriviálnosťou takejto konštrukcie je, že na rozdiel od rovín $x-y$, $y-z$, $x-z$ geometria rovín $x-t$, $y-t$, $z-t$ *nie je* euklidovská. Hovoríme o **Minkowského metriku**. Experimenty však jednoznačne ukazujú, že náš časopriestor takým naozaj *je*.

Tak ako polohu bodu v 3D priestore (vzhľadom na počiatok súradnicovej sústavy) vyjadrujeme pomocou polohového vektora $\vec{r}$ so zložkami x, y, z (v kartézskych súradniciach), resp. x_j , $j = 1, 2, 3$

⁵Hyperbolický „uhol“ ϕ je tzv. **rapidita**. V pokročilejších cudzojazyčných textoch má pojem *Lorentzova transformácia* širší význam - zahrňuje aj čisto priestorové rotácie sústav. Slovenská terminológia však nemá samostatný výraz pre časopriestorové rotácie (angl. *boost*), preto v tomto texte uprednostníme užší význam tohto pojmu.

(všeobecne), polohu udalosti v časopriestore vyjadrujeme pomocou polohového **štvorvektora** x_μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$, so zložkami ct, x, y, z .⁶ Význam zavedenia štvorvektorov spočíva práve v tom, že pri lorentzovských transformáciách sa zachováva ich veľkosť (tým, že jednotlivé jeho zložky sa „prelievajú“ jedna do druhej) - veľkosť štvorvektora je tzv. **lorentzovským skalárom**.⁷

V euklidovskej metrike vieme veľkosť vektora (resp. jej kvadrát) elegantne vyjadriť pomocou skalárneho súčinu, $r^2 = \vec{r} \cdot \vec{r}$. V Minkowského metrike je však (kvôli znamienku *mínus* medzi časovou a priestorovou časťou) definovanie skalárneho súčinu štvorvektorov výzvou, ktorú literatúra rieši viacerými alternatívnymi spôsobmi - *konvenciami*. Ukážeme tu najrozšírenejšie z nich:

1. Časovú zložku štvorvektora definujeme ako *imaginárnu*,

$$\underline{x_\mu = (ict, \vec{r})} \quad x_\mu x_\mu = (ict)^2 + (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = r^2 - (ct)^2$$

pričom používame Einsteinovu konvenciu (sumáciu cez opakujúci sa index).⁸

2. Definujeme každý štvorvektor v dvoch fyzikálne ekvivalentných tvaroch - **kovariantnom**, $\underline{x_\mu = (-ct, \vec{r})}$, a **kontravariantnom**, $\underline{x^\mu = (ct, \vec{r})}$, a skalárny súčin v tvare

$$x^\mu x_\mu = x_\mu x^\mu = \dots = r^2 - (ct)^2$$

3. Kovariantný tvar definujeme s prehodenými znamienkami priestorovej a časovej časti, $\underline{x_\mu = (ct, -\vec{r})}$, a skalárny súčin v tvare

$$x^\mu x_\mu = x_\mu x^\mu = \dots = (ct)^2 - r^2$$

V ďalších častiach textu sa budeme pridŕžiavať práve tejto konvencie.

Neskôr definujeme ďalšie štvorvektory, všetky však budú mať rovnakú štruktúru $\mathcal{X}^\mu = (\mathcal{X}_0, \vec{\mathcal{X}})$ - „časovú“ *skalárnu* časť $\mathcal{X}_0$ a „priestorovú“ *vektorovú* časť $\vec{\mathcal{X}}$, a medzi inerciálnymi sústavami S a S' sa budú $\mathcal{X}_0$ a zložka $\mathcal{X}_u$ (v smere rýchlosti $\vec{u}$ relatívneho pohybu S') transformovať podľa LTV

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{X}'_0} &= \gamma (\mathcal{X}_0 - \beta \mathcal{X}_u) & \underline{\mathcal{X}_0} &= \gamma (\mathcal{X}'_0 + \beta \mathcal{X}'_u) \\ \underline{\mathcal{X}'_u} &= \gamma (\mathcal{X}_u - \beta \mathcal{X}_0) & \underline{\mathcal{X}_u} &= \gamma (\mathcal{X}'_u + \beta \mathcal{X}'_0) \end{aligned}$$

pri splnení podmienky $\mathcal{X}_0^2 - (\vec{\mathcal{X}})^2 = \mathcal{X}_0'^2 - (\vec{\mathcal{X}}')^2$. Zložky $\vec{\mathcal{X}}$ kolmé na smer $\vec{u}$ sa transformáciou nemenia.

Zavedenie štvorvektorov v žiadnom prípade nie je len matematickým trikom. Relativistický charakter času a priestoru znamená, že časový a priestorový vývoj fyzikálnych objektov je možné od seba oddeliť len v *nerelativistickom* priblížení, $v \ll c$. Štvorvektory sú matematickými reprezentáciami objektov „žijúcich“ v časopriestore, a *Lorentzove transformácie sú ich rotáciami*.

I.1.3 Relativita súčasnosti.

Zamyslime sa teraz, ako môže stacionárny pozorovateľ S *zmerať* kontrahovanú dĺžku L relativisticky sa pohybujúceho objektu, napr. vagónu, ktorého vlastná dĺžka (v sústave S') je L' . Ponúka sa nasledovný scenár: Pozdĺž trate rozostavíme stacionárne detektory (v S), schopné zachytiť krátky impulz zo zdrojov na oboch koncoch vagónu, x'_1 a x'_2 .

⁶Prevážna časť literatúry používa rovnaké značenie x_μ pre štvorvektor ako aj jeho generickú zložku, čo sa ale dá ľahko rozlíšiť z kontextu.

⁷„Obyčajné“ skaláry sa lorentzovsky transformujú (napr. čas t). Veličiny invariantné voči transformáciám majú kľúčový význam v modernej fyzike.

⁸V tomto zápise $x_\mu x_\mu$ môže byť x_μ vo význame štvorvektora aj jeho zložiek.

V istom okamihu sprievodca vo vagóne (S') *súčasne* aktivuje oba zdroje, čo znamenajú dva konkrétne stacionárne detektory v x_1 a x_2 (S). Pomocou LTV dostávame

$$L = x_2 - x_1 = \gamma[(x'_2 - x'_1) + u(t'_2 - t'_1)] = \gamma L'$$

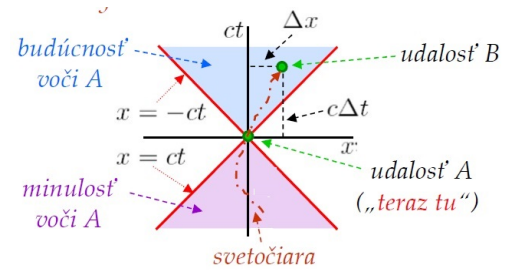
lebo $t'_2 = t'_1$. Keďže však $\gamma > 1$, dostávame $L > L'$, čo *nie je* očakávaná kontrakcia!

Modifikujme meranie tak, že zdroje impulzov *súčasne* aktivuje pozorovateľ v S , čiže tentokrát $t_2 = t_1$, a teda

$$c(t'_2 - t'_1) = \dots = \gamma\beta L \qquad L = \dots = \frac{L'}{\gamma}$$

Toto je správny výsledok. Na prvý pohľad vidíme, že kameňom úrazu je *relatívnosť súčasnosti*. Udalosti súčasné v S vo všeobecnosti nie sú súčasné v S' , a naopak. Ľahko nahliadneme (z LTV), že zhoda na súčasnosti nastane len v prípade *súmiestnych* udalostí, $x_1 = x_2$ (a teda aj $x'_1 = x'_2$). Príčinou je konečná rýchlosť svetla, limitujúca šírenie príčinných súvislostí.

Minulosť a *budúcnosť* vzhľadom k danej udalosti A („teraz tu“) sú oblasti časopriestoru definované *potenciálnou kauzalnosťou*: Všetky udalosti, ktoré mohli (ale nemuseli) ovplyvniť udalosť A, predstavujú jej minulosť, a všetky udalosti, ktoré môžu byť ovplyvnené udalosťou A, sú jej budúcnosťou. Minulosť a budúcnosť sú časopriestorovo ohraničené **svetelným kuželom** príslušným k udalosti A, a histórie kauzálnych reťazcov udalostí sú **svetočiarami** vo vnútri kuželu.



Časopriestorová vzdialenosť bodu A od ľubovoľného bodu vo vnútri svojho svetelného kuželu musí spĺňať nerovnosť $(c\Delta t)^2 \geq (\Delta r)^2$, čiže svetlo „musí mať dostatok času“ na prejdanie danej priestorovej vzdialenosti. Udalosti mimo svetelného kuželu udalosti A nemôžu s ňou byť kauzálny spojené, predstavujú akúsi „šedú zónu“ - *prítomnosť*. Platí pre ne $(c\Delta t)^2 < (\Delta r)^2$, a nie je možné *jednoznačne* určiť ich časový sled voči A, čo spôsobuje relativnosť súčasnosti.⁹

I.2 Relativistická kinematika a dynamika.

I.2.1 Transformácie a skladanie rýchlostí.

Pohyb telies opisujeme vždy *vzhľadom na zvolenú laboratórnu sústavu*, S . Jadrom relativistickej kinematiky je skutočnosť, že každá inerciálna sústava sa riadi *vlastným* časom, ktorý sa medzi sústavami transformuje. Všetky časové derivácie (rýchlosti, zrýchlenia, ...) vzhľadom na danú sústavu sú deriváciami podľa tohto vlastného času (a odpovedajúco tomu sa transformujú do inej sústavy). Zložky rýchlosti $\vec{v}$ pohybujúceho sa objektu v sústavách S a S' sú definované ako

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \text{ atď.} \qquad v'_x = \frac{dx'}{dt'}, \text{ atď.}$$

⁹Kým časový sled udalostí na svetočiare vo vnútri kuželu je *absolútny* - rovnaký pre všetkých pozorovateľov, udalosť B ležiacu *mimo* svetelného kuželu udalosti A by rôzni pozorovatelia vyhodnocovali ako predchádzajúcu A, súčasnú s A, alelo aj zaostávajúcu za A.

Ak sústavy S a S' sú vo vzájomnom pohybe konštantnou rýchlosťou u v smere osi x , potom medzi x -ovými zložkami rýchlosti objektu platí (na základe LTV) transformačný vzťah

$$v'_x = \frac{\gamma[dx - udt]}{\gamma\left[dt - \frac{udx}{c^2}\right]} = \dots = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \quad v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}}$$

Pre zložky rýchlosti $\vec{v}$ kolmé na u síce platí $dy' = dy$, $dz' = dz$, ale $dt' \neq dt$, a teda

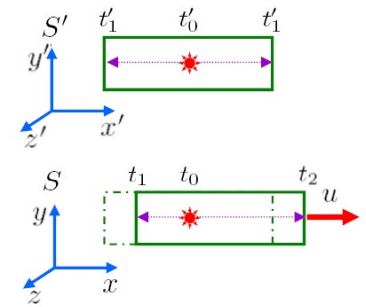
$$v'_\perp = \dots = \frac{v_\perp}{\gamma\left[1 - \frac{uv_x}{c^2}\right]} \quad v_\perp = \frac{v'_\perp}{\gamma\left[1 + \frac{uv'_x}{c^2}\right]}$$

Zaujímavý je prípad $v'_x = c$, teda ak sa v (pohybujúcej sa) sústave S' šíri svetlo. Z pohľadu sústavy S dostávame pre rýchlosť svetla

$$v_x = \frac{c + u}{1 + \frac{uc}{c^2}} = \dots = c$$

v súlade s 1. postulátom teórie (kap. I.1.1). Rýchlosť svetla nemôže byť žiadnym objektom prekročená. Pre ilustráciu uveďme príklad šírenia svetla v idúcom vagóne. Svetelný záblesk generovaný v strede vagónu dopadá *súčasne* (v S') na protiľahlé steny.

Z pohľadu S sa však dráhy záblesku v smere a proti smeru pohybu vagónu líšia o dráhu prejdenú vagónom, a pri rýchlosti šírenia c teda dopady záblesku na protiľahlé steny nebudú súčasné. Pre nesúmiestné udalosti je súčasnosť relatívna (kap. I.1.3).



Relativistické skladanie rýchlostí vedie aj k modifikácii *Dopplerovho javu*. Pri klasickom Dopplerovom jave zmena pozorovanej frekvencie ω_p voči frekvencii zdroja vlny ω_z je daná algebrickým sčítaním rýchlosti šíriacej sa vlny (napr. zvuku) c_v a rýchlosti zdroja v_z , resp. rýchlosti pozorovateľa v_p ,

$$\omega_p = \omega_z \frac{c_v \pm v_p}{c_v \mp v_z} \quad (\text{horné znamienko pre približovanie})$$

Keďže však klasická vlna potrebuje na svoje šírenie *hmotné prostredie*, toto prostredie tvorí *preferovanú sústavu*, voči ktorej vzťahujeme všetky rýchlosti.¹⁰ Dôsledkom toho je *asymetria zdroja a pozorovateľa* - ich pohyb nie je *vzájomne* relatívny, ale relatívny voči prostrediu. Naproti tomu relativistická EM vlna ku svojmu šíreniu prostredie nepotrebuje (skôr naopak, látkové prostredie jej šíreniu „prekáža“), vo vákuu neexistuje preferovaná sústava a záleží len na rýchlosti vzájomného pohybu zdroja a pozorovateľa, u . Každý z nich však meria frekvenciu *svojim vlastným časom*. Pre vzájomný pohyb *pozdlž* šírenia EM vlny platí

$$\omega_p = \omega_z \gamma(1 \pm \beta) \quad \beta = \frac{u}{c}$$

Pre pozorovateľa prijímajúceho EM vlnu zo zdroja pohybujúceho sa *kolmo* na smer šírenia tejto vlny sa rýchlosti *neskladajú*, sústavy majú však rôzny čas, preto platí

$$\omega_p = \gamma\omega_z$$

Stojí za zmienku, že ak dopplerovským radarom meriame (relatívnu) rýchlosť pohybujúceho sa predmetu, vysielame EM vlnu o frekvencii ω , ktorú pohybujúci objekt absorbuje s *posunutou* frekvenciou ω' (vo svojej pokojovej sústave), a následne vyžiari (z nášho pohľadu *odrazí*) na *rovnakej* frekvencii ω' . Keďže je však voči nám v pohybe, odrazenú vlnu registrujeme s *posunutou* frekvenciou ω'' (v našej pokojovej sústave). K dopplerovskému posuvu teda dôjde *dvakrát*.

¹⁰Táto preferovaná sústava sama môže byť v (relatívnom) pohybe - napr. vietor ovplyvňuje šírenie zvuku. Poľovníci tento jav dobre poznajú.

I.2.2 Vlastná rýchlosť telesa.

Rýchlosti v_j v kap. I.2.1 sú definované ako strmosti zmeny zložiek polohy *v čase*, keďže zložky 3D polohového vektora sú parametrizované *laboratórnym* časom, $x_j(t)$. Zavedením konceptu jednotného časopriestoru sa však čas stáva súradnicou rovnocennou s x_j , a pohyb telesa časopriestorom je jeho šírením vo všetkých *štyroch* súradniciach. Laboratórny čas t preto prestáva byť dobrou spoločnou nezávislou premennou. Grafy $x_j(t)$ sú len akýmiisi 2D „rezmi“ 4D časopriestorových svetočiar, a priestorové rýchlosti v_j určujú strmosti týchto rezov.

Ukazuje sa byť vhodné parametrizovať svetočiaru šírenia telesa časopriestorom **vlastným časom telesa**¹¹ τ , čiže $x^\mu(\tau)$. Vlastný čas telesa, pohybujúceho sa vzhľadom na laboratórnu sústavu S , plynie odlišne od laboratórneho času, a podľa kap. I.1.1 platí $\tau = t/\gamma$, pričom γ závisí od veľkosti rýchlosti telesa v S . Napriek tomu, ak si dvaja *inerciálni* pozorovatelia S a S' porovnávajú *svoje vlastné* časové intervaly $\Delta\tau$ a $\Delta\tau'$ medzi dvojicou udalostí A a B, budú *rovnaké*.¹² Vlastný čas je teda lorentzovským *invariantom* - *lorentzovským skalárom*.

Strmost šírenia svetočiar $x^\mu(\tau)$ vo všetkých *štyroch* smeroch časopriestoru vzhľadom na vlastný čas šíriaceho sa objektu nazývame jeho **vlastnou rýchlosťou**

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} \qquad \frac{dx_0}{dt} = \frac{d(ct)}{dt} = c, \quad \frac{dx_j}{dt} = v_j$$

Ako podiel štvorvektora dx^μ a lorentzovského skalára $d\tau$, aj vlastná rýchlosť je *štvorvektorom*, $U^\mu = (\gamma c, \gamma \vec{v})$, a teda jeho veľkosť je lorentzovským skalárom,

$$U^\mu U_\mu = \dots = c^2$$

Znamená to tiež, že jej transformačné vzťahy do inej sústavy S' s relatívnou rýchlosťou u v smere x voči S sú LTV (na rozdiel od transformačných vzťahov pre *priestorové* rýchlosti z kap. I.2.1)

$$U'_0 = \gamma(U_0 - \beta U_x) \qquad U'_x = \gamma(U_x - \beta U_0) \qquad U'_{y,z} = U_{y,z}$$

Aká je fyzikálna interpretácia¹³ vlastnej rýchlosti? Ak sa teleso v sústave S *nepohybuje*, $dx^\mu = 0$, $U_j = v_j = 0$, $\gamma = 1$, $\tau = t$, a $U_0 = c$, čo znamená, že teleso „stárne“ rýchlosťou c . Ak sa však v S pohybuje, jeho vlastný čas $\tau = t/\gamma$ plynie (podľa S) pomalšie - jeho rýchlosť postupu pozdĺž času sa zníži na úkor postupu v priestore. Napokon, ak sa pohybuje (napr. v smere x) rýchlosťou c (čo však dokážu len svetlu podobné „objekty“), jeho vlastný čas sa (podľa S) zastaví. Pre $v = c$ je $\gamma \rightarrow \infty$, $d\tau \rightarrow 0$, a U_0 aj $U_x \rightarrow \infty$ (z pohľadu S), ale rozdiel ich kvadrátov je konečný, c^2 , rovnako ako prejdená vzdialenosť $cd\tau$. Nech sa teda teleso pohybuje v priestore akokoľvek rýchlo, *v časopriestore sa vždy pohybuje vlastnou rýchlosťou* $U = c$.¹⁴

I.2.3 Relativistická hybnosť telesa.

Jedným z pilierov celej fyziky je *zákon zachovania hybnosti*, v newtonovskej mechanike definovanej ako $\vec{p} = m\vec{v}$, preto požadujeme jeho platnosť aj v prípade relativistických rýchlostí telies. Predpo-

¹¹Ak telesu priradíme jeho *pokojuvú* sústavu S' , je to čas t' . Budeme však používať symbol τ obvyklý v literatúre. Pre živé organizmy je vlastný čas biologickým časom.

¹²Táto skutočnosť je jadrom tzv. **paradoxu dvojčiat** - *inerciálneho* kozmonauta a jeho pozemského dvojčaťa. Napriek tomu, že si navzájom závidia pomalšie stárnutie, ich biologické hodiny tikajú rovnako, lebo ich pohyb je relatívny. V reálnom experimente však kozmonaut po návrate na Zem je *naozaj mladší* než jeho pozemské dvojča. Kozmonaut na svojej okružnej ceste totiž *nie je inerciálnym*, a tým je relativnosť narušená.

¹³Všimnime si, že v definícii U^μ je x^μ merané v *laboratórnej* sústave, kým čas je meraný hodinami na (pohybujúcom sa) telese. V *jeho* pokojovej telesa sa totiž jeho poloha *nemení*.

¹⁴Je to ako pohyb prstom na mape severovýchodným smerom konštantnou rýchlosťou: Čím viac zahnete na sever, tým pomalšie postupujete na východ. Naším severom je čas - čím menej sa hýbate v priestore, tým rýchlejšie stárnete.

kladajme teda nepružnú zrážku dvoch telies o rovnakej hmotnosti m . Za laboratórnu sústavu S si zvolíme ťažiskovú sústavu dvojice, v ktorej (konštantné) rýchlosti telies pred zrážkou sú $v_1 = v$ a $v_2 = -v$, a po zrážke a spojení $v_{1+2} = 0$. Celková hybnosť sa očividne zachováva.



Sústavu S' zvolíme tak, aby v nej pred zrážkou bolo $v'_2 = 0$, čiže vzájomná rýchlosť sústav je $u = -v$. Podľa klasického skladania rýchlostí by platilo $v'_1 = 2v$ a $v'_{1+2} = v$ (a celková hybnosť by sa opäť zachovala). Podľa relativistických vzťahov (kap. I.2.1) však

$$v'_1 = \frac{v - (-v)}{1 - \frac{(-v)v}{c^2}} = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \quad v'_2 = \dots = 0 \quad v'_{1+2} = \dots = v$$

a celková hybnosť v sústave S' sa podľa tohto výpočtu zjavne *nezachováva*. Keďže relativistické skladanie rýchlostí je nespochybniteľné, ako východisko z tohto paradoxu sa ponúka revízia pojmu *hmotnosť*. Naozaj, zachovanie celkovej hybnosti zabezpečíme ak hmotnosti m_i jednotlivých telies v každej sústave nahradíme tzv. **relativistickými hmotnosťami**

$$m_i^{rel} = \gamma_i m_i = \frac{m_i}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}}$$

kde v_i sú rýchlosti týchto telies *v danej sústave*,¹⁵ a m_i sú tzv. **pokojoyé hmotnosti** telies, merané v sústavách *s nimi spojených*.¹⁶ Pre hybnosť telesa o pokojovej hmotnosti m , pohybujúceho sa rýchlosťou v v danej sústave, potom platí správny relativistický vzťah

$$(\vec{p} \rightarrow) \quad \underline{\vec{P}} = \gamma m \vec{v} \quad P_x = \gamma m v_x \text{ atď.}$$

pričom γ závisí od *veľkosti* rýchlosti v (nie jej zložky). Zavedenie relativistickej hmotnosti je lákavé, lebo prirodzene zabezpečí, že žiadne teleso nemôže presiahnuť rýchlosť c . Pre $v \rightarrow c$ totiž $m^{rel} \rightarrow \infty$, a na jeho ďalšie zrýchlenie by bola potrebná nekonečná sila/energia ($F = m^{rel}a$). Štúdium zložitejších (krivočiarych) pohybov však ukazuje, že koncept relativistickej hmotnosti je slepou uličkou.¹⁷ Novšia literatúra sa preto tomuto konceptu dôsledne vyhýba.

Konzistentný relativistický formalizmus, rešpektujúci zákon zachovania hybnosti, je vybudovaný na myšlienke pohybu telies v *časopriestore* a výpočte kinematiky a dynamiky telesa pomocou jeho *vlastného času* τ . V ňom je hybnosť telesa definovaná pomocou jeho *vlastnej rýchlosti* $\vec{U} = \gamma \vec{v}$ (kap. I.2.2), teda $\vec{P} = m(\gamma \vec{v})$. Koncept relativistickej hmotnosti sa týmto stal prebytočným, a (pokojová) hmotnosť zostáva lorentzovským skalárom. Takto definovaná hybnosť tvorí potom tiež štvorvektor, $\underline{P^\mu} = (\gamma mc, \vec{P})$, ktorého priestorovou časťou je vektor spĺňajúci zákon zachovania hybnosti,

$$\underline{P^\mu} = mU^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau} = m \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} \quad \longrightarrow \quad \vec{P} = \gamma m \vec{v}$$

Aký je však fyzikálny význam jeho časovej zložky, γmc ? Určitý vhľad získame ak preskúmame jej nerelativistickú limitu:

$$P_0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \xrightarrow{\frac{v}{c} \ll 1} mc \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{1}{c} \left(mc^2 + \frac{1}{2} mv^2 \right)$$

¹⁵Zdôrazňujeme, že každému telesu v danej sústave prislúcha *iný* relativistický faktor γ_i , závislý od jeho rýchlosti v_i . Overenie zákona zachovania je teda pracné.

¹⁶Znamená to, že každému telesu priradíme vlastnú pokojovú sústavu. V našom príklade teda v skutočnosti uvažujeme viac súradnicových sústav než len S a S' .

¹⁷Navyše, *neinvariantná* hmotnosť nezapadá do rámca modernej časticovej fyziky.

Druhý člen v zátvorke je známy výraz pre (nerelativistickú) kinetickú energiu, kým prvý člen rozmeru energie od pohybu nezávisí. Kinetická energia telesa, aj tá relativistická, pri rýchlosti v je daná prácou sily $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ potrebnej na zrýchlenie telesa z pokoja na rýchlosť v , čiže

$$E_{kin} = \int_0^l \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_0^l \frac{d(\gamma mv)}{dt} dl = \int_0^v v d(\gamma mv) = \dots_{per\ partes} = \gamma mc^2 - mc^2$$

Hľadaný výraz $\gamma mc = (E_{kin} + mc^2)/c$ je teda daný súčtom relativistickej kinetickej energie a akejsi **pokojovej energie** telesa,

$$E_0 = mc^2$$

Táto rovnosť, označovaná ako **ekvivalencia energie a hmoty/hmotnosti**,¹⁸ vyjadruje, že substancia, ktorú vnímame ako *hmotu* kvantifikovanú svojou hmotnosťou, je *koncentrovanou formou energie* (s obrovským prevodným koeficientom c^2), pričom do hmotnosti môžu vstupovať *rôzne formy* energie (chemická, EM, atď.). Taktiež to znamená, že vo fyzikálnych, chemických, biologických, atď. procesoch sa hmota vnímaná prostredníctvom hmotnosti môže *premieňať* na (to čo vnímame ako) energiu, a naopak. Pre *celkovú* relativistickú energiu telesa (vrátane energie pohybu) platí

$$E = \gamma mc^2$$

a časová zložka štvorhybnosti vyjadruje práve túto energiu. Štvorvektor hybnosti je teda $P^\mu = (E/c, \vec{P})$, a jeho veľkosť je lorentzovským skalárom,

$$P^\mu P_\mu = \dots = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - (\vec{P})^2 = (mc)^2 \qquad \underline{E^2 = (\vec{P})^2 c^2 + (mc^2)^2}$$

Ako štvorvektor sa P^μ transformuje medzi sústavami podľa LTV, čiže „časová“ zložka - energia a „priestorové“ zložky - hybnosť sa navzájom „prelievajú“, pričom sa zachováva rozdiel ich kvadrátov. Ekvivalencia hmotnosti a energie má zásadný význam pre pochopenie previazanosti energie a hybnosti:

$$energia \Leftrightarrow hmotnosť$$

$$hybnosť \Leftrightarrow pohybujúca sa hmotnosť$$

Inerciálny pohyb je však *relatívny*. Uvedený vzťah pre energiu pripúšťa aj špekuláciu o objektoch s *nulovou* hmotnosťou,

$$m = 0$$

$$E = |\vec{P}|c$$

Keďže však súčasne musí platiť $\vec{P} = \gamma m \vec{v}$ a $E = \gamma mc^2$, jedinou možnosťou je $\gamma \rightarrow \infty$, čo znamená $v = c$. Objekty s nulovou hmotnosťou by sa teda *museli* šíriť rýchlosťou c . A naopak, objekty šíriace sa *priestorom* rýchlosťou $v = c$ *musia* mať nulovú hmotnosť. Na druhej strane ale $P^\mu P_\mu = (mc)^2 = 0$, čo vyvoláva pochybnosti ohľadom fyzikálnej reálnosti takýchto objektov. Viac o tom v kap. II.1.4.

I.2.4 Relativistické pohybové zákony.

Klasická newtonovská mechanika je založená na trojici Newtonových zákonov. Prvý z nich vymedzuje obor aplikovateľnosti lorentzovských transformácií - *inerciálne sústavy*. Druhý - zákon sily - formuluje základnú pohybovú rovnicu klasickej mechaniky

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

¹⁸A. Einstein, 1905

Správny relativistický výraz pre hybnosť telesa (v laboratórnej sústave S) je však podľa kap. I.2.3 $\vec{P} = \gamma(v)m\vec{v}$, kde $\gamma(v)$ závisí od veľkosti rýchlosti telesa (z pohľadu S). Pôsobením nenulovej sily však teleso *zrýchľuje*, $v = v(t)$ a teda aj $\gamma = \gamma(t)$. Relativistický výraz pre silu je preto

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\gamma}{dt}m\vec{v} + \gamma m \frac{d\vec{v}}{dt} = \dots = \gamma^3 m \frac{(\vec{v} \cdot \vec{a})\vec{v}}{c^2} + \gamma m \vec{a}$$

Na rozdiel od nerelativistickej mechaniky, $\vec{F} \uparrow \uparrow \vec{a}$ len ak $\vec{v} \uparrow \uparrow \vec{a}$. V dôsledku toho sa bude pre dvoch pozorovateľov S a S' vo vzájomnom pohybe sila líšiť nielen veľkosťou ale aj orientáciou. Hľadáme preto tvar zákona sily *invariantný* voči LTV.

Prvým krokom je zavedenie vlastného času telesa (kap. I.2.2) a definovanie **štvorzrýchlenia**

$$\mathcal{A}^\mu = \frac{dU^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = \gamma \frac{dU^\mu}{dt} = \gamma \left(\frac{d\gamma}{dt}c, \frac{d\gamma}{dt}\vec{v} + \gamma\vec{a} \right) = \dots = \gamma^4 \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c}, \frac{(\vec{v} \cdot \vec{a})\vec{v}}{c^2} + \frac{\vec{a}}{\gamma^2} \right)$$

Tento nie príliš lákavý výraz ponúka nasledujúce závery:

- pre $\vec{a} \parallel \vec{v}$ prejde na $\gamma^4 \left(\frac{va}{c}, \vec{a} \right)$,
- v limite malých rýchlostí $v \ll c$ prejde na $\left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c}, \vec{a} \right)$,
- platí $U^\mu \mathcal{A}_\mu = 0$ - štvorrýchlosť a štvorzrýchlenie sú *ortogonálne*.

Pokožová sústava *zrýchľujúceho* telesa *nie je* inerciálnou sústavou. Pozorovateľ v nej síce vidí teleso (aj seba) v pokoji, $v' = 0$, *sám však pociťuje zotrvačnú silu*, a jej odpovedajúce **vlastné zrýchlenie** $\vec{a}'$. Ak tomuto telesu *v každom okamihu* priradíme *inerciálnu* sústavu S' spojenú s ním *len pre daný okamih* - akúsi **okamžitú pokojovú sústavu**¹⁹, pohybujúcu sa voči laboratórnej sústave S *konštantnou* rýchlosťou *momentálne* sa zhodujúcou s okamžitou rýchlosťou telesa $\vec{v}(t)$, môžeme medzi sústavami S a S' použiť LTV. Potom pre vlastné zrýchlenie telesa v S' platí

$$a'^2 = \mathcal{A}'^\mu \mathcal{A}'_\mu \quad \mathcal{A}' = (0, \vec{a}')$$

Na druhej strane, pre pozorovateľa v *laboratórnej* sústave S sa rýchlosť telesa $\vec{v}$ neustále mení kvôli zrýchleniu $\vec{a}$. V každom okamihu preňho platí $\mathcal{A}^\mu \mathcal{A}_\mu = \dots = \gamma^6 a^2$ pre $\vec{a} \parallel \vec{v}$ alebo $\gamma^4 a^2$ pre $\vec{a} \perp \vec{v}$. Pritom ale, ako pre každý štvorvektor, musí platiť $\mathcal{A}^\mu \mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}'^\mu \mathcal{A}'_\mu$, odkiaľ dostávame

$$a'_\parallel = \gamma^3 a_\parallel \quad a'_\perp = \gamma^2 a_\perp \quad \gamma = \gamma(v(t))$$

Inerciálny pozorovateľ, neustále prestupujúci z jednej okamžitej pokojovej sústavy telesa S' do druhej, môže teda *neobmedzene dlho* pociťovať napr. *konštantnú* zotrvačnú silu (t.j. $\vec{a}' = \text{konšt.}$), kým z pohľadu S zrýchlenie telesa $\vec{a}$ postupne klesá do nuly pre $v \rightarrow c$ ($\gamma \rightarrow \infty$).

Keďže m je lorentzovským invariantom, môžeme ďalej definovať **štvorsilu**²⁰ $\mathcal{F}^\mu = (\mathcal{F}_0, \vec{\mathcal{F}})$ ako

$$\mathcal{F}^\mu = \frac{dP^\mu}{d\tau} = m \frac{dU^\mu}{d\tau} = m \mathcal{A}^\mu$$

Porovnaním s predchádzajúcimi výrazmi dostávame pre vektorovú zložku tohto štvorvektora $\vec{\mathcal{F}} = \gamma \vec{F}$. Skalárna zložka $\mathcal{F}_0$ zas očividne reprezentuje *výkon* sily, keďže odpovedajúca zložka štvorhybnosti je $P_0 = E/c$, a platí

$$\mathcal{F}_0 = \frac{dP_0}{d\tau} = \frac{dE}{c d\tau} = mc \frac{d\gamma}{d\tau} = mc \left(\gamma \frac{d\gamma}{dt} \right) = \dots = m \gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c} = m \mathcal{A}_0$$

¹⁹angl. *co-moving*

²⁰V literatúre nájdeme pre túto veličinu názov **Minkowského sila**, a obvykle sa označuje symbolom K^μ (namiesto tu použitého $\mathcal{F}^\mu$).

Keďže výkon sily je

$$\frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \gamma^3 m \frac{(\vec{v} \cdot \vec{a})(\vec{v} \cdot \vec{v})}{c^2} + \gamma m (\vec{v} \cdot \vec{a}) = \dots = \gamma^3 m (\vec{v} \cdot \vec{a})$$

môžeme štvorsilu zapísať v tvare $\mathcal{F}^\mu = \gamma \left(\frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c}, \vec{F} \right)$. Pre $\vec{F} \perp \vec{v}$ (čo je napr. prípad dostredivej sily) je výkon *nulový* (sila mení iba smer, nie kinetickú energiu pohybu).

Pokiaľ ide o 3. Newtonov zákon - *zákon akcie a reakcie*, jeho platnosť v relativistickej fyzike je obmedzená na *lokálne* interakcie, keď sú interagujúce objekty A a B *súmiestne*. Fyzika však pozná aj interakcie „na diaľku“, sprostredkované fyzikálnym poľom (gravitačné, EM, atď.). Podľa kap. I.1.3 v prípade nesúmiestných objektov je súčasnosť relatívnou - nesúmiestne udalosti súčasné v sústave S nie sú súčasnými v S' . Interakcia „na diaľku“ sa totiž musí šíriť *konečnou* rýchlosťou. Newtonovská požiadavka $\vec{F}_A(t) = -\vec{F}_B(t)$ v týchto prípadoch *nie je invariantná* voči $S \rightarrow S'$. Korektné uchopenie tohto problému, v zmysle zákona zachovania *celkovej* hybnosti, musí zahrnúť aj hybnosť fyzikálneho poľa sprostredkujúceho interakciu nesúmiestných objektov. Tejto otázke sa budeme venovať v ďalších častiach textu.

I.2.5 Relativistická hybnosť kontinua.

Uvažujme teraz hmotu spojite rozloženú v priestore s objemovou hustotou ρ , a študujme pomyselný *nehybný* malý objem V o celkovej hmotnosti m

$$m = \int_V \rho dV$$

Predpokladajme ďalej, že naša hmota môže voľne spojite „vytekať“ a „vytekať“ cez plochu povrchu Σ tohto objemu lokálnou rýchlosťou $\vec{v}$. Pri **hustote toku**²¹ $\vec{j} = \rho \vec{v}$ pripadá na infinitezimálnu plošku $d\vec{\Sigma}$ tohto povrchu (vektor orientovaný *von* z objemu) tok $\vec{j} \cdot d\vec{\Sigma}$, a celkový tok povrchom Σ je

$$\Phi = \oint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{\Sigma} \stackrel{Gauss}{=} \int_V \nabla \cdot \vec{j} dV$$

Ak je celkový tok kladný - viac hmoty tečie *v smeroch* $d\vec{\Sigma}$, (čiže von z objemu) než naopak, znamená to, že množstvo hmoty v našom objeme sa *zmenšuje*

$$\Phi = -\frac{dm}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Z rovnosti ľavých strán dostávame rovnosť podintegrálnych výrazov

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

čo je **rovnica kontinuity** - zákon *zachovania* „hmoty“. Relativistický prepis do sústavy pohybujúcej sa voči pomyselnému objemu si vyžaduje pomerne pracné transformácie (zahrňujúce kontrakciu objemu). Vidíme však, že výrazy $c\rho$ a $\vec{j}$ fyzikálne odpovedajú skalárnej a vektorovej zložke objemovej hustoty štvorhybnosti $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$, za predpokladu, že $\rho = \gamma\rho_0$ a teda aj $\vec{j} = \gamma\rho_0\vec{v}$ (kap. I.2.3), kde ρ_0 je vlastná hustota v jej pokojovej sústave.²² Rovnako premenné t a $\vec{r}$, podľa ktorých derivujeme, sú zložkami štvorvektora x^μ , a pomocou LTV vieme ukázať, že

$$\frac{\partial}{\partial(ct')} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial(ct)} + \beta \frac{\partial}{\partial x} \right) \qquad \frac{\partial}{\partial x'} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial(ct)} \right)$$

²¹Hustotu toku látky definujeme ako množstvo (hmotnosť) látky pretečené za jednotku času jednotkovou plochou.

²²Tento argument je konzistentný s definovaním relativistickej hybnosti $\gamma m\vec{v}$ namiesto $m\vec{v}$ v kap. I.2.3, resp. zavedením derivácií podľa vlastného času τ .

čo sú opäť LTV (s otočeným smerom β). Znamená to, že tieto *operátory* sú tiež zložkami štvorvektorového operátora - **štvordivergencie** $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, \nabla \right)$, resp. $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, -\nabla \right)$. Rovnica kontinuity sa potom dá zapísať ako skalárny súčin štvorvektorov,

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

čo je *lorentzovský invariant* - zákon zachovania platí vo všetkých inerciálnych sústavách. Ekvivalencia hmotnosti-energie navyše dodáva tomuto zákonu hlbší význam: Vo fyzikálnych procesoch sa hmota premieňa na rôzne formy energie a spätne na rôzne formy hmoty, majúcu svoju hybnosť pri priestorových transláciách. Zachováva sa substanciou je teda *hmota-energia-hybnosť*.

I.3 Relativita elektromagnetizmu.

I.3.1 Transformácie elektromagnetického poľa.

V klasickom elektromagnetizme (EM) je elektrický náboj q zdrojom elektrického poľa $\vec{E}$, a *pohybujúci sa* náboj (elektrický prúd) $q\vec{v}$ je zdrojom magnetického poľa $\vec{B}$. Presnejšie, náboj je *žriedlom* $\vec{E}$, a prúd nábojov vytvára *vír* $\vec{B}$. Vyjadrené prostredníctvom objemovej hustoty náboja ρ a plošnej hustoty prúdu $\vec{j}$

$$\rho \rightarrow \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} \qquad \rho \vec{v} = \vec{j} \rightarrow \varepsilon_0 c^2 \nabla \times \vec{B}$$

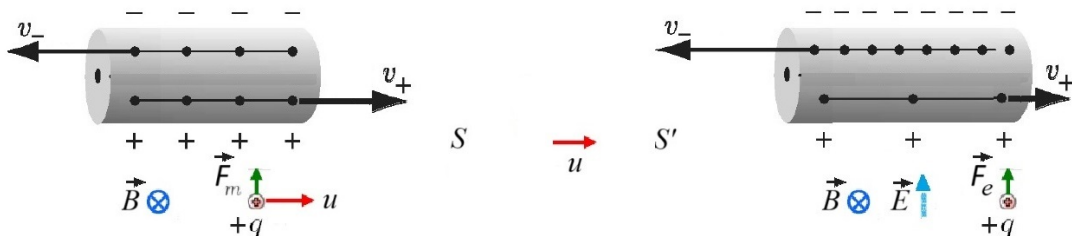
kde ε_0 je *elektrická konštanta* (parmitivita vákua) - jedna z fundamentálnych konštánt fyziky.

O tom, či sa náboj pohybuje alebo nie, však rozhoduje relatívny pohyb pozorovateľa, ktorý lorentzovsky „prelieva“ ρ do zložiek $\vec{j}$ a naopak. Preto, tak ako v kap. I.2.5, aj tu sú $c\rho$ a $\vec{j}$ zložkami štvorvektora j^μ , spĺňajúceho rovnicu kontinuity

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

Tentokrát však $\rho = \frac{q}{V}$ namiesto $\rho = \frac{m}{V}$, a relativistická kontrakcia objemu V v smere relatívneho pohybu vyžaduje, aby $\rho = \gamma\rho_0$ (ρ_0 - *vlastná hustota*), pri zachovaní lorentzovskej invariantnosti m a q . Rovnica kontinuity je tu *zákom zachovania elektrického náboja*.

Je teda zrejmé, že aj polia $\vec{E}$ a $\vec{B}$ sa transformujú navzájom pri zmene pohybového stavu pozorovateľa. Ako príklad skúmame polia *v okolí* priameho vodiča, v ktorom elektrický prúd I prenášajú záporné náboje (elektróny) na pozadí kladne nabitej mriežky. Ak $I = 0$, tak $\vec{B} = 0$, a keďže kladný a záporný náboj dĺžkového segmentu vodiča sú vykompenzované, tak aj $\vec{E} = 0$. Ak $I \neq 0$, tak $\vec{B} \neq 0$, a navyše kladný a záporný náboj vodiča sú v relatívnom pohybe *voči sebe*. Pozorovateľ v okolí vodiča vtedy vníma vo všeobecnosti *rôzny* pohybový stav „reťazcov“ kladného a záporného náboja pozdĺž vodiča, a teda rôznu mieru ich kontrakcie - čiže *nábojového zhustenia*. Kladný a záporný náboj už nie sú dokonale vykompenzované, a pozorovateľ zaznamená $\vec{E} \neq 0$.



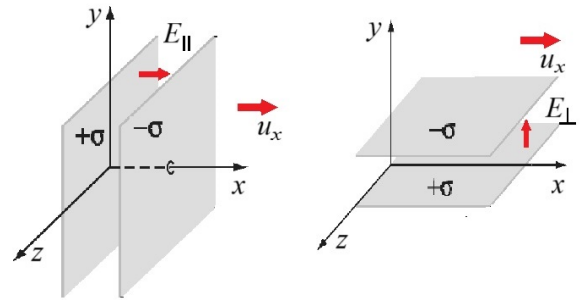
Zvoľme si sústavu S pohybujúcu sa pozdĺž vodiča tak, že veľkosti rýchlostí oboch nábojových reťazcov (v opačných smeroch) sú rovnaké, $\vec{v}_+ = -\vec{v}_-$. V nej nepozorujeme nábojovú nerovnováhu, a $\vec{E} = 0$, tok náboja oboch polarít však generuje $\vec{B} \neq 0$. Na náboj $+q$, pohybujúci sa pozdĺž vodiča v smere prúdu rýchlosťou $\vec{u}$ (v S), pôsobí magnetická Lorentzova sila $\vec{F}_m = q\vec{u} \times \vec{B}$, a priťahuje ho k vodiču. V sústave S' , pohybujúcej sa voči S tou istou rýchlosťou $\vec{u}$, je však tento náboj *v pokoji*, a $\vec{F}_m = 0$ (hoci $\vec{B} \neq 0$). Požadovaný rovnaký silový účinok na q však zabezpečí elektrická Lorentzova sila $\vec{F}_e = q\vec{E}$ v dôsledku nerovnakého nábojového zhustenia ($\vec{v}_+ \neq -\vec{v}_-$) v S' .

Transformačné vzťahy medzi zložkami $\vec{E}$ a $\vec{B}$ sa najľahšie dajú získať z úvahy o doskovom kondenzátore nabitom plošným nábojom $\pm\sigma$. Pokiaľ kondenzátor lorentzovsky transformujeme kolmo na jeho dosky, ich vzájomná vzdialenosť sa síce skráti, homogénne pole $E_x = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ medzi nimi, rovnobežné s $\vec{u}_x$, to však neovplyvní. Preto

$$E'_x = E_x \quad \text{čiže} \quad \underline{E'_\parallel = E_\parallel}$$

Pri transformácii pozdĺž dosiek dôjde k nábojovému zhusteniu v smere $\vec{u}_x$, preto

$$E'_\perp \rightarrow \gamma E_\perp$$



Navyše sa v tejto konfigurácii generuje aj plošný prúd $\mp\gamma\sigma\vec{u}_x$ a odpovedajúce magnetické pole $B_y = -\frac{\gamma\sigma}{\epsilon_0 c^2}u_x$.

Porovnaním dvoch sústav s rôznymi u_x (a analogicky s doskami otočenými do roviny $x-y$) dostaneme napokon transformačné vzťahy

$$\begin{aligned} E'_y &= \gamma[E_y - \beta(cB_z)] & E'_z &= \gamma[E_z + \beta(cB_y)] & \underline{\vec{E}'_\perp} &= \gamma \left[\vec{E}_\perp + (\vec{u} \times \vec{B})_\perp \right] \\ cB'_z &= \gamma[cB_z - \beta E_y] & cB'_y &= \gamma[cB_y + \beta E_z] & \text{teda} & \\ & & & & \underline{\vec{B}'_\perp} &= \gamma \left[\vec{B}_\perp - \frac{1}{c^2} (\vec{u} \times \vec{E})_\perp \right] \end{aligned}$$

Transformáciu $B_\parallel$ nájdeme z úvahy o dlhom solenoide s dĺžkovou hustotou závitov n , prúdom I a poľom $B_x = \mu_0 n I$. Z pohľadu pozdĺžne sa pohybujúcej sústavy S' sa solenoid skracuje, a teda $n' = \gamma n$, ale aj čas v ňom plynie pomalšie, čiže $I = \frac{dq}{dt} = \gamma \frac{dq}{dt'} = \gamma I'$. Vo výsledku

$$B'_x = B_x \quad \text{čiže} \quad \underline{B'_\parallel = B_\parallel}$$

Za povšimnutie stoja dva špeciálne (a dôležité) prípady:

$$\text{Ak } \vec{B} = 0 : \quad \underline{\vec{B}' = -\frac{1}{c^2}(\vec{u} \times \vec{E}')} \quad (\text{pre zaujímavosť porovnaj s } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E})$$

$$\text{Ak } \vec{E} = 0 : \quad \underline{\vec{E}' = \vec{u} \times \vec{B}'} \quad (\text{pre zaujímavosť porovnaj s } \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \nabla \times \vec{B})$$

Magnetické pole je teda relativistickým prejavom elektrického poľa - klasický EM je dôsledne relativistický. Aj výraz pre Lorentzovu silu ostáva v platnosti v každej sústave,

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

pričom pri lorentzovskej transformácii $S \xrightarrow{\vec{u}} S'$ sa vektory $\vec{E}, \vec{B}$ transformujú podľa uvedených vzťahov, a rýchlosť náboja $\vec{v}$ sa relativisticky skladá s transformačnou rýchlosťou $\vec{u}$. Zavedením štvorsily F^μ (kap. I.2.4) dostaneme

$$\vec{\mathcal{F}} = \gamma \vec{F} = \gamma q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad \gamma = \gamma(v) \quad \mathcal{F}_0 = \frac{1}{c} \frac{dE}{d\tau} = \frac{q}{c} \gamma(\vec{v} \cdot \vec{E})$$

$\mathcal{F}_0$ reprezentuje *výkon* sily, a nezávisí od $\vec{B}$ - magnetické pole prácu *nekoná*. Hoci transformačné vzťahy medzi zložkami $\vec{E}, \vec{B}$ majú tiež štruktúru LTV, $\vec{E}$ a $\vec{B}$ netvorí štvorvektory (nevieme im priradiť odpovedajúce skaláry).²³

²³Relativistickou reprezentáciou EM polí je 4×4 **tenzor EM poľa** s nulovou diagonálou, ktorého mimodiagonálne

I.3.2 Elektromagnetický potenciál.

Alternatívnou reprezentáciou EM poľa sú potenciály $\varphi, \vec{A}$, dané definičnými vzťahmi (Dodatok A)

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Ich kombinácia s Maxwellovými rovnicami vedie na

$$\square\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \vec{j} - \nabla\mathcal{O} \quad \square\varphi = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho + \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{O} \quad \square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad \mathcal{O} = \nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

Definičné vzťahy však poskytujú potenciálom tzv. *kalibračnú voľnosť*, pretože transformácie

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla\Lambda \quad \varphi \rightarrow \varphi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}$$

nezmenia fyzikálne polia $\vec{E}, \vec{B}$. Skalárnu funkciu Λ môžeme teda zvoliť tak, aby spĺňala podmienku $\square\Lambda = 0$, a tým dosiahneme

$$\square\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \vec{j} \quad \square\varphi = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad \mathcal{O} = \nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

Vektorové polia $\vec{E}, \vec{B}$ nie sú súčasťou štvorvektorov. Pomocou transformačných vzťahov pre polia $\vec{E}, \vec{B}$ a definičných vzťahov pre $\vec{A}, \varphi$ sa však dá ukázať, že tieto potenciály sú zložkami **štvorpotenciálu** $A^\mu = (\varphi/c, \vec{A})$. V uvedených výrazoch potom rozpoznáme kombinácie štvorvektorov A^μ, j^μ a ∂_μ , pomocou ktorých dostaneme

$$\square A^\mu = (\partial^\mu \partial_\mu) A^\mu = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} j^\mu \quad \partial_\mu A^\mu = 0$$

čo je relativistický zápis nehomogénnych Maxwellových rovníc pri tzv. **Lorenzovej kalibrácii**²⁴ $\partial_\mu A^\mu = 0$.

Lorentzova sila, pôsobiaca na pohybujúci sa náboj q , vyjadrená pomocou potenciálov je

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \dots = -q \left[\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A} + \nabla(\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A}) \right] = -q \left[\frac{d\vec{A}}{dt} + \nabla(\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A}) \right]$$

kde sme uvážili, že operátor *celkovej* časovej zmeny poľa *z pohľadu pohybujúceho sa náboja*, $\frac{d}{dt}$, zahŕňa samotnú *časovú* zmenu poľa $\frac{\partial}{\partial t}$ aj jeho *priestorovú* zmenu $\vec{v} \cdot \nabla$ pozdĺž trajektórie náboja. Po úprave dostaneme

$$\frac{d}{dt} (\vec{p} + q\vec{A}) = -\nabla [q(\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A})]$$

Výraz v pravej zátvorke predstavuje akúsi *zovšeobecnenú* potenciálnu energiu náboja (závisiacu aj od jeho rýchlosti), a ľavá zátvorka je **zovšeobecnenou (kánonickou) hybnosťou**, ktorá je súčtom kinematickej hybnosti (danej pohybom) a **EM hybnosti** náboja, ktorej fyzikálny význam analyzujeme v kap. I.3.4.

zložky sú zložkami $\vec{E}$ a $\vec{B}$. Stretnete sa s ním v každej učebnici teórie relativity, v tomto texte sa však bez neho zaobídeme.

²⁴L. Lorenz nie je totožný s H.A.Lorentzom, autorom LTV.

I.3.3 Energia a hybnosť elektromagnetického poľa.

Učebnicové manipulácie s dynamickými Maxwellovými rovnicami pre vákuum bez nábojov a prúdov

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

vedú na rovnosti

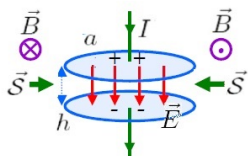
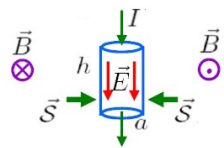
$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = 0 \qquad w = \varepsilon_0 \left(\frac{E^2 + c^2 B^2}{2} \right) \qquad \vec{S} = \varepsilon_0 c^2 (\vec{E} \times \vec{B})$$

kde w poznáme ako objemovú hustotu energie EM poľa, a $\vec{S}$ je tzv. **Poyntingov vektor** vo význame *hustoty toku* tejto energie. Uvedená rovnica kontinuity je teda *zákonom zachovania energie poľa vo vákuu*. Rovnako ako v prípade predchádzajúcich substancií - hmoty či náboja (kap. I.2.5 a I.3.1), aj energia poľa sa lokálne plynule mení a spojitě premiestňuje v priestore. Hustota energie a jej tok sú zložkami štvorvektora hustoty toku energie - **Poyntingovho štvorvektora** $S^\mu = (cw, \vec{S})$, spĺňajúceho rovnicu

$$\partial_\mu S^\mu = 0$$

Predstavu o toku energie získame z nasledujúcich príkladov. Vieme, že vo vákuu sa EM pole šíri ako *priečna vlna*, s vektormi $\vec{E} \perp \vec{B}$ *kolmými* na smer jej šírenia, ktorým je práve smer vektora $\vec{S}$. Energia sa však šíri aj vtedy, ak samotné pole je *stacionárne*:

Ak uvažíme bežný kus priameho valcového vodiča o polomere a a dĺžke h , pretekaného prúdom I vytvárajúcim napäťový spád $\mathcal{U} = Eh$ a magnetické pole $B = \frac{I}{2\pi a \varepsilon_0 c^2}$ na jeho povrchu, potom tok energie povrchom valca $\Sigma = 2\pi ah$ je $\int_\Sigma \vec{S} \cdot d\vec{\Sigma} = \dots = \mathcal{U}I$, čiže energia spotrebúvaná vo vodiči na teplo sa doň šíri z *okolía*, v smere $\vec{S}$, nie vnútro vodiča. Prúd vo vodiči transportuje kinetickú, teda *mechanickú* (nie EM) energiu. (Detailnejší výpočet je v Dodatku B.)



Počas nabíjania kondenzátora prúdom I narastá medzi jeho kruhovými doskami o polomere a vzdialenými od seba h elektrické pole, $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \neq 0$, čo je *posuvný prúd* generujúci *rovnaké* magnetické pole ako prúd I , a vektor $\vec{S}$ opäť smeruje z okolitého priestoru do objemu kondenzátora cez jeho okraje o ploche $\Sigma = 2\pi ah$. Nárast energie poľa v kondenzátore odpovedá toku tejto energie.

Šírenie energie teda vo všeobecnosti *nemôžeme* stotožniť so *šírením* poľa či vlny. Hoci vravíme, že pole je nositeľom energie, jej lokalizácia či trajektórie v tomto poli sú problematické. Tento záver bude mať zásadný význam v ďalších častiach textu.

Relativistická ekvivalencia hmotnosti a energie $E = \gamma mc^2$ naznačuje, že tak ako hmotnosti priradujeme ekvivalentnú energiu, energiu EM poľa by sme mali priradiť ekvivalentnú hmotnosť.²⁵ Hmotnosť-energia je pritom skalárnou komponentou štvorvektora hybnosti (kap. I.2.3). Fyzikálny význam Poyntingovho vektora je teda dvojediný - určuje nielen hustotu toku energie ale aj objemovú **hustotu hybnosti EM poľa**

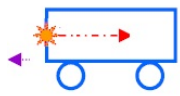
$$\vec{g} = \frac{\vec{S}}{c^2} \qquad g^\mu = \left(\frac{w}{c}, \vec{g} \right)$$

Ekvivalencia hmotnosti a energie je aj ekvivalenciou hybnosti a toku energie. Keďže Poyntingov štvorvektor spĺňa rovnicu kontinuity $\partial_\mu S^\mu = 0$, a štvorvektor hybnosti poľa je $g^\mu = \frac{1}{c^2} S^\mu$, splnená bude aj rovnica kontinuity

$$\partial_\mu g^\mu = 0$$

²⁵Naozaj, ako uvidíme neskôr, podstatnú časť hmotnosti atómu tvorí energia vzájomnej interakcie elementárnych častíc (kvarkov) tvoriacich atómové jadro, a nie ich samotné hmotnosti. Nejde však len o energiu EM poľa.

Pre ilustráciu uvažujme stojaci vagón o hmotnosti M , ktorého stena emituje smerom dovnútra EM impulz o energii δE . Zo zákona zachovania hybnosti vyplýva, že hybnosť impulzu musí byť kompenzovaná opačnou hybnosťou vagónu, Mv , teda



$$Mv = \frac{\delta E}{c}$$

Poloha ťažiska sústavy sa však bez pôsobenia *vonkajšej* sily *nemôže zmeniť*! Obe požiadavky budú splnené ak sa za čas δt , keď impulz preletí dráhu $c\delta t$, vagón posunie o

$$\delta x = v\delta t = \frac{\delta E}{Mc^2} c\delta t$$

Presun hmotnosti M je kompenzovaný presunom energie-hmotnosti impulzu. Keďže však rýchlosť šírenia EM energie (vo vákuu) je c , takejto hybnosti odpovedá *nulová pokojová* hmotnosť. O hmotnosti EM poľa má teda zmysel hovoriť len ako o ekvivalente jeho energie. Potom aj hybnosť EM poľa odpovedá presunu energie poľa, a to aj v prípadoch, keď samotné pole je *statické* (ako v uvedenom príklade s valcovým vodičom).

Predpokladajme teraz EM vlnu postupujúcu vákuom v smere osi x , lineárne polarizovanú tak, že $\vec{E} = (0, E_y, 0)$ a $\vec{B} = (0, 0, B_z)$, dopadajúcu kolmo na plochu voľných nábojov q . Oscilujúca elektrická zložka vlny pôsobí na tieto náboje silou qE_y a vyvolá ich oscilačný pohyb v smere $\vec{y}^o$ okamžitou rýchlosťou $v_y(t)$. Magnetická zložka poľa spôsobí zakrivenie tohto pohybu silou $qv_y B_z$ do smeru $\vec{x}^o$, čiže do smeru šírenia vlny. Celková Lorentzova sila je

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = qv_y B_z \vec{x}^o + q(E_y - v_x B_z) \vec{y}^o$$

Keďže pre vlnu vo vákuu platí $|\vec{E}| = c|\vec{B}|$ a $|\vec{v}| \ll c$, posledný člen v zátvorke môžeme zanedbať. Pre stredný výkon sily $\langle \mathcal{P} \rangle$ a jej strednú hodnotu $\langle \vec{F} \rangle$ platí²⁶

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \langle \vec{v} \cdot \vec{F} \rangle = \dots = q \langle v_y E_y \rangle \quad \langle \vec{F} \rangle = \dots = q \langle v_y B_z \rangle \vec{x}^o = \frac{q}{c} \langle v_y E_y \rangle \vec{x}^o = \frac{1}{c} \langle \mathcal{P} \rangle \vec{x}^o = \left\langle \frac{d\vec{p}}{dt} \right\rangle$$

EM vlna teda odovzdáva nábojom hybnosť $\vec{p}$ v smere svojho šírenia - pôsobí na nábojovú plochu Σ **tlakom žiarenia** $\frac{|\langle \vec{F} \rangle|}{\Sigma} = \left| \left\langle \frac{d\vec{p}}{\Sigma dt} \right\rangle \right| = \frac{dx}{dt} \left| \left\langle \frac{d\vec{p}}{\Sigma dx} \right\rangle \right| = c |\langle \vec{g} \rangle|$. Vďaka svojej hybnosti vlna koná prácu (na úkor svojej energie).

I.3.4 Elektromagnetická hybnosť náboja.

Úvahy z predchádzajúcej kap. I.3.3 sa skomplikujú pridaním elektrických nábojov a prúdov o hustotách ρ a $\vec{j}$ do Maxwellových rovníc.²⁷ Obvyklou manipuláciou rovníc dostaneme **Poyntingovu teorému**

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} + \vec{E} \cdot \vec{j} = 0$$

kde posledný člen (pribudnuvší do predchádzajúcej rovnice kontinuity) je objemovou hustotou výkonu Lorentzovej sily pôsobiacej na náboje a konajúcej *mechanickú* prácu. Ak vo výraze pre objemovú hustotu Lorentzovej sily hustoty nábojov a prúdov vyjadríme pomocou polí $\vec{E}, \vec{B}$, ktoré vytvárajú, po istej námahe dostaneme

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} = \dots = \nabla \cdot \overleftarrow{T} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} \quad \begin{aligned} \rho &= \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} \\ \vec{j} &= \epsilon_0 c^2 \nabla \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

²⁶Dôsledná a realistická analýza by si vyžadovala započítať aj útlm pri urýchľovaní nábojov.

²⁷Inými slovami, v kap. I.3.3 sme s EM poľom pracovali akoby so samostatnou entitou, bez ohľadu na jeho pôvod či zdroje. Teraz do tohto scenára pridávame náboje a prúdy, ktoré sú samy osebe zdrojmi EM polí.

kde $\overleftrightarrow{T}$ je **Maxwellov tenzor napätia** so zložkami $T_{ij} = \varepsilon_0 (E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2) + \varepsilon_0 c^2 (B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2)$. Lorentzova sila spôsobuje zmenu *mechanickej hybnosti nábojov*, ľavá strana tejto rovnice je teda časovou zmenou *jej* objemovej hustoty π_{mech} , čiže $\vec{f} = \frac{\partial \pi_{mech}}{\partial t}$. Posledný člen v rovnici je zase časovou zmenou hustoty *hybnosti EM poľa* $\vec{g} = \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}$ (kap. I.3.3). Pre objemovú hustotu *celkovej* hybnosti potom platí

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\pi}_{mech} + \vec{g}) = \frac{\partial \vec{\pi}}{\partial t} = \nabla \cdot \overleftrightarrow{T}$$

pričom člen $\nabla \cdot \overleftrightarrow{T}$ reprezentuje lokálny *tok hybnosti* (*dovnútra* infinitezimálneho objemu) prostredníctvom EM poľa. Fyzikálny význam tenzora napätia je detailnejšie analyzovaný v Dodatku C. Uvedená rovnica kontinuity je *zákonom zachovania celkovej hybnosti*:

EM pole odovzdáva nábojom (mechanickú) hybnosť buď na úkor vlastnej hybnosti poľa alebo jej prítokom z okolia.

Opäť vidíme, že hustota *toku energie* poľa (reprezentovaného Poyntingovým vektorom) je súčasne hustotou jeho *hybnosti*. To ale spôsobuje, že táto rovnica sa od predchádzajúcich rovníc kontinuity líši svojou štruktúrou - skaláry sú nahradené vektorom a vektory tenzorom. Môžeme ju však vnímať ako úsporný zápis *troch* „obvyklých“ rovníc kontinuity, pre každú j -tu zložku vektora $\vec{\pi}$ (ako skalár) a j -ty riadok tenzora $\overleftrightarrow{T}$ (ako odpovedajúci vektor),

$$\frac{\partial \pi_j}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{T}_j = 0 \qquad \vec{T}_j = (T_{j1}, T_{j2}, T_{j3})$$

Tiež nás napadne, že vektor $\vec{g}$ je relativisticky zviazaný (do štvorvektora) s hustotou energie poľa w , so svojou rovnicou kontinuity $\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = 0$ ako 0-tou zložkou relativistickej *štvorice* rovníc. Rozšírením 3×3 tenzora napätia na 4×4 **tenzor energie-hybnosti-napätia**

$$\Theta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} w & [\vec{S}/c] \\ [c\vec{g}] & [-\overleftrightarrow{T}] \end{pmatrix} \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$$

dostávame relativistickú rovnicu kontinuity²⁸

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0$$

V prípade lineárne polarizovanej rovinnej EM vlny šíriacej sa vákuom v smere $\vec{x}^0$, $\vec{E} = E\vec{y}^0$, $\vec{B} = \frac{E}{c}\vec{z}^0$, nadobúda $\Theta^{\mu\nu}$ najjednoduchší možný tvar

$$\Theta^{\mu\nu} = \varepsilon_0 E^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nenulová zložka $\Theta^{11} = T_{xx}$ odpovedá tlaku žiarenia z predchádzajúcej kap. I.3.3.

Sústredíme sa však na kľúčový pojem - hustotu hybnosti EM poľa, $\vec{g} = \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}$. Tentokrát sú explicitnými zdrojmi EM poľa skúmané náboje (a prúdy), hybnosť EM poľa (ako tok energie) teda

²⁸V učebniciach elektrodynamiky sa pri odvodzovaní zákonov zachovania obvykle prechádza medzi rovnosťami pre objemové/plošné hustoty a integrálnymi rovnosťami (využívajúc Gaussovu vetu). Pre časové derivácie to znamená prechod od $\frac{\partial}{\partial t}$ pre hustoty k $\frac{d}{dt}$ pre objemové/plošné integrály. Hoci EM je relativistický, dôsledný prístup vyžaduje započítať relativistickú kontrakciu integračných objemov/plôch. Zavedením derivácie podľa *vlastného času* a relativistickej hybnosti (kap. I.2.3) tento problém zanikne.

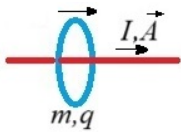
musí nejako súvisieť s hybnosťou týchto nábojov. Využijúc definičný vzťah $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ (kap. I.3.2) zapíšeme $\vec{g}$ ako

$$\varepsilon_0 \vec{E} \times (\nabla \times \vec{A}) = \varepsilon_0 \left[\vec{E}(\nabla \cdot \vec{A}) + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{E}) - \vec{A} \times (\nabla \times \vec{E}) \right] = \varepsilon_0 \left[\vec{E}(\nabla \cdot \vec{A}) + \vec{A} \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \vec{A} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right]$$

Ak predpokladáme *statické homogénne* EM pole a potenciál fixujeme *coulombovskou kalibráciou* $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, dostávame

$$\vec{p}_{EM} = \int \vec{g} dV = \int \vec{A} \rho dV = q \vec{A}$$

Tento výraz nazývame **EM hybnosťou náboja** q , a jeho fyzikálny zmysel pochopíme z nasledovnej úvahy: Predpokladajme prstenec o hmotnosti m rovnomerne nabitý nábojom q , v osi ktorého leží vodič pretekajúci prúdom I . Tento prúd generuje v osovej vzdialenosti r od vodiča pole $\vec{A}(r)$ v smere prúdu, čiže rovnaké pole pozdĺž prstenca. Počas poklesu prúdu z I na 0 je však $\frac{\partial \vec{A}(r)}{\partial t} = -\vec{E}(r) \neq 0$. Pole $\vec{E}$ (rovnakej hodnoty pozdĺž prstenca) pôsobí na prstenec silou $\vec{F} = q\vec{E}$, a po dobu jeho poklesu t udelí prstencu *mechanickú* hybnosť



$$\vec{p}_{mech} = q \int_0^t \vec{E} dt = -q \int_0^t \frac{\partial \vec{A}(r)}{\partial t} dt = -q \int_A^0 d\vec{A} = q\vec{A} = \vec{p}_{EM}$$

Prstenec, pôvodne v pokoji, teda získal vypnutím prúdu mechanickú hybnosť $\vec{p}_{mech}$ na úkor *svojej* EM hybnosti $\vec{p}_{EM}$, ktorú *mal v stave pokoja*, resp. na úkor hybnosti EM poľa. EM hybnosť náboja teda interpretujeme ako hybnosť *väzby poľa a náboja* - tzv. **minimálnej väzby**, ktorá odpovedá hybnosti EM poľa. Ak by bol prstenec pôvodne v pokoji pri *vypnutom* prúde, $\vec{p}_{mech} = \vec{p}_{EM} = 0$, získal by jeho zapnutím mechanickú hybnosť *proti* smeru prúdu, $\vec{p}_{mech} = -q\vec{A}$, a súčasne EM hybnosť $\vec{p}_{EM} = q\vec{A}$ (v smere prúdu).

Celková - *kánonická* hybnosť nabitého telesa v EM poli (kap. I.3.2) je teda

$$\vec{p}_{celk} = \vec{p}_{mech} + \vec{p}_{EM} = \underline{m\vec{v}} + q\vec{A}$$

Prechodom k relativistickému štvorvektorovému zápisu dostávame (kap. I.2.4 a I.3.2)

$$\underline{P_{celk}^\mu = mU^\mu + qA^\mu}$$

kde 0-tá zložka odpovedá relativistickej energii rozšírenej o potenciálnu energiu náboja (čiže väzbu náboja na *skalárnu* zložku poľa),

$$P_{celk}^0 = \frac{1}{c} [\gamma mc^2 + q\varphi]$$

Pri takých konfiguráciách EM poľa, v ktorých sa sústava nábojov nachádza na *uzavretých krivkách* vektora $\vec{A}$, sa jej EM hybnosť mení na **EM moment hybnosti**: Ak by v našom príklade namiesto priameho vodiča bol v osi nabitého prstenca tenký dlhý solenoid s poľom $\vec{B}$ (pozdĺž osi prstenca), mimo solenoidu v miestach nábojov by síce bolo $\vec{B} = 0$, ale vektor $\vec{A} \neq 0$ by sa uzatváral do kružnice pozdĺž prstenca. Nabitý prstenec o polomere r by mal EM moment hybnosti $\vec{r} \times q\vec{A}$. Počas vypínania prúdu v solenoide by $\vec{E}(r) = -\frac{\partial \vec{A}(r)}{\partial t} \neq 0$ pozdĺž prstenca vyvolalo jeho rotáciu - *mechanický* moment hybnosti. *Celkový* moment hybnosti by sa pritom opäť zachovával.

I.3.5 Čo je to vlastne hybnosť?

Newtonovská mechanika viaže pojem *hybnosť* na pohyb hmotných objektov. Aj v prípade hmoty rozloženej do kontinua sme schopní identifikovať jej pohyb, a nič na tom nemení ani relativistická

korekcia na *vlastný* čas pohybujúcej sa hmoty, $m\vec{v}$ (či $p\vec{v}$) $\rightarrow \gamma m\vec{v}$. Relativistická ekvivalencia hmotnosti a energie však klasickým vnímaním hybnosti už zatrasie, najmä ak ide o energiu *poľa* šíriacu sa rýchlosťou c , čiže poľa *bez pokojovej* hmotnosti. V prípade EM poľa ako nositeľa energie (schopnosti konať mechanickú prácu na nábojoch) sme identifikovali hybnosť ako *tok jeho energie*. V prípade energie poľa *šíriacej sa* priestorom formou *vlny* hybnosť poľa stotožňujeme s hybnosťou vlny. Prezentovali sme však aj situácie, keď obe zložky EM poľa sú *statické*, a energia poľa sa napriek tomu šíri.²⁹ Takáto „skrytá“ hybnosť pritom plnohodnotne vstupuje do zákona zachovania celkovej hybnosti. Vo všeobecnosti teda *hybnosť poľa nie je viazaná na pohyb poľa*. Jediným nespochybniteľným je tvrdenie, že

hybnosť je tokom energie.

V prípade telesa s nenulovou hmotnosťou môžeme jeho energiu lokalizovať do jeho objemu, a tok energie stotožniť s jeho pohybom. Priestorová lokalizácia energie *poľa* je však vo všeobecnosti problematická, a na „mapovanie“ pohybu energie poľa máme k dispozícii len *abstraktný* objekt - Poyntingov vektor $\vec{S}$.

Hybnosť a energia sú však relativisticky zviazané - čo je pre jedného pozorovateľa energiou, pre druhého je jej tokom, teda hybnosťou. Tvrdenie, že hybnosť je tokom energie, preto *nemôžeme* považovať za jej definíciu.³⁰ Skúsme si preto položiť otázku, čo je to *energia*. V prípade poľa je energia prejavom jeho *existencie* - prázdny priestor bez poľa je priestorom bez energie. Pre teleso s nenulovou hmotnosťou je táto energia ekvivalentom jeho hmotnosti - absencia pokojovej energie telesa je teda absenciou telesa samotného. Platí, že

energia je prejavom bytia a hybnosť je jeho tokom.

Takáto definícia však nespĺňa lorentzovskú symetriu: Vzťah energie a hybnosti je ekvivalentný vzťahu času a priestoru. Čas je súčasťou jednotného časopriestoru, rovnocennou s priestorom. Pretrvávajúce bytie v čase je jeho tokom pozdĺž časovej súradnice, ekvivalentným toku priestorom. Lorentzovská definícia teda znie, že

energia-hybnosť je tokom bytia v časopriestore.

Ak bytie (existenciu) určitej „lorentzovskej“ substancie kvantifikujeme veličinou $\mathcal{X}^\mu$, a očakávame jej kvantitatívne zachovávanie, musí platiť

$$\partial_\mu \mathcal{X}^\mu = 0$$

Naše mentálne nastavenie lorentzovskú symetriu (a teda ani fyziku) celkom nerešpektuje - tok priestorom vnímame ako *pohyb*, kým tok časom ako *pretrvávajúce*.³¹ Z pohľadu teórie relativity sú však tieto pojmy lorentzovsky *symetrické* (prostredníctvom lorentzovských transformácií sa pohyb „prelieva“ do pretrvávania, a naopak). *Tok* (v zmysle *pohyb*) bytia časopriestorom môžeme teda spokojne nazývať aj *pretrvávaním* bytia pri *translácii v časopriestore*. V matematickej fyzike zaujíma význačné miesto tzv. **Noetherovej teóremy**,³² podľa ktorej *každej spojitej symetrii prislúcha určitá zachovávaná sa veličina*. Ak je fyzikálny systém symetrický voči posuvu na *časovej* osi, zachováva sa jeho (celková) *energia*.³³ Ak je systém symetrický voči posúvaniu *priestorovej* súradnice (čo je ekvivalentné *jeho* pohybu vzhľadom na súradnicový systém), zachováva sa (počas posúvania) príslušná zložka jeho *hybnosti*. Napokon, tieto pravdy vieme vyčítať aj z jednej z **Hamiltonových rovníc** (základných rovníc klasickej teoretickej mechaniky),

$$\frac{dp_j}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_j} = 0$$

²⁹Pripomeňme, že EM vlna ku svojmu šíreniu vyžaduje *časovú zmenu* oboch zložiek poľa.

³⁰Nie je možné definovať pojem pomocou jeho samotného.

³¹Pre naše zmyslové vnímanie a evolučne podmienené mentálne nastavenie je jednota časopriestoru absurditou. Ak však dôverujeme experimentálnym faktom a dôverujeme fyzike, potom si musíme priznať, že naše zmysly a mozog nás občas klamú, že určité „veci“ a javy sú len *ilúziou*, a že objektívny fyzický svet je trochu iný než ako ho vnímame.

³²pomenovaná podľa matematicky Emmy Noether

³³Celková energia systému sa môže meniť len interakciami s okolitým svetom. Systém bez takýchto interakcií je *stacionárny*.

kde H je klasický **hamiltonián**, reprezentujúci energiu systému ($H = E$), a q_j, p_j sú zovšeobecnená súradnica a k nej príslušná zložka hybnosti. Ak sa hamiltonián - energia telesa nemení počas transportu pozdĺž súradnice q_j (čiže ak je jeho bytie symetrické vzhľadom na jeho presun), nemení sa jeho hybnosť.³⁴

V nasledujúcich častiach textu zistíme, že v mikrosвете pojem *pohyb* stráca zreteľný klasický obsah, čo sa prejaví na nejasnom význame „kvantifikátorov“ pohybu, akými sú poloha, hybnosť, moment hybnosti či kinetická energia. Vyššie uvedené úvahy a závery nám umožňujú sformulovať všeobecnejšie, ale aj abstraktnejšie definície týchto pojmov:

Energia objektu je mierou pretrvávania jeho bytia pri posuve času.

Hybnosť objektu je mierou pretrvávania jeho bytia pri posuve priestoru.

Moment hybnosti objektu je mierou pretrvávania jeho bytia pri rotácii priestoru.

V týchto formuláciách „sedíme na telese“ a hýbeme časopriestorom. Môžeme však zmeniť uhol pohľadu, „presadnúť si“ do laboratórnej sústavy a pozorovať pohyb a „stárnutie“ telesa.

I.4 Od špeciálnej relativity ku všeobecnej.

I.4.1 Princíp ekvivalencie.

Zákony EM a špeciálnej teórie relativity nám nedovoľujú uvažovať o okamžitom pôsobení na diaľku. Ak dve od seba vzdialené telesá na seba navzájom silovo pôsobia (podľa Newtonových zákonov), musí existovať entita, ktorá toto pôsobenie sprostredkúva - silové *pole*. V prípade Lorentzovej sily ide o EM pole, vzájomné priťahovanie *hmotných* telies sa deje prostredníctvom **gravitačného poľa**, pričom zdrojom tohto poľa je hmotnosť/energia. Podľa **Newtonovho gravitačného zákona** je silové pôsobenie gravitačného poľa telesa o hmotnosti M na teleso o hmotnosti m vo vzdialenosti r

$$\vec{F} = -\frac{\kappa_N m M}{r^2} \vec{r}^0 = -m \nabla \phi(\vec{r}_m) = m \vec{g}(\vec{r}_m)$$

kde κ_N je **Newtonova gravitačná konštanta**, a

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{\kappa_N M}{r} \qquad \vec{g}(\vec{r}) = -\nabla \phi(\vec{r})$$

sú *potenciál* a *intenzita* tohto gravitačného poľa, odpovedajúca *gravitačnému zrýchleniu*. Pre objemovú hustotu hmotnosti $\rho(\vec{r})$ (ako *žriedla* gravitačného poľa) platí

$$-\nabla \cdot \vec{g}(\vec{r}) = \nabla^2 \phi(\vec{r}) = 4\pi \kappa_N \rho(\vec{r})$$

Problémom tohto zákona (z pohľadu teórie relativity) však ostáva okamžité pôsobenie na diaľku.³⁵

Zásadný obrat v chápaní gravitácie prinieslo poznanie, že tá istá hmotnosť, ktorá je zdrojom gravitácie, je aj zdrojom „odporu“ voči zrýchľovaniu.

³⁴Táto rovnica silno pripomína rovnicu continuity, len veličiny sú prehodené. Tentokrát nesledujeme *statický* pomyselný objem a úbytok energie z neho na úkor jej výtoku, ale *pohybujúci sa* pomyselný objem, ktorý spomaľuje ak počas presunu naberá energiu, a zrýchľuje ak sa jej zbavuje.

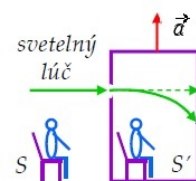
³⁵Je to prípad analogický s Coulombovým zákonom v *elektrostatike*, kde riešením je rozšírenie na elektrodynamiku, zahrňujúcu *magnetické* pole. Riešenie pre gravitačné pole ukážeme v kap. I.4.3.

Dôsledkom tejto rovnosti je, že pozorovateľ v kabíne *zrýchľujúcej* nahor so zrýchlením $\vec{a}$ v *beztiažovom stave* (napr. kozmonaut na vesmírnej lodi) nedokáže rozlíšiť svoj stav od stavu v kabíne *v pokoji v gravitačnom poli*, ak $\vec{a} = -\vec{g}$ - v oboch prípadoch pôsobí rovnakým tlakom na podlahu. Zrýchľujúca sústava je *neinerciálna*, a z pohľadu inerciálneho pozorovateľa v laboratórnej sústave je tlak kozmonauta na stenu zrýchľujúcej kabíny spôsobený *zotrvačnou pseudosilou*. V zmysle uvedenej ekvivalencie sa potom za pseudosilu môže považovať aj gravitačná sila. V tomto duchu je sformulovaný Einsteinov **princíp ekvivalencie**:

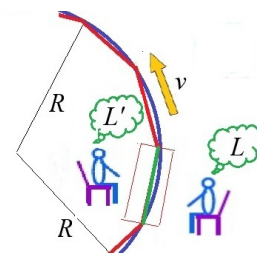
Gravitačné pole je ekvivalentné zrýchľujúcej sústave - môžeme ho vytvoriť alebo zrušiť zrýchlením.

*Sústava voľne padajúca v gravitačnom poli je teda inerciálnou sústavou.*³⁷

Pozorovateľ v nej nedokáže svoj stav odlíšiť od stavu pokoja, t.j. voľne sa vznáša, akoby naňho nepôsobili žiadne sily.³⁸ Relatívnosť gravitácie/zrýchlenia dokumentuje aj nasledovná situácia: Lúč svetla preniká z boku do zrýchľujúcej kabíny (obr.), a z pohľadu laboratórnej sústavy S sa šíri priamočiaro. Z pohľadu neinerciálneho pozorovateľa S' v kabíne sa však lúč zakrivuje akoby gravitačne padal. Vieme pritom, že svetelný lúč sa (v rovnomernom prostredí) šíri po najkratšej dráhe - znamená to, že priestor *zrýchľujúcej* kabíny je z pohľadu pozorovateľa S' *zakrivený*. Podľa princípu ekvivalencie to isté platí o gravitačnom poli - *gravitácia zakrivuje samotný priestor*.



Relatívnu zakrivenosť priestoru v zrýchľujúcej sústave dokumentuje aj tzv. **Ehrenfestov paradox**: Laboratórny pozorovateľ pozoruje relativistickú kontrakciu dĺžky $L = L'/\gamma$ meradiel pripevnených na obvodu rovnomerne rotujúceho disku (obr.), v porovnaní s ich vlastnou dĺžkou L' . Na druhej strane, polomer disku R je kolmý na obvodovú rýchlosť rotácie, a teda je pre oboch pozorovateľov rovnaký. Pre obvod disku teda (z pohľadu S) platí $l = \gamma 2\pi R$, čiže rotujúci disk - *neinerciálna sústava s dostredivým zrýchlením* - má *zakrivenú* geometriu.



Ako uvidíme ďalej, zrýchlenie/gravitácia deformuje nielen priestor ale aj *čas*. LTV, platné medzi inerciálnymi sústavami, už nemožno mechanicky použiť pri transformáciách do/z neinerciálnej sústavy. Úlohou **všeobecnej teórie relativity** je preto nájsť taký opis fyzikálnych procesov, ktorý zrovnoprávňuje *všetkých* pozorovateľov, nielen tých inerciálnych.

I.4.2 Metrika zakriveného časopriestoru.

Zakrivenie časopriestoru vyjadrujeme zmenou *metriky* oproti Minkowského metrike *plochého* časopriestoru (kap. I.1), v ktorej pre vzdialenosť dvoch udalostí platí

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta \vec{r})^2$$

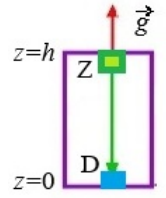
Potreba zmeny vyplýva už z newtonovskej fyziky. Predpokladajme kabínu o výške h štartujúcu v čase $t = 0$ zo zeme $z = 0$ so zvislým zrýchlením $\vec{g}$ (obr.). Zdroj Z (na strope) vysiela nadol sériu svetelných

³⁶Hoci sa touto otázkou zaoberal už I. Newton a ďalší fyzici, význam tejto ekvivalencie pochopil až A. Einstein.

³⁷Predstavte si, že sedíte v železničnom vagóne bez okien. Ako zistíte, či *vaša pokojová* sústava je alebo nie je inerciálnou, keď ste v nej (z definície) v pokoji? Skúmate, či pociťujete horizontálny tlak resp. ťah od operadla - zotrvačnú pseudosilu. To isté platí aj vo vertikálnom smere, akurát že na tlak od podlahy sme zvyknutí a neuvedomujeme si ho.

³⁸Kozmonaut v beztiažovom stave v skutočnosti padá voľným pádom. V bežnom živote sme na gravitačné pôsobenie zvyknutí, nami pociťovaný stav pokoja však nie je stavom bez silového pôsobenia.

pulzov v časoch $t_Z, t_Z + \Delta t_Z, \dots$, a detektor D (na podlahe) ich prijíma v časoch $t_D, t_D + \Delta t_D, \dots$ (pre jednoduchosť predpokladajme $t_Z = 0$ a malé rýchlosti, takže relativistickú dilatáciu času a kontrakciu dĺžky môžeme zanedbať). Pre okamžité polohy zdroja a detektora v rôznych časoch platí



$$z_D(t) = \frac{1}{2}gt^2 \quad z_Z(t) = \frac{1}{2}gt^2 + h$$

$$z_Z(t_Z) - z_D(t_D) = ct_D \cong h \quad z_Z(t_Z + \Delta t_Z) - z_D(t_D + \Delta t_D) = c[t_D + \Delta t_D - (t_Z + \Delta t_Z)]$$

Kombinovaním (predpokladajúc krátke periódy pulzov, $\Delta t_{Z,D}^2 \rightarrow 0$) dostávame

$$\Delta t_D = \Delta t_Z \left(1 - \frac{gh}{c^2}\right)$$

Pre pozorovateľa D teda medzi dvoma po sebe idúcimi pulzmi ubehol *kratší* čas než pre pozorovateľa Z. Pre frekvencie svetla $\nu_{Z,D} \sim 1/\Delta t_{Z,D}$ v zrýchľujúcej kabíne to znamená *dopplerovský* posuv spektra medzi zdrojom Z a prijímačom D na opačnom konci kabíny. Podľa princípu ekvivalencie to platí aj pre kabínu v pokoji v gravitačnom poli, pričom $gh = |\phi_Z - \phi_D|$, čo je rozdiel gravitačných potenciálov.

Čas plynie pomalšie v silnejšom gravitačnom poli

so *zápornejším* potenciálom ϕ_D (pamätajte, že $\phi(r) < 0$, $\phi(\infty) \stackrel{!}{=} 0$).³⁹ Táto skutočnosť súčasne limituje platnosť jedného zo základných postulátov *špeciálnej* relativity:

Pre neinerciálne sústavy je rýchlosť c je invariantom len lokálne!

Ak teda máme teleso Z o hmotnosti M a polomere R so žiariacim povrchom ($\phi(R) = -\frac{\kappa_N M}{R}$), detektor D vo veľkej vzdialenosti od jeho povrchu ($\phi(\infty) \rightarrow 0$) nameria **gravitačný červený posuv**

$$\nu_D = \nu_Z \left(1 + \frac{\phi(R)}{c^2}\right) = \nu_Z \left(1 - \frac{\kappa_N M}{Rc^2}\right)$$

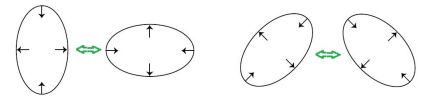
Ako vidíme, kvôli korekcii na časový interval $\Delta t \left(1 + \frac{\phi}{c^2}\right) \cong \Delta t \sqrt{1 + \frac{2\phi}{c^2}}$ má časopriestorový interval v newtonovskej metrike tvar

$$\Delta s^2 = \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2$$

Na tomto príklade vidíme, ako sa prítomnosť gravitačného poľa premieta do deformácie metriky časopriestoru. Opis gravitačného poľa teda môžeme *úplne* nahradiť opisom metriky a jej časopriestorových variácií. Na metriku časopriestoru potom nahliadame ako na ostatné druhy *polí* (napr. EM pole). Zakrivenie časopriestoru však ovplyvňuje charakter pohybových rovníc, obsahujúcich časopriestorové derivácie. Tie totiž reprezentujú (infinitesimálne) zmeny dynamických premenných pozdĺž časopriestorových súradníc, a ak sa pozdĺž nich mení aj samotný časopriestor, príslušné derivácie musia takúto zmenu zahrnúť.⁴⁰ Pohyb telesa pod vplyvom gravitácie - voľný pád - sa potom stáva *inerciálnym* pohybom po najkratšej dráhe, tzv. **geodetike**, danej časopriestorovým zakrivením. Súčasne však každý hmotný objekt (látka aj pole) svojou hmotnosťou/energiou vplýva na toto zakrivenie.

Hmota zakrivuje časopriestor, a zakrivenie časopriestoru ovplyvňuje pohyb hmoty.

Deformácia metriky, vyvolaná pohybujúcou sa hmotou, sa môže šíriť priestorom (lokálnou) rýchlosťou c ako *priečne* polarizovaná **gravitačná vlna**, s dvoma nezávislými módmi *kvadrupólovej* polarizácie (obr.).



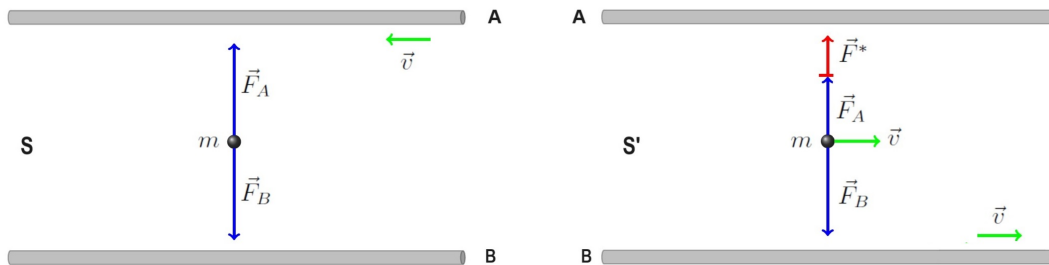
³⁹Naozaj, s narastajúcou nadmorskou výškou na povrchu Zeme pozorujeme *zrýchľovanie* chodu hodín - času, približne o 1 ns za deň na každých 100m nadmorskej výšky.

⁴⁰Máme na mysli náhradu „obyčajných“ derivácií tzv. **kovariantnými deriváciami**. Ich technické detaily sú nad rámec tohto textu.

I.4.3 Gravitačné Maxwellove rovnice.

Analógia medzi Coulombovým zákonom v elektrostatike a Newtonovým gravitačným zákonom, s hmotnosťou v úlohe **gravitačného náboja**, je neprehliadnuteľná (s jediným rozdielom neexistencie *záporného* gravitačného náboja). V kap. I.3.1 sme ukázali, že elektrické a magnetické polia sa relativisticky transformujú jedno do druhého. Vieme tiež, že priečne EM vlny sa môžu šíriť len vďaka neustálej vzájomnej premene elektrickej a magnetickej energie. A napokon vieme už aj to, že gravitačné vlny sa šíria prázdny priestorom obdobne ako EM vlny. Skúmajme teda túto analógiu hlbšie.

Uvažujme dvojicu paralelných (nekonečne) dlhých homogénnych hmotných tyčí A,B s *pokojuvými* dĺžkovými hustotami ρ_A, ρ_B vo vzájomnom pozdĺžnom pohybe konštantnou rýchlosťou $\vec{v}$, a testovací objekt hmotnosti m , umiestnený symetricky medzi tyčami a v klude voči tyči B (obr.). Predpokladajme, že gravitačné pôsobenie oboch tyčí na testovací objekt je *vzájomne vykompenzované*. (Ide o analógiu úlohy z kap. I.4.3.)



V sústave S (spojenej s tyčou B a testovacím objektom) rovnováha síl $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$ znamená $\rho_B = \gamma\rho_A$ ($\gamma > 1$), kvôli relativistickej kontrakcii dĺžky pohybujúcej sa tyče A. (*Pokojuvá* hustota tyče A teda musí byť γ -krát *menšia* oproti tyči B.) V sústave S' potom platí

$$F_A \sim \rho_A = \frac{\rho_B}{\gamma} \quad F_B \sim \gamma\rho_B = \gamma^2\rho_A \quad \Rightarrow \quad F_B \neq F_A$$

Rovnováha síl musí však existovať aj v tejto sústave, čo si vyžaduje existenciu dodatočnej sily $\vec{F}^*$ závislej od rýchlosti $\vec{v}$. Kvôli analógii s EM prípadom túto silu nazývame **gravitomagnetickou**. Gravitačná sila má teda dva zdroje - **gravitoelektrické pole** o intenzite $\vec{E}_g = \vec{g}$ („standardné“ pole newtonovskej gravitácie) generované hmotnosťou, a **gravitomagnetické pole** $\vec{B}_g$ generované *pohybujúcou sa* hmotnosťou (ako analóg magnetickej indukcie $\vec{B}$).⁴¹ Kombinovaním LTV pre transformácie síl a rýchlostí vieme celkovú gravitačnú silu pôsobiacu na objekt o hmotnosti m , pohybujúci sa (v danej referenčnej sústave) rýchlosťou $\vec{u}$ v gravitačnom poli tvorenom hmotou *pohybujúcou sa* rýchlosťou $\vec{v}$, vyjadriť v lorentzovskom tvare

$$\vec{F} = m(\vec{E}_g + \vec{u} \times 4\vec{B}_g) \quad \vec{B}_g = \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}_g \quad \vec{E}_g = \vec{g} = \frac{\vec{F}_{Newton}}{m}$$

kde faktor 4 je korekcia na malé zakrivenie časopriestoru, ktoré špeciálna relativita nezahrňuje.⁴² Pre *statické* rozloženie hmoty s hustotou ρ platia vzťahy (odpovedajúce newtonovskej gravitácii a analogické s elektrostatikou)

$$\nabla \cdot \vec{E}_g = -4\pi\kappa_N\rho \quad \nabla \times \vec{E}_g = 0 \quad \frac{\partial \vec{E}_g}{\partial t} = 0$$

⁴¹Jedným z dôsledkov gravitomagnetizmu je *absencia* vzájomného priťahovania *paralelných* svetelných lúčov - gravitomagnetická sila (pri rýchlosti c) *presne* kompenzuje vzájomné (gravitoelektrické) priťahovanie energie. Naopak, dráhy *antiparalelných* lúčov sa navzájom ovplyvňujú.

⁴²Tieto vzťahy sa dajú odvodiť z linearizovanej **Einsteinovej rovnice** gravitačného poľa (základnej rovnice všeobecnej teórie relativity - diferenciálnej rovnice pre metriku časopriestoru, zakrivovanú hmotou/energiou) v príslušnej limite (a kalibrácii).

Lorentzovskými transformáciami tohto statického poľa (kap. I.4.3) dostávame rovnice pre gravitačné pole tvorené hmotou pohybujúcou sa rýchlosťou $\vec{v}$ - tzv. **gravitačné Maxwellove rovnice**

$$\begin{aligned} \underline{\nabla \cdot \vec{E}_g = -4\pi\kappa_N\rho} \quad \quad \quad \underline{\nabla \cdot \vec{B}_g = 0} \quad \quad \quad \underline{\nabla \times \vec{E}_g = -\frac{\partial \vec{B}_g}{\partial t}} \\ \underline{\nabla \times \vec{B}_g = -\frac{4\pi\kappa_N}{c^2}\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}_g}{\partial t}} \quad \quad \quad \text{kde} \quad \vec{j} = \rho\vec{v} \end{aligned}$$

Od rovníc EM poľa sa líšia len *záporným* znamienkom pred zdrojmi $\rho, \vec{j}$, tvoriacimi štvorvektor $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$, čo odzrkadľuje vzájomné *príťahovanie* hmotností (na rozdiel od *odpuďzovania* nábojov rovnakej polarity). Rovnako ako v EM prípade, kombináciou týchto rovníc dostávame vlnové rovnice

$$\square \vec{E}_g = -4\kappa_N \left(\nabla \rho + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \right) \quad \quad \square \vec{B}_g = \frac{4\kappa_N}{c^2} (\nabla \times \vec{j})$$

čo pri absencii zdrojov $\rho, \vec{j}$ vedie na *homogénne* rovnice s riešeniami v tvare gravitačných vln s gravitačným Poyntingovým vektorom, hustotou energie vlny a zákonom zachovania *celkovej* energie hmoty a poľa/vlny⁴³

$$\vec{\mathcal{S}}_g = -\frac{c^2}{4\pi\kappa_N}(\vec{E}_g \times \vec{B}_g) \quad \quad w_g = -\frac{1}{8\pi\kappa_N}(E_g^2 + c^2 B_g^2) \quad \quad \frac{\partial w_g}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\mathcal{S}}_g = -\vec{E}_g \cdot \vec{j}$$

Rovnica kontinuity pre *hybnosť* vlny je zákonom zachovania *celkovej* hybnosti hmoty a poľa/vlny

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{\mathcal{S}}_g}{c^2} \right) + \nabla \cdot \overleftrightarrow{T}_g = -(\rho \vec{E}_g + \vec{j} \times \vec{B}_g)$$

kde $\overleftrightarrow{T}_g$ je 3×3 Maxwellov tenzor napätia poľa (vlny) - jeho zložky sú Θ_g^{jk} -zložkami tenzoru energie-hybnosti poľa

$$\Theta_g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} w_g & \vec{\mathcal{S}}_g/c \\ \vec{\mathcal{S}}_g/c & \overleftrightarrow{T}_g \end{pmatrix}$$

v úplnej analógii s EM prípadom z kap. I.3.4. Treba však pripomenúť, že maxwellovská limita je limitou *plochého* časopriestoru, a spadá do oboru *špeciálnej* relativity. Vo *všeobecnej* teórii relativity sa energia gravitačného poľa/vlny *premieta do zakrivenia* časopriestoru, a silová interakcia s hmotou do *voľného pohybu hmoty po geodetikách*. V tomto zmysle *nedochádza* k transféru energie-hybnosti medzi poľom a hmotou - gravitačná sila *neexistuje*, a teda $\Theta_g^{\mu\nu} = 0$. Môžeme to interpretovať tak, že energia-hybnosť poľa/vlny $\Theta_g^{\mu\nu}$, vystupujúca v scenári s plochým časopriestorom, sa spotrebuje na jeho zakrivenie.

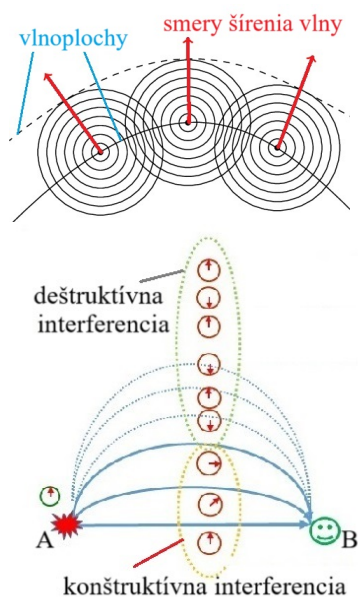
⁴³Záporné znamienka na pravých stranách odrážajú gravitačné *príťahovanie* a požiadavku *nulovej* potenciálnej energie v nekonečnej vzdialenosti od zdrojov.

CESTA KU KVANTOVEJ FYZIKE

II.1 Fotón.

II.1.1 Šírenie svetla ako interferencia vln.

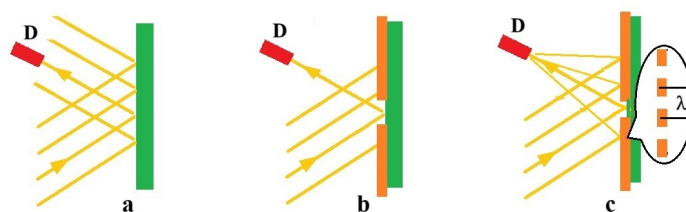
Našu cestu ku kvantovej povahe fyzikálnej reality začneme rýdzo klasickými úvahami o šírení svetla.¹ Z učebníc geometrickej optiky vieme, že lúč svetla sa z medzi miestami A a B v opticky homogénnom prostredí šíri po priamke, a vo všeobecnosti (v prostredí s meniacim sa indexom lomu) po trajektórii, ktorej odpovedá najkratší čas. Na druhej strane, z vlnovej mechaniky (a svetlo *je* vlna) poznáme



Huygensov princíp, podľa ktorého každý bod vlnoplochy (množiny bodov s rovnakou fázou vlny) je zdrojom sekundárnej vlny (obr.), pričom tieto sekundárne vlny navzájom *interferujú*. Šíriace sa vlnenie je výsledkom (konštruktívnej aj deštruktívnej) interferencie sekundárnych vln. Takýto scenár je predstaviteľou realitou pri vlnení hmotných prostredí (napr. na vodnej hladine). Interferenčné obrazce však pozorujeme aj pri svetle šíriacom sa *vákuom*, a to na detektoroch (tienidlách) za štrbinami v nepriesvitných prekážkach. Aj šírenie svetelného lúča po priamke si takto dokážeme vysvetliť ako *konštruktívnu* interferenciu dráh dĺžkovo sa líšiacich od priamej o menej než polovinu vlnovej dĺžky λ (pojem *lúč* zahŕňa tieto dráhy v limite $\lambda \rightarrow 0$), bez príspevkov od zakrivenejších dráh, ktoré navzájom interferujú deštruktívne (obr.).

Stále sa však môžeme pýtať, či sa svetlo šíri z A do B *naozaj* po všetkých možných dráhach, alebo ide len o matematický „výpočtový trik“. Uvažujme preto rovinnú svetelnú vlnu dopadajúcu šikmo na zrkadlo, a detektor snímajúci intenzitu odrazeného svetla.

Na detektor D dopadajú lúče odrazené len od malej plošky zrkadla, v súlade so zákonom odrazu (a). Ak teda zvyšok zrkadla pokryjeme absorpčnou vrstvou (všetko dopadajúce svetlo pohltí), intenzita svetla snímaná detektorom sa *nezmení* (b). Ak však táto vrstva bude tvoriť mriežku s otvormi s periódou λ (c), intenzita detegovaného svetla sa *zmení* (zvýši alebo zníži, podľa posuvu mriežky po zrkadle). Vysvetlením je, že *svetlo sa naozaj šíri po všetkých možných dráhach*, a vytvorením vhodnej mriežky sme zamedzili deštruktívnej interakcii navzájom blízkych dráh. Detektor preto prijíma oproti predchádzajúcim prípadom prebytok navzájom interferujúcich lúčov z rôznych smerov (s *nejakým* fázovým posuvom voči lúču odrazenému podľa zákona odrazu).



¹ Kvôli názornosti budeme hovoriť o *svetle*, máme však na mysli šírenie EM vln vo všeobecnosti.

Pripomeňme, že podstatou interferencie svetla je sčítavanie *okamžitých výchyliek oscilujúcich polí* $\vec{E}(\vec{r}, t)$ jednotlivých interferujúcich vln (s ohľadom na ich *fázy*), a nie ich intenzít. Výsledné elektrické pole v každom mieste (lineárneho prostredia) je totiž *superpozíciou* jednotlivých zložiek, $\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_j \vec{E}_j(\vec{r}, t)$. Intenzita svetla v danom mieste je potom úmerná energii poľa, $I \sim |\vec{E}|^2$. V prípade interferencie dvoch zložiek *rovnakej frekvencie* platí

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \vec{E}_1 e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t - \varphi_1)} = \vec{E}_1 e^{i(\varphi_1(\vec{r}) - \omega t)} \quad \vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{E}_2 e^{i(\varphi_2(\vec{r}) - \omega t)}$$

$$I(\vec{r}) \sim \int \left| \vec{E}_1(\vec{r}, t) + \vec{E}_2(\vec{r}, t) \right|^2 dt = \int \vec{E}^*(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) dt = \dots$$

$$I(\vec{r}) \sim \left| \vec{E}_1(\vec{r}) \right|^2 + \left| \vec{E}_2(\vec{r}) \right|^2 + 2\vec{E}_1(\vec{r}) \cdot \vec{E}_2(\vec{r}) \cos[\varphi_1(\vec{r}) - \varphi_2(\vec{r})]$$

Ak $\vec{E}_1(\vec{r}) \perp \vec{E}_2(\vec{r})$, k žiadnej interferencii nedochádza, a $I(\vec{r}) = I_1(\vec{r}) + I_2(\vec{r})$. Pre $\vec{E}_1(\vec{r}) \parallel \vec{E}_2(\vec{r})$ platí

$$I(\vec{r}) = I_1(\vec{r}) + I_2(\vec{r}) + 2\sqrt{I_1(\vec{r})I_2(\vec{r})} \cos[\varphi_1(\vec{r}) - \varphi_2(\vec{r})]$$

Výsledná intenzita svetla sa teda interferenciou zosilňuje alebo zoslabuje, v závislosti od fázového rozdielu $\Delta\varphi(\vec{r}) = \varphi_1(\vec{r}) - \varphi_2(\vec{r})$,

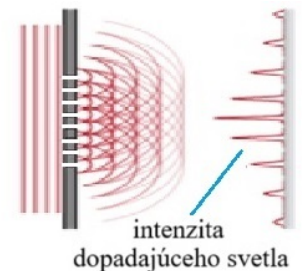
interf. maximá pri $\Delta\varphi = 2k\pi$

inter. minimá pri $\Delta\varphi = (2k + 1)\pi$

$k = 0, 1, 2, \dots$

Pojem intenzita teda pre nás má zmysel len pre výsledok interferencie. Treba tiež zdôrazniť, že pre pozorovanie ostrých interferenčných efektov (t.j. jasného rozdielu medzi konštruktívnou a deštruktívnou interferenciou) je potrebné dostatočne *koherentné*, teda *monochromatické* svetlo. Rozdiely fáz interferujúcich zväzkov sú totiž určené vlnovou dĺžkou svetla. Pre nemonochromatické svetlo sa interferenčné minimá jednej vlnovej dĺžky prekrývajú s maximami inej.

Uvažujme teraz plošný fotodetektor - zariadenie konvertujúce lokálnu intenzitu dopadajúceho svetla (tok EM energie na dané miesto plochy detektora) do určitej formy záznamu - „čiar“ (priradenej k tomuto miestu) o výške úmernej detegovanej intenzite svetla. „Mapa“ detegovanej intenzity po prechode svetla sústavou štrbín pozostáva zo sústavy miest vysokej intenzity dopadajúceho svetla (v dôsledku *mnoholúčovej* konštruktívnej interferencie), oddelených tmavými miestami (Dodatok D). Nulová alebo mizivá detegovaná intenzita pritom *nie je* dôsledkom nedostupnosti týchto miest lúčmi z *jednotlivých* štrbín, ale dôsledkom dokonalej *deštruktívnej* interferencie lúčov zo *všetkých* štrbín. Zakrytím ktorejkoľvek zo štrbín totiž ovplyvníme *všetky* miesta „mapy“.



II.1.2 Interferujúci fotón.

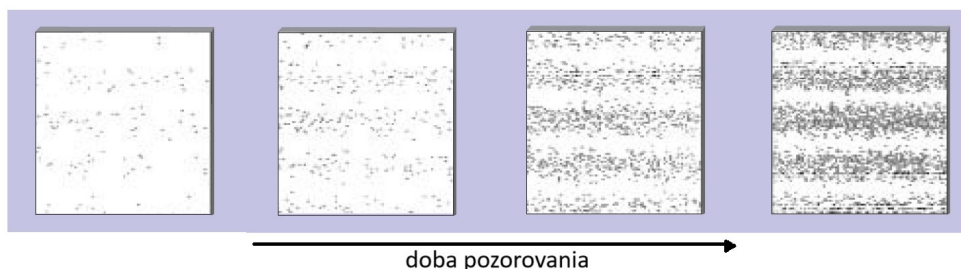
Výška *celého* interferenčného obrazca na sústave štrbín z kap. II.1.1 sa škáluje s výkonom zdroja svetla - pri polovičnom výkone je polovičná výška všetkých čiar. Ak však nastavíme výkon zdroja svetla na *mizivú* úroveň,² plošný detektor už nezaznamená *naraz celý* interferenčný obrazec, ale *časový sled jednotlivých lokálnych impulzov*. Vyvoláva to zdanie, akoby tok EM energie nebol plynulý, ale šíril sa v akýchsi energeticky aj priestorovo mikroskopických „balíkoch“ - **fotónoch**³, a plynulosť makroskopického toku energie bola iba ilúziou.⁴ Pri dostatočne nízkej intenzite dopadajúceho svetla fotóny postupne po jednom pribúdajú na detektore. Miesto detekcie jednotlivého fotónu je na

²Praktickým riešením je zväčšovanie hrúbky absorbujúcej prekážky pri danom výkone zdroja.

³Tento názov pochádza od amerického fyzikálneho chemika Gilberta Lewisa.

⁴Uvidíme však, že takýto záver je unáhlený a nenáležitý.

prvý pohľad *náhodné*, po čase však zistíme, že najviac fotónov detegujeme v miestach prislúchajúcim interferenčným maximám, a (takmer) žiadne fotóny nezaregistrujeme v miestach prislúchajúcim interferenčným minimám. Ak detekčné zariadenie dokáže zobrazíť mapu početnosti registrácií, po dostatočne dlhom čase dostaneme ostrý interferenčný obrazec, *rovnaký ako v prípade intenzívneho osvetlenia*.



Presnosť priestorovej lokalizácie fotónu na detektore je limitovaná rozlišovacou schopnosťou detektora. Detekcia fotónu je *pohltením* EM energie telesom detektora, a jeho rozlišovacia schopnosť je daná schopnosťou lokalizovať miesto tohto energetického transféru. Predstavme si aktívnu plochu detektora ako raster *izolovaných* „čidiel“. Zamezdenie interakcií medzi susediacimi čidlami (*každá* interakcia je výmenou energie) potom umožní lokalizáciu fotónu jediným čidlom. Ukazuje sa však, že

fotón je tak malý ako malé vieme urobiť jeho čidlo.

Existencia interferenčného obrazca nás núti veriť, že každý „balík“ energie prislúchajúcej registrovanému fotónu sa šíri *súčasne celou sústavou štrbín*. Umiestnením dodatočného detekčného zariadenia priamo v sústave štrbín však registrujeme záznam (fotón) vždy *len v jednej zo štrbín*, a nie súčasne vo viacerých štrbinách. Tento výsledok nás zasa utvrdzuje v predstave, že každý „balík“ energie prechádza *jedinou* štrbinou, nezávisle na existencii ostatných štrbín, a že výsledný interferenčný obrazec je súčtom „balíkov“ z jednotlivých štrbín. Ak však necháme svetlo prechádzať vždy len jednou štrbinou pri zakrytých zvyšných, a toto opakujeme pre všetky štrbiny, výsledný súčet záznamov *žiadnu interferenciu nevykazuje*.⁵ Každý „balík“ energie teda dokáže interferovať sám so sebou len ak ho necháme „nerušene“ prechádzať *súčasne alternatívnymi trajektóriami ako vlnu*. Ak sa ho však pokúsime počas šírenia lokalizovať (tzv. „*welcher Weg*“ experimenty⁶), správa sa ako projektil - *častica*. Pre takéto správanie sa ustálil názov **vlnovo-časticový dualizmus**. Jeho podstatou je téza, že *fyzikálna realita*, ako nám ju odhaľuje experiment, závisí od voľby *typu* experimentálnej „otázky“ (či chceme merať vlastnosti vlny alebo častice). Znamená to však tiež, že

neexistuje pasívny pozorovateľ objektívnej reality - vždy je jej aktívnou súčasťou.⁷

Neskôr uvidíme, ako sa tomuto princípu prispôsobuje aj matematický formalizmus „novej“ fyziky. Protichodné črty vlnovo-časticového dualizmu však nedokážeme sklbiť v rámci klasických predstáv o šírení hmoty a energie, a pri formulovaní spoľahlivej teórie (rešpektujúcej experimentálne fakty) musíme pripustiť, že zákony mikrosвета sa môžu priečiť „zdravému rozumu“.⁸

Ani po viac než storočí bádania sa nepodarilo sformulovať takú fyzikálnu predstavu, ktorá by uspokojivo zodpovedala *všetky* naše otázky (a nebudeme sa o to pokúšať ani v tomto texte). Podarilo sa však sformulovať účinný matematický aparát, ktorý s neuveriteľnou presnosťou korešponduje s experimentom. Práve táto jeho účinnosť nás nabáda sa pýtať, do akej miery (a či vôbec) pojmy a nástroje

⁵Toto by nemalo byť prekvapením, veď ani pri intenzívnom osvetlení nedostaneme interferenčný obrazec, ak registrujeme svetlo vždy len z jedného otvoru a *postupne* sčítavame intenzity z jednotlivých otvorov. Žiaľ, detekcia fotónu znamená pohltenie celej jeho energie, nie je preto možné registrovať daný fotón priamo v štrbine a vzápätí aj na vzdialenejšom detektore (umožňujúcom interferenciu).

⁶nem. „*ktorá cesta*“. Moderná fyzika sa z väčšej časti rodila v nemecky hovoriacom prostredí.

⁷V klasickej fyzike existuje pojem **ideálne meranie** - meranie neovplyvňujúce meraný objekt. Opakovane uvidíme, že v mikrosвете takéto meranie *nie je možné*.

⁸Popustiť uzdu fantázie vo fyzike je dovolené, niekedy dokonca žiaduce, mala by však existovať aspoň principiálna možnosť experimentálneho overenia nových myšlienok, alebo nádej, že v budúcnosti sa taká možnosť nájde. Príkladom z histórie fyziky je Einsteinov (a Lorentzov a Minkowského) nápad zjednotiť čas a priestor do časopriestoru, podporený experimentami (Michelson - Morley).

tohto aparátu (niektoré z nich už poznáme, s niekoľkými ďalšími sa zoznámime) reprezentujú *objektívnu fyzikálnu realitu* (tak ako v klasickej fyzike), a do akej miery sú len pragmatickým výpočtovým nástrojom (bez „hmatateľného“ obsahu) v štýle „*mlč a počítaj!*“.⁹ Aktuálny všeobecne prijímaný fyzikálny obraz mikrosвета sa natoľko prieči prirodzenej intuícii, že z didaktických dôvodov ho budeme budovať postupne. Opierať sa budeme o kľúčové experimenty, ktorých úlohou často nebude určitý pracovný predpoklad potvrdiť, ale ho vyvrátiť.

V prípade vyššie opísaného experimentu by naša argumentácia mohla byť takáto: Jednotlivá a „bodová“ detekcia fotónov na plošnom detektore (tienidle), ako aj detekcia fotónov v jednotlivých štrbinách, svedčia v prospech obrazu *fotónu ako častice-projektily*. Interferencia každého fotónu samého so sebou, pozorovaná pri *nenarušenom* prelete sústavou štrbín, však takýto obraz spochybňuje. Môžeme sa ho pokúsiť zachrániť jedným z nasledujúcich scenárov:

1. Fotón-projektíl síce prechádza *jedinou* štrbinou (ako sa na projektíl patrí), ale „ktosi“ mu určuje dráhu a miesto dopadu, aby sme pozorovali interferenčný obrazec. Tým „ktosi“ môže byť len *vlna* (lebo len vlny interferujú) - EM vlna. Potom by ale fotón a EM vlna boli dve *rôzne* entity, a fyzika by okrem teórie EM poľa potrebovala teóriu *interakcie poľa a fotónov*. Takú teóriu však nemáme. Tento scenár teda problém nerieši, len ho presúva inam.

2. Fotón je projektíl (lebo je „bodovo“ detegovaný), a vlna určujúca miesto jeho pravdepodobného dopadu je *čisto matematickým nástrojom*. Viac nevieme a ani nemusíme vedieť - mlč a počítaj! Pri makroskopickom počte fotónov takáto vlna vyvoláva „ilúziu“ fyzikálnej (t.j. merateľnej) EM vlny. Makroskopicky merateľná intenzita EM poľa je **emergentná** - vzniká/vynára sa z *obrovského* množstva mikroskopických udalostí, pričom na mikroskopickej úrovni ako pojem *nemá zmysel*.¹⁰ Tento scenár je sľubný (výpočty vedú k správnym výsledkom). O šírení „reálneho“ fotónu-projektily však nehovorí nič. Ak je však takýto *šíriaci sa* fotón-projektíl nedostupný fyzikálnemu opisu, jeho miesto vo fyzikálnom obraze sveta je otázne.

3. Fotón nie je klasická častica-projektíl, ale podivný objekt (aké v našom svete na makroskopických škálach nepozorujeme), ktorý až do okamihu detekcie *fyzicky existuje v superpozícii* viacerých lokalizovateľných polôh, a môže teda prechádzať *súčasne* všetkými štrbinami. Interferovať sám so sebou však môže len ak pozdĺž každej svojej alternatívnej trajektórie „eviduje“ svoju okamžitú *fázu*. Fáza je atribútom periodických dejov, každý fotón by teda musel existovať v superpozícii akýchsi vnútorných oscilátorov. Sú tu však ďalšie problémy: Alternatívne trajektórie medzi zdrojom a miestom detekcie (cez všetky možné štrbiny) sa líšia dĺžkou. Fotón ako balík EM energie má *nulovú* hmotnosť, musí sa preto pohybovať *len* rýchlosťou c . Po rôzne dlhých dráhach by na miesto detekcie dorazil nielen s rôznymi fázami (čo je podmienkou vzniku interferenčného obrazca) ale aj *v rôznych časoch* (čo je pre interferenciu *bodového* objektu problém).¹¹ Musel by byť aspoň čiastočne *delokalizovaný aj pozdĺž dráh* šírenia. Potom už ale naozaj neexistuje dôvod považovať ho počas letu za projektíl.¹²

Fotón v 3. scenári je fakticky *vlnou*, presnejšie *vlnovým balíkom* s nenulovými rozmernami vo všetkých smeroch. Mohlo by však ísť o „matematickú“ vlnu v zmysle 2. scenára, pričom superpozícia polôh by bola chápaná len ako výpočtový nástroj bez ontologického¹³ významu. Fotón by mohol byť aj krátkym EM impulzom, no jeho nenulové rozmery pre zmenu nevysvetľujú „bodovú“ detekciu. Ok-

⁹ angl. „*shut up and calculate!*“

¹⁰ Takýmto *emergentným* pojmom je napr. *teplota* - pojem, ktorý na mikroskopickej úrovni neexistuje. Naše makroskopické videnie sveta je založené práve na takýchto ilúziách.

¹¹ Časy „príletov“ by sme vedeli zjednotiť len za cenu predpokladu, že rôzne dlhým dráham prislúchajú rôzne (a dôkladne vyladené) rýchlosti, a rýchlosť c je len akousi „zdanlivou - zinterferovanou“ rýchlosťou. Aký by to malo však dopad na fázy a interferenciu?

¹² Ešte aj v čase písania tohto textu sa môžeme stretnúť s tvrdením, že v mikrosвете takéto projektily existujú. Ak by to aj bola pravda, nebol by dôvod nazývať ich projektily ani ich za také považovať. Žirafa s plutvami a žiabrami, žijúca v oceánoch, jednoducho nie je žirafou. Možno je to žralok.

¹³ *ontologický* = spojený s reálnou fyzickou existenciou

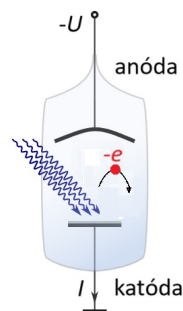
rem toho, žiaden zo scenárov nevysvetľuje výber konkrétneho miesta detekcie (interferencia určí len viac či menej pravdepodobné, ako aj úplne nepravdepodobné miesta), a nedotýka sa ani podstatnej vlastnosti fotónu - **kvantovania** jeho energie. Bez presvedčivých odpovedí na tieto otázky sú vyššie uvedené scenáre iba predbežnými špekuláciami. Potrebujeme sa o fotónoch dozvedieť viac, prostredníctvom iných experimentov, a tomu sa venujú nasledujúce kapitoly.

II.1.3 Fotón ako kvantum energie.

V predchádzajúcej kap. II.1.2 sme predstavili fotón ako balík energie. Prvé experimentálne dôkazy existencie fotónov sa viažu tzv. vonkajší¹⁴ **fotoelektrický jav (fotoefekt)**. Ide o emisiu elektrónov z povrchu kovu pri požití EM žiarenia. EM energia E_{EM} absorbovaná elektrónom sa prerozdelená na **výstupnú prácu** E_v (energiu potrebnú na vytrhnutie elektrónu z povrchu kovu, charakteristickú pre daný materiál) a „prebytočnú“ kinetickú energiu uvoľneného elektrónu,

$$E_{EM} = E_v + E_{kin}$$

Pôvodným experimentálnym zariadením bola vákuová elektrónka (obr.). EM žiarenie fotoefektom vyrážalo z uzemnenej katódy elektróny, a pri kladnom anódovom napätí tieto elektróny viedli prúd elektrónkou. Prúd bol úmerný počtu emitovaných elektrónov, a teda narastal s výkonom EM žiarenia. Naopak, priložením záporného napätia na anódu boli emitované elektróny odpudzované a brzdené, a pri určitej hodnote $|eU_o| = E_{kin}$ prúd elektrónkou zanikol. Zmeraním tohto záverného napätia bolo možné určiť maximálnu hodnotu E_{kin} . Očakávalo sa pritom, že hodnota U_o bude (rovnako ako prúd) závisieť od EM výkonu. Toto očakávanie sa však nenaplnilo. Namiesto toho sa ukázala lineárna závislosť U_o od *frekvencie* EM žiarenia,



$$|eU_o| + E_v = \hbar\omega$$

kde $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, a $h = 6.626... \cdot 10^{-34}$ Js je tzv. **Planckova konštanta**. Vysvetlením tohto javu¹⁵ je, že EM žiarenie odovzdáva elektrónom energiu v elementárnych **kvantách**, pričom energia kvanta je úmerná *výlučne* frekvencii žiarenia,

$$E = \hbar\omega$$

Emisia jedného elektrónu nastane požitím *jedného* kvanta EM energie $\hbar\omega$ - fotónu. S rastúcou intenzitou žiarenia narastá počet požitých fotónov a teda aj počet emitovaných elektrónov, nie však ich kinetická energia - tá narastie len zvýšením frekvencie EM žiarenia. Motiváciou k tomuto (na tú dobu revolučnému) predpokladu o kvantovaní energie bol jeho úspech pri opise **tepelného žiarenia**.

Čo je tepelné žiarenie? Zo skúsenosti (aj bez znalostí z termodynamiky) vieme, že ak dáme do tepelného kontaktu dve telesá o rôznych teplotách,¹⁶ teplo z teplejšieho telesa bude prúdiť do chladnejšieho v snahe vyrovnať teploty. Pokiaľ je tento systém izolovaný, po určitom čase musí dôjsť k vyrovnaniu teplôt. Transfér energie medzi telesami však nemusí prebiehať len vďaka ich priamemu kontaktu (dotyku) či vďaka prúdeniu okolitého prostredia (vzduchu, vody,...) medzi nimi, ale aj prostredníctvom

¹⁴Existuje aj *vnútorný* fotoefekt, pri ktorom elektróny v polovodičoch neopúšťajú povrch, ale prestupujú z valenčného do vodivostného pásu, a tým zvyšujú elektrickú vodivosť. Využíva sa v optoelektronike.

¹⁵Vysvetlenie fotoefektu predložil v r. 1905 A. Einstein, za čo mu bola neskôr (1921) udelená Nobelova cena. Zásadný podiel na experimentálnom objave fotoefektu má však aj bratislavský rodák Philipp Lenard, jeden z prvých laureátov Nobelovej ceny za fyziku (1905).

¹⁶Teplotu telesa môžeme (pre naše potreby) definovať ako mieru energie naakumulovanej vo *vnútornom pohybe* jednotlivých častí objektu vzhľadom na jeho ťažisko.

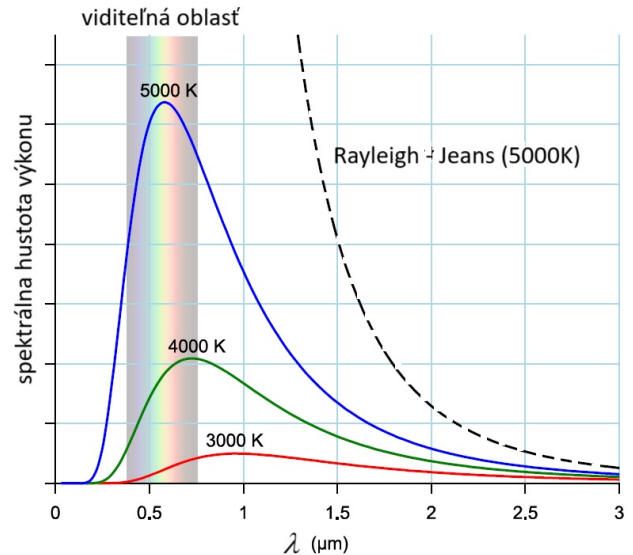
EM energie vyžarovanej a pohlcovanej povrchom telies.¹⁷ Podľa **Stefanovho - Boltzmannovho zákona** (Dodatok E) výkon EM žiarenia povrchu telesa narastá s jeho teplotou ako T^4 (v kelvinoch !),¹⁸ pričom energia žiarenia je rozložená do spektra frekvencií, typického pre daný materiál.¹⁹ Idealizované teleso schopné absorpcie a emisie na *všetkých* frekvenciách nazývame **absolútne čiernym telesom**,²⁰ a rozloženie hustoty energie $w(\omega)$ v jeho emisno-absorpčnom spektre pri danej teplote určuje práve **Planckov zákon**²¹ (Dodatok E)

$$w(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3} \frac{1}{\exp\{\frac{\hbar\omega}{k_B T}\} - 1}$$

resp.

$$w(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\{\frac{hc}{\lambda k_B T}\} - 1}$$

(lebo $\omega = 2\pi c/\lambda$ a $d\omega = (-)2\pi c/\lambda^2$).



Do priestoru uzavretého stenami, temperovanými na určitú teplotu, vyžarujú tieto steny EM vlny a súčasne ich aj pohlcujú. V ustálenom stave pohltia presne to čo vyžiaria - hovoríme, že *žiarenie je v termodynamickej rovnováhe so svojím okolím*, a môžeme mu teda priradiť teplotu.²² Práve takúto situáciu predpokladáme pri odvodzovaní Planckovho zákona: EM pole v dutine sa skladá z módov stojatých vln, pričom energia každého módu sa môže meniť len o násobky elementárnych kvánt $\hbar\omega$ - fotónov. Okrajovými podmienkami dané *diskrétné* spektrum módov sa v limite nekonečne veľkej dutiny stáva *spojitým*.

Veľkosť kvanta energie módu s frekvenciou ω je určená hodnotou $\hbar$. Táto fyzikálna konštanta je teda akosi fundamentálnou mierou kvantovanosti Prírody na úrovni mikrosвета. V limite $\hbar \rightarrow 0$ kvantovanosť vymizne, a vrátime sa do sveta našej skúsenosti a klasickej fyziky. Všimnime si fyzikálny rozmer Planckovej konštanty, $J\cdot s = kg\frac{m^2}{s}$. Tento rozmer majú vo fyzike dve známe veličiny - *moment hybnosti* (resp. súčin hybnosti a polohy/vzdialenosti) a **účinnok** - akýsi kvantifikátor „vynaloženého úsilia“ pri pohyboch a dejoch všetkého druhu.²³ Môžeme sa teda domnievať (správne, ako uvidíme neskôr), že práve účinnok je tou kvantovanou veličinou, a že

v prírode neexistujú procesy, ktorých účinnok by bol menší než $\hbar$.

¹⁷Zem je ohrievaná žiarením pochádzajúcim zo Slnka. Temperovaná miestnosť ohrieva zmrznutú záhradu aj cez presklené plochy kvalitných okien, lebo sú priepustné pre EM vlny.

¹⁸Človek o teplote 37°C vyžaruje (cez plochu cca 1m² svojho povrchu) výkon cca 500W a súčasne pohlcuje cca 400W z okolia na izbovej teplote 22°C.

¹⁹O tom, aké frekvencie daná látka môže pohltiť a aj vyžiariť, rozhoduje štruktúra látky na mikroskopickej úrovni - typ atómov a molekúl, chemické väzby, atď. Toto spektrum je akýmsi „odtlačkom prstov“ danej látky.

²⁰Farbu telesa vnímame v dvoch prípadoch: Buď je teleso rozžeravené natoľko, že výrazne vyžaruje aj vo viditeľnej časti spektra (vtedy ho vidíme aj v tme), alebo ho musíme osvetliť viditeľným svetlom. Tie zložky spektra, ktoré teleso nedokáže pohltiť, sa odrazia od povrchu a určujú jeho farbu. Povrch, ktorý všetko pohltí, nič neodrazí a preto je čierny.

²¹Sformuloval ho M. Planck v r. 1900, a dostal zaň Nobelovu cenu za rok 1918.

²²Napr. vesmírny prázdny priestor (vo veľkej vzdialenosti od hviezd) má teplotu menšiu než 3K, vďaka prítomnosti tzv. **reliktného mikrovlnného žiarenia**. Spektrálne rozloženie energie tohto žiarenia totiž odpovedá Planckovmu zákonu pre takúto teplotu.

²³V teoretickej mechanike sa účinnok definuje ako časový integrál lagrangiánu. Práve minimalizáciou účinku získavame skutočné trajektórie pohybu, a pod. Príroda sa chová úsporne.

Neexistuje teda ani transfér energie z jedného systému na druhý (napr. z telesa do žiarenia), ktorého účinok by „podliezol“ tento limit.

II.1.4 Je fotón časticou?

Rozoberieme teraz otázku, či fotón ako kvantum *emitovanej* a *absorbovanej* energie je aj *šíriacim sa* kvantom, teda *časticou*. Nasvedčuje tomu „bodová“ detekcia ako pri častici-projektile. Je tiež zrejmé, že emisia a absorpcia fotónu je transférom nielen energie ale aj hybnosti, typickej pre projektíl. Keďže musí platiť rovnosť

$$E^2 = (\hbar\omega)^2 = (mc^2)^2 + (\vec{p})^2 c^2 \quad \xrightarrow{m=0} \quad \hbar\omega = |\vec{p}|c$$

pre hybnosť fotónu dostávame

$$\underline{\vec{p} = \frac{\hbar\omega}{c}\vec{p}^o = \hbar\vec{k}} \quad |\vec{k}| = \frac{\omega}{c}$$

kde $\vec{k}$ je vlnový vektor prislúchajúci EM vlne. Spomeňme niektoré ďalšie experimenty, ktoré nás podnecujú k *časticovej* interpretácii fotónu.

Prvým je Dopplerov jav: Ak sa zdroj EM vlny od pozorovateľa *vzdďahuje* rýchlosťou u , dochádza k tzv. **červenému posuvu** - prijímaná frekvencia je menšia oproti vysielanej, $\omega_p = \omega_z \gamma(1 - \beta)$ (kap. I.2.1). Z klasického pohľadu tok energie EM vlny síce nezávisí od jej frekvencie, energia ani jej tok (Poyntingov vektor $\vec{S}$) však nie sú lorentzovskými invariantmi - zdroj a pozorovateľ sa nezhodnú na ich veľkosti. Príčinu treba hľadať v relativistických transformáciách *amplitúdy* vlny, lebo $\vec{S} \sim \vec{E} \times \vec{B} \sim E_{\perp}^2$, keďže EM vlna v prázdnom priestore je transversálna, a platí $E_{\perp} = cB_{\perp}$. Transformačné vzťahy medzi zdrojom a pozorovateľom sú $E'_{\perp} = \gamma[E_{\perp} - \beta(cB_{\perp})] = \gamma E_{\perp}[1 - \beta]$ (kap. I.3.1). V limite $u \rightarrow c$ dokonca $E'_{\perp} \rightarrow 0$ (lebo $\beta \rightarrow 1, \gamma \rightarrow \infty$ ale pomalšie). Tok energie sa potom dopplerovsky transformuje s faktorom $\gamma^2(1 - \beta)^2$.

Ak sa na emisiu/absorpciu vlny dívame ako na emisiu/absorpciu fotónov, potom ich energia $E = \hbar\omega$ sa transformuje ako frekvencia, $\omega_p = \omega_z \gamma(1 - \beta)$, a v limite $u \rightarrow c$ pre pozorovateľa fotóny „vyhasnú“ úplne. Tok energie je však okrem energie fotónov daný aj frekvenciou ich emisie/absorpcie, ktorá sa transformuje rovnako ako frekvencia vlnoplôch pri Dopplerovom jave, čiže tiež s faktorom $\gamma(1 - \beta)$. Výsledný faktor je teda $\gamma^2(1 - \beta)^2$, rovnako ako pri klasickom pohľade. Pri *približovaní* zdroja k pozorovateľovi sa, rovnako z klasického aj kvantového hľadiska, faktor $(1 - \beta)$ zmení na $(1 + \beta)$, a červený posuv na *modrý* (k vyšším frekvenciám). V rámci tejto úvahy nám teda nič nebráni predstavovať si tok energie priestorom ako tok diskretných častíc-fotónov.

Rovnakým spôsobom sa zvykne interpretovať aj **Comptonov jav**²⁴ - rozptyl „nalietajúcich“ fotónov na nabitých časticách, spravidla elektrónoch. Podstata javu, odhliadnúc od technických detailov, v časticovej interpretácii spočíva v tom, že *časť* energie $\hbar\omega$ fotónu sa pri zrážke odovzdá (voľnému) elektrónu o hmotnosti m_e ako prírastok jeho kinetickej energie, a fotón sa „odrazí“ (ako projektíl) so *zmenšenou* energiou $\hbar\omega'$ pod určitým uhlom ϑ , pri súčasnom *zachovaní celkovej energie aj hybnosti*. Pre vlnovú dĺžku dopadajúceho a odrazeného fotónu sa dá odvodiť vzťah (Dodatok F)

$$\lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos \vartheta) \quad \lambda_C = \frac{h}{m_e c}$$

kde λ_C je tzv. **Comptonova vlnová dĺžka** elektrónu, ktorej fyzikálny význam a dôležitosť ozrejníme neskôr. Toto je výsledok z pohľadu laboratórnej sústavy. V sústave spojenej s elektrónom nedôjde

²⁴Objavil ho v r. 1923 A.H. Compton, a dostal zaň Nobelovu cenu (1927).

k transféru energie na elektrón,²⁵ takže fotón sa odrazí s rovnakou energiou, $\omega' = \omega$. Comptonovský posuv energie fotónu je teda relativistický jav, rovnako ako Dopplerov efekt, a výpočet (Doplnok F, pre jednoduchosť pre odraz o 180°) ukazuje, že sú v skutočnosti *totožné*.

Už v časti I.3 sme sa však poučili, že tok *energie* je procesom *sui generis*, nestotožniteľný s tokom akejkoľvek látky vrátane poľa (pozorovali sme tok energie aj v statických poliach). Rovnako už vieme, že toku energie odpovedá aj hybnosť, a že teda ak takýto tok dopadá na testovací objekt (detektor), je schopný konať mechanickú prácu rovnú pohltenej energii. Tok energie má teda rovnaké prejavy ako *projektil*, bez potreby inej substancie v úlohe „kuriera“. Otázkou je len to, či nespochybniteľné kvantá energie v procese emisie a absorpcie majú objektívnu a samostatnú *kvantovanú* existenciu aj v procese *šírenia*. Predstava fotónov ako voľne sa šíriacich kvánt energie - *častíc* - by mala zmysel, ak by sme takého častice dokázali *lokalizovať*. Nevyhnutne nulová hmotnosť takýchto *hypotetických* častíc (keďže sa šíria rýchlosťou c) znamená, že

pre fotón neexistuje vlastná pokojová sústava.

V nej by mal totiž fotón nulovú hybnosť, a jeho energia by bola $E = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} = \sqrt{0 + 0} = 0$ - fotón by *neexistoval*.²⁶ Ako sme už naznačili v kap. I.2.3, štvorvektor hybnosti fotónu P^μ by mal *nulovú* veľkosť. Fotón ako častica-projektil teda *neexistuje*. Ilúzia „časticovosti“ je vyvolávaná *výlučne* kvantovaným *transférom* energie/hybnosti medzi EM poľom a látkou. Už pri odvodzovaní Planckovho zákona (kap. II.1.3) EM pole v dutine tvorilo energetické kontinuum, rozložiteľné do móduv stojatých vln (pre jednoduchosť v jednom rozmere)

$$E(x, t) = 2E_0 \sin(k_l x) \sin(\omega_l t) = E_0 \cos(k_l x - \omega_l t) - E_0 \cos(k_l x + \omega_l t) \quad k_l = \frac{2\pi}{\lambda_l} = \frac{\omega_l}{c}$$

kde k_l sú určené okrajovými podmienkami. Hoci stojatú vlnu môžeme formálne rozdeliť na opačne postupujúce vlny, energia v dutine sa nešíri. Každý bod stojatej vlny je harmonickým oscilátorom s frekvenciou módu, ω_l , s amplitúdou meniacou sa v priestore ako $2E_0 \sin(k_l x)$. Kvadrát tejto amplitúdy určuje energiu každého oscilátora. Celková energia módu je daná integrálom cez celú dĺžku dutiny, je teda rozložená pozdĺž stojacej vlny. Ak by sme chceli tento energetický obsah kvantovať - „dávkovať“ do fotónov, každý z nich by bol rovnako *delokalizovaný*. Predstava takýchto kvánt je neopodstatnená a nezmyselná. Nespochybniteľný je však (experimentálny) fakt, že energia *celého* módu sa môže *meniť* len po kvantách $\hbar\omega_l$.²⁷ Tento úbytok/prírastok energie je delokalizovaný pozdĺž celého módu, čiže transfér energie z/do módu znamená *skokovú zmenu celej jeho konfigurácie*. Môžeme teda urobiť *definitívny* záver, že

fotón nie je časticou ale udalosťou - kvantom transféru energie/hybnosti.

Keďže ide aj o transfér hybnosti, javí sa nám fotón ako projektil, a to pri emisii (žiarič dostane spätný ráz) aj absorpcii. Len v takomto zmysle súčasná fyzika chápe fotóny, a takto interpretuje experimentálne pozorovania, vrátane interferencie na štrbinách, tepelného žiarenia, fotoelektrického, Dopplerovho či Comptonovho javu.²⁸

Základnou vlastnosťou fotónov je, že všetky fotóny daného módu EM vlny majú *rovnakú* energiu $\hbar\omega$, a že táto energia je ďalej *nedeliteľná*. Súvisí to s neredukovateľnou veľkosťou účinku akéhokoľvek

²⁵ Voľný elektrón ako elementárna častica nemá vnútorné stupne voľnosti, ktoré by boli schopné akumulovať energiu, a kinetická energia v jeho pokojovej sústave je nulová.

²⁶ Ani pokročilejšie kvantové teórie nemajú aparát na lokalizovanie fotónu-častice počas jeho existencie. V mieste a okamihu detekcie už fotón neexistuje - jeho energia sa práve absorbovala.

²⁷ Predstavme si napr. fľaštičku s kvapalinou proti kašľu. Jej uzáver je konštruovaný tak, aby transfér kvapaliny z fľaštičky na lyžičku prebiehal po kvapkách - kvantách. Kvapalina samotná však tvorí *kontinuum*, vo fľaštičke aj na lyžičke. Rovnako je to s energiou.

²⁸ Koncept *častice* je však hlboko zakorenený vo fyzike (lebo korešponduje s našou *zmyslovou* skúsenosťou), a stále má svoje miesto aj v modernej kvantovej fyzike, ale len v kontexte *detekcie*. Predstava projektilu môže slúžiť len ako názorná didaktická pomôcka či „skratka“ (ako napr. pri vysvetľovaní Comptonovho javu), nesmieme ju však chápať doslova. Svoje miesto vo fyzikálnom obraze majú len objekty, ktorým vieme priradiť adekvátny matematický opis. Fotón-projektil takým určite *nie je*.

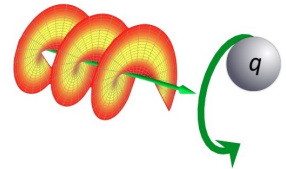
procesu (transféru energie), $\hbar$. Nedeliteľnosť energie fotónu *principiálne* neumožňuje jej pohltienie *súčasne* viacerými *priestorovo rozlíšiteľnými a navzájom izolovanými* čidlami.²⁹ Preto detegujeme fotón vždy v „bode“ (na makroskopickej škále), akoby bol bodovou časticou-projektilom.

II.1.5 Spin fotónu.

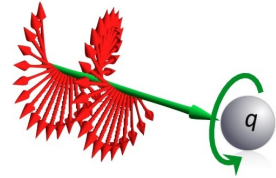
EM vlna je tokom energie-hybnosti, pričom hustota hybnosti (vo vákuu) je $\vec{g} = \vec{S}/c^2 = \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}$ (kap. I.3.3). V idealizovanej nekonečnej rovinnej vlně sú vektory $\vec{E}$, $\vec{B}$ kolmé na smer šírenia vlny, $\vec{k}$. V reálnej vlně (zväzku lúčov) o konečných priečných rozmeroch sa však $\vec{E}$, $\vec{B}$ uzavtvárajú v pozdĺžnom smere,³⁰ a Poyntingov vektor $\vec{S}$ má aj zložky kolmé na $\vec{k}$. EM energia teda okrem toku v smere $\vec{k}$ aj *cirkuluje* v rovinách $\perp \vec{k}$. Takáto cirkulujúca EM hybnosť predstavuje *moment hybnosti* vlny (Dodatok G),

$$\vec{J}_{EM} = \int \vec{r} \times \vec{g} dV = \dots = \varepsilon_0 \int \vec{r} \times \sum_j E_j \nabla A_j dV + \varepsilon_0 \int \vec{E} \times \vec{A} dV = \vec{J}_{orb} + \vec{J}_{spin}$$

Prvý člen, J_{orb} , je tzv. **orbitálny moment hybnosti**, a súvisí s nehomogénnym priestorovým rozložením intenzít polí vo zväzku (a tiež závisí od voľby súradnicového systému), a nezávisí od polarizácie vlny. Je *nenuťový* pre helikálne alebo inak deformované vlnoplochy. Jeho merateľným účinkom je orbitálny pohyb nábojov ožiarených takouto vlnou (obr.). Pre dokonale rovinné vlnoplochy je nulový. Orbitálny moment *nie je* *intrinzičnou* vlastnosťou vlny, a v ďalšom texte sa ním nebudeme zaoberať.



Druhý člen, J_{spin} , je tzv. **spinový moment hybnosti**, a súvisí *výlučne* s kruhovou (resp. eliptickou) polarizáciou vlny - *je* *intrinzičnou* vlastnosťou EM vlny. Pri dopade na nabitý objekt vyvoláva ich *rotáciu okolo vlastnej osi* (obr.). EM vlně (kruhovo polarizovanej v rovine $x-y$, šíriacej sa v smere z) v tvare



$$\vec{A}(z, t) = A_0(\vec{x}^o \pm i\vec{y}^o)e^{i(kz - \omega t)} \quad \vec{k} = k\vec{z}^o$$

odpovedajú polia

$$\vec{E}(z, t) = -\frac{\partial \vec{A}(z, t)}{\partial t} = i\omega \vec{A}(z, t) \quad \vec{B}(z, t) = \nabla \times \vec{A}(z, t) = i\vec{k} \times \vec{A}(z, t) = \vec{k} \times \frac{\vec{E}(z, t)}{\omega}$$

Časové stredné hustoty energie a hybnosti vlny sú

$$\langle w \rangle = \frac{\varepsilon_0}{2}(|\vec{E}|^2 + |c\vec{B}|^2) = \varepsilon_0|\vec{E}|^2 = \varepsilon_0\omega^2 A_0^2 \quad \langle \vec{g} \rangle = \frac{\langle w \rangle}{c} \vec{z}^o$$

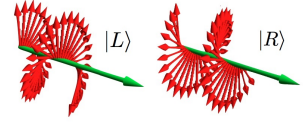
a časová stredná hustota *spinového* momentu $\vec{J}_{spin}$ je

$$\langle \vec{J}_{spin} \rangle_{\pm} = \pm \frac{\varepsilon_0}{2} \Re\{\vec{E}^* \times \vec{A}\} = \dots = \pm \frac{\langle w \rangle}{\omega} \vec{z}^o$$

²⁹Existujú elementárne procesy, pri ktorých sa energia jedného pohlteneho fotónu prerozdelení medzi viacero častíc, ale to sú procesy „na dva kroky“, sprostredkované poľom „na pozadí“. Podobne by sme mohli hovoriť aj o transfere energie fotónu do viacerých susediacich čidiel prostredníctvom *ich vzájomných* interakcií.

³⁰Vo vákuu bez nábojov sú $\vec{E}$ aj $\vec{B}$ *vírovými* poľami, uzatvárajúcimi sa do seba na okrajoch svetelného zväzku prostredníctvom zložiek *pozdĺžnych so smerom šírenia*.

kde znamienko $\pm$ rozlišuje *dva vnútorné stupne voľnosti* EM poľa vo vákuu (Dodatok H), ktoré môžeme reprezentovať prostredníctvom *ľavotočivej* (L) a *pravotočivej* (R) kruhovej polarizácie (obr.). Moment hybnosti (v danom objeme) pre jednotlivé polarizácie je potom



$$\langle \vec{J}_{spin} \rangle_{\pm} = \pm \int \frac{\langle w \rangle}{\omega} \vec{z}^o dV = \pm \frac{\langle E \rangle}{\omega} \vec{z}^o$$

Ak opäť redukuje intenzitu dopadajúcej EM vlny natoľko, že registrujeme *jednotlivé* fotóny s energiou $E = \hbar\omega$, spinový moment hybnosti každého fotónu - **spin** - bude

$$\underline{\vec{J}_{spin} = \pm \frac{E}{\omega} \vec{z}^o = \pm \hbar \vec{z}^o}$$

Veľkosť spinu *každého* fotónu je teda $\hbar$, a smeruje vždy do/proti smeru šírenia EM energie. Konvenčne priradíme hodnotu $+\hbar$ polarizačnému **stavu** $|L\rangle$ a $-\hbar$ stavu $|R\rangle$.³¹ Diskrétna hodnota spinu je dôsledkom kvantovanosti energie (resp. účinku).

Z predchádzajúceho textu však vieme, že fotón nie je objekt (častica-projektil) ale *udalosť* - transfér kvanta energie, hybnosti a aj momentu hybnosti z/do EM poľa. O momente hybnosti detegovaného fotónu teda má zmysel hovoriť len ako o náraste momentu hybnosti detektora (alebo iného pohlcujúceho objektu) o príslušnú hodnotu, $\pm\hbar$. Takýto spin je *atribútom*³² fotónu, hoci v prípade EM vln sa stretávame aj s prípadmi $\langle \vec{J}_{spin} \rangle_{celk} = 0$, čo si vyžaduje ďalšie vysvetlenie. Polarizácii svetla sa teda povenujeme aj v nasledujúcom texte.

II.1.6 Polarizácia svetla.

Rovinnú EM vlnu, šíriacu sa vákuom v smere z , môžeme zapísať v tvaroch

$$\vec{E}(z, t) = \left(\vec{E}_x e^{i\varphi_x} + \vec{E}_y e^{i\varphi_y} \right) e^{i(kz - \omega t)} = (a\vec{x}^o + b\vec{y}^o e^{i\varphi}) E_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

$$a = \frac{|\vec{E}_x|}{\sqrt{|\vec{E}_x|^2 + |\vec{E}_y|^2}} \quad b = \frac{|\vec{E}_y|}{\sqrt{|\vec{E}_x|^2 + |\vec{E}_y|^2}} \quad E_0 = e^{i\varphi_x} \sqrt{|\vec{E}_x|^2 + |\vec{E}_y|^2} \quad \varphi = \varphi_y - \varphi_x$$

($\vec{x}^o, \vec{y}^o$ sú jednotkové vektory v príslušných smeroch) alebo pomocou stĺpcového - tzv. **Jonesovho vektora**,

$$\vec{E}(z, t) = \begin{pmatrix} a \\ b e^{i\varphi} \end{pmatrix} E_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

pre zložky ktorého musí platiť $|a|^2 + |b e^{i\varphi}|^2 = 1$. Pomer zložiek $\frac{a}{b}$ a rozdiel fáz φ odpovedajú dvojici nezávislých *vnútorných* stupňov voľnosti poľa. Ekvivalentným vyjadrením vnútorných stupňov voľnosti sú dva navzájom opačne *kruhovo* polarizované stavy $|L\rangle, |R\rangle$ (z predchádzajúcej kap. II.1.5), v ktorých sú vektory $\vec{E}_x$ a $\vec{E}_y$ navzájom posunuté o $\varphi = \pm\pi/2$ ($e^{\pm i\pi/2} = \pm i$), a ktorých Jonesove vektory sú³³

$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad |R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

³¹Symbolom $| \rangle$ budeme označovať *stav* objektu vzhľadom na určitú premennú. V tomto prípade je touto premennou orientácia kruhovej polarizácie. Konvencia fixuje, či cirkuláciu pozorujeme v smere alebo proti smeru šírenia.

³²*atribút* = podstatná, nenahraditeľná časť

³³Voľba znamienka $\pm i$ je vecou konvencie.

Tieto stavy tvoria **bázu**³⁴ stavov, korešpondujúcu s mikroskopickým „fotónovým“ pohľadom. Makroskopicky merateľná polarizácia EM vlny je totiž, podobne ako interferenčný obrazec na tienidle, emergentným prejavom obrovského počtu detekcií *jednotlivých* fotónov. *Lineárnou kombináciou* - **superpozíciou** - týchto báзовých stavov môžeme zostrojiť *ľubovoľný* polarizačný stav poľa,

$$|\mathcal{X}\rangle = (a_L e^{i\varphi_L} |L\rangle + a_R e^{i\varphi_R} |R\rangle) e^{i(kz - \omega t)}$$

Ak je vlna dopadajúca na detektor v stave $|L\rangle$ (čiže $a_L = 1$, $a_R = 0$), alebo $|R\rangle$ ($a_R = 1$, $a_L = 0$), registrujeme *len* fotóny so spinom $+\hbar$, resp. $-\hbar$. Pri superpozícii registrujeme fotóny *oboch* spinov, a to s pravdepodobnosťami a_L^2 , resp. a_R^2 . Dôležitou je taká superpozícia, v ktorej $a_L = a_R$, čiže keď amplitúdy a teda aj energie opačne polarizovaných zložiek sú v rovnováhe - vtedy pre strednú hodnotu spinu (cez súbor fotónov) platí

$$\langle \vec{J}_{spin} \rangle = \langle \vec{J}_{spin} \rangle_+ + \langle \vec{J}_{spin} \rangle_- = 0$$

čiže výsledný moment hybnosti je *nulový*. Pri tejto polarizácii registrujeme fotóny *oboch* spinov v pomere 50:50. Ide o *lineárnu* polarizáciu, pričom rovina polarizácie je určená fázovým rozdielom $\varphi = \varphi_R - \varphi_L$. Hodnotám $\varphi = 0$, resp. π konvenciou priradíme *horizontálnu*, resp. *vertikálnu* rovinu ($e^{\pm i\pi/2} = \pm i$),

$$|H\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|R\rangle + |L\rangle) = \dots = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |V\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} (|R\rangle - |L\rangle) = \dots = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tieto vektory tvoria *alternatívnu úplnú* bázu. Lineárnej polarizácii pod uhlom θ voči smeru x v tejto báze odpovedá Jonesov vektor $|\theta\rangle = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$, a kruhové polarizácie sú dané superpozíciami

$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + i|V\rangle) \quad |R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle - i|V\rangle)$$

Zavedme teraz popri *stĺpcových* vektoroch $|a\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ aj *riadkové* vektory $\langle a| = (a_1 \ a_2)$ ako alternatívny opis polarizačných stavov s *rovnakým fyzikálnym významom*. Pomocou nich elegantne definujeme **skalárny súčin** (v analógii so skalárnym súčinom vektorov)³⁵

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \rightarrow \langle a|b\rangle = (a_1 \ a_2) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Keďže zložky Jonesových vektorov sú *komplexné* čísla, platí $\langle a| = |a\rangle^*$. Fyzikálny význam skalárneho súčinu polarizačných stavov je analogický geometrickému významu skalárneho súčinu vektorov - ide o *priemet* jedného stavu/vektora do druhého. Báзовé vektory v každej báze sú navzájom *ortogonálne*,³⁶ teda s *nulovým* priemetom,

$$\langle H|V\rangle = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \langle R|L\rangle = \frac{1}{2}(1 \ i) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = 0$$

Využívajúc optické vlastnosti istých materiálov, vieme vyrobiť tzv. **polarizátory**, na výstupe ktorých existuje len svetlo *definovanej* polarizácie. Bez ohľadu na konkrétny fyzikálny mechanizmus,³⁷ ich

³⁴Prechodom od jednej bázy k druhej sa mení charakter stupňov voľnosti, zachováva sa však ich počet.

³⁵Stĺpcové vektory $|a\rangle$ sa v kvantovom formalizme nazývajú **ket-vektormi**, a riadkové vektory $\langle a|$ **bra-vektormi**, lebo ich skalárny súčin má tvar *bra-ket* (angl. zátvorka).

³⁶Doslovný význam slova *ortogonálny* je „kolmý“. Vo fyzike však tento pojem používame vo všeobecnejšom význame „nezávislý“ či „vzájomne sa vylučujúci“. Vo vektorovej reprezentácii ho vyjadrujeme *nulovým skalárnym súčinom*.

³⁷Rôzne druhy polarizátorov využívajú rôzne fyzikálne mechanizmy, ktoré však pre potreby tohto textu nie sú podstatné.

operačný princíp je spoločný: Definujú *vlastnú ortogonálnu dvojzložkovú* bázu, jednu zložku dokonale prenášajú a druhú „odstránia“ (v idealizovanom prípade). Reprezentujeme ich pomocou **Jonesových matic**

$$\begin{aligned} (\text{HP}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & (\text{VP}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & (\theta\text{P}) &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \\ (\text{LP}) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} & (\text{RP}) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pre ideálne bezstratové polarizátory platí

$$\begin{aligned} (\text{RP})|R\rangle &= |R\rangle & (\text{LP})|L\rangle &= |L\rangle & (\text{HP})|H\rangle &= |H\rangle & (\text{VP})|V\rangle &= |V\rangle \\ (\text{LP})|R\rangle &= (\text{RP})|L\rangle = 0 & (\text{HP})|V\rangle &= (\text{VP})|H\rangle = 0 \end{aligned}$$

Ako príklad uvažujme prechod vertikálne polarizovaného svetla pravotočivým kruhovým polarizátorom:

$$(\text{RP})|V\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}} |R\rangle$$

alebo

$$(\text{RP})|V\rangle = (\text{RP}) \frac{i}{\sqrt{2}} (|R\rangle - |L\rangle) = \frac{i}{\sqrt{2}} |R\rangle + 0$$

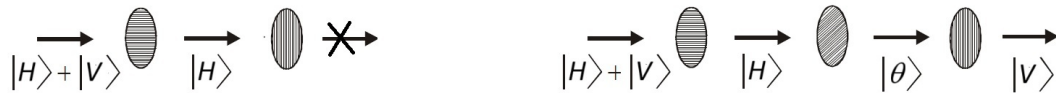
Výsledkom je pravotočivo polarizované svetlo s intenzitou zníženou o faktor $\left| \frac{i}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2}$. Naozaj, v lineárne polarizovanom svetle sú kruhovo polarizované zložky zastúpené v pomere 50%:50%.

Podobne, prechod vertikálne polarizovaného svetla šikmým polarizátorom θP je $(\theta\text{P})|V\rangle = \sin \theta |\theta\rangle$, čiže *intenzita* svetla (kvadrát amplitúdy) sa zmenší o faktor $\sin^2 \theta$, čo odpovedá *priemetu amplitúdy* dopadajúceho svetla do smeru polarizátora. Zdalo by sa teda, že úloha polarizátorov je čisto „pasívna“ - z dopadajúceho svetla vyberú a prenesú len „tú svoju“ zložku (ak v dopadajúcom svetle existuje). Naozaj, sústavou skrížených polarizátorov HP a VP žiadne svetlo neprejde - v horizontálne polarizovanom svetle (po prechode prvým polarizátorom) totiž žiadna vertikálna zložka *nie je*,³⁸

$$(\text{VP})(\text{HP})|\mathcal{X}\rangle = (\text{VP})a_H|H\rangle = 0 \quad |\mathcal{X}\rangle = a_H|H\rangle + a_V|V\rangle$$

Ak však medzi skrížené polarizátory vložíme polarizátor θP , dostaneme

$$(\text{VP})(\theta\text{P})(\text{HP})|\mathcal{X}\rangle = (\text{VP})(\theta\text{P})a_H|H\rangle = (\text{VP})a_H \cos \theta |\theta\rangle = a_H \cos \theta \sin \theta |V\rangle \neq 0$$



Na výstupe sústavy sa objavilo vertikálne polarizované svetlo, ktoré po prechode prvým polarizátorom „neexistovalo“! Úlohu polarizátorov teda *nemožno* považovať za čisto pasívnu. Žiaden paradox však nevznikne, ak si uvedomíme, že každý polarizátor rozkladá dopadajúce svetlo na *svoje* zložky. Všeobecnejšie,

každý prístroj rozloží dopadajúce svetlo do superpozície vlastných báзовých stavov

- v tom spočíva „aktívna“ úloha prístroja (polarizátora). Rozklad na *ľubovoľnú vhodnú (prípustnú) superpozíciu* báзовých stavov nie je len skvelým matematickým trikom, ale ukazuje sa byť verným obrazom fyzikálnej reality. A ako uvidíme, vo svete kvantovej fyziky je tým *jediným* správnym obrazom.³⁹

³⁸V maticovom zápise je postupnosť polarizátorov *sprava doľava*.

³⁹Pojem *správny* tu vyjadruje súlad teórie s experimentom.

II.1.7 Polarizácia fotónu.

Z predchádzajúceho textu je zrejmé, že v prípade fotónu musíme rozlišovať medzi jeho *spinom* a *polarizáciou*.⁴⁰ Spin fotónu, ako jeho *intrinzičná* vlastnosť, je vnútorným momentom hybnosti, ktorého kvantový charakter sme už načrtli v kap. II.1.5, a neskôr sa mu budeme venovať podrobnejšie. Na druhej strane, **polarizácia fotónu** je abstraktnejší pojem, ktorý odvodzujeme od polarizácie EM vlny, čo je síce makroskopicky *merateľná* vlastnosť, ako sme však uviedli v kap. II.1.6, je to vlastnosť *emergentná*: Detekcia vlny v stavoch $|L\rangle, |R\rangle$ je výslednicou makroskopického počtu detekcií fotónov so spinom $+\hbar$ resp. $-\hbar$, kým detekcia *lineárne* polarizovanej vlny je výslednicou makroskopického počtu detekcií fotónov so spinmi $+\hbar$ aj $-\hbar$ (v pomere 50:50). *Lineárne* polarizovaný fotón je teda *matematickou konštrukciou* - *superpozíciou* fotónu so spinom $+\hbar$ a $-\hbar$. Hoci takýto fotón nikdy *nenameriame*(!), *má zmysel* (ako postupne uvidíme) pracovať s abstraktnými *bázovými* polarizačnými stavmi fotónu $|L\rangle, |R\rangle$ aj $|H\rangle, |V\rangle$ rovnako ako v prípade makroskopickej EM vlny, a s ich pomocou (superpozíciou) definovať akýkoľvek polarizačný stav *jednotlivého* fotónu. Treba však mať na pamäti, že iba polarizačná báza $|L\rangle, |R\rangle$ je *súčasne* aj spinovou bázou, kým bázovým stavom $|H\rangle, |V\rangle$ odpovedajú *neurčité* spinové stavy - superpozície stavov $\pm\hbar$.

Rozoberme aj „aktívnu“ úlohu polarizátorov (opísanú v kap. II.1.6) pre jednotlivé fotóny. V prípade EM vlny sa prejavuje *zmenou jej merateľnej polarizácie*. Naozaj, v schéme

$$(\text{HP})|R\rangle = (\text{HP})\frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - i|V\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}|H\rangle$$

sú vstupujúca pravotočivá aj vystupujúca horizontálna polarizácia vlny makroskopicky merateľnými faktami. V prípade *jedného* fotónu by však meranie jeho *spinu* dávalo jednoznačný výsledok *len* pre vstupujúci fotón $|R\rangle$ - detektor by jeho pohltitím získal moment hybnosti $-\hbar$. V prípade vystupujúceho fotónu $|H\rangle$ by bol výsledok merania spinu *vopred neurčitý* - s rovnakou pravdepodobnosťou by prírastok momentu hybnosti detektora mohol byť $\pm\hbar$. Ak nás však namiesto spinu zaujíma *polarizácia* fotónu, sú oba jeho polarizačné stavy (pred aj za polarizátorom) *jednoznačné*, aj keď každý *v inej báze*. Kým pre vstupujúci fotón bola „prirodzenou“ báza $|L\rangle, |R\rangle$, polarizátor nám „vnútil“ inú - *svoju* bázu $|H\rangle, |V\rangle$.

Teraz je namieste hlbšie rozobrať aj úlohu *detektora*. Podľa kap. II.1.4 pojem „fotón pred detekciou“ musíme chápať len ako *potencialitu*, ktorá sa *zrealizuje až v okamihu detekcie*. Neurčitosť stavu pred meraním, reprezentovaná *váženou superpozíciou všetkých potenciálnych výsledkov*, sa pritom týka *všetkých stupňov voľnosti*. V prípade prechodu sústavou štrbín (kap. II.1.1) *neexistuje* pred detekciou *trajektória* fotónu (reprezentujúca *časopriestorové* stupne voľnosti) - inak by sme nedostali interferenčný obrazec! Ak do štrbín vložíme detektory, v okamihu záznamu v jednom z nich nastáva **kolaps** tejto superpozície (alternatívnych trajektorií jednotlivými štrbinami) do jednoznačného výsledku (konkrétnej štrbiny). Tento mechanizmus sa vzťahuje aj na *vnútorné* stupne voľnosti (spin, polarizáciu) pri *vhodne zvolenom* detektore. Každý detektor totiž „ponúka“ spektrum - bázu *svojich* možných makroskopických stavov (napr. hodnoty displeja, polohy ručičky, zvukové signály, atď.),⁴¹ a fotón-udalosť zrealizuje s váženou pravdepodobnosťou jeden z nich. Znamená to, že stupeň voľnosti (veľičina, vlastnosť) fotónu *korelujúci s bázou detektora* nadobudne v okamihu detekcie konkrétnu hodnotu. Ostatné stupne voľnosti fotónu, *nekorelujúce* s bázou detektora, naďalej ostávajú neurčité (v superpozícii). Tu sú príklady:

Pre detektory v štrbinách (korelované s priestorovými stupňami voľnosti - trajektoriou fotónu) môžu byť takýmito bázovými stavmi $|1\rangle$ (= „cvak“, detekcia) a $|0\rangle$ („ticho“, žiadna detekcia). Stavy $|1\rangle$ a $|0\rangle$ sú pritom *rovnocennými výsledkami merania*. Meranie a kolaps teda nastane aj keď fotón

⁴⁰Pri štúdiu odborných textoch (a nielen tých) doporučujeme najprv si ozrejmiť, v akom kontexte a význame daní autori jednotlivé pojmy používajú.

⁴¹angl. *pointer states*

nie je zaregistrovaný - pochopiteľne, len za predpokladu že existuje nenulová pravdepodobnosť, že zaregistrovaný môže byť.⁴² Stav takéhoto detektora nie sú korelované so spinom/polarizáciou fotónu, tieto stupne voľnosti ostávajú neurčité.

*Kolaps superpozície pri meraní nastáva len v báze detektora.*⁴³

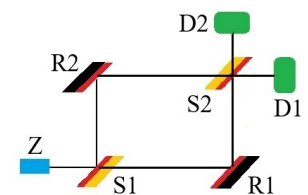
V našom príklade s polarizátorom HP detektor za ním „ponúka“ bazové stavy $|1\rangle$ pre fotón „správnej“ polarizácie $|H\rangle$, a $|0\rangle$ v prípade polarizácie $|V\rangle$, čiže báza detektora je korelovaná s bázou polarizátora, $|H\rangle, |V\rangle$. (Stav spinu pritom ostáva neurčitý.) Tu je však potrebná istá opatrnosť pri interpretácii: Kolaps superpozície nastáva až v okamihu *merania detektorom* (nie polarizátorom). Znamená to, že samotný tok energie polarizátorom je tiež v superpozícii bazových stavov detektora až do okamihu detekcie⁴⁴ - detektor akoby *retroaktívne* „rozhodol“ (na základe výsledku merania, $|1\rangle$ alebo $|0\rangle$) o prelete či neprelete energie. (Tejto podivuhodnej vlastnosti kvantového sveta je venovaná celá kap. II.2.) Polarizátor HP takto „pripravuje“ (v zmysle detekcie) jednotlivé fotóny - každý *detegovaný* fotón bude s istotou v stave $|H\rangle$. Takto bol „pripravený“ polarizátorom RP do stavu $|R\rangle$ aj vstupujúci fotón v našom príklade. Každý z polarizátorov však redukuje počet fotónov (v zmysle detekcie na konečnom detektore).

II.2 Kvantová previazanosť.

II.2.1 Vlnová funkcia.

Doteraz získaný fyzikálny obraz procesov vedúcich k pozorovaniu interferenčných javov na sústave štrbín z kap. II.1.2 vyzerá takto: EM energia sa šíri sústavou štrbín ako makroskopická vlna (jej tok je určený Poyntingovým vektorom), a transfér energie EM poľa na detektor v miestach určených šírením vlny (a teda interferenciou) prebieha v kvantách - fotónoch. Nedeliteľnosť kvánt zaručuje, že transfér každého kvanta musí byť *lokalizovaný do priestorovo nedeliteľnej oblasti* (v rámci priestorovej rozlišovacej schopnosti detektora). Naďalej otvorenou ostáva otázka výberu konkrétneho miesta detekcie (spomedzi možných, interferenciou vybraných lokalít). Čiastočné svetlo na tento azda najzložitejší problém vrhne analýza experimentov s **Machovým-Zehnderovým interferometrom** (MZI).

MZI v základnej zostave je tvorený kombináciou páru polopriepustných zrkadiel S1, S2 s párom nepriepustných zrkadiel R1, R2, rozdeľujúcou svetelný tok do dvoch ramien. S1 a S2 odrážajú 50% dopadajúceho svetla a zvyšných 50% prepúšťajú v smere dopadu. Svetelná vlna získa fázový posuv 180° pri odraze od opticky hustejšieho prostredia (s väčším indexom lomu n), a 0° pri odraze od opticky redšieho prostredia (na obr. $n_{\text{čierna}} > n_{\text{žltá}} > n_{\text{biela}}$, odrazivé rozhranie je zvýraznené červenou).



Každý prechod vlny hrúbkou polopriepustného zrkadla ($n_{\text{žltá}}$) vnesie dodatočný fázový posuv ϕ . Možné dráhy lúčov zo zdroja *koherentného* svetla Z do detektorov D1 a D2 sú:

$$Z \longrightarrow_{\phi} S1 \longrightarrow_{180} R1 \longrightarrow_{180} S2 \longrightarrow D1$$

$$Z \longrightarrow_{\phi} S1 \longrightarrow_{180} R1 \longrightarrow_{\phi} S2 \longrightarrow D2$$

⁴²V prípade, že detektory sú umiestnené *len v niektorých* zo sústavy štrbín a všetky zaznamenajú $|0\rangle$ pri prelete balíka energie touto sústavou, dôchádza k *čiastočnému* kolapsu - z pôvodnej superpozície trajektórií sú vylúčené tie s detektormi.

⁴³V iných bázach, ktoré nie sú s bázou detektora korelované, dochádza meraním len k *prerozdeleniu* váhových faktorov superpozície.

⁴⁴Predpokladáme tu, že *každý* prelet energie polarizátorom *musí* byť registrovaný detektorom.

$$Z \longrightarrow \underset{180}{S1} \longrightarrow \underset{180}{R2} \longrightarrow \underset{\phi}{S2} \longrightarrow D1$$

$$Z \longrightarrow \underset{180}{S1} \longrightarrow \underset{180}{R2} \longrightarrow \underset{2 \times \phi}{S2} \longrightarrow D2$$

pričom dĺžka oboch ramien je rovnaká. Vlna sa šíri *oboma* ramenami, a za S2 nastáva interferencia. Je zrejmé, že vlna v oboch ramenách dorazí do D1 vo fáze (konštruktívna interferencia) a do D2 v protifáze (deštruktívna interferencia).⁴⁵ Ak by sme do jedného z ramien vložili doštičku premenlivej hrúbky, postupnou zmenou fázového posuvu by sa úlohy detektorov vymieňali. Kvantitatívny opis tohto experimentu je v Dodatku I.

Ak znížime intenzitu svetla natoľko, že registrujeme jednotlivé fotóny, registruje ich *výlučne* D1. Nastáva konštruktívna interferencia, pričom *každý fotón interferuje sám so sebou*. Energia odpovedajúca fotónu teda musí tiecť oboma ramenami súčasne. Ak hneď za S1 zaslepíme jedno z ramien, energia do detektorov zaručene potečie tým druhým, a k žiadnej interferencii nemôže dôjsť - fotóny budú detegované *náhodne* a s rovnakou pravdepodobnosťou v D1 aj D2.

Na druhej strane, ak namiesto toho nahradíme S2 obojstranným dokonalým zrkadlom (alebo ho odstránime úplne), čím tiež zabránime interferencii, k záznamu dôjde vždy *len na jednom* z detektorov, a to náhodne (50%:50%), napriek tomu, že energia sa *môže šíriť oboma* ramenami (tak ako v prípade pôvodného S2). Záznam detektora *akoby* identifikoval, kadiaľ tiekla energia. (Získali sme informáciu „*welcher Weg*“ za cenu straty interferencie). Keďže však nič nebráni energii šíriť sa oboma ramenami, musíme predpokladať, že fotón (potencialita detekcie) sa šíri *v superpozícii oboch ramien* (označme ich podľa zrkadiel, R1 a R2). Každé rameno teraz však vyústi do *konkrétneho* detektora R1→D1, R2→D2, takže superpozíciu stavov fotónu môžeme zapísať ako

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|R1,D1\rangle + |R2,D2\rangle)$$

Tento výraz je (vo všeobecnosti komplexnou) *amplitúdou pravdepodobnosti* detekcie fotónu v danom mieste/detektore, a nazývame ho **vlnovou funkciou**.⁴⁶ Pravdepodobnosť (rovnako ako intenzita/energia) je kvadrátom amplitúdy, teda

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= (|\psi\rangle)^2 = |\psi\rangle^* \cdot |\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle = \\ &= \frac{1}{2} (\langle R1,D1|R1,D1\rangle + \langle R1,D1|R2,D2\rangle + \langle R2,D2|R1,D1\rangle + \langle R2,D2|R2,D2\rangle) \end{aligned}$$

Keďže však stavy $|D1\rangle$ a $|D2\rangle$ sú navzájom ortogonálne (detekcia jedného fotónu v D1 a D2 sa navzájom vylučujú), $\langle D1|D2\rangle = 0$, prostredné dva (interferenčné) členy sú nulové, a

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} (\langle R1,D1|R1,D1\rangle + \langle R2,D2|R2,D2\rangle) = \frac{1}{2} (\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2)$$

Pravdepodobnosti detekcie fotónu v D1 a D2 sú teda v pomere 50:50, a každej detegovanej udalosti - fotónu - je „priradený“ príslušný kanál („*welcher Weg*“). Je tu však zádrhel: Môžeme totiž uvažovať aj také vzdialenosti medzi S1 a S2, ktoré nám dovoľujú rozhodnúť o ponechaní pôvodného S2 alebo jeho výmene (a tým zrušení interferencie) „dávno“ po tom, čo vlna vnikla do ramien⁴⁷ - na výsledku sa však *nič nezmení*! Musíme teda predpokladať (z rovnakých dôvodov ako v kap. II.1.7), že až do okamihu detekcie (ľubovoľným z detektorov) je fotón v superpozícii oboch možností, a až detekcia rozhodne o tom, ktorá z možností sa zrealizuje. Meranie spôsobuje kolaps superpozície do jediného konkrétneho *bázového* stavu, *akoby* sa energia fotónu šírila len *jedným* z kanálov. Keďže sa však energia šíri v reálnom čase (konečnou rýchlosťou), opäť vzniká dojem, že kolaps *retroaktívne*

⁴⁵D1, resp. D2 korešponduje s miestom interferenčného maxima/minima na tienidle za sústavou štrbín z kap. II.1.2. MZI je teda analogický dvojštrbinovému - tzv. *Youngovmu interferometru*.

⁴⁶Definičným oborom takto zavedenej *funkcie* je množina pomyselných trajektórií a detektorov. V tejto časti textu pojem *vlnová funkcia* voľne zamieňame s pojmom *stav*. Presnejšiu špecifikáciu zavedieme v kap. II.4.

⁴⁷Aj keď rýchlosť šírenia energie ramenami je $\approx c$, takýto experiment sa *dá* technicky zrealizovať.

ovplyvňuje predchádzajúce šírenie energie. Fyzika však stojí na viere v kauzálnosť, a takýto pohľad musíme odmietnuť.

Hoci sú v naposledy uvažovanom prípade oba kanály od seba izolované už od S1, udalosti na detektoroch D1 a D2 - *potenciálne* fotóny - sú korelované v tom zmysle, že *reálnym* sa stane vždy len jeden z nich. Transfér *nedeliteľného* kvanta energie musí nastať v celistvosti, čiže priestorovo nedeliteľne. Fotón si teda musí svoj detektor „vybrať“. Ak sa pohltí v jednom, druhý (prípadne ďalšie) musí ostať bez záznamu. Je to ten istý mechanizmus, akým prebieha detekcia na tienidle za sústavou štrbín. Vlna prechádzajúca štrbinami zasahuje *celú plochu* tienidla, s amplitúdou rozloženou podľa zákonitosti vlnenia (interferencie), ale nedeliteľné kvantum energie mu odovzdá v *jedinom bode* (rovnako ako v prípade vyžiarenia fotónu módom stojatej vlny v dutine z kap. II.1.4), bez ohľadu na vzdialenosti potenciálnych miest detekcie. V okamihu detekcie dochádza ku *skokovej zmene konfigurácie celého pravdepodobnostného poľa* $\psi(\vec{r}, t)$ - **kolapsu vlnovej funkcie**, bez ohľadu na vzdialenosti. V mieste detekcie $\psi \rightarrow 1$, a všade inde $\psi \rightarrow 0$. Takáto okamžitá priestorová korelácia $\psi(\vec{r}, t)$ v celom priestore sa nazýva **kvantová previazanosť**.⁴⁸ Budeme sa ňou podrobnejšie zaoberať v ďalších kapitolách, a poskytne nám hlbší vhľad do tajov kvantového sveta. Kolaps superpozície ako okamžitý skokový proces v celom priestore pritom *nesúvisí so šírením energie*⁴⁹ (tá sa nemôže šíriť väčšou rýchlosťou než c). Mimo merania sa však vlnová funkcia fotónu (ako potencialita transféru energie) šíri priestorom rovnako ako EM vlna.

Náhodnosť miesta detekcie - transféru kvanta energie - je podľa súčasnej fyziky *principiálna*, a je *fundamentálnou* vlastnosťou mikrosвета. Ako ukážeme v kap. II.2.3, nie je daná našou neznalosťou príčiny či neschopnosťou ju nájsť, a teda nemá ani zmysel sa na takúto príčinu pýtať. Prvok náhodnosti, všadeprítomný v kvantovom svete, je pritom zviazaný s pojmom *superpozícia* (typickým pre lineárne systémy, akými sú vlny). Naš mentálny problém vysporiadať sa so záverom, že fotón (v zmysle potenciálnej udalosti - detekcie) nemá dráhu, nás privádza k abstraktnej predstave o „akoby častici“ *v superpozícii všetkých dostupných dráh*. Opis fotónu pomocou vlnovej funkcie sa potom stáva opisom „častice“⁵⁰ v superpozícii dostupných *stavov* (v tomto prípade dráh). Z hľadiska *merania* je očakávané miesto detekcie fotónu (pred samotnou detekciou) v superpozícii dostupných (a prípadnou interferenciou vymedzených) miest, a kolaps vlnovej funkcie je okamžitým skokovým kolapsom tejto superpozície stavov v prospech jediného určitého stavu.

Vlnová funkcia v sebe pritom zahrňuje *úplnú* informáciu o stave objektu (fotónu), teda o všetkých jeho stupňoch voľnosti. Ako sme už opísali v kap. II.1.7, superpozícia a jej kolaps pri meraní sa vzťahujú tiež na všetky stupne voľnosti, v závislosti od spôsobu detekcie. Ostáva ešte vyjasniť vzťah medzi vlnovou funkciou fotónu a EM vlnou. Vlnová funkcia ψ , ktorá je pre *individuálny* fotón *úplným ale pravdepodobnostným* opisom s prvkom náhodnosti, pre makroskopický počet fotónov sa (vďaka vlastnosti fotónu, o ktorej bude reč neskôr) stáva klasickou EM vlnou s „hmatateľnými“ prejavmi. Ide o ukážkový príklad toho, že náš dôverne známy „klasický“ svet je *emergenciou novej kvality z kvantity* čohosi odlišného (a nám cudzieho). Rovnako ako sa z kvantity náhodných bodov na tienidle vynorí kvalitatívne nový objekt - interferenčný obrazec.

II.2.2 Princípy korešpondencie a komplementarity.

V predchádzajúcom texte sme videli, ako sa makroskopický fyzikálny obraz sveta vynára z mikroskopického v limite obrovského počtu mikroskopických udalostí. Fyzika mikrosвета preto musí byť vybu-

⁴⁸angl. *quantum entanglement*. Tento pojem zaviedol E. Schrödinger, a označil ho za najcharakteristickejšiu črtu kvantovej mechaniky.

⁴⁹Nedochádza teda k rozporu s teóriou relativity. K tejto otázke sa ešte vrátime neskôr.

⁵⁰Pojem *častica* je podvedome spájaný s predstavou projektilu. Aby sme kvantové objekty od tejto predstavy odlišili, budeme ich v celom texte dôsledne uvádzať ako „častice“ (s úvodzovkami).

dovaná na tomto princípe - tzv. **princípe korešpondencie**. Ďalšou ukážkou platnosti tohto princípu je skúmanie dvojzväzkovej interferencie so súčasným použitím polarizátorov. Predpokladajme dvojštrbinový - tzv. **Youngov interferometer**, doplnený *rozdielnymi* lineárnymi polarizátormi, HP resp. VP, umiestnenými bezprostredne za jednotlivými štrbinami, 1 a 2. Keďže pre amplitúdy EM vln prechádzajúcich jednotlivými štrbinami a polarizátormi bude platiť $\vec{E}_1 \perp \vec{E}_2$, je pochopiteľné (pozri kap. II.1.1), že ku žiadnej interferencii svetla nedôjde.

Rovnaký výsledok musí vzniknúť aj z úvah na úrovni fotónov: Bez prítomnosti polarizátorov je každý fotón v superpozícii stavov $|H\rangle$ a $|V\rangle$, pričom táto superpozícia je *rovnaká* pre stavy fotónu v oboch štrbinách, $|\psi_1\rangle$ a $|\psi_2\rangle$. Výsledná vlnová funkcia je v superpozícii týchto stavov,⁵¹

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle)$$

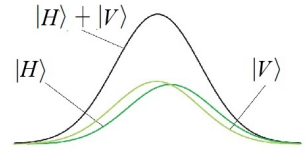
Na vzdialenom tienidle za štrbinami (plošnom detektore fotónov) teda pozorujeme, ako jednotlivé fotóny postupne vytvárajú interferenčný obrazec (kap. II.1.2), s lokálnou pravdepodobnosťou

$$\mathcal{P}(\vec{r}) = \langle\psi(\vec{r})|\psi(\vec{r})\rangle = \dots = \frac{1}{2} \{ \langle\psi_1(\vec{r})|\psi_1(\vec{r})\rangle + \langle\psi_2(\vec{r})|\psi_2(\vec{r})\rangle + 2\langle\psi_1(\vec{r})|\psi_2(\vec{r})\rangle \}$$

Vložením lineárnych polarizátorov rozdielnej orientácie za štrbiny sa *priestorové* stupne voľnosti vlnovej funkcie, $|\psi_1(\vec{r})\rangle$ a $|\psi_2(\vec{r})\rangle$, previažu s *polarizačnými* stupňami voľnosti, $|H\rangle$ a $|V\rangle$, a vlnová funkcia nadobudne tvar

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1, H\rangle + |\psi_2, V\rangle)$$

Interferenčný člen vo výraze pre pravdepodobnosť $\langle\psi|\psi\rangle$ bude $2\langle\psi_1, H|\psi_2, V\rangle = 0$ lebo $\langle H|V\rangle = 0$ - bázoové polarizácie sú navzájom ortogonálne, a k interferencii preto nedôjde.



Tradičný spôsob interpretácie je taký, že tentokrát dokážeme vložením *ďalších* polarizátorov HP alebo VP každému registrovanému fotónu priradiť konkrétnu štrbinu, a teda sme schopní získať informáciu „*welcher Weg*“. Vynára sa nám obraz fotónu-projektily s konkrétnou trajektóriou, a ten nepripúšťa interferenciu. Nezáleží pritom na tom, či takúto možnosť naozaj využijeme (vložením dodatočného polarizátora) a informáciu „*welcher Weg*“ získame, podstatná je *principiálna možnosť* túto informáciu získať. Interferencia patrí do vlnového obrazu, v ktorom niet miesta pre častice-projektily a ich trajektórie. Vzájomná nezlúčiteľnosť časticového a vlnového obrazu fotónu (a nielen fotónu) sa nazýva **princíp komplementarity**.⁵² Na základe predchádzajúceho textu však už tušíme, že súčasná interpretácia je subtilnejšia.

História hľadania adekvátnej interpretácie stvorila aj (mylnú) predstavu, že interakcia fotónu-projektily s polarizátorom pri štrbine jeho trajektóriu predsa len ovplyvní dostatočne na to, aby sa interferenčný obrazec „rozmazal“. ⁵³ Neopodstatnenosť takéhoto predpokladu dokážeme, ak do zostavy s rovinými polarizátormi pri štrbinách vložíme pred detektor dodatočný *kruhový* polarizátor, napr. RP - opäť totiž vznikne interferenčný obrazec! Dôvod je ten, že RP rovnako (50%) prepúšťa vlny $|H\rangle$ a $|V\rangle$, a platí $(RP)|H\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|R\rangle$ a $(RP)|V\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}|R\rangle$ - polarizácia oboch zložiek sa *zjednotí*. V tradičnej

⁵¹Nešpecifikovaný (všeobecný) polarizačný stav $|\mathcal{X}\rangle = (a_V|V\rangle + a_H|H\rangle)$ je pre obe zložky vlnovej funkcie rovnaký, preto ho v tomto zápise môžeme vynechať. Ak by sme ho vo vlnovej funkcii chceli explicitne uviesť, zápis by mohol vyzeráť ako

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1, \mathcal{X}\rangle + |\psi_2, \mathcal{X}\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle)|\mathcal{X}\rangle$$

Výraz $|\mathcal{X}\rangle$ by však (ako multiplikačný koeficient) na interferenciu nemal vplyv.

⁵²Oba spomínané princípy sformuloval v r.1927 N. Bohr. Nobelovu cenu získal už predtým, v r. 1922.

⁵³V prvopočiatkoch kvantovej mechaniky podobný názor zastávali aj niektorí jej významní protagonisti, napr. W. Heisenberg.

interpretácii nie je teda možné rozlíšiť „odkiaľ fotón priletel“. Informácia „*welcher Weg*“ bola zmazaná, takejto zostave preto hovoríme **kvantový zmizík** či **kvantová guma**.⁵⁴ Ak by sme namiesto RP pred detektorom použili LP, zjavil by sa *komplementárny* interferenčný obrazec (s vymenenými polohami miním a maxím). Za zánikom interferencie teda nemožno vidieť polarizátormi narušenú *geometriu* domnelých „trajektórií“ fotónov.

II.2.3 Skryté premenné a Bellove nerovnosti.

Z klasickej fyziky poznáme situácie, ako napr. explóziu izolovaného telesa v pokoji, pri ktorej vzniknú úlomky letiace rôznymi smermi, pri splnení zákona zachovania hybnosti, $\sum_j \vec{p}_j|_{po} = \vec{p}|_{pred} = 0$. Hybnosti jednotlivých úlomkov ostávajú (v izolovanom systéme) týmto zákonom navzájom previazané, a to isté platí aj pre ich momenty hybnosti. Pre jednoduchosť sa budeme zaoberať najjednoduchším prípadom dvojice „dcérskych“ telies, všetky kvalitatívne závery však ostanú v platnosti pre ich ľubovoľný počet. Pokiaľ poznáme počiatočný stav, tak meraním previazanej zachovávaajúcej sa veličiny (napr. momentu hybnosti) jedného z telies spoznáme súčasne aj hodnotu tejto veličiny u druhého z telies, bez potreby samostatného merania.

V klasickej fyzike vychádzame z „triviálneho“ predpokladu, že (ideálnym klasickým) meraním danej veličiny len *odhaľujeme jej aktuálnu hodnotu pred merania*. Ako sme však zistili v kap. II.1 na prípade fotónu, hodnoty dynamických premenných (ako poloha či moment hybnosti - spin) kvantových objektov mimo merania vo všeobecnosti *neexistujú* - sú neurčité, v superpozícii možných merateľných hodnôt, a práve meranie danej premennej *vyrába* kolapsom superpozície jej náhodnú ostrú hodnotu. Pre dvojicu previazaných kvantových objektov A a B to však znamená, že hodnoty previazanej veličiny sú neurčité pre *obidva* objekty, a meraním *jedného* z nich skokom skolabuje superpozícia hodnôt pre *oba*. Meraním veličiny $\mathcal{X}$ pre A teda okamžite vyrobíme odpovedajúcu hodnotu $\mathcal{X}$ pre B, nech je od A ľubovoľne vzdialené! S takýmto okamžitým pôsobením na diaľku (nerešpektujúcim rýchlostný limit c) sme sa už stretli pri kolapse vlnovej funkcie (kap. II.2.1), a nazvali sme ho kvantovou previazanosťou. V prípade vlnovej funkcie však išlo „len o abstraktný matematický objekt“, okamžité vzájomné ovplyvnenie dvojice „fyzických objektov“ na diaľku však vyvoláva pochybnosti o *úplnosti* nášho opisu kvantového sveta vo svetle teórie relativity.⁵⁵

Kandidátom na rozlúštenie tohto rébusu mala byť existencia tzv. **skrytých premenných** - akéhosi skrytého kódu „neseného“ každým objektom ale nezahrnutého do nášho matematického opisu kvôli jeho (domnelej) neúplnosti, a predurčujúceho výsledok merania (kolapsu) dynamických premenných. Takýmto spôsobom by mohla byť odstránená všadeprítomná náhodnosť výsledkov meraní. Vďaka týmto skrytým premenným by mohli byť aj trajektória fotónu-projektilu, či aktuálna hodnota jeho spinu pozdĺž trajektórie *fyzikálnou realitou*, „dočasne“ nedostupnou kvôli neúplnosti aparátu. Obraz kvantového sveta by sa tak stal bližším našej makroskopickej realite.

Ukázalo sa, že existenciu skrytých premenných vieme potvrdiť či vyvrátiť *experimentálne*, a to na základe splnenia či nesplnenia tzv. **Bellových nerovností**.⁵⁶ Pre skúmané kvantové objekty (napr. fotóny) vyberme *trojicu* takých navzájom nezávislých dynamických premenných, α , β a γ , ktoré môžu pri meraní nadobúdať len dva výsledky, $+$ a $-$. Takýmito premennými sú napr. registrovanie/neregistrovanie fotónu po prechode lineárnym polarizátorom v troch rôznych orientáciách. Predpokladajme, že dokážeme opakovane generovať *dvojice* takýchto objektov (napr. fotónov) A a B, *kvantovo previazaných* tak, že hodnoty odpovedajúcich si premenných sú pri meraní A aj B vždy rovnaké ($\alpha_A = \alpha_B$, atď.). Zrealizujme *súčasné* merania na štatisticky významnom množstve takýchto

⁵⁴angl. „*quantum eraser*“. Úlohu takéhoto kvantového zmizíku hrá aj polopriepustné zrkadlo S2 v MZI z kap. II.2.1.

⁵⁵Najprominentnejším „pochybovačom“ bol až do konca svojho života A. Einstein.

⁵⁶J. Bell, 1964. Zomrel skôr, než nobelovský výbor stihol zhodnotiť jeho prínos.

dvojíc, pričom *nezávislo na sebe* vyberáme meranú premennú, α , β alebo γ (napr. $\alpha_A\beta_B, \gamma_A\alpha_B$, a pod.). Ak zvolíme rovnakú premennú pre A aj B, prirodzene dostaneme rovnaké výsledky, $+$ alebo $-$. Pri voľbe rôznych premenných môžu byť výsledky rôzne. Ak sme meraním napr. $\alpha_A\beta_B$ dostali $(+, -)$, vieme, že musí platiť $\alpha_A = + = \alpha_B$, $\beta_B = - = \beta_A$.

Pri existencii skrytých parametrov, dopredu určujúcich výsledky merania, je pre takto previazané páry s rovnakými a *jednoznačnými* hodnotami pre všetky tri premenné možných len $2^3 = 8$ konfigurácií (α, β, γ) : $(+, +, +), (+, +, -), \dots, (-, -, -)$, pričom tieto párové konfigurácie sa generujú *náhodne*. Označme symbolmi typu $\mathcal{P}(\alpha+, \gamma-)$ pravdepodobnosť, že pri párovom meraní detektor A zmeria $\alpha_A = +$ a detektor B zmeria $\gamma_B = -$ (a analogicky pre ostatné premenné a výsledky). Bellova nerovnosť (odvodenie v Dodatku J) pre $\mathcal{P}(\alpha+, \gamma-)$ je potom

$$\mathcal{P}(\alpha+, \gamma-) \leq \mathcal{P}(\alpha+, \beta-) + \mathcal{P}(\beta+, \gamma-)$$

a štatistický súbor meraní *musí* pri existencii skrytých premenných spĺňať takéto nerovnosti. Početné spoľahlivé experimenty však jednoznačne dokázali opak.

Pre ilustráciu predpokladajme, že α, β, γ sú merania s lineárnymi polarizátormi pod uhlami $0^\circ, \theta, 2\theta$ voči referenčnému smeru, a výsledky $+/-$ znamenajú registráciu/neregistráciu fotónu za polarizátorom. Pravdepodobnosť registrácie/neregistrácie fotónu v prípade lineárne polarizovaného svetla závisí od uhla medzi smerom polarizácie svetla a smerom polarizátora ako $\mathcal{P} = \cos^2 \Delta\theta$, resp. $\sin^2 \Delta\theta$ (kap. II.1.6). V prípade *náhodného* smeru polarizácie svetla (pre štatistický súbor generovaných previazaných párov) pribudne faktor $\langle \cos^2 \Delta\theta \rangle = \frac{1}{2}$. Pre výrazy v Bellovej nerovnosti to znamená

$$\mathcal{P}(0+, 2\theta-) = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \qquad \mathcal{P}(0+, \theta-) = \frac{1}{2} \sin^2 \theta \qquad \mathcal{P}(\theta+, 2\theta-) = \frac{1}{2} \sin^2 \theta$$

a má platiť

$$\frac{1}{2} \sin^2 2\theta \leq \sin^2 \theta$$

čo celkom isto *neplatí* pre $\theta \leq 45^\circ$. Existenciu skrytých premenných, ktoré by dopredu určovali výsledky meraní, musíme preto *vylúčiť*. Neurčitost' výsledku každého takéhoto merania je teda *principiálna* - ostrá hodnota *vznikne* až samotným meraním. Dôležité (a pre náš klasický pohľad na svet nepredstaviteľné) pritom je, že v prípade individuálneho merania jedného z dvojice kvantovo previazaných objektov *okamžite* ovplyvníme výsledok merania druhého, nech sú ľubovoľne od seba vzdialené.⁵⁷ Vo formálnom opise to znamená, že meraním (ktoréhokoľvek z nich) skolabuje celá ich *spoločná vlnová funkcia* - z kvantového hľadiska teda tvoria *až do kolapsu jeden nedeliteľný kvantový objekt*. Kvantová previazanosť „častíc“ (potencialít) vzniká pri ich vzájomnej interakcii, ich počet je pritom *ľubovoľný* (nemusí ísť len o *páry*), a zaniká kolapsom ich (spoločnej) vlnovej funkcie. V tomto zmysle je kolaps previazaného páru či trojice identický s kolapsom *jedinej* „častice“ (kap. II.2.1).

Okamžitý účinok merania v jednom mieste na vlnovú funkciu v mieste ľubovoľne vzdialenom pritom *neprotirečí* teórii relativity. Tá totiž limituje len rýchlosť šírenia hmoty/energie, a (v kontexte informatiky) aj *využitelnej informácie*. Kolaps vlnovej funkcie nepredstavuje šírenie *ani jednej z nich*. Pre pozorovateľov (detektory) A a B sú výsledky meraní jednotlivých častí kvantovo previazaných párov v našej úvahe *celkom náhodné*. O ich korelácii (v rámci každého páru) sa môžu dozvedieť len *následným* porovnaním nameraných výsledkov (pri bežnej komunikácii). Nie je teda takýmto spôsobom možné šíriť užitočné informácie nadsvetelnou rýchlosťou.

⁵⁷Toto pochopiteľne platí len v idealizovanom svete, v ktorom na dva kvantovo previazané objekty nepôsobia žiadne okolité vplyvy. V reálnych laboratórnych podmienkach sa kvantová previazanosť prejavuje len na limitovaných vzdialenostiach, ktoré však so zdokonaľovaním experimentálnych techník neustále narastajú.

II.2.4 Experimenty s oneskorenou voľbou.

Experimentálne skúmanie kvantovo previazaných párov kvantových objektov poskytuje zásadné odpovede na naše nejasnosti ohľadom fyzikálnej reality mikrosveta. Kvantovo previazané fotóny sú laboratórne pripravované na rôzne spôsoby (najčastejšie tzv. metódou SPDC⁵⁸), pričom korelovanými dynamickými premennými sú spravidla zložky hybnosti alebo polarizácia.

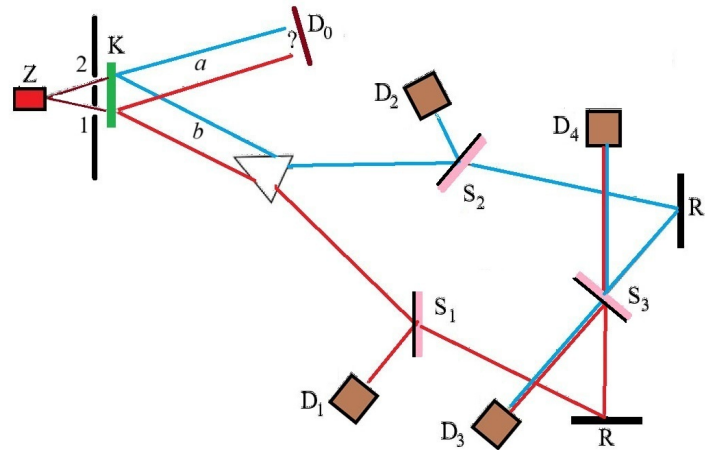
Predpokladajme experiment, v ktorom detekciou jedného fotónu z každého páru, a , skúmame interferenciu, kým druhý z páru, b , má poskytnúť informáciu „*welcher Weg*“. Principiálna schéma takéhoto experimentu na sústave s dvoma štrbinami a s možnosťou kvantového zmizíka je na obr. Jednotlivé fotóny zo zdroja Z prechádzajú dvojicou štrbín, 1 a 2, a následne sú pohltené SPDC-kryštálom K , ktorý generuje kvantovo previazané páry a, b , v superpozícii prechodu materských fotónov oboma štrbinami. Stav páru vieme zapísať ako

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|a1, b1\rangle + |a2, b2\rangle)$$

Každý fotón a postupuje priamo na detektor D_0 , na ktorom (ne)očakávame interferenčný obrazec. Odpovedajúci fotón b postupuje na sústavu detektorov identifikujúcich (domnelý) prechod konkrétnou štrbinou.

Ak by S_1 a S_2 boli dokonalé zrkadlá, každý fotón b by bol zaznamenaný jedným z detektorov D_1, D_2 , ktoré *akoby* určili štrbinu, ktorou každý materský fotón preletel. Fotóny a by však na detektore D_0 *neinterferovali*.

Naopak, ak by S_1 a S_2 boli dokonale priepustné, všetky fotóny b by po odrazoch od zrkadiel R dopadali z oboch strán na polopriepustné zrkadlo S_3 , odkiaľ by sa *náhodne* (50:50) odrážali alebo prechádzali na detektory D_3 a D_4 . Zrkadlo S_3 teda pôsobí ako kvantový zmizík, mažúci informáciu „*welcher Weg*“. Na D_0 by teda podľa predchádzajúceho textu malo dôjsť k interferencii. Žiadnu však nepozorujeme!



Vysvetlenie je nasledovné: Ak S_1 a S_2 sú dokonalé zrkadlá, alternatívne vetvy fotónu b sa previažu s detektormi D_1 a D_2 ,

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|a1, D1\rangle + |a2, D2\rangle)$$

Keďže $\langle D1 | D2 \rangle = 0$ a $\langle D1 | D1 \rangle = \langle D2 | D2 \rangle = 1$, pravdepodobnosť detekcie v D_1 alebo D_2 bude

$$\mathcal{P}_{1+2} = |\psi\rangle^2 = \langle \psi | \psi \rangle = \dots = \frac{1}{2} (\langle a1 | a1 \rangle + \langle a2 | a2 \rangle) = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$$

a k žiadnej interferencii na D_0 nedôjde ($\mathcal{P}_{1,2}$ sú pravdepodobnosti, že fotón „preletel“ štrbinou 1 resp. 2). Naopak, pre S_1 a S_2 dokonale priepustné budú obe alternatívne vetvy b na výstupe S_3 v superpozícii prechádzajúceho a odrazeného fotónu. Odraz od opticky hustejšieho prostredia vnesie

⁵⁸ *Spontaneous parametric down-conversion* - konverzia jednotlivých dopadajúcich fotónov v špeciálnych materiáloch na kvantovo previazané páry fotónov. Ich energie a hybnosti sú nešpecifikované, v súčte však odpovedajú energii a hybnosti dopadajúceho fotónu.

fázový posuv π ($e^{i\pi} = -1$), a ak *každý* prechod zrkadlom danej hrúbky vnesie fázový posuv $\pi/2$ ($e^{i\pi/2} = i$), potom

$$|b_1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(i|D_3\rangle + |D_4\rangle) \quad |b_2\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|D_3\rangle + i|D_4\rangle)$$

Celková vlnová funkcia je potom

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{2} [|a_1\rangle(i|D_3\rangle + |D_4\rangle) + |a_2\rangle(|D_3\rangle + i|D_4\rangle)] = \dots \\ &= \frac{1}{2} [(i|a_1\rangle + |a_2\rangle)|D_3\rangle + (|a_1\rangle + i|a_2\rangle)|D_4\rangle] \end{aligned}$$

Keďže $\langle D_3|D_4\rangle = 0$ a $\langle D_3|D_3\rangle = \langle D_4|D_4\rangle = 1$, pre pravdepodobnosť detekcie v D_3 alebo D_4 dostaneme

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{3+4} &= \langle \psi|\psi \rangle = \dots = \frac{1}{4} [\overbrace{(\langle i|a_1\rangle + \langle a_2|)(i|a_1\rangle + |a_2\rangle)^*}^{D_3} + \overbrace{(\langle |a_1\rangle + i\langle a_2|)(|a_1\rangle + i|a_2\rangle)^*}^{D_4}] = \\ &= \frac{1}{4} [\overbrace{\langle a_1|a_1\rangle + \langle a_2|a_2\rangle - 2\Im\{\langle a_1|a_2\rangle\}}^{D_3} + \overbrace{\langle a_1|a_1\rangle + \langle a_2|a_2\rangle + 2\Im\{\langle a_1|a_2\rangle\}}^{D_4}] \end{aligned}$$

kde sme využili rovnosť $(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta) = -2\Im\{\alpha^*\beta\} = +2\Im\{\beta^*\alpha\}$. Je to ten istý výsledok ako $\mathcal{P}_{1+2}$ z detektorov $D_{1,2}$ označujúcich „*welcher Weg*“, a interferenciu na D_0 nepozorujeme. Ak však skúmame čiastkové výsledky prislúchajúce detektorom D_3 a D_4 *samostatne*, každý obsahuje (preškrtnutý) interferenčný člen. Ak pomocou časovej korelácie experimentálne spárujeme udalosti registrované v D_0 a D_3 , resp. D_0 a D_4 , dostaneme odpovedajúce interferenčné obrazce. K interverencii teda *dochádza*, keďže sú však interferenčné členy navzájom v *protifáze*, vo výslednom obrazci splynú (a interferenciu zamaskujú).



Ak S_1 a S_2 budú *polopriepustné*, vlnová funkcia bude obsahovať (s určitou váhou) členy prislúchajúce všetkým detektorom. Fotóny a registrované detektorom D_0 môžeme potom rozdeliť do dvoch skupín: Fotóny a korelované so záznamami detektorov D_1 a D_2 nevytvárajú interferenčný obrazec, kým fotóny a korelované so záznamami detektorov D_3 a D_4 sami so sebou interferujú. Tradičné vysvetlenie je také, že v prípade prvej skupiny detektory D_1 a D_2 určujú „*welcher Weg*“ a tým rušia interferenciu. Najzaujímavejšou črtou takéhoto experimentu je však možnosť manipulácie optických dĺžok jednotlivých kanálov tak, že fotóny a budú detegované na D_0 *skôr* než fotóny b na detektoroch $D_1 - D_4$, a výsledky sa pritom nezmenia! Akoby detektory $D_1 - D_4$ *retroaktívne* určili, čo majú „robiť“ fotóny a . Z kauzálneho hľadiska zas akoby si každý fotón a náhodne „vyberal“, či bude alebo nebude interferovať na D_0 (a tomu sa prispôsobí výber detektora pre fotón b).⁵⁹ Pochopiteľne, takéto úvahy sú neakceptovateľné.

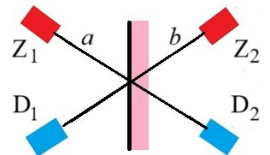
⁵⁹Ešte naivnejšia interpretácia by znela, že materský fotón si dopredu „vyberie“, či prejde jedinou štrbinou alebo obomi.

Záver je taký, že každý kvantový objekt (individuálny fotón či previazaný pár fotónov) je pred detekciou v *superpozícii všetkých dostupných* alternatívnych stavov (zastúpených v jeho vlnovej funkcii), a v okamihu detekcie skolabuje do jedného z nich, s pravdepodobnosťou danou váhovým faktorom v superpozícii. V prípade previazaného páru (resp. trojice, štvorice...) fotónov ide o *jediný kvantový objekt - nezáleží na mieste a poradí detekcie* - kolaps nastáva pri *prvej* z nich. Informácia „*welcher Weg*“ je pritom len *zdanlivým* určením „trasy fotónu“, je len koreláciou *určitých* výsledkov spomedzi celého dostupného spektra (superpozície).

Predstavuje teda vlnová funkcia *fyzikálnu realitu*, alebo je len matematickou pomôckou? Je jej kolaps fyzikálnym procesom, alebo ide len o výpočtový trik? Strohá odpoveď znie, že ψ predstavuje hranicu toho, čo nám fotón (a ako uvidíme neskôr, nielen fotón) o sebe „dovolí“ poznať. Hoci sa opísaný scenár vymyká z rámca našej zmyslovej skúsenosti, je *jedinou* „realitou“, ktorú dnes máme.⁶⁰ Akékoľvek predstavy idúce za túto hranicu postrádajú oporu v matematickom aparáte aj principiálnych experimentálnych možnostiach fyziky, a preto sú vykázané do sveta *metafyziky*.

II.2.5 Symetrickosť vlnovej funkcie.

Skúmame dvojicu fotónov a, b , generovaných zdrojmi Z_1, Z_2 , dopadajúcu symetricky z oboch strán na polopriepustné zrkadlo (rovnaké ako v predchádzajúcej kap. II.2.4), a zaznamenaných detektormi D_1, D_2 (obr.). Podľa kvantového princípu superpozície každý z fotónov *musí* byť po interakcii so zrkadlom v superpozícii „prechádzajúceho“ a „odrazeného“, čiže v superpozícii záznamov oboch detektorov,



$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|D_1\rangle + i|D_2\rangle)|a\rangle \quad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|D_2\rangle + i|D_1\rangle)|b\rangle$$

Uvažujeme najprv prípad, keď fotóny *nie sú* kvantovo previazané, a dokážeme ich rozlíšiť *len* podľa času detekcie (sú registrované s časovým odstupom). Amplitúdy pravdepodobnosti detekcií sa sčítavajú, čiže

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ (i|b\rangle - |a\rangle)|D_1\rangle + (i|a\rangle - |b\rangle)|D_2\rangle \}$$

Rozdelenie pravdepodobností dostaneme z výrazu $\mathcal{P} = \langle\psi|\psi\rangle$, kde

$$\langle\psi| = |\psi\rangle^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ (-i\langle b| - \langle a|)\langle D_1| + (-i\langle a| - \langle b|)\langle D_2| \}$$

Rozlíšiteľné sú teraz nielen detektory, $\langle D_1|D_2\rangle = 0$, ale aj fotóny, $\langle a|b\rangle = 0$, a teda

$$\mathcal{P} = \dots = \frac{1}{2} \{ \underbrace{\langle a|a\rangle\langle D_1|D_1\rangle}_{a \text{ v } D_1} + \underbrace{\langle b|b\rangle\langle D_1|D_1\rangle}_{b \text{ v } D_1} + \underbrace{\langle a|a\rangle\langle D_2|D_2\rangle}_{a \text{ v } D_2} + \underbrace{\langle b|b\rangle\langle D_2|D_2\rangle}_{b \text{ v } D_2} \} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (= 2)$$

Znamená to, že každý z fotónov bude, s polovičnou pravdepodobnosťou a nezávisle na sebe, detegovaný v D_1 alebo D_2 . Ak však oba fotóny zaregistrujeme naraz a nebudú nijak inak rozlíšiteľné, $|a\rangle = |b\rangle$, pravdepodobnosť sa zmení na

$$\mathcal{P} = \dots = \frac{1}{2} \{ \underbrace{2\langle a|a\rangle\langle D_1|D_1\rangle}_{\text{obidva v } D_1} + \underbrace{2\langle a|a\rangle\langle D_2|D_2\rangle}_{\text{obidva v } D_2} \} = \frac{1}{2} \{ 2\langle a|a\rangle_{D_1} + 2\langle a|a\rangle_{D_2} \} = 1 + 1 (= 2)$$

čiže oba fotóny vždy zaregistruje len jeden z detektorov.

⁶⁰Navyše je posvätený enormným technologickým pokrokom za ostatné dekády.

Predpokladajme teraz, že fotóny sú *kvantovo previazané*,⁶¹ napr. prostredníctvom svojich spinov, a sú teda úplne opísateľné *jedinou* neredukovateľnou vlnovou funkciou. Najprv rozoberme prípad superpozície navzájom *rovnakých* spinov, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle|R\rangle + |L\rangle|L\rangle)$, čiže fotóny sú opäť *nerozlíšiteľné*. Po interakcii so zrkadlom dostávame

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \{ (i|D_2\rangle - |D_1\rangle)|R\rangle \cdot (i|D_1\rangle - |D_2\rangle)|R\rangle + (i|D_2\rangle - |D_1\rangle)|L\rangle \cdot (i|D_1\rangle - |D_2\rangle)|L\rangle \} = \\ &= \frac{-i}{2\sqrt{2}} \{ (|D_1\rangle|D_1\rangle + |D_2\rangle|D_2\rangle)|R\rangle|R\rangle + (|D_1\rangle|D_1\rangle + |D_2\rangle|D_2\rangle)|L\rangle|L\rangle \} \end{aligned}$$

a pre pravdepodobnosti⁶²

$$\mathcal{P} = \dots = \frac{1}{8} \{ 2\langle R|R\rangle_{D_1} + 2\langle L|L\rangle_{D_1} + 2\langle R|R\rangle_{D_2} + 2\langle L|L\rangle_{D_2} \} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} (= 1)$$

čiže opäť registrujeme oba fotóny na spoločnom detektore. Rovnako ako v predchádzajúcom prípade (nepreviazaných fotónov), fotóny sú *nerozlíšiteľné*, a teda ich vzájomnou výmenou sa vlnová funkcia *nezmení*. Hovoríme, že vlnová funkcia je **symetrická** voči zámene dvojíc.⁶³ V takýchto prípadoch majú častice tendenciu k **zhlukovaniu**⁶⁴ v *spoločnom* stave (v tomto prípade detektore). Práve tendencia k zhlukovaniu fotónov do jediného stavu má za následok, že vlnová funkcia tohto stavu „prerastie“ do *koherentnej* makroskopicky pozorovateľnej EM vlny. Symetrickým je aj kvantovo previazaný stav dvoch *rozlíšiteľných* fotónov, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle|L\rangle + |L\rangle|R\rangle)$.

Napokon uvažujme⁶⁵ dva *rozlíšiteľné* fotóny v kvantovo previazanom stave $\frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle|L\rangle - |L\rangle|R\rangle)$. Ide o **antisymetrický** stav - vzájomnou zámenou častíc nadobudne vlnová funkcia opačné znamienko. Interakciou so zrkadlom po úprave dostaneme

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \dots = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |D_1\rangle|L\rangle|D_2\rangle|R\rangle - |D_1\rangle|R\rangle|D_2\rangle|L\rangle \} \\ \mathcal{P} &= \dots = \frac{1}{2} \{ \langle L|L\rangle_{D_1} \langle R|R\rangle_{D_2} + \langle R|R\rangle_{D_1} \langle L|L\rangle_{D_2} \} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Tentokrát sú previazané fotóny registrované navzájom opačnými detektormi. Kvantové objekty opísané antisymetrickými vlnovými funkciami sa dôsledne vyhýbajú zhlukovaniu.⁶⁶ Ako neskôr uvidíme, vďaka tejto vlastnosti existuje hmota (látka) v tej podobe ako ju poznáme.

⁶¹Fotóny v kvantovo previazaných stavoch, pripravené metódou SPDC, vznikajú v *spoločnom* zdroji, pomyselné zdroje Z1, Z2 v našej schéme v tomto prípade len symbolizujú smer dopadu na zrkadlo.

⁶²Vlnová funkcia kvantovo previazaného páru je amplitúdou pravdepodobnosti detekcie *páru*, a teda *párová* pravdepodobnosť je normovaná na 1 (namiesto 2).

⁶³Vzťahuje sa to aj na zmenu ľubovoľnej dvojice v *n*-časticovej vlnovej funkcii.

⁶⁴angl. *bunching*

⁶⁵Podrobnosťami prípravy uvažovaných stavov $\frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle|L\rangle \pm |L\rangle|R\rangle)$ sa tu nebudeme zaoberať - podstatné je, že sa dajú technicky pripraviť, a že sa navzájom líšia priestorovou konfiguráciou výsledných spinov. O niečo viac sa dozvieme v kap. II.4.6 o priestorovom kvantovaní momentu hybnosti a v kap. III.1.6 o výberových pravidlách pri kvantových preskokoch.

⁶⁶angl. *anti-bunching*

II.3 Elektrón.

II.3.1 Duálny charakter elektrónu.

Novodobá história **elementárnych častíc** začala plynúť na prelome 19. a 20. storočia štúdiom tzv. **katódových lúčov** emitovaných z katódy **Crookesovej trubice**.⁶⁷ V zriedených plynoch pri dostatočnom anódovom napätí vznikal elektrický výboj, pri dopade týchto lúčov na luminiscenčný povrch jeho svietenie, a pri ich dopade na miniatúrnu turbínu jej rotácia. Odkláňaním lúča elektrickým alebo magnetickým poľom sa ukázalo, že ide o tok *častíc* - **elektrónov**, ktoré okrem hybnosti a pokojovej hmotnosti nesú aj elektrický náboj⁶⁸

$$m_e \cong 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \qquad q_e = -e \cong -1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Veličina e je tzv. **elementárny náboj**, a je fundamentálnou fyzikálnou konštantou. Existencia nenulovej pokojovej hmotnosti evokuje klasickú predstavu hmoty a náboja rozložených v určitom objeme - ideálne guľi o polomere r_e . Stotožnením energie elektrostatického poľa vytvoreného takouto nabitou guľou s relativistickou pokojovou energiou elektrónu definujeme tzv. **klasický polomer elektrónu**,

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_e} = m_e c^2 \qquad r_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e c^2} \cong 2,818 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

Ako však čoskoro uvidíme, ide o naivnú predstavu. Súčasné experimentálne možnosti, umožňujúce lokalizovanie elektrónu s rádovo väčšou presnosťou, navyše ukazujú, že problém experimentálneho lokalizovania elektrónu (detektorom) sa podobá problému lokalizovania fotónu (kap. II.1.2) - *detegovaný elektrón je nanajvýš tak veľký ako rozlišovacia schopnosť detekcie*.

Prevrat v náhľade na elektrón (aj všetky ostatné častice látky) nastal pri pozorovaní rozptylu elektrónového zväzku na povrchu látok s pravidelnou (periodickou) kryštalickou štruktúrou - pozoroval sa *interferenčný obrazec*.⁶⁹ Kryštálová mriežka totiž pôsobí na vlny ako *difrakčná mriežka* (podobná tej, ktorú opisujeme v kap. II.1.1). Podmienkou interferenčných maxím je $d \sin \vartheta = l\lambda$, $l = 0, 1, 2, \dots$ (Dodatok D), kde d je v tomto prípade periodičita mriežky atómov, a ϑ je uhol odrazeného zväzku voči normále na plochu mriežky (pri kolmom dopade vlny na mriežku). Vlnová dĺžka λ , odpovedajúca meraným interferenčným (difrakčným) obrazcom pritom súvisela s hybnosťou dopadajúcich elektrónov podľa vzťahu z kap. II.1.4

$$\frac{h}{\lambda} = \hbar |\vec{k}| = |\vec{p}| = \gamma m_e |\vec{v}|$$

Zmenou urýchľujúceho elektrického napätia sa menila hybnosť dopadajúcich elektrónov, a odpovedajúco uvedenému vzťahu aj interferenčný obrazec. Tento výsledok bol potvrdením hypotézy⁷⁰ o *duálnom* (vlnovo-časticovom) charaktere častíc, podľa ktorej *každej častici s nenulovou hybnosťou* prislúcha tzv. **de Broglieova vlnová dĺžka**⁷¹ $\lambda = \frac{h}{|\vec{p}|}$. Vlnový charakter elektrónových zväzkov potvrdzuje aj vytvorenie interferenčného obraca pri prechode sústavou štrbín, analogicky prípadu fotónov (kap. II.1.2).

⁶⁷ Crookesova trubica je výbojka naplnená zriedeným plynom. Za jej vynálezcu sa považuje W. Crookes. Experimenty zásadného významu na nej uskutočňovali mnohí významní fyzici, ako P. Lenard, H. Hertz či W. Röntgen.

⁶⁸ Objav elektrónu je pripísaný J. J. Thomsonovi v r. 1897, (Nobelova cena v r. 1906), a jeho elektrický náboj bol experimentálne určený R. Millikanom v r. 1910 (Nobelova cena 1923).

⁶⁹ Zásadné experimenty boli uskutočnené v r. 1927 C. Davissonom a L. Germerom, a nezávisle G. P. Thomsonom. Davissonovi a Thomsonovi bola za objav vlnových vlastností elektrónu udelená Nobelova cena v r. 1937. Iróniou osudu, Thomsonov otec, J. J. Thomson, je laureátom Nobelovej ceny za objav elektrónu-častice.

⁷⁰ S touto hypotézou prišiel v r. 1923 L. de Broglie (čítaj „de broj“), Nobelovu cenu získal v r. 1929.

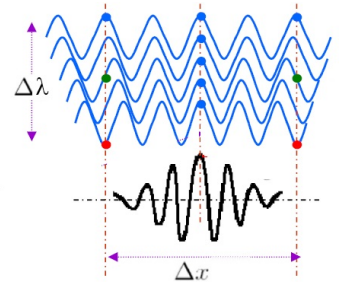
⁷¹ Tento záver môžeme aplikovať aj na makroskopické telesá, ktorým však odpovedá nemerateľne malá vlnová dĺžka, čiže vlnové vlastnosti makroskopických telies su *nepozorovateľné*.

Dvojica vzťahov

$$E = \hbar\omega \quad \vec{p} = \hbar\vec{k}$$

teda tvorí matematické piliere vlnovo-časticového dualizmu, ktorý sa vzťahuje rovnako na fotóny aj elektróny (a ostatné častice). Ostré hodnoty ω a $|\vec{k}|$ však reprezentujú úplne delokalizovanú rovinnú vlnu, a teda neodpovedajú predstave „bodovej“ častice.⁷²

Definovať vlnovú dĺžku má fyzikálne zmysel len pre vlnu o pozdĺžnom rozmere (v smere šírenia) podstatne prevyšujúcom λ , teda pre objekt dostatočne pozdĺžne *delokalizovaný*. V prípade *fotónov* s $m = 0$ platí $E = pc$, a uvedené vzťahy vedú na $\lambda = \frac{hc}{\hbar\omega} = \frac{2\pi c}{\omega}$, pričom podľa predchádzajúceho textu nemáme potrebu „šíriaci sa fotón“ lokalizovať. Pre objekty s $m \neq 0$ však *očakávame* priestorovú lokalizáciu (pokojovej) hmotnosti, čo je protichodná požiadavka k definovaniu vlnovej dĺžky. Riešením preto musí byť kompromis - čiastočná priestorová lokalizácia za cenu *neurčitosti* v stanovení λ . Vo fyzike vln poznáme takýto objekt - **vlnový balík** (Dodatok K), tvorený superpozíciou harmonických vln zo spojitého intervalu $\Delta\lambda$, s nenulovou výslednou amplitúdou na dĺžke Δx (v smere šírenia pozdĺž osi x).



Fázová rýchlosť prislúchajúca vlne o de Broglieovej vlnovej dĺžke je

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda\omega}{2\pi} = \frac{h\omega}{2\pi p} = \frac{\hbar\omega}{p} = \frac{E}{p} = \frac{\gamma mc^2}{\gamma mv} = \frac{c^2}{v}$$

čo zjavne neodpovedá rýchlosti *hmotnej* častice v . Na druhej strane, vlnový balík sa šíri **grupovou rýchlosťou** v_g (Dodatok K). Pre voľnú *relativistickú* časticu (t.j. šíriacu sa relativistickou rýchlosťou) platí

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} \quad \omega = \frac{E}{\hbar} = c\sqrt{k^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2} \quad v_f = c\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{p}\right)^2}$$

Očividne $v_f > c$ (a nemôže teda predstavovať šírenie hmoty). Na druhej strane,

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \dots = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{p}\right)^2}} = \frac{c^2}{v_f} = v \quad (< c)$$

Rýchlosť vlnového balíka teda odpovedá rýchlosti *klasickej* častice! Pre voľnú *nerelativistickú* časticu platí

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{(\hbar k)^2}{2m} \quad \omega = \frac{E}{\hbar} = \frac{\hbar k^2}{2m} \quad v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m} = \frac{p}{2m} = \frac{mv}{2m} = \frac{v}{2}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m} = v$$

Pre *nehmotnú* časticu (fotón) platí⁷³

$$E = \hbar\omega = pc = \hbar kc \quad \omega = kc \quad v_f = c = v_g = v$$

Zosúladenie obrazu šíriaceho sa vlnového balíka s lokalizovaným časticovým charakterom detekcie opäť vedie k *pravdepodobnostnej* interpretácii: Vlnová funkcia $\psi(x)$ v tvare vlnového balíka vyjadruje *potencialitu detekcie* - kvadrát jej amplitúdy určuje *pravdepodobnosť detekcie* častice v danom

⁷²Čím ostrejší je interferenčný/difrakčný obrazec pri rozptyle elektrónov na kryštálovej mriežke či pri prechode sústavou štrbín, tým viac sa obraz elektrónov vzdáva od predstavy „bodových“ častíc.

⁷³Posledné rovnosti platia len pre vákuum. V látkovom prostredí vo všeobecnosti $v_f \neq v_g \neq c$.

mieste. Prednosťou tohto konceptu okrem názornosti je fakt, že jeho časopriestorový opis odpovedá šíreniu energie/hybnosti/signálu. Prisudzovanie hlbšieho významu vlnovému balíku však nemá oporu vo fyzike. Kvôli matematickej jednoduchosti navyše častice obvykle reprezentujeme pomocou *harmonických* vln s *ostrými* hodnotami frekvencie, vlnového čísla a odpovedajúcej de Broglieovej vlnovej dĺžky.⁷⁴ Keďže (ako uvidíme) zákony kvantovej mechaniky sú *lineárne* - platí princíp superpozície - z riešení pre harmonické vlny vieme vždy „skomponovať“ riešenie pre realistický vlnový balík.

II.3.2 Princíp neurčitosti.

Koncept vlnového balíka ako pravdepodobnostnej reprezentácie častice naznačuje existenciu principiálnych obmedzení v presnosti *súčasného predpovedania* polohy a hybnosti častice. Vlnový balík totiž lokalizuje pravdepodobné miesto detekcie (v jednom rozmere x) na intervale σ_x , ktorý nepriamo úmerne závisí od *spektrálnej* šírky balíka σ_k (Dodatok K),

$$\sigma_x \sigma_k \geq \frac{1}{2}$$

pričom rovnosť odpovedá práve gaussovskému balíku.⁷⁵ Priradenie de Broglieovej vlnovej dĺžky k hybnosti častice znamená $\sigma_p = \hbar \sigma_k$, čo vedie na **Heisenbergov princíp neurčitosti**⁷⁶ (v jednom rozmere x)

$$\Delta x \Delta p_x \cong \sigma_x \sigma_{p_x} \geq \frac{\hbar}{2}$$

Pri jeho interpretácii sa musíme dôsledne vyhnúť nedorozumeniam. Predovšetkým, *neurčitosť* (resp. neistota) *neznamená nepresnosť*. Polohu častice totiž môžeme *zmerať* s ľubovoľnou presnosťou, akú nám poskytuje experiment, a to isté platí o meraní hybnosti. Ako sme však zistili pri štúdiu fotónu v kap. II.1, dynamické premenné kvantových objektov (akými sú aj poloha a hybnosť) pred meraním *neexistujú* - meraním ich hodnoty *vytvárame* (neodhaľujeme existujúce hodnoty), spomedzi „ponuky“ danej pravdepodobnostným opisom *zohľadňujúcim spôsob merania*. Každý typ merania definuje *bázu ortogonálnych* (vzájomne odlišiteľných) výsledkov merania (napr. ktorý detektor, ktorá bunka na plošnom rastri, aká hodnota na digitálnej stupnici, a pod.),⁷⁷ a stav kvantového objektu (vlnová funkcia) vyjadrený v *tejto* báze ako *superpozícia bazových stavov* poskytuje pravdepodobnosti realizácie jednotlivých bazových hodnôt. Pri meraní polohy/hybnosti častice (v jednom rozmere) tvoria bázu dostupné (t.j. pravdepodobné) rozlíšiteľné hodnoty x a p_x v rámci intervalov $\approx \sigma_x$ a σ_{p_x} . Ľubovoľná takáto dvojica *ostrých*⁷⁸ hodnôt je dostupná meraniu (s rozdielnou pravdepodobnosťou). Predmetom neurčitosti je len *aktuálna šírka* tejto „ponuky“, teda σ_x a σ_{p_x} . Ak teda „pripravíme“ vlnový balík s určitou priestorovou šírkou σ_x , meranie hybnosti náhodne (s váženou pravdepodobnosťou) vygeneruje hodnotu p_x z intervalu $\sigma_{p_x} \geq \frac{\hbar}{2\sigma_x}$.⁷⁹

Každý akt merania však spôsobí *kolaps* vlnovej funkcie (kap. II.2.1) - vlnového balíka. Predpokladajme, že vlnový balík o priestorovej šírke σ_x podrobíme meraniu polohy, a polohu častice stanovíme s presnosťou merania δ_x . Tým pôvodná priestorová šírka balíka skolabuje do $\sigma_x \rightarrow \delta_x$, a odpovedajúco vzrastie jeho spektrálna šírka $\sigma_{p_x} \rightarrow \frac{\hbar}{2\delta_x}$. Meraním polohy teda ovplyvníme prípadný bezprostredne nasledujúci výsledok merania hybnosti (a naopak). Inými slovami, ak stanovíme (t.j. *vytvoríme*)

⁷⁴Pre názornosť môžeme tieto hodnoty stotožniť so *stredom* vlnového balíka.

⁷⁵Presvedčiť sa o tom môžeme pomocou Fourierovej transformácie.

⁷⁶Sformuloval ho v r. 1927 W. Heisenberg, Nobelova cena mu bola udelená v r. 1932.

⁷⁷Aj v prípadoch merania spojte sa meniacej premennej, akou je poloha či hybnosť, je výsledkom reálneho merania *diskrétna* hodnota, *odlišná* od najbližšej susednej. (Túto diskretnosť môžeme prisúdiť limitovanej citlivosti merania.)

⁷⁸Ostroť týchto hodnôt je daná len citlivosťou samotného merania.

⁷⁹Predstavme si časticu uzavretú v jame o šírke L . Meranie jej hybnosti bude náhodne produkovať hodnoty v intervale $\Delta p \geq \frac{\hbar}{2L}$.

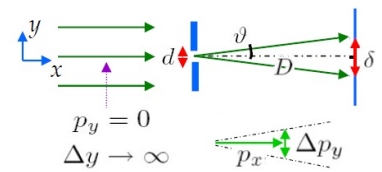
polohu objektu s presnosťou/neurčitostou σ_x , neurčitosť hybnosti σ_{p_x} (t.j. interval hodnôt, ktoré môžeme bezprostredne namerať, a to s ľubovoľnou presnosťou), bude podliehať princípu neurčitosti.

Na základe princípu neurčitosti môžeme interpretovať aj ohyb svetelných či elektrónových lúčov na štrbine (Dodatok L): Pre častice šíriace sa v smere x v neohraničenom priestore platí

$$p_y = 0 \Rightarrow \Delta p_y = 0 \Rightarrow \Delta y \rightarrow \infty$$

V štrbine šírky d sú však častice lokalizované v smere y (obr.)

$$\Delta y = d \Rightarrow \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2d}$$



Nadobudnutá neurčitosť hybnosti v smere y znamená rozptyl lúčov do strán - ohyb, *minimálne* pod uhlom ϑ , pre ktorý platí

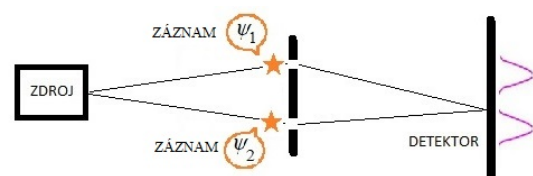
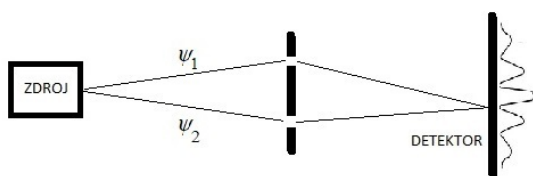
$$\sin \vartheta \cong \vartheta = \frac{\Delta p_y}{p_x} \geq \frac{\hbar}{2dp_x} = \frac{\hbar \lambda}{2d \hbar} = \frac{\lambda}{2\pi d}$$

Uhol prvého interferenčného/difrakčného minima (čiže prvej dolnej hranice pre pozorovaný rozptyl) je $\vartheta_{min} = \frac{\lambda}{2d}$, spĺňajúci uvedenú nerovnosť.

Neexistencia *skrytých premenných* (kap. II.2.3) diskvalifikuje úvahy, podľa ktorých by princíp neurčitosti iba odrážal *neznalosť* takýchto premenných, predurčujúcich výsledky merania polohy či hybnosti. Rovnako chybnou je lákavá predstava, že zdrojom neurčitosti je všadeprítomný vplyv merania. Úvahy tohto typu môžu vyzeráť nasledovne: Hľadanie polohy elektrónu je ako hľadanie predmetu v tme - zasvietime naň. Priestorová rozlišovacia schopnosť svetla je však ohraničená jeho vlnovou dĺžkou, $\Delta x \approx \lambda_f$. Pre hybnosť fotónov to znamená $p_f = \frac{h}{\lambda_f}$, a odpovedá zmene hybnosti elektrónu pri interakcii s fotónom, $\Delta p_e \approx p_f$. Nevyhnutná neurčitosť hybnosti elektrónu, *získaná* „meraním“ jeho polohy je teda $\Delta p_e \approx \frac{h}{\Delta x} > \frac{\hbar}{2\Delta x}$. Hoci je táto úvaha správna, poukazuje len na *neredukovateľný účinok akéhokoľvek merania* na kvantový objekt. Takto vzniknutá neurčitosť však len spadá do rámca (a nikdy „nepodlezie“ dolnú hranicu) *principiálnej* neurčitosti, súvisiacej s *neexistenciou ostrých hodnôt dynamických premenných* (polohy a hybnosti) *pred meraním*. Základné premenné klasickej mechaniky sa opäť ukazujú byť *emergentnými* a rýdzo *makroskopickými* pojmami, ktoré prechodom z makro- do mikrosвета strácajú jasný význam.

II.3.3 Interferencia elektrónov na sústave štrbín.

Experimenty s elektrónmi prelietajúcimi sústavou štrbín vedú k rovnakým záverom ako obdobné experimenty s fotónmi (kap. II.1.2). Ak necháme *jednotlivé* elektróny nerušené preletieť sústavou štrbín, po mnohonásobnej detekcii sa vynorí interferenčný obrazec. Ak však elektróny lokalizujeme v *niektorej* zo štrbín, napr. detekciou fotónov rozptýlených na elektrónoch pri danej štrbine, interferenčný obrazec zmizne.⁸⁰



Obľúbeným argumentom je, že interferenčný obrazec sa rozmaže v dôsledku interakcie elektrónov s fotónmi, detekciou ktorých je možné získať (domnelú) informáciu „*welcher Weg*“. Podmienkou je však, že fotóny dokážu rozlíšiť štrbiny, teda $\lambda_f < \frac{d}{2}$, kde d je vzájomná vzdialenosť štrbín. Elektrón

⁸⁰Pri uvažovanej detekcii elektrónu v štrbine takýto elektrón, na rozdiel od fotónu, nezanikne a ďalej sa šíri, pričom nemôžeme zanedbať poruchu šírenia v dôsledku interakcie - detekcie.

takouto interakciou s fotónom získa priečnu neurčitosť hybnosti $\delta p \cong \frac{h}{\lambda_f} > \frac{2h}{d}$. Na detektore vo vzdialenosti D to znamená priečne rozmazanie $\delta = \frac{\delta p}{p} D > \frac{2h}{d} \frac{\lambda_e}{h} D = \frac{2\lambda_e D}{d}$, čo prevyšuje vzdialenosť interferenčných miním a maxím (Dodatok D).

Zmätočnosť tohto argumentu opäť preukážeme experimentom s *kvantovo previazanými párami* elektrónov. Uvažujme s dvojicami elektrónov s opačnými hybnosťami (obr.), kde záznam na jednom z detektorov vľavo určí konkrétnu štrbinu - „*welcher Weg*“ pre prelet druhého elektrónu. Interferenčný obrazec *nevznikne*, hoci k žiadnemu rozptylu pri štrbine nedochádza.



Ak však detektory vľavo nahradíme jediným, ktorý smery dopadajúcich elektrónov *nerozlíši*, opäť pozorujeme interferenčný obrazec. Náhrada dvojice detektorov jediným je kvantovým zmizíkom (kap. II.2.2), ktorý informáciu „*welcher Weg*“ vymazal. Kolaps spoločnej vlnovej funkcie *páru* na detektoroch vľavo v jednom i druhom prípade *priečne* lokalizuje elektrón letiaci štrbinami. Ak je táto lokalizácia presnejšia než $\approx \frac{d}{2}$, interferenčný obrazec sa rozmaze - nie však zrážkou/rozptylom ale samotným kolapsom a princípom neurčitosti. Nezáleží pritom (kap. II.2.4), ktorý z detektorov kolaps spôsobil.

Vo formalizme stĺpcových a riadkových vektorov, ktorý sme používali pre fotóny, je amplitúda pravdepodobnosti, že elektrón v stave $|Z\rangle$ generovanom zdrojom sa ocitne v stave $|j\rangle$ v štrbine j , daná skalárnym súčinom $\langle j|Z\rangle$, a amplitúda pravdepodobnosti prechodu zo stavu $|j\rangle$ do stavu $|D\rangle$ na detektore za štrbinami je $\langle D|j\rangle$. Amplitúda procesu $Z \rightarrow j \rightarrow D$ je potom $\langle D|j\rangle\langle j|Z\rangle$. Ak je *dostupnou* informácia o prelete elektrónu konkrétnou štrbinou j , potom pravdepodobnosť tohto procesu je

$$\mathcal{P}_{(Z \rightarrow j \rightarrow D)} = |\langle D|j\rangle\langle j|Z\rangle|^2$$

Pravdepodobnosť detegovaného stavu $|D\rangle$, bez ohľadu na výber štrbiny, je potom pri dostupnosti⁸¹ informácie „*welcher Weg*“ pre všetky štrbiny

$$\mathcal{P}_{(Z \rightarrow D)} = |\langle D|Z\rangle|^2 = \sum_j |\langle D|j\rangle|^2 |\langle j|Z\rangle|^2 = \sum_j \mathcal{P}_{(j \rightarrow D)} \mathcal{P}_{(Z \rightarrow j)} = \sum_j \mathcal{P}_{(Z \rightarrow j \rightarrow D)}$$

Ak však informácia „*welcher Weg*“ nie je dostupná, potom

$$\mathcal{P}_{(Z \rightarrow D)} = |\langle D|Z\rangle|^2 = \left| \sum_j \langle D|j\rangle\langle j|Z\rangle \right|^2 \neq \sum_j \mathcal{P}_{(Z \rightarrow j \rightarrow D)}$$

- sčítavajú sa amplitúdy a nie pravdepodobnosti. Dochádza k *interferencii nezrealizovaných* (nedeťgovaných) *potencialít*.

II.3.4 Pohybová rovnica elektrónu.

Interferenčné experimenty s elektrónmi ukazujú, že elektróny sa za určitých okolností chovajú ako vlny, rovnako ako fotóny. V oboch prípadoch tieto vlny opisujeme prostredníctvom vlnových funkcií v tvare rovinných harmonických vln (resp. ich balíkov - superpozícií)

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_0(\vec{r}, t) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \psi_0(\vec{r}, t) e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)/\hbar}$$

⁸¹ Jej dostupnosť pritom nemusí byť využitá, dôležité je len to, že bola *makroskopicky* zaregistrovaná, t.j. že nastal *kolaps* vlnovej funkcie.

vo význame komplexných amplitúd pravdepodobnosti detekcie častice v danom mieste a čase. V kap. II.1 sme ukázali, že pre makroskopický počet *fotónov* sa ich vlnová funkcia stáva EM vlnou, ktorej šírenie vo vákuu opisuje vlnová rovnica (odvodená z Maxwellových rovníc)

$$\square\psi = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\psi = 0 \quad \psi \rightarrow \vec{E}, \vec{B}, \vec{A}$$

Elektróny sú však objekty s nenulovou pokojovou hmotnosťou, pre ktoré táto rovnica (opisujúca šírenie rýchlosťou c) nemôže platiť. Pri hľadaní adekvátnej pohybovej rovnice *elektrónu* môžeme vychádzať z klasickej mechaniky hmotných telies.⁸² Tá popri tradičnom newtonovskom formalizme ponúka ekvivalentný *hamiltonovský* alebo *lagrangeovský* formalizmus. Základ v prvom z nich tvoria **Hamiltonove rovnice** pre zložky *zovšeobecnených* súradníc $q_j(t)$ a k nim pridružených hybností $p_j(t)$ ⁸³

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

kde $H(q_j, p_j, t)$ je klasický **hamiltonián** vo význame *celkovej* energie telesa. V lagrangeovskom formalizme je zas teleso charakterizované **lagrangiánom** $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$ - *rozdielom* kinetickej a potenciálnej energie ($\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt}$), a trajektóriu telesa určujeme z podmienky extrému (minima) **účinku** S , definovaného ako

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) dt \quad \frac{dS}{dt} = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$$

Prechod od jedného formalizmu k druhému je vyjadrený vzťahom

$$H = p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}$$

Účinok potom môžeme zapísať ako

$$S = \int_{t_1}^{t_2} [p_j \dot{q}_j - H] dt = \int_{q_j(t_1)}^{q_j(t_2)} p_j dq_j - \int_{t_1}^{t_2} H dt$$

Tento výraz môžeme vnímať ako dráhový integrál medzi bodmi $(q_j(t_1), t_1)$ a $(q_j(t_2), t_2)$ v rovinách $q_j - t$ (pre každý stupeň voľnosti j), pre ktorý musí platiť

$$S(q_j(t)) = \int_{q_j(t_1)}^{q_j(t_2)} \frac{\partial S}{\partial q_j} dq_j + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial S}{\partial t} dt$$

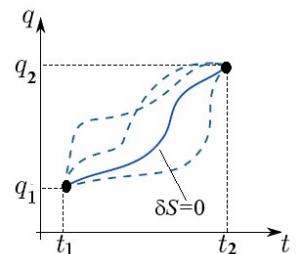
Porovnaním podintegrálnych výrazov dostávame

$$\underline{p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}} \quad \underline{H = -\frac{\partial S}{\partial t}}$$

Prvá z rovníc má v kartézskej sústave tvar $\vec{p} = \nabla S$, a znamená pohyb telesa v smere nárastu účinku, kolmo na plochy $S = \text{konšt}$ (presne tak ako sa vlna šíri v smere kolmom na *vlnoplochy* - plochy konštantnej fázy). Druhá z rovníc je tzv. **Hamiltonova-Jacobiho rovnica** (HJR). Ide o alternatívnu formuláciu klasickej mechaniky (popri newtonovskej, lagrangeovskej a hamiltonovskej), ktorá, ako hneď uvidíme, zblízuje časticové a vlnové hľadisko.

⁸²Takýmto postupom môžeme mikroskopickú zákonitosť *uhádnuť*, v žiadnom prípade nie odvodiť! Naopak, spätný postup je, v zmysle princípu korešpondencie (kap. II.2.2), orientačnou „skúškou správnosti“ uhádnutia. Definitívnym overením správnosti je experiment.

⁸³Kánonicky združenými pármí zovšeobecnených súradníc a hybností sú nielen $x - p_x$ atď., ale napr. aj uhol φ a príslušný moment hybnosti L_φ , a pod.



Predpokladajme *nerelativistickú* časticu s potenciálnou energiou $V \neq V(\vec{r}, t)$, čiže pohybujúcu sa *voľne* (bez vonkajšieho silového pôsobenia, $\vec{F} = -\nabla V = 0$). Jej hamiltonián je $H = E = \frac{p^2}{2m} + V$, a HJR má v kartézskych súradniciach tvar

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V$$

Bez silového pôsobenia sa jej celková energia sa zachováva, $E = -\frac{\partial S}{\partial t} = \text{konšt.}$ Znamená to, že $S = -Et + f(\vec{r})$, kde $f(\vec{r})$ je ľubovoľná funkcia polohy. Potom $\vec{p} = \nabla S = \nabla f(\vec{r})$, a odtiaľ $f(\vec{r}) = \vec{p} \cdot \vec{r}$. Účinok má teda tvar

$$S = \vec{p} \cdot \vec{r} - Et$$

ktorý pripomína *fázu* de Broglieovej vlny - vlnovej funkcie častice v tvare *rovinnej monochromatickej vlny*⁸⁴ $\psi(\vec{r}, t) \sim e^{iS/\hbar}$, s vlnovým vektorom $\vec{k} = \vec{p}/\hbar$ a frekvenciou $\omega = E/\hbar$. Klasická časticová mechanika nás teda priviedla k šíreniu de Broglieovej vlny - každej pohybujúcej sa klasickej častici môžeme priradiť *pomyselnú* vlnu s vlnoplochami definovanými konštantnou hodnotou účinku S . Uvedená HJR pre nerelativistickú časticu s *ansatzom*⁸⁵ $\psi(\vec{r}, t) = e^{iS(\vec{r}, t)/\hbar}$ nás zasa privedie (Dodatok M) k **Schrödingerovej rovnici** (SCHR)⁸⁶

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + V\psi(\vec{r}, t)$$

Toto je pohybová rovnica *nerelativistického* elektrónu. Postup uvedený v Dodatku M nie je dostatočne všeobecný na to, aby mohol byť považovaný za jej *odvodenie* - SCHR je *postulovaná*, a jej správnosť pre nerelativistické častice je potvrdená experimentami. Na druhej strane, dostatočne všeobecným postupom dokážeme zo SCHR odvodiť HJR ako *limitný* prípad pre $\hbar \rightarrow 0$. Klasická nerelativistická mechanika je teda limitným prípadom kvantovej mechaniky.

Podobnú situáciu poznáme v optike: *Vlnová* optika opisuje šírenie vln $e^{iS_{opt}/\lambda} = e^{i(x-v_f t)/\lambda}$ ($\lambda = \lambda/2\pi$) a ich interferenciu. Ekvivalentom účinku v optike je tzv. **optická dráha**

$$S_{opt} = \int_{t_A}^{t_B} c dt = \int_{t_A}^{t_B} n(\vec{r}) v_f dt = \int_{t_A}^{t_B} n(\vec{r}) dl$$

kde $n(\vec{r})$ je index lomu prostredia. V limite $\lambda \rightarrow 0$ (relatívne voči priestorovej rozlišovacej schopnosti) sa vlnové vlastnosti strácajú (vzdialenosti interferenčných maxím a miním sú dané vlnovou dĺžkou), a svetlo sa medzi bodmi A a B šíri vo forme *lúča* sledujúceho *minimálnu* optickú dráhu, $\delta S_{opt} = 0$ - to je limita *geometrickej* optiky. Pre de Broglievu vlnu je vlnovou dĺžkou $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$, a vlnový charakter (s interferenciou) pozorujeme vďaka nepatrnej hmotnosti mikroskopických častíc. Pre *makroskopické* telesá však $\lambda \rightarrow 0$, a ku konštruktívnej interferencii všetkých mysliteľných dráh medzi A a B (obr. v kap. II.1.1) prispievajú len dráhy s nepatrnou variáciou fázy, $\delta S = 0$, blízke klasickej trajektórii. Hľadanie takejto trajektórie pomocou princípu minimálneho účinku je teda analógiou geometrickej optiky. Pre dané p odpovedá $\lambda \rightarrow 0$ **klasickej limite** $\hbar \rightarrow 0$.

II.3.5 Časový vývoj elektrónu.

SCHR z predchádzajúcej kap. II.3.4 opisuje časový vývoj nerelativistického elektrónu, v zmysle **hustoty pravdepodobnosti** jeho detekcie v priestore, $\rho(\vec{r}, t) = |\psi^*(\vec{r}, t)\psi(\vec{r}, t)|$. Oprávnené očakávame,

⁸⁴Planckova konštanta $\hbar$ rozmeru *účinku* tu vystupuje z čisto rozmerových dôvodov.

⁸⁵Nemecký výraz „Ansatz“ vo fyzike používame vo význame predpokladaného (očakávaného) tvaru riešenia úlohy. V tomto *ansatze* pre jednoduchosť uvažujeme $|\psi| = 1$, a jeho normovanosťou sa tu nebudeme zaoberať.

⁸⁶Túto rovnicu *postuloval* E. Schrödinger v r. 1925, Nobelovu cenu získal v r. 1933.

že táto pravdepodobnosť sa v čase zachováva, teda že platí pre ňu rovnaká *rovnica continuity* ako pre iné formy hmoty-energie, skúmané v predchádzajúcich častiach textu. Presvedčíme sa o tom manipulovaním s komplexne združeným párom SCHR, v symbolickom zápise

$$\psi^*[\text{SCHR}] - [\text{SCHR}]^*\psi : \quad i\hbar \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) = \frac{-\hbar^2}{2m} (\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*)$$

čo sa dá prepísať ako

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial(\psi^* \psi)}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) = -\nabla \cdot \vec{j} \quad \vec{j} = \frac{-i\hbar}{2m} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

kde $\vec{j}(\vec{r}, t)$ je **tok hustoty pravdepodobnosti**. Ak dosadíme $\psi(\vec{r}, t)$ v tvare rovinnnej vlny $e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)/\hbar}$, dostaneme $\vec{j} = \rho \frac{\vec{p}}{m}$, čo odpovedá klasickej hustote toku $\rho \vec{v}$. Rovinná de Broglieova vlna s ostrou hodnotou hybnosti je však úplne delokalizovaná (bez začiatku a konca), a keď sa zameriame na pomyselný objem $\mathcal{V}$ ohraňovaný plášťom o ploche Σ , vlna takýmto objemom *preteká* (vteká na jednej strane a *vyteká* na druhej), pričom celkový výtok z objemu je *nulový*,

$$\oint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{\Sigma} = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \vec{j} d\mathcal{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} = 0$$

Znamená to, že pravdepodobnosť namerania elektrónu v ľubovoľnej časti priestoru sa v čase *nemení*, čo je zrejmé aj z toho, že pre takúto vlnu $\psi(t) = e^{-iEt/\hbar}$, a teda $\psi^* \psi$ nezávisí od času. Takýto stav nazývame **stacionárnym stavom** elektrónu, a napriek nenulovému toku (hustoty) pravdepodobnosti nemáme fyzikálny dôvod hovoriť o jeho *pohybe* v klasickej zmysle. Charakteristickou črtou stacionárneho stavu je *konštantná ostrá hodnota energie*.

Realistickejším obrazom viac-menej lokalizovaného elektrónu je však podľa kap. II.3.1 *vlnový balík* ako superpozícia rovinných vln rôznych de Broglieových vlnových vektorov a hybností $\vec{p} = \hbar \vec{k}$. Vďaka linearite SCHR je jej riešením celý balík aj každá z jeho harmonických komponent *samostatne*. Dosadením $\vec{p}$ -tej komponenty $\psi_{\vec{p}}(\vec{r}, t) = e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)/\hbar}$ do SCHR pre *voľnú* časticu ($V = 0$) dostaneme

$$E\psi(\vec{r}, t) = \frac{(\vec{p})^2}{2m} \psi(\vec{r}, t) \quad \rightarrow \quad E = \frac{(\vec{p})^2}{2m} \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{\hbar(\vec{k})^2}{2m}$$

Grupová rýchlosť balíka je potom $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{p}{m}$, a šírenie balíka touto rýchlosťou je reálnym *šírením pravdepodobnosti* a teda *pohybom* elektrónu. Lokálna zmena pravdepodobnosti v čase ako aj spektrum energií v balíku - *superpozícia* namiesto jedinej ostrej hodnoty - znamenajú *nestacionaritu* stavu. Navyše koeficient $\Gamma = \frac{d^2\omega}{dk^2} = \frac{\hbar}{m}$ (Dodatok K) spôsobí, že *priestorová* šírka balíka (pre jednoduchosť predpokladáme jednorozmerný prípad a *gaussovské* rozdelenie hybností) narastá s časom ako

$$\sigma_x(t) = \sigma_x|_{t=0} \sqrt{1 + \frac{\Gamma^2 t^2}{4\sigma_{t=0}^4}} = \sigma_{t=0} \sqrt{1 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2 \sigma_x^4|_{t=0}}}$$

teda *tým rýchlejšie*, čím *menšia* je oblasť jeho počiatočnej lokalizácie $\sigma_x|_{t=0}$. Tá totiž určuje šírku spektra hybností σ_p (ktoré sa bez pôsobenia vonkajších síl nemôže meniť, hoci $\sigma_x(t)$ narastá), a čím je širšie σ_p , tým skôr sa balík harmonických vln rozfázuje. Voľný elektrón ako vlnový balík pôvodne lokalizovaný na svojom klasickej polomere r_e (kap. II.3.1) by sa za 1s rozptýlil na vzdialenosť 10^{12}m .⁸⁷ Vlnový balík teda nemožno stotožniť s elektrónom inak než ako rozdelenie pravdepodobnosti detekcie. Na druhej strane, nielen balík ako celok, ale ani jeho priestorové rozširovanie sa nemôže šíriť väčšou rýchlosťou než c , čiže prílišná počiatočná lokalizácia elektrónu (do „bodu“) naráža na principiálne relativistické obmedzenie.

⁸⁷Naopak, pre makroskopické objekty by si pozorovateľné rozšírenie vyžadovalo astronomický čas.

Postupný rozpad vlnového balíka ako riešenia SCHR by nemal byť prekvapením, SCHR pre voľnú časticu je totiž formálne identická s *rovnícou šírenia tepla* či *rovnícou difúzie*. (V oboch prípadoch sa počiatočné sústredené teplo či zhuk častíc postupne rozplýva.) Naopak, pohybová rovnica *fotónu* vo vákuu vedie na disperzný vzťah $\omega = kc$ a teda $\Gamma = 0$ - vlnový balík fotónu sa vo vákuu *nerozpadá*.

Predstavme si teraz vlnový balík dopadajúci na rozhranie potenciálov - **potenciálový skok** konečnej výšky V , a uvažujme dobu dostatočne krátku, takže sa jeho rozpadom nemusíme zaoberať. Podrobnejšia analýza tejto úlohy je v Dodatku N. Balík sa chová ako bežná vlna - čiastočne sa odrazí od rozhrania s pôvodnými (len opačne orientovanými) hybnosťami jednotlivých zložiek balíka, $p_1 = \sqrt{2mE_{kin}}$, a čiastočne prenikne do druhého prostredia, kde sa v prípade $E_{kin} > V$ bude šíriť s pozmenenými hybnosťami $p_2 = \sqrt{2m(E_{kin} - V)}$. Až akt merania spôsobí kolaps superpozície odrazenej a postupujúcej vlny do jediného miesta detekcie elektrónu-častice. V prípade $E_{kin} < V$ budú hybnosti zložiek prechádzajúcich rozhraním *imaginárne*, čo znamená, že tieto vlny sa na vzdialenosti $\approx \hbar/|p_2|$ utlmia. Ak by však oblasť s $V > E_{kin}$ tvorila len úzku (v porovnaní s $\hbar/|p_2|$) bariéru, vlna ňou prenikne, a časticu môžeme (s istou malou pravdepodobnosťou) detegovať na druhej strane bariéry (nepreniknuteľnej pre klasickú časticu). Hovoríme vtedy o **tunelovom jave**.

Napokon skúmame časový vývoj elektrónu „uväzneného“ vo vymedzenom priestore. Najjednoduchšou situáciou je *jednorozmerná potenciálová jama* modelovaná potenciálnou energiou $V(x) = 0$ pre $x \in (0, L)$ a $V = \infty$ mimo tohto intervalu. Pohyb *klasikkej* častice (v jednom rozmere) by bol pohybom po úsečke s odrazmi od stien v $x = 0, L$. Pre elektrón ako de Broglievu vlnu sú steny tentokrát rovnako nepreniknuteľné (lebo $V \rightarrow \infty$), a teda $\psi(x) = 0$ mimo intervalu $x \in (0, L)$. Okrajové podmienky $\psi(0) = \psi(L) = 0$ pripúšťajú *len* riešenia SCHR v tvare *stojatých vln*

$$\psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-iE_n t/\hbar} = \sqrt{\frac{1}{2L}} (e^{in\pi x/L} + e^{-in\pi x/L}) e^{-iE_n t/\hbar} \quad n = 1, 2, \dots$$

kde koeficient $\sqrt{\frac{2}{L}}$ vyplýva z normovacej podmienky $\int_0^L \psi^* \psi dx = 1$, že elektrón *je s istotou* v jame. Z tejto požiadavky tiež vyplýva, že vlnová funkcia *musí byť komplexná* (jej oscilácie ju nesmú vynulovať, a $|e^{-iE_n t/\hbar}| = 1$). Prípustné diskkrétne hodnoty de Broglievových vlnových dĺžok $\lambda_n = \frac{2L}{n}$ odpovedajú hybnostiam a energiám

$$p_n = \pm \frac{nh}{2L} \quad E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$$

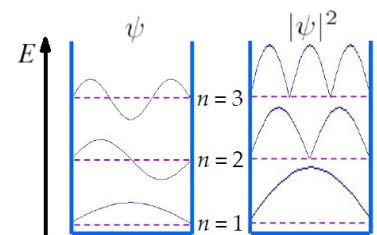
Priestorové ohraňenie vlnovej funkcie nevyhnutne vedie ku *diskrétnejmu spektru hybností a energií*, čo svedčí o vlnovom charaktere elektrónov. Grafy $|\psi(x)|^2$ určujú lokálnu pravdepodobnosť namerania elektrónu-častice v jednotlivých stavoch, a tá sa v čase *nemení* ($\psi^* \psi$ nezávisí od času). Stav ψ_n v našej jame sú *stacionárnymi*. Nemalo by nás mýliť, že sme týmto stavom priradili *nenulové* hybnosti p_n . Každému takémuto stavu totiž prislúchajú *dve* hodnoty, $\pm p_n = \sqrt{2mE_n}$

(čiže superpozíciu pohybu v oboch smeroch). Pre stav $n = 1$ je neurčitost hybnosti $\sigma_p \approx \frac{h}{2L}$ a neurčitost polohy $\sigma_x \approx \frac{L}{2}$, a platí

$$\sigma_x \sigma_p \approx \frac{h}{4} \gtrsim \frac{\hbar}{2}$$

Hodnoty $\pm p_n$, ktoré môžeme v jednotlivých stavoch namerať, spadajú do neurčitosti hybnosti, a interpretujeme ich preto ako hodnoty *vyrobené meraním* (neexistujúce *pred* meraním).⁸⁸ Ani v takýchto stavoch ψ_n teda *nie je* fyzikálne opodstatnené hovoriť o (klasickom) pohybe elektrónu v jame.

Stojí tiež za zmienku, že v limite veľkých energií, $n \rightarrow \infty$, čo je *klasická limita*, sa pravdepodobnosť namerania elektrónu stáva *rovnomerne* rozloženou v celej jame, čo by odpovedalo klasickému po-



⁸⁸Podrobnejší vhlad získame po preštudovaní kap. II.4.

hybu častice, v súlade s princípom korešpondencie (kap. II.2.2). Naproti tomu pre malé n rozdelenia pravdepodobnosti nemajú klasický analóg.

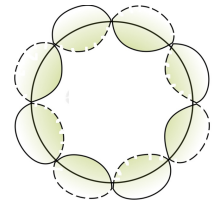
Elektrón sa však v našej jame môže nachádzať aj v *superpozícii* stacionárnych stavov ψ_n . Takýto stav je už *nestacionárny* - nemá ostrú hodnotu energie (je v superpozícii hodnôt E_n), jeho časový vývoj je netriviálny (superpozícia funkcií $e^{-iE_nt/\hbar}$), a priestorové rozloženie pravdepodobnosti namerania častice $\psi^*\psi$ sa v čase *mení*.

Inou (idealizovanou) variantou *viazaného stavu* je elektrón na kružnici.⁸⁹ Pri fixovanom polomere r je jedinou priestorovou premennou uhol ϕ , a laplacián ∇^2 v polárnych súradniciach sa redukuje na $\frac{1}{r^2} \frac{d^2}{d\phi^2}$. Požiadavka jednoznačnosti vlnovej funkcie v každom bode kružnice - tzv. *periodická okrajová podmienka* $\psi(\phi) = \psi(\phi + 2\pi n)$ - opäť obmedzuje možné de Broglieove vlnové dĺžky na tie, ktoré spĺňajú podmienku

$$n\lambda_n = 2\pi r \qquad p_n = \pm \frac{n\hbar}{r} \qquad E_n = \frac{n^2\hbar^2}{2mr^2}$$

Opäť teda existujú *stacionárne* stavy s energiami E_n a vlnovými funkciami v tvare

$$\psi(\phi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{in\phi} + e^{-in\phi}) e^{-iE_nt/\hbar}$$



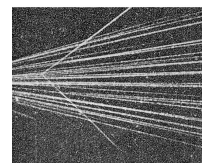
so *statickým* rozložením pravdepodobnosti pozdĺž kružnice. O pohybe elektrónu môžeme hovoriť len v prípade nestacionárnej superpozície takýchto stavov.

Ak však v *stacionárnych* stavoch elektrónu nemáme hovoriť o jeho *pohybe* v klasickej chápaní, aký je fyzikálny význam *nenulových ostrých hodnôt kinetickej energie*? Ukazuje sa, že (napriek prívlastku *kinetická* = *pohybová*) v stacionárnych stavoch táto veličina vyjadruje len *mieru nenulového toku* pravdepodobnosti pri jej *nulovom výtoku*, čiže pri nemeniacej sa pravdepodobnosti. Konštantnosť (a nenulovosť) energie znamená pretrvávajúce stavu v čase (pozri kap.I.3.5).

II.3.6 Je elektrón časticou?

Hoci interferenčné experimenty jednoznačne poukazujú na vlnový charakter elektrónu, časticový charakter elektrónu sa zdá byť pôsobivo dokumentovaný vytvorením jasnej trajektórie pri prelete **hmlovou komorou**.⁹⁰

Treba však mať na pamäti, že viditeľné stopy (obr.) *nezobrazujú* samotnú časticu (elektrón), ale hmlový kondenzát okolitých pár v úlohe „detektora“ (aktuálnej) polohy častice. (Podobný úkaz vídame za istých podmienok na jasnej oblohe po prelete tryskového lietadla - samotné lietadlo pritom nemusí byť vidno.)



V skutočnosti tieto pozorovania nijak neprotirečia vlnovému obrazu elektrónu. V kap. II.3.5 sme opísali pohyb elektrónu prostredníctvom šíriaceho a rýchlo sa rozpadávajúceho vlnového balíka, ktorý v okamihu merania *skolabuje* na rozmery dané rozlišovacou schopnosťou detektora. Na rozdiel od fotónu však elektrón (vďaka svojej nenulovej hmotnosti, ale nielen nej) detekciou *nezanikne*, a ak neostane viazaný na detektore, môže sa ďalej voľne šíriť ako vlnový balík. Práve toto sa deje v hmlovej komore - rozptyl elektrónu-balíka na zhlukoch molekúl presýtenej pary spôsobuje „permanentný“ kolaps balíka do rozmerov týchto zhlukov. Výsledkom tohto neustále sa opakujúceho procesu je súvislá „trajektória“. Priložením EM polí môžeme pozorovať jej odpovedajúce zakrivenie, čo je však len dôsledok zákona zachovania hybnosti v EM poli (kap. I.3).

⁸⁹Ide o zjednodušený jednorozmerný model „pohybu“ elektrónu v elektrickom poli jadra atómu. Potenciálnu energiu v hamiltoniáne nahradíme tým, že elektrónu „predpíšeme“ výskyt len na kružnici.

⁹⁰Hmlová komora je uzavretá sklenená nádoba naplnená presýtenou parou (napr. vody alebo alkoholu). Prelietajúca energetická častica ionizuje molekuly pary, ktoré pôsobia ako kondenzačné centrá a vytvárajú viditeľnú hmlovú stopu.

Natíska sa otázka, nakoľko „makroskopický“ musí byť detektor, aby spôsobil kolaps balíka - vlnovej funkcie. (Sú v tomto prípade zhluky molekúl „dostatočne makroskopické“?) Interakcia mikroskopického objektu s detektorom sa totiž tiež deje na *mikroskopickej* úrovni - napokon každé *makroskopické* teleso sa skladá z *mikroskopických* častí(c), riadiacich sa kvantovými zákonitostami. Kde je teda hranica medzi *makro-* a *mikrosvetom*?⁹¹ Odpoveď hľadáme v nasledujúcom zjednodušenom modeli kvantového merania.

Základnou vlastnosťou kvantových objektov je (vo všeobecnosti) *neexistencia* ostrých hodnôt ich dynamických premenných. Stav takéhoto objektu preto charakterizujeme *koherentnou*⁹² superpozíciou vhodne zvolených stavov $|\psi_j\rangle$, napr. stavov s *ostrými* hodnotami nejakej premennej (poloha, hybnosť, polarizácia, štrbina...), s amplitúdami pravdepodobnosti a_j ,

$$|\psi\rangle = \sum_j a_j |\psi_j\rangle$$

Každý dostupnej hodnote meranej veličiny odpovedá určitý stav $|P_j\rangle$ čidla detektora.⁹³ Prvou fázou merania je kvantové previazanie zložiek $|\psi_j\rangle$ s odpovedajúcimi stavmi čidla. Čidlo je však v nepretržitej interakcii s nepreberným množstvom stupňov voľnosti makroskopického okolia, a kvantovým previazaním s nimi sa naruší koherentná superpozícia *amplitúd* pravdepodobnosti v prospech superpozície *pravdepodobností* - tento proces sa nazýva **dekoherencia**. Súčasne sa nekontrolovaným vplyvom vonkajších faktorov zrealizuje určitý konkrétny stav $|\psi_j, P_j\rangle$. Schématicky

$$|\psi\rangle|P\rangle = \left(\sum_j a_j |\psi_j\rangle \right) |P\rangle \xrightarrow{\text{previazanie}} \sum_j a_j |\psi_j, P_j\rangle \xrightarrow[\text{a kolaps}]{\text{dekoherencia}} |\psi_j, P_j\rangle$$

Takáto schéma pochopiteľne nie je vyčerpávajúcym opisom kvantového merania (a problém náhodnosti len posúva o úroveň vyššie), ponúka však určitý kvalitatívny fyzikálny náčrt procesov stojacich za pojmom *kolaps stavu*. V tomto duchu tiež dokresľuje mechanizmus permanentného kolapsu elektrónovej vlny v hmlovej komore v dôsledku *makroskopického* množstva interakcií medzi molekulami pary.

Časticový charakter elektrónu (a podobných objektov) je teda len *ilúziou*, ktorá vzniká pri interakcii s makroskopickými objektami, v dôsledku *kvantovaného* transféru energie, hybnosti, momentu hybnosti či elektrického náboja. Hoci nerušený časový vývoj elektrónu má jednoznačne vlnový charakter, predstava elektrónu ako projektilu je názornou pomôckou, úplne postačujúcou najmä v situáciách, keď nás zaujíma práve transfer energie, hybnosti, náboja a pod.

II.4 Náčrt formalizmu kvantovej mechaniky

II.4.1 Stavy a reprezentácie.

V predchádzajúcich častiach textu sme sa oboznámili so základnými odlišnosťami opisu kvantového sveta od klasického opisu, akými sú *pravdepodobnostný* charakter dynamických premenných - *neexistencia* (vo všeobecnosti) ich ostrých hodnôt mimo merania, *neredukovateľný* vplyv každého merania na stav meraného objektu, či vzájomná *nekompatibilita* určitých dvojíc dynamických premenných,

⁹¹Táto *pomyselná* hranica sa v literatúre často označuje ako **Heisenbergova britva**.

⁹²Prívlastok *koherentná* označuje kvantovú superpozíciu, jednotlivé zložky ktorej navzájom *interferujú*.

⁹³Anglosaská literatúra používa výraz *pointer*.

vyjadrená princípom neurčitosti. V tejto a nasledujúcich kapitolách naznačíme základný formálny rámec kvantovomechanického opisu „častice“.

Základným pojmom tohto opisu je **stav** „častice“. V *klasickej* mechanike je týmto stavom *bod vo fázovom priestore s ostrými hodnotami súradníc a hybností*, určujúcimi aj odvodené mechanické premenné (ako moment hybnosti, energia, a pod.).⁹⁴ Princíp neurčitosti však takúto definíciu stavu nepripúšťa. Kvantovomechanický stav $|\psi\rangle$ síce predstavuje tiež *úplný* dostupný opis „častice“, bez *skrytých premenných* (kap. II.2.3), ten však spočíva v ostrých hodnotách len *amplitúd pravdepodobnosti* namerania konkrétnych hodnôt dynamických premenných. Vychádzame z prirodzeného predpokladu, že *každý* z možných namerateľných hodnôt danej dynamickej premennej opisujúcej „časticu“ prislúcha *odlišiteľný* stav („vyrobený“ meraním). Je preto rozumné rozložiť stav „častice“ *pred* meraním práve do *bázy týchto stavov*. V kap. II.2 sme rozkladali stav meraného objektu (fotónu) do *diskrétnej* ortogonálnej bázy polarizátorov alebo detektorov, napr.

$$|\psi\rangle = \psi_1|D_1\rangle + \psi_2|D_2\rangle + \dots = \sum_j \psi_j|D_j\rangle$$

pričom očakávaným výsledkom bolo „cvaknutie“ jedného z detektorov D_j s (vo všeobecnosti komplexnou) amplitúdou pravdepodobnosti ψ_j , odpovedajúcou priemetu⁹⁵ stavu $|\psi\rangle$ do stavu $|D_j\rangle$, a teda s pravdepodobnosťou

$$\mathcal{P}(D_j) = |\langle D_j|\psi\rangle|^2 = \dots = |\psi_j|^2$$

Zovšeobecňujeme tento postup pre *ľubovoľnú* reálnu **pozorovateľnú**⁹⁶ dynamickú premennú α . Predpokladajme určitý počet *diskrétnych*⁹⁷ možných výsledkov merania, α_j , a im odpovedajúcich stavov objektu *po* meraní, $|\alpha_j\rangle$. Neurčitý stav *pred* meraním potom vyjadríme ako superpozíciu týchto navzájom ortogonálnych stavov,

$$|\psi\rangle = \sum_j \psi_j|\alpha_j\rangle = \sum_j |\alpha_j\rangle\psi_j = \sum_j |\alpha_j\rangle\underbrace{\langle\alpha_j|\psi\rangle}_{\psi_j} \quad \langle\alpha_k|\alpha_j\rangle = \delta_{jk}$$

Pravdepodobnosť namerania *diskrétnej* hodnoty α_k (čiže transformácie $|\psi\rangle \rightarrow |\alpha_k\rangle$) je

$$\mathcal{P}(\alpha_k) = |\langle\alpha_k|\psi\rangle|^2 = \left| \langle\alpha_k| \sum_j \psi_j|\alpha_j\rangle \right|^2 = \left| \sum_j \psi_j \langle\alpha_k|\alpha_j\rangle \right|^2 = |\psi_j \langle\alpha_k|\alpha_k\rangle|^2 = |\psi_k|^2 = \psi_k^* \psi_k$$

Voľba bázy stavov $|\alpha_j\rangle$, do ktorej daný stav $|\psi\rangle$ rozkladáme, určuje **reprezentáciu**, v ktorej každý stav opisujeme prostredníctvom **vlnovej funkcie**⁹⁸ v podobe spektra amplitúd ψ_j báзовých stavov. Pre *diskrétne* spektrum báзовých stavov môžeme všeobecný stav vyjadriť aj ako *vektor*

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

⁹⁴Zameriavame sa tu len na objekty bez vnútornej štruktúry („hmotné body“), a bez vnútorného pohybu.

⁹⁵*Amplitúda* pravdepodobnosti preklopenia jedného stavu do druhého je daná ich skalárnym súčinom, podobne ako pri priemete jedného vektora do smeru druhého, teda $|\psi\rangle \cdot |D_j\rangle \rightarrow \langle D_j|\psi\rangle$ (pozri kap. II.1.6). Na základe konvencie je počiatočný stav vpravo, a *komplexne združený* koncový vľavo.

⁹⁶ang. *observable* - tento pojem sa používa v tvare podstatného mena.

⁹⁷Spomenuli sme už, že výsledkom každého *reálneho* merania je (kvôli jeho limitovanej presnosti) súbor diskrétnych hodnôt, a to aj v prípade *spojite* sa meniacej premennej. Spojitým spektrám hodnôt preto nebudeme venovať veľa pozornosti.

⁹⁸Premennou vo *vlnovej funkcii* ako amplitúde pravdepodobnosti namerania je spojitá alebo diskrétna veličina určujúca reprezentáciu. Výraz ψ_j označuje funkčnú hodnotu priradenú j -tej diskrétnej hodnote tejto premennej.

Takto sme v kap. II.1.6 vyjadrovali stavy fotónu v polarizačných bázach/reprezentáciách, a rovnaký zápis by sme mohli použiť pre fotóny v báze detektorov v kap. II.2. Všimnime si tiež, že vzťah pre amplitúdu pravdepodobnosti koncového stavu $|\beta\rangle$

$$\langle\beta|\psi\rangle = \langle\beta|\sum_j |\alpha_j\rangle\psi_j = \sum_j \langle\beta|\alpha_j\rangle\langle\alpha_j|\psi\rangle$$

musí formálne platiť pre *ľubovoľný* stav $|\beta\rangle$, t.j. aj taký, ktorý *nie je* jedným z báзовých stavov $|\alpha_j\rangle$. S takýmto prípadom sme sa stretli v kap. II.3.3 pri interferencii elektrónu za sústavou štrbín, kde bázu $|\alpha_j\rangle$ tvorili polohy štrbín, a koncovým stavom $|\beta\rangle$ bola poloha záznamu na detektore. Stav (stavový vektor) $|\psi\rangle$ môžeme teda rozkladať do *ľubovoľnej* bázy/reprezentácie s príslušnými koeficientami ψ_j . Toto pravidlo je jedným zo základných princípov kvantového formalizmu.

V prípade rozkladu do *spojitej* bázy premennej α (napr. $\alpha = x$ alebo p_x) platí

$$|\psi\rangle = \int |\alpha\rangle\langle\alpha|\psi\rangle d\alpha = \int |\alpha\rangle\psi(\alpha)d\alpha$$

Reprezentáciou stavu je namiesto n -komponentného vektora vlnová funkcia *spojitej* premennej, $\psi(\alpha)$. Pre konkrétnu hodnotu α' je amplitúda pravdepodobnosti jej namerania

$$\psi(\alpha') = \langle\alpha'|\psi\rangle = \int \langle\alpha'|\alpha\rangle\langle\alpha|\psi\rangle d\alpha = \int \langle\alpha'|\alpha\rangle\psi(\alpha)d\alpha \quad \text{lebo}^{99} \quad \langle\alpha'|\alpha\rangle = \delta(\alpha' - \alpha)$$

V takomto prípade však hovoríme o pravdepodobnosti namerania hodnoty *z intervalu* $d\alpha$ okolo α ,

$$\mathcal{P}(\alpha, d\alpha) = |\psi(\alpha)|^2 d\alpha = \psi^*(\alpha)\psi(\alpha)d\alpha = \rho(\alpha)d\alpha$$

kde $\rho(\alpha) = \psi^*(\alpha)\psi(\alpha)$ je **hustota pravdepodobnosti**.

II.4.2 Operátory.

V kap. II.3.4 sme ukázali, že vzťah pre nerelativistickú energiu častice sa premieta do jej kvantovomechanickej pohybovej rovnice (SCHR) za pomoci diferenciálnych *operátorov*, nahrádzajúcich dynamické premenné, a pôsobiacich na vlnovú funkciu,

$$E = \frac{p^2}{2m} + V \quad \longleftrightarrow \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + V\psi(\vec{r}, t)$$

Ak totiž dosadíme do SCHR vlnovú funkciu v tvare $\psi(\vec{r}, t) = e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)/\hbar}$, dostaneme

$$\underbrace{i\hbar \frac{\partial}{\partial t}}_{\uparrow} \psi(\vec{r}, t) = \underbrace{E}_{\uparrow} \psi(\vec{r}, t) \quad \underbrace{-i\hbar \nabla}_{\uparrow} \psi(\vec{r}, t) = \underbrace{\vec{p}}_{\uparrow} \psi(\vec{r}, t)$$

Dôvod náhrady klasických premenných operátormi je zrejmý: Ostré hodnoty týchto premenných pred ich meraním vo všeobecnosti *neexistujú* - meraním ako *neredukovateľným* zásahom do pôvodného stavu ich „vyrábame“.

Meranie je vždy transformáciou stavu.

⁹⁹Symbol $\delta(\alpha)$ v tomto prípade označuje Diracovu δ -funkciu.

Úlohou matematického formalizmu je poskytnúť *predpovede výsledkov meraní*. Je teda prirodzené, že matematickými nástrojmi budú práve určité operátory pôsobiace na stav/vlnovú funkciu a uskutočňujúce príslušnú transformáciu.¹⁰⁰ Aby sme správne pochopili zmysel operátorov v SCHR, musíme sa najprv zaoberať matematickým formalizmom operátorov vo všeobecnosti.

Ak daný stav $|\psi\rangle$ reprezentujeme v báze stavov $|\alpha_j\rangle$, jeho transformáciu $|\psi\rangle \xrightarrow{\hat{O}} |\phi\rangle$ spôsobenú lineárnym **operátorom**¹⁰¹ $\hat{O}$ môžeme vyjadriť ako

$$|\phi\rangle = \hat{O}|\psi\rangle = \hat{O} \sum_j |\alpha_j\rangle \langle \alpha_j | \psi \rangle = \sum_j \hat{O} |\alpha_j\rangle \underbrace{\langle \alpha_j | \psi \rangle}_{\text{číslo}}$$

Vlnová funkcia - amplitúda pravdepodobnosti, že výsledným stavom po transformácii bude jeden z báзовých stavov $|\alpha_k\rangle$, je

$$\underbrace{\langle \alpha_k | \phi \rangle}_{\phi_k} = \langle \alpha_k | \sum_j \hat{O} |\alpha_j\rangle \langle \alpha_j | \psi \rangle = \sum_j \langle \alpha_k | \hat{O} |\alpha_j\rangle \underbrace{\langle \alpha_j | \psi \rangle}_{\psi_j}$$

Výraz $\langle \alpha_k | \hat{O} |\alpha_j\rangle$ je amplitúdou „priemetu“ *transformovaného* báзовého¹⁰² stavu $\hat{O} |\alpha_j\rangle$ do $|\alpha_k\rangle$. Týmto spôsobom môžeme napr. opísať meranie horizontálnej polarizácie vertikálne polarizovaného svetla po prechode pravotočivým kruhovým polarizátorom (kap. II.1.6)

$$\langle H | (RP) | V \rangle = \dots = \langle H | \frac{i}{\sqrt{2}} | R \rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} \langle H | R \rangle = \dots = \frac{i}{2}$$

(Veľkosť výslednej amplitúdy je 50% pôvodnej.) Je zrejmé, že $\langle \alpha_k | \hat{O} |\alpha_j\rangle = O_{kj}$ je prvkom *matice* (v tomto príklade matice (RP)). Vo vektorovom vyjadrení stavov majú teda operátory tvar matíc, a transformácia stavu je násobením vektora príslušnou maticou. Výraz

$$\phi_k = \sum_j O_{kj} \psi_j$$

je vzťahom medzi priemetmi stavov $|\phi\rangle$ a $|\psi\rangle$ do bázy $|\alpha_j\rangle$. Maticové prvky operátora teda *závisia od voľby bázy* - reprezentácie. Pre vlnové funkcie v spojitých α -reprezentáciách platí

$$\phi(\alpha) = \hat{O}\psi(\alpha)$$

kde $\hat{O}$ má tvar *diferenciálneho* operátora v α -reprezentácii.

Osobitnú pozornosť si zasluhujú prípady, keď je stav objektu *symetrickým* vzhľadom na danú transformáciu. (Ako príklad môžeme uvažovať prechod horizontálne polarizovaného svetla horizontálnym polarizátorom.) Vo formálnom zápise to znamená

$$\hat{O}|\alpha\rangle = O|\alpha\rangle$$

kde O je (vo všeobecnosti komplexné) *číslo*. Stav $|\alpha\rangle$ spĺňajúci túto rovnosť nazývame **vlastným stavom operátora** $\hat{O}$, hodnotu O jemu prislúchajúcou **vlastnou hodnotou operátora**, a táto rovnosť sa nazýva **vetou o vlastných stavoch a vlastných hodnotách operátora**. Z hľadiska lineárnej algebry ide o *vlastný vektor* a *vlastnú hodnotu* matice $\hat{O}$, pre ktorú platí

$$\det(\hat{O} - O\hat{1}) = 0 \qquad \hat{1} - \text{jednotková matica}$$

¹⁰⁰O aký typ transformácie v prípade jednotlivých operátorov ide, rozoberieme v kap. II.4.4.

¹⁰¹Operátory budeme v tomto texte označovať so „strieškou“.

¹⁰²Predstavme si transformáciu generovanú operátorom $\hat{O}$ ako rotáciu kartézskej súradnicovej bázy okolo počiatku o určitý uhol, výraz $\hat{O}|\alpha_j\rangle$ ako jednotkový báзовý vektor $\vec{j}'$ *pootočenej* bázy, a výraz $\langle \alpha_k | \hat{O} |\alpha_j\rangle$ ako jeho priemet do báзовého vektora $\vec{k}$ *pôvodnej* bázy.

Riešenia tejto rovnice tvoria **spektrum vlastných hodnôt**, a každej prislúcha určitý vlastný stav. Viacnásobné (opakujúce sa) korene rovnice sú tzv. **degenerovanými** vlastnými hodnotami operátora, spoločnými viacerým vlastným stavom. Osobitne dôležitými sú **hermitovské** operátory, ktorých vlastné stavy sú ortogonálne a vlastné hodnoty sú *reálne* čísla.¹⁰³ *Pozorovateľným* veličinám v kvantovej mechanike preto priradujeme práve hermitovské operátory, ktorých vlastné hodnoty sú dostupnými rozlíšiteľnými výsledkami meraní.

Uvažujme meranie veličiny α , ktorej priradíme operátor $\hat{\alpha}$ s diskretným spektrom vlastných hodnôt α_j a im odpovedajúcimi vlastnými stavmi $|\alpha_j\rangle$. Ak *výhodne zvolíme*¹⁰⁴ rozklad všeobecného (neurčitého) stavu meraného objektu $|\psi\rangle$ do bázy *vlastných* stavov tohto operátora, čiže α -reprezentáciu, dostaneme

$$|\psi\rangle = \sum_j |\alpha_j\rangle \langle\alpha_j|\psi\rangle = \sum_j |\alpha_j\rangle \psi_j$$

$$\hat{\alpha}|\psi\rangle = \sum_j \hat{\alpha}|\alpha_j\rangle \langle\alpha_j|\psi\rangle = \sum_j \alpha_j |\alpha_j\rangle \langle\alpha_j|\psi\rangle$$

Keďže posledný vzťah platí pre ľubovoľný stav $|\psi\rangle$, môžeme ho z tejto rovnice formálne eliminovať, a dostávame tzv. **spektrálny rozklad operátora**

$$\hat{\alpha} = \sum_j \alpha_j |\alpha_j\rangle \langle\alpha_j|$$

Každý z členov sumy „vylúpne“ z *potenciálne* meraného stavu $|\psi\rangle$ jeden z vlastných stavov $|\alpha_j\rangle$, priradí mu vlastnú hodnotu α_j (jednu z namerateľných hodnôt) a amplitúdu pravdepodobnosti nameňovania $\langle\alpha_j|\psi\rangle$. Týmto spôsobom operátor (nahrádzajúci klasickú dynamickú premennú) „predpovedá“ *pravdepodobné* výsledky merania. O konkrétnom výsledku však rozhodne *kolaps stavu* $|\psi\rangle$. Náhodný výber konkrétneho skolabovaného stavu $|\alpha_j\rangle$ *nie je do matematického formalizmu zahrnutý*, a na jeho matematickom opise dodnes neexistuje zhoda. Kolaps teda ostáva principiálnym prvkom náhodnosti. Ak však koncept merania vo fyzike má mať zmysel, musíme požadovať, aby *bezprostredne po sebe nasledujúce identické merania dávali identický výsledok*.¹⁰⁵ V kontexte kvantovej mechaniky to znamená, že ak prvým meraním *neurčitého* stavu - superpozície nastane jej kolaps do *určitého* stavu, *bezprostredne nasledujúce identické meranie tento stav potvrdí*. Prvok náhodnosti tu už *absentuje*. (Opäť ako ilustrácia môže slúžiť polarizačná schéma $(\text{HP})(\text{HP})|\mathcal{X}\rangle \rightarrow (\text{HP})|H\rangle \rightarrow |H\rangle$.)

Z vety o vlastných stavoch a vlastných hodnotách ľahko zistíme, že v α -reprezentácii je operátor $\hat{\alpha}$ v maticovom zápise *diagonálny*, a platí $\langle\alpha_k|\hat{\alpha}|\alpha_j\rangle = \alpha_j \langle\alpha_k|\alpha_j\rangle = \alpha_j \delta_{jk}$. Potom amplitúda pravdepodobnosti stavu $|\alpha_k\rangle$ po transformácii $|\psi\rangle \rightarrow |\phi\rangle = \hat{\alpha}|\psi\rangle$ je

$$\phi_k = \langle\alpha_k|\phi\rangle = \langle\alpha_k|\hat{\alpha}|\psi\rangle = \sum_j \langle\alpha_k|\hat{\alpha}|\alpha_j\rangle \langle\alpha_j|\psi\rangle = \sum_j \alpha_j \langle\alpha_k|\alpha_j\rangle \langle\alpha_j|\psi\rangle = \alpha_k \langle\alpha_k|\psi\rangle = \alpha_k \psi_k$$

Aplikovanie operátora $\hat{\alpha}$ v α -reprezentácii (čiže operátora *premennej určujúcej reprezentáciu*) na vlnovú funkciu teda znamená prosté vynásobenie príslušnou hodnotou premennej (vlastnou hodnotou α_k). Operátor *inej premennej* (než je premenná určujúca reprezentáciu) však už vo všeobecnosti nemusí byť v tejto reprezentácii diagonálny, a situácia pri jeho aplikovaní je zložitejšia, čo rozoberieme v nasledujúcich kapitolách.

¹⁰³Hermitovské operátory spĺňajú podmienku $\hat{O} = \hat{O}^\dagger = (\hat{O}^*)^T$ (T - transponovaný). Pre ich vlastné stavy platí

$$\begin{aligned} \langle\xi|\hat{O}|\xi\rangle &= O\langle\xi|\xi\rangle & (\langle\xi|\hat{O}|\xi\rangle)^* &= \langle\xi|\hat{O}^\dagger|\xi\rangle = O^*\langle\xi|\xi\rangle & \hat{O}^\dagger = \hat{O} &\Rightarrow \underline{O^* = O} \\ (\langle\xi|\hat{O}|\xi'\rangle)^* &= \langle\xi'|\hat{O}^\dagger|\xi\rangle = \langle\xi'|\hat{O}|\xi\rangle = O\langle\xi'|\xi\rangle & (\langle\xi|\hat{O}|\xi'\rangle)^* &= (O'\langle\xi|\xi'\rangle)^* = O'\langle\xi'|\xi\rangle & & \underline{(O - O')\langle\xi'|\xi\rangle = 0} \end{aligned}$$

¹⁰⁴V princípe môžeme zvoliť *ľubovoľnú* bázu a teda reprezentáciu, je to len otázka výhodnosti.

¹⁰⁵Máme na mysli merania, ktorých časový odstup je *zanedbateľný* voči charakteristickým časom, za ktoré sa stav meraného objektu pozorovateľne zmení vďaka svojmu vývoju/pohybu.

II.4.3 Operátory v súradnicovej reprezentácii.

Ako vyplýva z predchádzajúceho textu, dynamické premenné (ako poloha, hybnosť, energia, a pod.) kvantových objektov vo všeobecnosti nemajú mimo merania ostré hodnoty, a ich výskyt v pohybových rovniciach (napr. v SCHR) by bol bezobsažný. Úplná dostupná informácia o stave kvantovej „častice“ je obsiahnutá v stavovom vektore $|\psi\rangle$, prípadne vo vlnovej funkcii $\psi(\alpha)$ premietajúcej stavový vektor do konkrétnej α -reprezentácie, a informáciu o (pravdepodobných) hodnotách dynamických premenných „častice“ môžeme získať len aplikovaním príslušných operátorov. Preto aj v SCHR namiesto samotných dynamických premenných vystupujú ich operátory. Tvar týchto operátorov pritom závisí od výberu reprezentácie. Najprirodzenejšou (nie však nevyhnutne najvýhodnejšou) je **súradnicová reprezentácia**, v ktorej vlnovú funkciu rozkladáme do bázy $|\vec{r}\rangle$,

$$\psi(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \psi \rangle$$

a vyjadruje amplitúdu pravdepodobnosti namerania častice v danom mieste $\vec{r}$. V tejto reprezentácii je podľa kap. II.4.2 pôsobenie operátora $\hat{\vec{r}}$ na vlnovú funkciu $\psi(\vec{r})$ prostým násobením $\vec{r}$,

$$\hat{\vec{r}}|\vec{r}\rangle = \vec{r}|\vec{r}\rangle \quad \rightarrow \quad \underline{\hat{\vec{r}}\psi(\vec{r}) = \vec{r}\psi(\vec{r})}$$

Toto pravidlo platí pre operátory všetkých dynamických premenných závisiacich (v tejto reprezentácii) len od polohy, napr. pre operátor *potenciálnej energie*

$$\hat{V}(\vec{r})\psi(\vec{r}) = V(\vec{r})\psi(\vec{r})$$

Operátor *hybnosti* však od polohy nezávisí. Pri jeho konštrukcii v *súradnicovej* reprezentácii využijeme skutočnosť, že veta o vlastných stavoch a vlastných hodnotách operátora, $\hat{p}|\vec{p}\rangle = \vec{p}|\vec{p}\rangle$ (kap. II.4.2), v tejto reprezentácii znamená

$$\langle \vec{r} | \hat{p} | \vec{p} \rangle = \vec{p} \underbrace{\langle \vec{r} | \vec{p} \rangle}_{\psi_{\vec{p}}(\vec{r})} = \vec{p}\psi_{\vec{p}}(\vec{r})$$

kde výraz $\langle \vec{r} | \vec{p} \rangle = \psi_{\vec{p}}(\vec{r})$ je súradnicovou reprezentáciou vlastného stavu operátora hybnosti. Takým je nepochybne rovinná vlna s ostrou hodnotou hybnosti, $\psi_{\vec{p}}(\vec{r}, t) = e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)/\hbar}$. Aby táto vlnová funkcia spĺňala uvedenú vetu, musí platiť

$$\langle \vec{r} | \hat{p} | \vec{p} \rangle = -i\hbar\nabla\langle \vec{r} | \vec{p} \rangle = -i\hbar\nabla\psi_{\vec{p}}(\vec{r})$$

keďže $-i\hbar\nabla\psi_{\vec{p}}(\vec{r}) = \vec{p}\psi_{\vec{p}}(\vec{r})$. Na základe toho pre rozklad *všeobecného* stavu $|\psi\rangle$ do spojitkej bázy operátora $\hat{p}$, $|\psi\rangle = \int |\vec{p}\rangle\langle\vec{p}|\psi\rangle d\vec{p}$ (kap. II.4.1), v súradnicovej reprezentácii dostaneme

$$\langle \vec{r} | \hat{p} | \psi \rangle = \int \langle \vec{r} | \hat{p} | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \psi \rangle d\vec{p} = -i\hbar\nabla \int \langle \vec{r} | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \psi \rangle d\vec{p} = -i\hbar\nabla\langle \vec{r} | \psi \rangle = -i\hbar\nabla\psi(\vec{r})$$

Operátor hybnosti v súradnicovej reprezentácii má teda tvar

$$\underline{\hat{p} = -i\hbar\nabla} \quad \hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, \text{ atď.}$$

Klasické výrazy obsahujúce hybnosť preto v súradnicovej reprezentácii nahradíme výrazmi s týmto operátorom, aplikovaným na *ľubovoľnú* vlnovú funkciu (ktorá nemusí prislúchať vlastnému stavu $|\vec{p}\rangle$). Ak napr. $\psi(\vec{r}) = a_1 e^{i(\vec{p}_1\cdot\vec{r})/\hbar} + a_2 e^{i(\vec{p}_2\cdot\vec{r})/\hbar} (\neq \psi_{\vec{p}})$, dostaneme

$$\hat{p}\psi(\vec{r}) = -i\hbar\nabla\psi(\vec{r}) = a_1\vec{p}_1 e^{i(\vec{p}_1\cdot\vec{r})/\hbar} + a_2\vec{p}_2 e^{i(\vec{p}_2\cdot\vec{r})/\hbar} = \phi(\vec{r}) \neq \vec{p}\psi(\vec{r})$$

Operátor *nerelativistickej kinetickej energie* dostaneme z klasického výrazu náhradou $\vec{p} \rightarrow \hat{p}$, čiže

$$E_{kin} = \frac{(\vec{p})^2}{2m} \quad \rightarrow \quad \hat{E}_{kin}\psi(\vec{r}) = \frac{(-i\hbar\nabla)^2}{2m}\psi(\vec{r}) = \frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{r})$$

SCHR elektrónu, ktorej *všeobecný* tvar (nezávislý na reprezentácii) je

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle$$

v súradnicovej reprezentácii ($|\psi\rangle \rightarrow \psi(\vec{r}, t)$) nadobudne tvar z kap. II.3.4, s *hamiltoniánom ako operátorom celkovej energie*

$$\hat{H} = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r})$$

II.4.4 Komutátory a transformácie.

Princíp neurčitosti (kap. II.3.2) kladie obmedzenie na *súčasnú* lokalizovateľnosť súradnice a k nej *konjugovanej* (pridruženej) hybnosti, napr.

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

Čím presnejšie lokalizujeme jednu veličinu, tým širší je interval meraním dostupných hodnôt konjugovanej veličiny. Ak sa elektrón (alebo iná častica s $m \neq 0$) nachádza v stave $|p_x\rangle$, čiže *vlastnom* stave operátora $\hat{p}_x$, platí $\Delta p_x \rightarrow 0$ a teda $\Delta x \rightarrow \infty$ - častica je *úplne delokalizovaná*. Stav častice je superpozíciou všetkých možných stavov $|x\rangle$ - to je prípad rovinnej vlny $e^{i(p_x x - Et)/\hbar}$. Naopak, vlastný stav $|x\rangle$ operátora $\hat{x}$ je *úplne lokalizovaný*, $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta p_x \rightarrow \infty$, a je superpozíciou všetkých možných stavov $|p_x\rangle$. Žiadny vlastný stav operátora $\hat{x}$ teda nie je vlastným stavom operátora $\hat{p}_x$, a naopak.

Podľa kap. II.4.2 je operátor veličiny definujúcej reprezentáciu v maticovom zápise *diagonálny*. V *diskrétnej* súradnicovej reprezentácii je diagonálnou matica $\hat{x}$, matica $\hat{p}_x$ musí preto byť *nediagonálnou*. (V hybnostnej reprezentácii by to bolo presne naopak.) Z lineárnej algebry vieme, že súčin dvoch matic je *komutatívny* len ak sa obe dajú diagonalizovať *súčasne*, čo nie je prípad dvojice $\hat{x}, \hat{p}_x$ - tieto operátory *nekomutujú*, a to v *žiadnej* reprezentácii. Vidíme to aj pri ich postupnom aplikovaní na vlnovú funkciu $\psi(x)$ v *spojitej* súradnicovej reprezentácii

$$\begin{aligned} \hat{x}(\hat{p}_x \psi) &= x \left(-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = -i\hbar x \frac{\partial \psi}{\partial x} & \hat{p}_x(\hat{x} \psi) &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} (x \psi) = -i\hbar \left(\psi + x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \\ (\hat{x} \hat{p}_x - \hat{p}_x \hat{x}) \psi &= [\hat{x}, \hat{p}_x] \psi = \dots = i\hbar \psi & \rightarrow & \quad \quad \quad [\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar \hat{1} \end{aligned}$$

($\hat{1}$ - operátor identity). Posledná rovnosť s **komutátorom** operátorov je vyjadrením princípu neurčitosti, a platí pre všetky konjugované dvojice zložiek vektorových operátorov $\hat{\vec{r}}$ a $\hat{\vec{p}}$ v *každej* reprezentácii. Pomocou tohto komutátora napr. poľahky nájdeme tvar operátora $\hat{x}$ v *hybnostnej* reprezentácii, $\psi(p_x) = \langle p_x | \psi \rangle$. V nej totiž $\hat{p}_x = p_x$, a z komutátora vyplynie $\hat{x} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_x}$.

Z uvedeného sa môžeme dovŕtiť, že *komutujúce operátory majú spoločné spektrum vlastných stavov*,¹⁰⁶ a v týchto stavoch *súčasne* ostré vlastné hodnoty. Napr. elektrón v stave $|\vec{p}\rangle$, ktorý je vlastným stavom operátorov $\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z$, má súčasne ostré hodnoty p_x, p_y, p_z , lebo platí

$$[\hat{p}_j, \hat{p}_k] = 0 \quad [\hat{x}_j, \hat{x}_k] = 0 \quad [\hat{x}_j, \hat{p}_k] = \delta_{jk} i\hbar \hat{1}$$

Tieto tzv. **kánonické (fundamentálne) komutačné vzťahy** majú svoj klasický predobraz v **kánonických Poissonových zátvorkách**

$$\{p_j, p_k\} = 0 \quad \{x_j, x_k\} = 0 \quad \{x_j, p_k\} = \delta_{jk}$$

¹⁰⁶Prípad degenerovaných spektier je trochu zložitejší.

V žiadnom prípade nejde o náhodnú podobnosť, hoci v klasickej mechanike žiadny princíp neurčitosti neexistuje. Poissonova zátvorka sa totiž vo všeobecnosti dá zapísať ako

$$\{a, b\} = \sum_{j=x,y,z} \left(\frac{\partial a}{\partial x_j} \frac{\partial b}{\partial p_j} - \frac{\partial a}{\partial p_j} \frac{\partial b}{\partial x_j} \right) = \overbrace{\sum_{j=x,y,z} \left(\frac{\partial a}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial p_j} - \frac{\partial a}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)}^{\hat{a}'} b = \overbrace{\{a, \cdot\}}^{\hat{a}'} b = \hat{a}' b$$

kde $\hat{a}' = \{a, \cdot\}$ je *klasický poissonovský operátor* priradený premennej a , pôsobiaci na premennú b . Platí tiež

$$\hat{a}' b = \{a, \cdot\} b = \{a, b\} = -\{b, a\} = -\{b, \cdot\} a = -\hat{b}' a$$

V prípade premenných p_x a x dostaneme

$$\begin{aligned} \hat{p}'_x = \{p_x, \cdot\} &= \sum_{j=x,y,z} \left(\frac{\partial p_x}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial p_j} - \frac{\partial p_x}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_{j=x,y,z} \overbrace{\frac{\partial p_x}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial p_j}}^0 - \overbrace{\frac{\partial p_x}{\partial p_x} \frac{\partial}{\partial x}}^1 = -\frac{\partial}{\partial x} \\ \hat{x}' = \{x, \cdot\} &= \dots = \frac{\partial}{\partial p_x} \end{aligned}$$

V klasickej mechanike je stav telesa určený bodom v jeho fázovom priestore (x_j, p_j) , a poissonovské operátory $\hat{p}'_j, \hat{x}'_j$ transformujú tento stav pozdĺž konjugovanej súradnice/hybnosti. Napr. pre funkciu $f(x, p_x)$ definovanú na fázovom priestore je jej posunutie v smere x o δx (ekvivalentné posunutiu súradnice x v opačnom smere)

$$f(x, p_x) \rightarrow f(x - \delta x, p_x) = f(x, p_x) - \frac{\partial f(x, p_x)}{\partial x} \delta x + \dots \cong f(x, p_x) + \delta x \{p_x, \cdot\} f(x, p_x)$$

Analogicky, poissonovský operátor $\hat{x}'$ spôsobí posunutie $f(x, p_x) \rightarrow f(x, p_x - \delta p_x)$. Platí teda

$$\underline{\{p_x, f\} = -\frac{\partial f}{\partial x}} \qquad \underline{\{x, f\} = \frac{\partial f}{\partial p_x}}$$

(Dosadením x resp. p_x za f dostaneme vyššie uvedené kánonické vzťahy.)

Klasický *stav* telesa ako *bod* vo fázovom priestore je v kvantovej mechanike nahradený *stavovým vektorom* $|\psi\rangle$ (v abstraktnom priestore stavových vektorov), a jeho infinitezimálna transformácia, napr. x -ová translácia generovaná operátorom $\hat{p}_x$ (v súradnicovej reprezentácii) je

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = \left(1 - \delta x \frac{\partial}{\partial x}\right) |\psi\rangle = \underbrace{\left(1 + \frac{i}{\hbar} \delta x \hat{p}_x\right)}_{\hat{U}_x} |\psi\rangle = \hat{U}_x |\psi\rangle$$

Keďže operátor $\hat{p}_x$ je *hermitovský*, ním vytvorený operátor $\hat{U}_x$ je **unitárny** (Dodatok O), čiže platí $\hat{U}_x^\dagger \hat{U}_x = \hat{U}_x^{-1} \hat{U}_x = 1$.

Tak ako stav $|\psi\rangle$ nahrádza klasický bod fázového priestoru, operátor $\hat{f}(\hat{x}, \hat{p}_x)$ nahrádza v kvantovej mechanike klasickú *funkciu* $f(x, p_x)$, definovanú na fázovom priestore. Infinitezimálna unitárna transformácia operátora je potom (Dodatok O)

$$\hat{f} \rightarrow \hat{f}' = \hat{U} \hat{f} \hat{U}^{-1} \cong \left(1 + \frac{i}{\hbar} \delta x \hat{p}_x\right) \hat{f} \left(1 - \frac{i}{\hbar} \delta x \hat{p}_x^\dagger\right) = \dots \cong \hat{f} - \delta x \frac{i}{\hbar} (\hat{f} \hat{p}_x - \hat{p}_x \hat{f}) = \hat{f} + \delta x \frac{i}{\hbar} [\hat{p}_x, \hat{f}]$$

Táto transformácia má identickú štruktúru ako predchádzajúca klasická transformácia funkcie f , pričom

$$\{p_x, \cdot\} \rightarrow \frac{i}{\hbar} [\hat{p}_x, \cdot]$$

Dosadením $f(x, p_x) = x$ resp. $\hat{f}(\hat{x}, \hat{p}_x) = \hat{x}$ dostaneme nenulové fundamentálne komutačné vzťahy. Nenulovosť Poissonových zátvoriek typu $\{x_j, p_j\} = 1$ naznačuje, že *konjugované* premenné *nie sú* navzájom nezávislé - poissonovský operátor jednej z páru ovplyvňuje druhú.¹⁰⁷ Klasický (newtonovsko-leibnizovský) *infinitesimalný kalkulus* však umožňuje toto vzájomné ovplyvňovanie *zanedbať*, a všetky dynamické premenné reprezentovať komutujúcimi číslami. Naproti tomu v kvantovej fyzike existuje neredukovateľný účinok $\hbar \neq 0$, a *na poradi vzájomne konjugovaných transformácií záleží* - operátory takýchto veličín navzájom *nekomutujú*. (Koeficient i pritom zabezpečuje ich *hermitovosť*.)

K kap. II.3 sme predstavili princíp neurčitosti ako *dôsledok* vlnovo-časticového dualizmu, vďaka ktorému sme mohli kvantové „častice“ reprezentovať (v pravdepodobnostnom význame) prostredníctvom vlnových balíkov. Teraz vidíme, že podstata princípu neurčitosti je fundamentálnejšia, a spočíva v *neredukovateľnosti kvanta účinku* akejkolvek transformácie, čo je aj príčinou náhrady všetkých *pozorovateľných* dynamických premenných operátormi. Náhrada Poissonovej zátvorky v úlohe generátora transformácie (*vo všeobecnosti*, nielen v prípade polohy/hybnosti) komutátorom

$$\{\cdot, \cdot\} \rightarrow \frac{i}{\hbar}[\cdot, \cdot]$$

sa nazýva **kánonickým kvantovaním**, a na fundamentálnej úrovni definuje prechod od klasickej ku kvantovej mechanike. V klasickej limite $\hbar \rightarrow 0$ operátory prejdú na klasické premenné, ktoré *vždy* komutujú. Samotný (de broglieovský) vlnovo-časticový dualizmus teda nie je príčinou princípu neurčitosti ale jeho *dôsledkom*.

II.4.5 Ehrenfestova teoréma.

Predpokladajme teraz, že stav $|\psi\rangle$ sa vyvíja s časom - pochopiteľne, podľa SCHR

$$i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\psi\rangle \quad -i\hbar \frac{\partial \langle\psi|}{\partial t} = \langle\psi|\hat{H} \quad (\hat{H}^\dagger = \hat{H})$$

Stredná hodnota ľubovoľnej dynamickej premennej α v stave $|\psi\rangle$ je $\langle\alpha\rangle = \langle\psi|\hat{\alpha}|\psi\rangle$ (Dodatok O), a pre jej časový vývoj platí

$$\begin{aligned} \frac{d\langle\alpha\rangle}{dt} &= \frac{d}{dt}\langle\psi|\hat{\alpha}|\psi\rangle = \frac{\partial \langle\psi|}{\partial t} \hat{\alpha} |\psi\rangle + \langle\psi| \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial t} |\psi\rangle + \langle\psi|\hat{\alpha} \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = \\ &= \frac{i}{\hbar} \langle\psi|\hat{H}\hat{\alpha}|\psi\rangle + \langle\psi| \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial t} |\psi\rangle - \frac{i}{\hbar} \langle\psi|\hat{\alpha}\hat{H}|\psi\rangle = \langle\psi| \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial t} |\psi\rangle + \frac{i}{\hbar} \langle\psi| [\hat{H}, \hat{\alpha}] |\psi\rangle \end{aligned}$$

Výrazy na pravej strane sú stredné hodnoty, platí teda

$$\frac{d\langle\alpha\rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{\alpha}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial t} \right\rangle$$

Opäť môžeme vidieť korešpondenciu s klasickou mechanikou, v ktorej časovú zmenu ľubovoľnej funkcie $f(q_j, p_j, t)$ definovanej na fázovom priestore môžeme pomocou Hamiltonových rovníc (kap. II.3.4) zapísať ako

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{dp_j}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} + \frac{\partial f}{\partial t} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

S odvolaním sa na kánonické kvantovanie (kap. II.4.4) môžeme sformulovať analogický vzťah pre časový vývoj *operátorov* - tzv. **Heisenbergovu pohybovú rovnicu**

$$\frac{d\hat{\alpha}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\alpha}] + \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial t}$$

¹⁰⁷ Touto myšlienkou sa zaoberal vo svojich filozofických úvahách už Zénón z Eley v 5. stor. pr.n.l.

Ak operátor $\hat{\alpha}$ nezávisí explicitne od času, posledný člen na pravej strane vypadne. Ak navyše $\hat{\alpha}$ komutuje s hamiltoniánom, operátor ani jeho stredná hodnota sa v čase nemenia. Tento záver odzrkadľuje význačné postavenie hamiltoniánu ako *generátora časového vývoja* (ako vidíme aj zo SCHR).

Ako príklad uveďme operátory x -ovej súradnice a hybnosti (nezávisiace explicitne od času): V súradnicovej reprezentácii platí

$$\frac{d\langle x \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{x}] \rangle = \frac{i}{\hbar} \left\langle \left[\left(\frac{\hat{p}_x^2}{2m} + V(x) \right), \hat{x} \right] \right\rangle = \dots = \frac{\langle p_x \rangle}{m}$$

lebo $[\hat{p}_x^2, \hat{x}] = \dots = -2i\hbar\hat{p}_x$.

$$\frac{d\langle p_x \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{p}_x] \rangle = \frac{i}{\hbar} \left\langle \left[\left(\frac{\hat{p}_x^2}{2m} + V(x) \right), \hat{p}_x \right] \right\rangle = \dots = - \left\langle \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right\rangle$$

lebo $[V(x), \hat{p}_x] = \dots = i\hbar \frac{\partial V(x)}{\partial x}$. Vzťahy pre *stredné hodnoty operátorov* teda odpovedajú *klasickým* vzťahom medzi veličinami (v priblížení $\left\langle \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right\rangle \cong \frac{\partial V(\langle x \rangle)}{\partial x}$) - to je tzv. **Ehrenfestova teoréma**.

II.4.6 Operátory momentu hybnosti.

Na základe predchádzajúceho textu vieme, že operátory priradené dynamickým premenným sú v skutočnosti generátormi (nezanedbateľných) transformácií stavov. Stav kvantového objektu sa pri takejto transformácii vo všeobecnosti mení, sú však prípady, kedy daná transformácia vykáže symetriu stavu - transformovaný stav je *identický* (v zmysle rozlíšiteľnosti) s pôvodným. To sú prípady *vlastných stavov* daného operátora. Operátory zložiek hybnosti sú generátormi *priestorových translácií* pozdĺž konjugovaných súradníc, v súradnicovej reprezentácii $\hat{p}_j = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j}$. Hamiltonián - operátor *celkovej energie* je generátorom časového vývoja stavu, čiže *translácie v čase*, $\hat{H} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$. Rotačný pohyb v klasickej mechanike charakterizujeme *momentom hybnosti* $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, očakávame teda, že operátory priradené zložkám momentu hybnosti budú generátormi *rotácií* okolo jednotlivých osí. Formálne priradenie je

$$\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}} \qquad \hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y \rightarrow -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{atď.}$$

(v súradnicovej reprezentácii). Prechodom k polárnym súradniciam v jednotlivých rovinách dostaneme

$$\hat{L}_j = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi_j} \qquad (\phi_j - \text{uhol rotácie okolo osi } j)$$

V kap. II.3.5 sme riešili jednorozmerný pohyb elektrónu po kružnici o polomere r , a hamiltonián mal tvar

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m_e} \rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m_e r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} = \frac{\hat{L}^2}{2I}$$

čo korešponduje s klasickou energiou pohybu hmotného bodu po kružnici s *momentom zotrvačnosti* $I = m_e r^2$. Stacionárnymi riešeniami boli stavy s ostrými hodnotami $E_n = \frac{(n\hbar)^2}{2I}$, a teda s ostrými hodnotami *kvadrátu momentu hybnosti* $L_n^2 = n^2\hbar^2$, a s *degenerovaným* spektrom $\hat{L}$, lebo $L_n = \pm n\hbar$ odpovedajú dvom rôznym stavom rotácie. Súčasne ostré hodnoty znamenajú

$$[\hat{H}, \hat{L}^2] = 0 \qquad [\hat{H}, \hat{L}] = 0$$

čiže hodnoty L_n *zachovávajúce sa v čase* (kap. II.4.5). Prechodom do 3D priestoru sa však situácia zmení: Nielen polomer kružnicovej trajektórie r sa (v dôsledku princípu neurčitosti) „rozmaže“ o

Δr , ale fyzikálne neakceptovateľným bude aj obmedzenie $\psi(\vec{r})$ na *rovinu* rotácie, lebo rovina - napr. xy - znamená v 3D ostrú hodnotu z , čiže $\Delta z \rightarrow 0$, a podľa princípu neurčitosti $\Delta p_z \rightarrow \infty$, čo je *nefyzikálne*. Nemôže teda ísť o „pohyb“ v rovine, a vektor $\vec{L}$ musí (v ľubovoľne zvolenom kartézskom súradnicovom systéme) obsahovať všetky tri *nenulové* zložky, čiže pre ľubovoľnú kartézsku zložku musí platiť $L_j < |\vec{L}|$. V klasickej mechanike navyše platí

$$\{L_j, L_k\} = \varepsilon_{jkl} L_l \quad (\varepsilon_{jkl} - \text{Leviho-Civitov symbol})$$

čo znamená, že rotácie okolo rôznych osí *nekomutujú* ani v klasickej fyzike.¹⁰⁸ Kánonickým kvantovaním tohto výrazu (kap. II.4.4) dostávame komutačné vzťahy

$$[\hat{L}_j, \hat{L}_k] = i\hbar \varepsilon_{jkl} \hat{L}_l$$

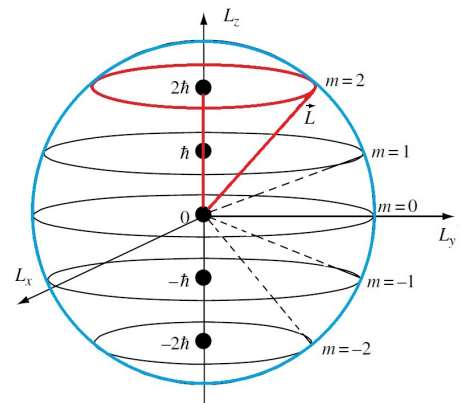
ktoré vyjadrujú, že ostrú hodnotu môžeme priradiť *vždy len jednej zo zložiek* - spravidla ju označujeme ako z -ovú. Ostatné dve zložky sú zaťažené neurčitou

$$\Delta L_x \Delta L_y \geq \frac{\hbar}{2} |\langle L_z \rangle| \quad (\langle L_z \rangle - \text{stredná hodnota operátora } \hat{L}_z)$$

Keďže operátory momentu hybnosti generujú rotácie, ich *vlastnými* stavmi musia byť stavy *s rotačnou symetriou*. (Takými sú napr. stacionárne stavy elektrónu v sféricky symetrickom centrálnom poli atómového jadra, ako uvidíme v kap. III.1.2.) Pre stavy s rotačnou symetriou vzhľadom na os z musí platiť (rovnako ako pre časticu na kružnici v rovine xy)

$$\hat{L}_z |\psi_m\rangle = m\hbar |\psi_m\rangle \quad m - \text{celé číslo}$$

kde m sa (z historických dôvodov) nazýva **magnetické kvantové číslo**. Kvantovanie z -ovej zložky momentu hybnosti $\vec{L}$ znamená, že pri danej veľkosti $|\vec{L}|$ existujú len určité priemety $\vec{L}$ do osi z - hovoríme o **priestorovom kvantovaní momentu hybnosti**. Neurčitost zložiek L_x, L_y korešponduje s klasickou predstavou **precesie** vektora $\vec{L}$ okolo osi z pod *kvantovaným* uhlom. Samotná veľkosť $\vec{L}$ je tiež kvantovaná (Dodatok P)



$$|\vec{L}| = \sqrt{l(l+1)} \hbar \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

pričom $m = l, l-1, \dots, -l+1, -l$. Prípád $l = 0$ odpovedá stavom s dokonalou *sférickou* symetriou. Ak ide o *stacionárne* stavy, musí okrem $[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0$ platiť

$$[\hat{L}^2, \hat{H}] = 0 \quad [\hat{L}_z, \hat{H}] = 0$$

Nenulový moment hybnosti častice potom interpretujeme len ako rotujúci *pravdepodobnostný* tok (kap. II.3.5) okolo osi symetrie, pri *nemeniacej sa* hustote pravdepodobnosti $\psi^* \psi$ (analogicky ako pri rovinnej vlne), čiže bez potreby uvažovania o *pohybe častice* v klasickom zmysle.

Dôležitým všeobecným poznatkom vyplývajúcim z uvedenej analýzy je, že ak je nejaká energetická hladina (vlastná hodnota hamiltoniánu) *degenerovaná*, t.j. ak existuje viacero rozlíšiteľných stavov s touto hodnotou energie, *musí existovať operátor spôsobujúci túto degeneráciu a komutujúci s hamiltoniánom*. V tomto prípade je ním $\hat{L}_z$.

¹⁰⁸Pootočenia okolo rôznych osí nekomutujú.



II.4.7 Elektromagnetický potenciál v kvantovej mechanike.

Pre časticu s nábojom q v EM poli, reprezentovanom EM potenciálmi φ a $\vec{A}$ (kap. I.3.2), vstupuje skalárny potenciál do výrazu pre jej potenciálnu energiu,¹⁰⁹ $V = q\varphi$, kým vektorový potenciál je súčasťou celkovej (kánonickej) hybnosti $\vec{p}_{celk} = \vec{p}_{mech} + q\vec{A}$ (kap. I.3.4). Keďže výraz $-i\hbar\nabla$ je operátorom celkovej hybnosti, vo výraze pre kinematický hamiltonián (reprezentujúci kinetickú energiu) musí byť EM hybnosť *odčítaná*. SCHR v EM poli potom nadobudne tvar

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[\frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla - q\vec{A})^2 + q\varphi \right] \psi$$

Potenciály však nie sú určené jednoznačne, a závisia od výberu kalibrácie (kap. I.3.2 a Dodatok A). Požiadavka invariantnosti SCHR voči kalibračnej transformácii

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla\Lambda \qquad \varphi \rightarrow \varphi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}$$

si vyžaduje *transformáciu vlnovej funkcie*

$$\psi(\vec{r}, t) \rightarrow \psi'(\vec{r}, t) = e^{iq\Lambda(\vec{r}, t)/\hbar} \psi(\vec{r}, t)$$

(Pre overenie stačí dosadiť.) Predpokladajme oblasť $\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = 0$, $\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = 0$, a na začiatku položíme $\vec{A} = 0$, $\varphi = 0$. Zmenou kalibrácie, t.j. voľbou funkcie $\Lambda(\vec{r}, t) \neq 0$ dostaneme nové hodnoty $\vec{A} = \nabla\Lambda$ a $\varphi = -\frac{\partial\Lambda}{\partial t}$, čo v *tomto* prípade znamená¹¹⁰

$$q\Lambda(\vec{r}, t) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} q\vec{A} \cdot d\vec{r} - \int_{t_0}^t q\varphi dt$$

pričom $\vec{r}_0, t_0$ sú zvolené ľubovoľne, a nezáleží na integračnej dráhe. SCHR pre vlnové funkcie *pred* a *po* tejto transformácii sú

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi \quad \Leftrightarrow \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi' = \left[\frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla - q\vec{A})^2 + q\varphi \right] \psi'$$

V kap. II.3.4 sme ku SCHR dospeli vychádzajúc z Hamiltonovej-Jacobiho formulácie mechaniky, v ktorej *účinnok* nadobúda tvar (v kartézskych súradniciach)

$$S(\vec{r}(t)) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{p} \cdot d\vec{r} - \int_{t_0}^t H dt$$

Vlnovú funkciu častice sme hľadali v tvare $\psi \sim e^{iS/\hbar}$, pričom pre *voľnú* časticu platilo $S = \vec{p} \cdot \vec{r} - Et$. Je zrejmé, že uvedený výraz $q\Lambda(\vec{r}, t)$ je akýmsi *rozšírením* účinku pre časticu v EM poli - rozšírením mechanickej hybnosti o EM hybnosť $q\vec{A}$, a energie voľnej častice o potenciálnu energiu $q\varphi$, teda $e^{iS/\hbar} \rightarrow e^{i(S+q\Lambda)/\hbar}$. V kap. I.3.4 sme síce identifikovali merateľný účinok vektorového potenciálu a jeho miesto v zákone zachovania hybnosti, nič nám však nebránilo interpretovať ho ako pôsobenie poľa $\vec{E}$ prostredníctvom vzťahu $\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$. Ako však hneď uvidíme, v kvantovej fyzike je situácia odlišná.

Uvažujme najprv opäť idealizovaný „pohyb“ nabitej „častice“ *viazanej* na kružnici o polomere R z kap. II.3.5, tentokrát však uvažujme v osi kružnice („nekonečne“ dlhý) solenoid o polomere $a < R$ uzatvárajúci v sebe magnetické pole $\vec{B} = (0, 0, B)$ (obr.). V oblasti mimo solenoidu je $\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = 0$

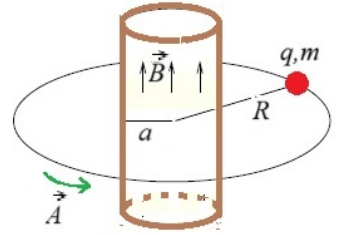
¹⁰⁹Iné formy potenciálnej energie, napr. gravitačnú či deformačnú, tu neuvažujeme.

¹¹⁰V relativistickom zápise by transformácia vlnovej funkcie vyzerala ako $\psi \rightarrow \psi e^{-iq(\int A^\mu dx_\mu)/\hbar}$. Táto kapitola je však o *nerelativistickom* opise.

a obvyklej coulombovskej kalibrácii $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ vyhovuje potenciál

$$\vec{A}(r, \phi) = \frac{\Phi}{2\pi r} \vec{\phi}^o \quad \Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = \pi a^2 B = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

kde Φ je magnetický tok solenoidom a $\vec{\phi}^o$ je azimutálny jednotkový vektor. Operátor ∇ v cylindrických súradniciach tu bude mať jedinú nenulovú zložku $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}$. Hamiltonián teda bude mať tvar ($r = R$, $\varphi = 0$)



$$\hat{H} = \frac{1}{2mR^2} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{q\Phi}{2\pi} \vec{\phi}^o \right)^2 = \frac{1}{2I} \left(\hat{L}_z - \frac{q\Phi}{2\pi} \vec{\phi}^o \right)^2$$

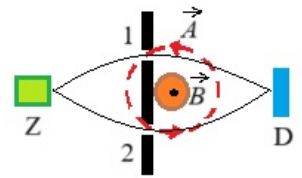
s vlastnými hodnotami závisiacimi od smeru rotácie častice

$$E_{n\mp} = \frac{\hbar^2}{2I} \left(n \mp \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad L_{n\mp} = n\hbar \mp \frac{q\Phi}{2\pi}$$

kde $\Phi_0 = \frac{h}{q}$ je tzv. **kvantum magnetického toku**. V porovnaní s výsledkom z kap. II.3.5 energia stacionárnych stavov závisí od poľa v solenoide, napriek tomu, že pozdĺž kružnice je $\vec{B} = 0$. Aj tento výsledok sa dá interpretovať klasicky: Magnetické pole sa muselo niekedy zapnúť, a vtedy pozdĺž kružnice existovalo $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{E}$, čo spôsobilo zmenu hybnosti/energie oproti stavu $\vec{B} = 0$. Dôležitejšie pre nás však je, že hladiny E_n už nie sú dvojnásobne degenerované (pre oba smery rotácie) ako v kap. II.3.5. Odpovedajúce vlastné stavy sú

$$\psi_{n\mp}(\phi) \sim e^{i(n\phi \mp \frac{q}{\hbar} \int \vec{A} \cdot d\vec{l})} = e^{i(n\phi \mp \frac{q}{\hbar} \int A R d\phi)} = e^{i(n \mp \frac{\Phi}{\Phi_0})\phi}$$

Uvažujme teraz dvojštrbinový experiment s takýmto solenoidom s konštantným poľom ($\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$) umiestneným medzi štrbinami tak, aby pomyselné dráhy nabitej „častice“ ležali v oblasti $\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = 0$ (obr.). „Častica“ sa šíri od zdroja Z k detektoru D cez dvojicu štrbín rýchlosťou $\vec{v}$, pričom „pociťuje“ meniaci sa EM potenciál $\vec{A}$, čím sa mení jej kánonická hybnosť (kap. I.3.2)



$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \cancel{\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{A} \rightarrow \nabla(\vec{v} \cdot \vec{A}) - \vec{v} \times (\cancel{\nabla \times \vec{A}}) \quad \frac{d}{dt}(m\vec{v} + q\vec{A}) = -q\nabla(\cancel{\varphi} - \vec{v} \cdot \vec{A})$$

Mechanická hybnosť $m\vec{v}$ sa teda *nemení*.¹¹¹ Pre *klasickú* časticu by toto bol úplný opis. *Kvantová* „častica“ je však šíriacou sa *vlnou*, a priestorovo sa meniaci potenciál $\vec{A}$ vstupuje do jej *fázy*. Zväzky prechádzajúce štrbinami 1 a 2 interferujú na detektore D s dodatočnými fázovými posuvmi $\frac{q}{\hbar} \int_{1,2} \vec{A} \cdot d\vec{l}$, a rozdiel ich fáz, ovplyvňujúci výsledok interferencie, je

$$\Delta\vartheta = \frac{q}{\hbar} \left(\int_1 \vec{A} \cdot d\vec{l} - \int_2 \vec{A} \cdot d\vec{l} \right) = \frac{q}{\hbar} \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}$$

Tento výsledok *nezávisí* od voľby kalibrácie potenciálov, sa nazýva **Aharonovovým-Bohmovým javom**. Analogický efekt je pozorovateľný pri interferencii zväzkov šíriacich sa oblasťami s rôznym skalárnym potenciálom φ pri $\vec{E} = 0$, pričom fázový rozdiel je

$$\Delta\vartheta = \frac{q}{\hbar} \left(\int_1 \varphi dt - \int_2 \varphi dt \right) = 2\pi \frac{\Delta\varphi t}{\Phi_0}$$

¹¹¹ Zmenu mechanickej hybnosti by spôsobila len Lorentzova sila

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = (\cancel{\vec{E}} + \vec{v} \times \cancel{\vec{B}}) = q \left(-\cancel{\nabla\varphi} - \cancel{\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} + \vec{v} \times (\cancel{\nabla \times \vec{A}}) \right) = 0$$

Polia $\vec{E}$, $\vec{B}$ (nulové v oblastiach šírenia zväzkov) teda akoby *nelokálne* (na diaľku) ovplyvňovali experimentálne pozorovateľné výsledky! Ak trváme na lokálnosti každej interakcie, potom musíme uprednostniť potenciály φ , $\vec{A}$ ako adekvátny opis EM poľa. Vektorový potenciál $\vec{A}$ je vlnovou funkciou voľného fotónu, kým skalárny potenciál φ sa viaže na hustotu elektrického náboja, $\nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon$, a polia $\vec{E}$, $\vec{B}$ sú ich emergentnými *makroskopickými* prejavmi.

II.4.8 Kvantovanie elektromagnetického poľa.

Venujme sa na úvod pravdepodobne najdôležitejšiemu fyzikálnemu modelu - harmonickému oscilátoru. Klasickým predstaviteľom (jednorozmerného) harmonického oscilátora je teleso o hmotnosti m na pružine o tuhosti κ , klasický hamiltonián ktorého je

$$H = E_{kin} + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{\kappa x^2}{2}$$

Keďže $V \sim x^2$, je to tiež hamiltonián častice pohybujúcej sa na dne *parabolickej* potenciálovej jamy.¹¹² Riešením pohybovej rovnice (bez budiacej sily) sú harmonické kmity s **vlastnou frekvenciou** $\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$. Prechod ku kvantovomechanickému formalizmu znamená náhradu dynamických premenných H, p, x operátormi $\hat{H}, \hat{p}, \hat{x}$ v príslušnej reprezentácii, a dosadením do SCHR. Takéto riešenie presahuje rámec tohto textu, a nebudeme sa ním zaoberať. Vieme však už, že pre priestorovo viazanú „časticu“ (bez ohľadu na tvar potenciálovej jamy) bude jej energetické spektrum *kvantované*, a pomocou triku toto spektrum vypočítame. Upravme najprv náš hamiltonián do bezrozmerného tvaru, normovaného na energiu $\hbar\omega_0$,

$$\frac{\hat{H}}{\hbar\omega_0} = \frac{1}{2m\hbar\omega_0} \hat{p}^2 + \frac{m\omega_0}{2\hbar} \hat{x}^2 = \hat{P}^2 + \hat{X}^2$$

Spomínaný trik sa podobá tomu, ktorý sme použili pri priestorovom kvantovaní momentu hybnosti (Dodatok P) - definujeme „pomocné“ operátory $\hat{a}, \hat{a}^+$ ako *komplexné* superpozície

$$\hat{a} = \left(\hat{X} + i\hat{P} \right) \quad \hat{a}^+ = \left(\hat{X} - i\hat{P} \right) \quad \hat{X} = \frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{a}^+) \quad \hat{P} = \frac{-i}{2}(\hat{a} - \hat{a}^+)$$

pri platnosti komutačných vzťahov $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \Rightarrow [\hat{X}, \hat{P}] = \frac{i}{2} \Rightarrow [\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$. Dosadením do hamiltoniánu dostaneme

$$\hat{H} = \dots = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 (\hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^+) = \hbar\omega_0 \left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega_0 \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right) \quad \hat{n} = \hat{a}^+\hat{a}$$

Odtiaľ je zrejmé, že $\hat{H}$ a nový operátor $\hat{n}$ (komutujú a teda) majú spoločné vlastné stavy $|\psi_n\rangle$ s príslušnými vlastnými hodnotami E_n resp. n , pre ktoré musí platiť

$$\hat{H}|\psi_n\rangle = \hbar\omega_0 \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right) |\psi_n\rangle = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle \quad \Rightarrow \quad E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_0$$

Je tiež zrejmé, že operátor $\hat{n}$ je hermitovský, a teda jeho vlastné hodnoty n sú *reálne* čísla, vyjadrujúce počet energetických kvánt $\hbar\omega_0$ na danej hladine E_n . Podľa Dodatku Q tiež vidíme, že n sa mení *celočíselne*. Najnižšej - základnej hladine odpovedá $n = 0$, pričom nenulovosť $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$ je dôsledkom princípu neurčitosti.¹¹³

¹¹²Dôležitosť tohto modelu spočíva v tom, že *pre malé výchylky* z rovnováhy je dno *každej* hladkej a nie plochej jamy parabolické, a v tomto priblížení bude časový vývoj *harmonický*.

¹¹³Táto hodnota sa v literatúre často označuje ako **energia nulových kmitov**. Ide však o *stacionárny* stav (s pravdepodobnosťou $|\psi(x)|^2$ *nezávisiacou* od času), a *o kmitoch nemá zmysel hovoriť*. (Názov pramení z klasickej analógie s oscilátorom, v skutočnosti však ide len o špecifickú - parabolickú - potenciálovú jamu.)

Najdôležitejším záverom je pre nás *konštantný* energetický rozdiel medzi susediacimi hladinami. Energia takéhoto systému sa teda mení len v diskretných kvantách $\hbar\omega_0$. Práve takto sme v kap. II.1.3 predstavili jednotlivé módy EM poľa, vyžarujúce kvantá energie - fotóny. EM pole môžeme teda opisovať ako sústavu takýchto harmonických oscilátorov s rôznymi vlastnými frekvenciami jednotlivých módov. Operátor $\hat{n} = \hat{a}^+ \hat{a}$ je potom *akoby* operátorom počtu kvánt - fotónov v danom móde, a operátor $\hat{a}^+$ resp. $\hat{a}$ je **kreačným** resp. **anihilačným operátorom**, pridávajúcim/odoberajúcim fotón do/z daného módu. Hamiltonián daného EM módu v objeme $\mathcal{V}$ je

$$H = \frac{\varepsilon_0}{2} \int (E^2 + (cB)^2) d\mathcal{V} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int \left[\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)^2 + c^2 (\nabla \times \vec{A})^2 \right] d\mathcal{V}$$

V kap. II.4.7 sme poukázali na to, že v kvantovej fyzike je adekvátnou reprezentáciou EM poľa vektorový potenciál $\vec{A}$. Vo výraze pre hamiltonián vidíme aj *formálnu* analógiu s energiou mechanickej vlny,¹¹⁴ a teda *formálnu* analógiu kvadratických členov s členmi P^2 a X^2 v hamiltoniáne harmonického oscilátora. Vektorový potenciál však *nie je* merateľnou veličinou, a ak chceme reprezentovať EM pole prostredníctvom merateľných veličín, akými sú vektory $\vec{E}$ a $\vec{B}$, potrebujeme skonštruovať ich *hermitovské* operátory. Použijeme opäť ten istý trik, a definujeme pomocné veličiny¹¹⁵

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{E} + ic\vec{B} \qquad \vec{\mathcal{E}}^* = \vec{E} - ic\vec{B}$$

EM hamiltonián potom vyjadríme ako

$$H = \frac{\varepsilon_0}{2} \int (E^2 + (cB)^2) d\mathcal{V} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int \mathcal{E}^* \mathcal{E} d\mathcal{V} \rightarrow \frac{\varepsilon_0}{2} \mathcal{E}^* \mathcal{E} \mathcal{V}$$

Ak toto pole predstavuje *jediný* mód o frekvencii ω_0 , potom sa núka stotožnenie tohto klasického výrazu s kvantovým hamiltoniánom¹¹⁶

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \mathcal{E}^* \mathcal{E} \mathcal{V} \rightarrow \hat{H} = \hbar\omega_0 \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right) \cong \hbar\omega_0 \hat{a}^+ \hat{a}$$

pričom pomocné veličiny $\mathcal{E}, \mathcal{E}^*$ „povýšime“ na *hermitovsky združené* operátory¹¹⁷

$$\mathcal{E}^* \mathcal{E} \rightarrow \hat{\mathcal{E}}^+ \hat{\mathcal{E}} = \left(-i\sqrt{\frac{2\hbar\omega_0}{\varepsilon_0 \mathcal{V}}} \hat{a}^+ \right) \left(i\sqrt{\frac{2\hbar\omega_0}{\varepsilon_0 \mathcal{V}}} \hat{a} \right)$$

Posledným krokom je definovanie *hermitovských* operátorov

$$\begin{aligned} \hat{E} &= \frac{\hat{\mathcal{E}} + \hat{\mathcal{E}}^+}{2} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\varepsilon_0 \mathcal{V}}} (\hat{a} - \hat{a}^+) = -\sqrt{\frac{2\hbar\omega_0}{\varepsilon_0 \mathcal{V}}} \hat{P} \\ \hat{B} &= \frac{\hat{\mathcal{E}} - \hat{\mathcal{E}}^+}{2ic} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2c^2 \varepsilon_0 \mathcal{V}}} (\hat{a} + \hat{a}^+) = \sqrt{\frac{2\hbar\omega_0}{c^2 \varepsilon_0 \mathcal{V}}} \hat{X} \end{aligned}$$

Tak ako $\hat{P}$ a $\hat{X}$ (a $\hat{p}$, $\hat{x}$), ani $\hat{E}$ a $\hat{B}$ navzájom nekomutujú, a s uvažovaním $[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$ napravíme nedôsledný prechod od klasického ku kvantovému hamiltoniánu,

$$\hat{H} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int (\hat{E}^2 + (c\hat{B})^2) d\mathcal{V} = \dots = \hbar\omega_0 \left(\hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \right)$$

¹¹⁴Nech struna o tuhosti κ' a hmotnosti m' (jednotkovej dĺžky) kmitá s výchylkou z rovnovážnej polohy $\psi(x)$, potom kinetická a potenciálna energia kmitov (na jednotku dĺžky) sú $E_{kin} = \frac{1}{2}m' \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2$ a $E_{pot} = \frac{1}{2}\kappa' \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2$.

¹¹⁵Takto definovaná veličina $\vec{\mathcal{E}}$ sa v literatúre nazýva **Riemannov-Silbersteinov vektor**. Maxwellove rovnice vo vákuu (bez nábojov) potom môžeme vyjadriť v tvare $-ic\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t}$ a $\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0$.

¹¹⁶Člen $\frac{1}{2}\hbar\omega_0$ daný princípom neurčitosti nateraz ignorujeme, čo však vzápätí napravíme.

¹¹⁷Hermitovsky združené operátory, akými sú $\hat{\mathcal{E}}^+, \hat{\mathcal{E}}$, ale aj $\hat{a}^+, \hat{a}$, *nereprezentujú* merateľné veličiny, hermitovskými však budú ich kombinácie.

Podobným spôsobom môžeme pomocou kreačných a anihilačných operátorov kvantovať Poyntingov vektor $\vec{S} = c^2 \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}$ na operátor hybnosti fotónu. Superpozíciou operátorov *lineárne* polarizovaných módov $\frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_x^+ \pm i \hat{a}_y^+)$ môžeme kreovať pravo/ľavotočivý *krhovo* polarizovaný fotónový stav, ktorý zas korešponduje s klasickým momentom hybnosti EM vlny $\vec{J} = \epsilon_0 \int \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}) d^3 \vec{r}$.

II.5 Relativistická častica.

II.5.1 Kleinova-Gordonova rovnica.

Nerelativistická SCHR úspešne opisuje správanie elektrónov (a podobných častíc) pri energiách *výrazne* menších než pokojová energia elektrónu $m_e c^2$. Opis relativistických efektov si však vyžaduje aby pohybová rovnica mala *lorentzovskú symetriu* - časové a priestorové derivácie musia v nej vystupovať v rovnakom ráde (čo nie je prípad SCHR). Vychádzajme z relativistického vzťahu pre energiu *voľnej* hmotnej častice

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$

Náhradou dynamických premenných operátormi, $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ a $\vec{p} \rightarrow -i\hbar \nabla$, dostaneme **Kleinovu-Gordonovu rovnicu**¹¹⁸ (KGR)

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi + \frac{1}{\lambda_C^2} \phi = 0 \quad \text{alebo} \quad \square \phi + \frac{1}{\lambda_C^2} \phi = 0 \quad \lambda_C = \frac{\lambda_C}{2\pi} = \frac{\hbar}{mc}$$

kde λ_C je redukovaná Comptonova vlnová dĺžka (kap. II.1.4). Je to vlnová rovnica, ktorej riešeniami sú harmonické rovinné vlny $\phi \sim e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)/\hbar}$, spĺňajúce disperzný zákon

$$\left(\frac{E}{\hbar}\right)^2 = \omega^2 = c^2 \left(k^2 + \frac{1}{\lambda_C^2}\right) = (ck)^2 + \omega_{min}^2 \quad \omega_{min} = \frac{mc^2}{\hbar} = \frac{c}{\lambda_C} \quad k = \frac{p}{\hbar}$$

Ak sa vlna má voľne šíriť, musí jej vlnový vektor byť *reálny*. Tento disperzný zákon však ukazuje, že túto požiadavku spĺňajú len frekvencie $\omega > \omega_{min}$. Pre $\omega < \omega_{min}$ je vlnový vektor imaginárny, $\vec{k} = i\vec{\kappa}$, a $\phi \sim e^{-\vec{\kappa} \cdot \vec{r}}$, čo je vlna zanikajúca na vzdialenosti $\approx \lambda_C$.

Tento záver plne korešponduje so súčasným pohľadom na kvantové „častice“ ako *udalosti*, nie projekty. Vlnová funkcia $\phi(\vec{r}, t)$ reprezentuje **časticové pole** ako *fundamentálnu substanciu* pre daný *druh „častíc“*. Vo svojom *základnom* stave, ktorý pripomína kľudnú vodnú hladinu, žiadne vlnenie neexistuje. Lokálnou interakciou s týmto poľom vyvoláme **excitáciu poľa**, $\phi(\vec{r}, t) \neq 0$, ktorá sa môže šíriť od jej zdroja, podobne ako vlna na vodnej hladine. Takáto vlna pritom prenáša energiu, hybnosť aj ostatné základné charakteristiky daného časticového poľa (napr. elektrický náboj či spin). V miestach nenulovej amplitúdy poľa môžeme s pravdepodobnosťou $|\phi|^2$ registrovať *kvantovanú* interakciu s makroskopickým detektorom, ktorú interpretujeme ako dopad *častice*. Minimálna energia, potrebná na vytvorenie takejto šíriacej sa „častice“, je $\hbar \omega_{min}$, čo odpovedá práve jej *pokojovej energii* mc^2 . Z uvedeného disperzného zákona tiež vyplýva, že každej harmonickej zložke vlnovej excitácie - vlnového balíka - bude odpovedať iný vlnový vektor (ω_{min} je rovnaká pre všetky zložky), a bude sa šíriť inou rýchlosťou - balík sa bude rozpadávať.

Ak časticu charakterizuje elektrický náboj q a nachádza sa v EM poli, celková hybnosť častice zostáva okrem mechanickej aj z EM hybnosti $q\vec{A}$ (kap. I.3.4). V hamiltoniáne teda pribudne nielen

¹¹⁸Túto rovnicu navrhli v r. 1926 nezávisle na sebe E. Schrödinger, O. Klein, W. Gordon a V. Fok.

potenciálna energia $V = q\varphi$, ale aj v kinetickom hamiltoniáne bude mechanická hybnosť vyjadrená ako $\vec{p}_{mech} = \vec{p}_{celk} - q\vec{A}$. Prechod k operátorom v súradnicovej reprezentácii znamená

$$\vec{p}_{celk} \rightarrow -i\hbar\nabla \quad \vec{p} \rightarrow \hat{p}_{mech} = -i\hbar\nabla - q\vec{A}$$

a operátorová verzia vzťahu pre relativistickú energiu (čiže KGR) bude¹¹⁹

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - q\varphi \right]^2 \phi(\vec{r}, t) = c^2 \left[(-i\hbar\nabla - q\vec{A})^2 + (mc)^2 \right] \phi(\vec{r}, t)$$

Keďže φ a $\vec{A}$ tvoria štvorvektor $A^\mu = (\varphi/c, \vec{A})$ (kap. I.3.2), môžeme KGR nabitej „častice“ v EM poli zapísať v elegantnom tvare

$$(i\hbar\partial_\mu - qA_\mu)(i\hbar\partial^\mu - qA^\mu)\phi - (mc)^2\phi = 0$$

Nerelativistická limita znamená, že všetky energetické členy sú zanedbateľné voči pokojovej energii „častice“, $E \cong E_0 = mc^2$, a z časovej závislosti $\phi(\vec{r}, t)$ vyjmemos oscilácie s pokojovou energiou E_0 , $\phi(\vec{r}, t) \cong e^{-iE_0t/\hbar}\psi(\vec{r}, t)$. Pre $\psi(\vec{r}, t)$ potom dostaneme rovnicu¹²⁰

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \left(\frac{(-i\hbar\nabla - q\vec{A}(\vec{r}, t))^2}{2m} + q\varphi(\vec{r}, t) \right) \psi(\vec{r}, t) \quad \psi(\vec{r}, t) = e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} e^{-i\overbrace{(E - E_0)}^{\cong p^2/2m} t/\hbar}$$

čo je SCHR v EM poli.

II.5.2 Častica a antičastica.

Rovnicu kontinuity pre *voľnú* „časticu“ dostaneme z KGR analogickým postupom ako v prípade SCHR v kap. II.3.5,

$$\phi^*[\text{KGR}] - [\text{KGR}]^*\phi : \quad \frac{\phi^*}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \phi^* \nabla^2 \phi = \frac{\phi}{c^2} \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial t^2} - \phi \nabla^2 \phi^*$$

čo sa dá prepísať (konvenčne po vynásobení $\frac{i\hbar}{2m}$) ako

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \frac{i\hbar}{2mc^2} \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right)}_{\rho} + \underbrace{\nabla \cdot \frac{i\hbar}{2m} (\phi \nabla \phi^* - \phi^* \nabla \phi)}_{\vec{j}} = 0$$

Oproti rovnici kontinuity podľa SCHR je tu zásadný rozdiel: Výraz pre objemovú hustotu pravdepodobnosti ρ *môže byť záporný!* Tento záver vylučuje interpretáciu tejto rovnice kontinuity ako zákona zachovania *častice*. Znamená to, že relativistický časový vývoj, daný KGR, pripúšťa *zmenu počtu častíc*. Ďalším problémom je, že disperzný zákon pre riešenia KGR v tvare $e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)/\hbar}$ pripúšťa energie *voľných častíc* (kap. II.5.1)

$$E = \pm c\sqrt{p^2 + (mc)^2}$$

¹¹⁹Pamätajte, že výrazy v hranatých zátvorkách sú *operátory*!

¹²⁰Použijeme priblíženie

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - q\varphi \right]^2 e^{-iE_0t/\hbar} \psi = \dots \cong \left(E_0^2 \psi - 2E_0 q\varphi \psi + 2i\hbar E_0 \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) e^{-iE_0t/\hbar}$$

kde sme v zátvorke zanedbali všetky členy neobsahujúce E_0 .

čiže aj *záporné* energie voľných „častíc“, čo je nefyzikálne!

Oba rozpory vyriešime ak pripustíme, že ϕ a ϕ^* reprezentujú *dva druhy* „častíc“, navzájom komplexne združených - častice a **antičastice**. Pre $E < 0$ môžeme formálne písať

$$e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)/\hbar} = e^{-i((- \vec{p})\cdot\vec{r}-|E|t)/\hbar}$$

čo odpovedá pohybu *antičastíc* s $E > 0$ *naspäť v čase*. Súčasne, ak náboj častice je q , potom náboj antičastice je $-q$.¹²¹ (Elektricky neutrálne častice sú sami sebe antičasticami.) Rovnica kontinuity, po vynásobení jednotlivých polí príslušným nábojom, je potom *zákonom zachovania elektrického náboja*, bez ohľadu na počet častíc a antičastíc. To ale znamená, že KGR *nie je* pohybovou rovnicou *jedinej* častice!

V nerelativistickej limite však $KGR \rightarrow SCHR$, ktorá *je* pohybovou rovnicou *jednej* častice. Potreba uvažovať aj s antičasticami vzniká pri energiách porovnateľých s pokojovou energiou častice/antičastice, $E_0 = mc^2$. Napríklad pri prílišnej lokalizácii polohy častice môže v dôsledku princípu neurčitosti narásť rozptyl hodnôt jej hybnosti a teda kinetickej energie na úroveň E_0 . Ak na rozlíšenie „polohy“ častice použijeme napr. svetlo s takou vlnovou dĺžkou, že energia fotónov je $\hbar\omega = \frac{\hbar c}{\lambda} \approx E_0$, dochádza pohltením fotónu ku generovaniu novej identickej častice/antičastice.¹²² Pre neurčitosť polohy častice potom platí

$$\Delta x \approx \frac{\hbar}{\Delta p} \approx \lambda = \frac{\hbar c}{\hbar\omega} \approx \frac{\hbar c}{mc^2} = \frac{\hbar}{mc} = \lambda_C$$

Comptonova vlnová dĺžka danej „častice“ teda definuje rozmer, na ktorom sa stráca jej *jednočasticový* charakter - nemá fyzikálny zmysel lokalizovať *samostatnú* „časticu“ presnejšie než na rozmere $\approx \lambda_C$. Comptonova vlnová dĺžka danej „častice“ súčasne prostredníctvom princípu neurčitosti limituje obor platnosti nerelativistickej (jednočasticovej) teórie.

Napriek relativistickému zovšeobecneniu SCHR a opisu nových relativistických javov, ani KGR nepriniesla uspokojivú *kvantitatívnu* zhodu s experimentálnymi výsledkami pre *relativistický* elektrón (a jemu podobné „častice“). Dôvodom je *nenuťovaný spin* elektrónu, o ktorom pojednáme v ďalšom texte. KGR však ostáva správnou relativistickou pohybovou rovnicou *bezspinových* „častíc“.

II.5.3 Diracova rovnica.

Ak požadujeme od relativistickej pohybovej rovnice elektrónu *pravdepodobnostnú interpretáciu* (t.j. platnosť rovnice kontinuity pre pravdepodobnosť, ako v prípade nerelativistickej SCHR, na rozdiel od KGR), musíme hľadať rovnicu s časovými (a tým automaticky aj priestorovými) deriváciami *prvého* rádu, čo pri zachovaní štruktúry kvantovej mechaniky znamená rovnicu formálne v tvare SCHR, ale s hamiltoniánom závisiacim od hybnosti *lineárne*. Pri platnosti relativistického vzťahu pre energiu *voľnej* častice to znamená

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi = c\sqrt{\hat{p}^2 + (mc)^2}\Psi \stackrel{!}{=} c(\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}} + mc\beta)\Psi$$

kde $\vec{\alpha}$, β vyšpecifikujeme umocnením poslednej rovnosti. Odtiaľ vziđu podmienky

$$\alpha_j\alpha_k + \alpha_k\alpha_j = 2\delta_{jk} \qquad \beta^2 = 1 \qquad \alpha_j\beta + \beta\alpha_j = 0$$

¹²¹Šírenie náboja určitým smerom je pri obrátení toku času šírením opačného náboja opačným smerom.

¹²²Zákony zachovania energie aj hybnosti *súčasne* vyžadujú generáciu hneď *niekoľkých* častíc.

Ich splnenie však znamená, že $\vec{\alpha}$, β sú bezrozmerné *hermitovské matice*. Existuje nekonečne veľa takýchto matíc, jedna z obvyklých volieb však je¹²³

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad \text{kde} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

kde $\mathbb{1}$ je jednotková matica 2×2 , a σ_j sú tzv. **Pauliho matice**. V kartézskych súradniciach a v súradnicovej reprezentácii potom dostávame **Diracovu rovnicu**¹²⁴ (DIR)

$$\underline{i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -i\hbar c \vec{\alpha} \cdot \nabla \Psi(\vec{r}, t) + mc^2 \beta \Psi(\vec{r}, t)}$$

Rovnicu kontinuity dostaneme opäť manipuláciou s hermitovsky združenými DIR

$$\Psi^\dagger [\text{DIR}] + [\text{DIR}]^\dagger \Psi : \quad \left(\Psi^\dagger \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Psi \frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial t} \right) + c [\Psi^\dagger \vec{\alpha} \cdot (\nabla \Psi) + (\nabla \Psi^\dagger) \cdot \vec{\alpha} \Psi + \frac{i}{\lambda_C} \Psi^\dagger (\beta - \beta^\dagger) \Psi] = 0$$

čo po úprave a využití hermitovosti $\vec{\alpha}$, β dá

$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{(\Psi^\dagger \Psi)}_{\rho} + \nabla \cdot \underbrace{(c \Psi^\dagger \vec{\alpha} \Psi)}_{\vec{j}} = 0$$

a výraz $\rho = \Psi^\dagger \Psi (\geq 0)$ môžeme interpretovať ako *zachovávajúcu sa hustotu pravdepodobnosti*.

Keďže $\vec{\alpha}$, β sú matice 4×4 , vlnová funkcia elektrónu musí byť 4-komponentným „vektorom“. Fyzikálny význam jednotlivých komponent vyplynie z analýzy riešenia v tvare $\Psi(\vec{r}, t) = u(\vec{p}) e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)/\hbar}$, pričom $u(\vec{p})$ vyjadríme (kvôli úspornosti zápisu) pomocou dvojice dvojkomponentných „vektorov“ - tzv. **spinorov**, $\chi(\vec{p})$, $\xi(\vec{p})$ čiže

$$\Psi(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \chi(\vec{p}) \\ \xi(\vec{p}) \end{pmatrix} e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)/\hbar} \quad \chi(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \chi_1(\vec{p}) \\ \chi_2(\vec{p}) \end{pmatrix}, \quad \xi(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \xi_1(\vec{p}) \\ \xi_2(\vec{p}) \end{pmatrix}$$

Jedinou dynamickou premennou v Diracovom hamiltoniáne *voľnej* „častice“ je hybnosť, preto $[\hat{H}, \hat{p}] = 0$. Uvedené (stacionárne) riešenie je teda *súčasne* vlastným stavom týchto operátorov, ktoré preto môžeme nahradiť ich vlastnými hodnotami, E , $\vec{p}$. DIR v maticovom tvare potom prejde na

$$\begin{pmatrix} mc^2 & c\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ c\vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \xi \end{pmatrix} \quad \text{kde} \quad \vec{\sigma} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}$$

Je to maticový zápis sústavy dvoch algebrických rovníc

$$\begin{aligned} \left(\frac{E}{c} - mc \right) \chi - (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \xi &= 0 & \chi &= \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{\frac{E}{c} - mc} \xi & \text{definovaná ak } E < 0 \\ \Leftrightarrow & & & & \\ (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \chi - \left(\frac{E}{c} + mc \right) \xi &= 0 & \xi &= \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{\frac{E}{c} + mc} \chi & \text{definovaná ak } E > 0 \end{aligned}$$

Ak pre $E > 0$ zvolíme *bázové* spinorové stavy $\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, potom im odpovedajúcimi riešeniami DIR (až na normovací koeficient) sú

$$\Psi_1(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{\frac{E}{c} + mc} \\ \frac{p_x + ip_y}{\frac{E}{c} + mc} \end{pmatrix} e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)/\hbar} \quad \Psi_2(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x - ip_y}{\frac{E}{c} + mc} \\ \frac{-p_z}{\frac{E}{c} + mc} \end{pmatrix} e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)/\hbar}$$

¹²³Ide o tzv. **Diracovu reprezentáciu**. Keďže ide o matice s *nekomutatívnym* násobením, musíme ich považovať za *operátory*.

¹²⁴Navrhol ju v r. 1928 P. Dirac, v r. 1933 mu bola udelená Nobelova cena.

Naopak, ak pre $E < 0$ zvolíme bázové stavy $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, potom odpovedajúcimi riešeniami sú

$$\Psi_3(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \frac{p_z}{\frac{E}{c} - mc} \\ \frac{p_x + ip_y}{\frac{E}{c} - mc} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)/\hbar} \quad \Psi_4(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \frac{p_x - ip_y}{\frac{E}{c} - mc} \\ \frac{-p_z}{\frac{E}{c} - mc} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)/\hbar}$$

Takéto 4-komponentné diracovské „vektory“ sa nazývajú **bispinory**. Lineárne kombinácie týchto *bázových* bispinorov tvoria *všeobecné* riešenia DIR. Bázové riešenia $\Psi_{3/4}$ so *zápornou* energiou interpretujeme (rovnako ako v prípade KGR) ako riešenia s *kladnou* energiou šíriace sa *naspäť v čase*,

$$E < 0 : \quad \Psi_{3/4}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{\frac{E}{c} - mc} \xi_{1/2} \\ \xi_{1/2} \end{pmatrix} e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)/\hbar} = \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot (-\vec{p})}{\frac{|E|}{c} + mc} \xi_{1/2} \\ \xi_{1/2} \end{pmatrix} e^{-i[(-\vec{p}) \cdot \vec{r} - |E|t]/\hbar}$$

V *pokojovej* sústave bispinoru platí $\vec{p} = 0$, matica DIR je *diagonálnou*, a sústava *zviazaných* rovníc pre χ, ξ prejde na *samostatné* rovnice

$$E\chi = mc^2\chi \quad E\xi = -mc^2\xi \quad E = \pm mc^2 = \pm \frac{\hbar c}{\lambda_C}$$

Potom štvorica uvedených bázových riešení nadobudne tvar

$$\Psi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ict/\lambda_C} \quad \Psi_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ict/\lambda_C} \quad \Psi_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ict/\lambda_C} \quad \Psi_4(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ict/\lambda_C}$$

V *tejto* reprezentácii a v *pokojovej* sústave teda môžeme hovoriť o *samostatných* „časticách“: Prvú dvojicu, s nenulovým spinorom χ , interpretujeme ako dva bázové stavy elektrónu, a druhá dvojica, s nenulovým spinorom ξ , odpovedá dvom bázovým stavom jeho antičastice - **pozitrónu**. Ako však vidíme, *vo všeobecnosti* ani DIR *nie je jednočasticovou* rovnicou.

V *nerelativistickej* limite pre *kladné* energie $E \cong mc^2 + \frac{p^2}{2m}$, $mc^2 \gg \frac{p^2}{2m}$ z výrazu $\xi = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{\frac{E}{c} + mc} \chi$ vyplynie $\xi \ll \chi$, čiže „antičasticový“ spinor ξ zanikne, a dostaneme *nerelativistickú* pohybovú rovnicu (alternatívu SCHR) pre dvojkomponentný *spinor* - „časticu“,

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} |\psi(\vec{r}, t)\rangle \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} |\psi(\vec{r}, t)\rangle = \hat{H} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} |\psi(\vec{r}, t)\rangle$$

Komponenty tohto spinoru predstavujú *dodatočné vnútorné stupne voľnosti* - **spin**, ktorý opíšeme v nasledujúcej kapitole.

II.5.4 Operátor spinu.

V predchádzajúcej kap. II.5.3 sme videli, že stacionárne riešenia DIR sú *degenerované* - každej hodnote $\pm E$ odpovedajú *dva* lineárne nezávislé stavy bispinoru. Podľa kap. II.4.6 musí existovať operátor *komutujúci* s hamiltoniánom, ktorý túto degeneráciu spôsobuje (t.j. ktorého vlastnými stavmi sú práve spomínané dvojice.) Pri pohybe *voľnej* častice (t.j. takej, na ktorú nepôsobia žiadne sily) sa musí zachovávať jej energia, hybnosť aj moment hybnosti. Očakávame teda, že operátor momentu hybnosti bude komutovať s hamiltoniánom. Pre Diracov hamiltonián však platí

$$[\hat{L}_x, \hat{H}] = \dots = i\hbar c(\alpha_y \hat{p}_z - \alpha_z \hat{p}_y) \quad \text{atď., čiže} \quad [\hat{\vec{L}}, \hat{H}] = i\hbar c(\vec{\alpha} \times \vec{p}) \neq 0$$

čo znamená, že $\hat{\vec{L}}$ nereprezentuje skutočný moment hybnosti! Definujme preto taký operátor $\hat{\vec{S}}$, pre ktorý bude platiť $[\hat{\vec{S}}, \hat{H}] = -i\hbar c(\vec{\alpha} \times \hat{\vec{p}})$, a pomocou neho definujme operátor *zachovávajúceho sa celkového momentu hybnosti*

$$\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}} \quad [\hat{\vec{J}}, \hat{H}] = [\hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}, \hat{H}] = 0$$

Ľahko dokážeme (dosadením), že hľadaným operátorom $\hat{\vec{S}}$ (v našej reprezentácii) je

$$\hat{\vec{S}} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

Zachovávajúci sa *celkový* moment hybnosti $\vec{J}$ teda pozostáva (podobne ako v prípade fotónu v kap. II.1.5) z *orbitálneho* momentu $\vec{L}$ a *spinového* momentu - spinu $\hat{S}$. Medzi zložkami vektorového operátora $\hat{\vec{S}}$ platia komutačné vzťahy

$$[\hat{S}_j, \hat{S}_k] = i\hbar \hat{\varepsilon}_{jkl} \hat{S}_l$$

(čiže diagonalizovať sa dá vždy len jedna zložka), rovnako ako pre zložky operátora $\hat{\vec{L}}$. V našej reprezentácii (s Pauliho maticami) je diagonálnou zložkou $\hat{S}_z$. Ľahko nahliadneme, že v *pokojovej* sústave bispinoru, $\vec{p} = 0$ (kap. II.5.3), sú stavy Ψ_{1-4} (s jediným nenulovým spinorom χ alebo ξ) *vlastnými* stavmi operátora $\hat{S}_z$ s vlastnými hodnotami $S_z = \pm \frac{\hbar}{2}$. Platí teda

$$[\hat{S}_z, \hat{H}] = 0 \quad [\hat{\vec{S}}, \hat{H}] = 0 \quad (\text{lebo v pokojovej sústave } \vec{p} = 0, \vec{L} = 0)$$

Podobne ako v prípade orbitálneho momentu $\hat{\vec{L}}$ (kap. II.4.6 a Dodatok P), platia vzťahy

$$|\vec{S}| = \sqrt{s(s+1)} \hbar \quad , \quad s = \frac{1}{2} \quad \hat{S}_z \Psi = m_s \hbar \Psi \quad , \quad m_s = \pm s = \pm \frac{1}{2}$$

lebo

$$(\hat{S})^2 = \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} = \dots = \frac{3\hbar^2}{4} \quad (\sigma_j^2 = 1)$$

V prípade $\vec{p} = 0$ teda operátor $\hat{S}_z$ spôsobuje 2-násobnú degeneráciu energetických hladín, a nenulový spinor χ („častica“) resp. ξ („antičastica“) môže pri danej energii existovať v dvoch stavoch, „spin hore“ a „spin dole“. Pre antičasticu transformácia $(E, \vec{p}) \rightarrow (-E, -\vec{p})$ znamená $\vec{L} \rightarrow -\vec{L}$, a zo zákona zachovania celkovej hybnosti aj $\vec{S} \rightarrow -\vec{S}$.

Ak však $\vec{p} \neq 0$, $[\hat{\vec{S}}, \hat{H}] \neq 0$, a vo všeobecnosti ani $[\hat{S}_z, \hat{H}] \neq 0$ (výnimkou je prípad $\vec{p} = (0, 0, p_z)$). Namiesto toho platia nové vzťahy pre zachovávajúci sa celkový moment $\vec{J}$,

$$|\vec{J}| = \sqrt{j(j+1)} \hbar \quad , \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \quad \hat{J}_z \Psi = m_j \hbar \Psi \quad , \quad m_j = j, j-1, \dots, -j+1, -j$$

DIR je teda relativistickou pohybovou rovnicou „častíc“ (spolu s ich antičasticami) so spinom $\frac{1}{2}$ (v jednotkách $\hbar$). Znamená to, že kvantové číslo s , určujúce *maximálny priemet* spinu do zvoleného smeru, je pre tieto „častice“ $\frac{1}{2}$, pričom samotná *veľkosť* spinu je $\sqrt{s(s+1)}\hbar$. Takouto „časticou“ je nielen elektrón (a jeho antičastica pozitron), ale všetky elementárne častice (a ich antičastice) tvoriace *látku*. Na rozdiel od SCHR či KGR, DIR poskytuje presný opis správania týchto „častíc“ pri relativistických energiách.

II.5.5 Interpretácia spinu.

Z Diracovho hamiltoniánu vyplýva ešte jeden pozoruhodný záver: Pre časový vývoj operátorov polohy podľa kap. II.4.5 dostávame

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{x}] = \dots \alpha_1 c \quad \hat{y}, \hat{z} \text{ analogicky}$$

čo vedie na hodnoty $\pm c$ (lebo vlastnými hodnotami matíc α_j sú ± 1). Tento výsledok naznačuje, že „častica“ (v zmysle pravdepodobnosti) sa pohybuje rýchlosťou c , čo nezodpovedá realite experimentu. Vysvetlenie vyplynie z princípu neurčitosti: *Okamžitú* rýchlosť definujeme ako podiel *diferenciálov* - infinitezimálnych zmien dráhy a času. Určenie *infinitezimálneho* prírastku dráhy však vyžaduje „nekonečnú“ presnosť merania polohy, z čoho plynie úplná neurčitosť hybnosti, $\Delta p \rightarrow \infty$. Podľa relativistického vzťahu $p = \gamma mv$ tomu odpovedá práve $v = \pm c$. Keďže v experimentoch pozorujeme menšie rýchlosti, ponúka sa predstava, že na *pozorovaný* pohyb je superponovaný akýsi *cyklický* „chvejivý“¹²⁵ pohyb rýchlosťou $\pm c$ na nemerateľne vysokej frekvencii $\omega \approx E/\hbar \approx mc^2/\hbar = c/\lambda_C$ na vzdialenosti $\approx \lambda_C$ (čiže na „rozmere častice“ - kap. II.5.2).

Tento „vnútorný“ pohyb môžeme interpretovať aj ako súčasť *rotačného toku pravdepodobnosti*, analogicky ako pri svetle/fotónoch v kap. II.1.5, s odpovedajúcim momentom hybnosti

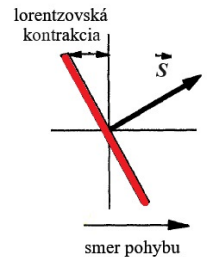
$$\vec{J} = \int \vec{r} \times \vec{g} dV$$

kde $\vec{g}$ je hustota hybnosti **Diracovho poľa** (ako analógie EM poľa), ktorej zložky sú dané tenzorom energie-hybnosti-napätia Diracovho poľa $\Theta_{DIR}^{\mu\nu}$ (v analógii s $\Theta_{EM}^{\mu\nu}$ z kap. I.3.4) ako $g_j = \Theta^{0j}/c$. Pre Diracovo pole to znamená (Dodatok R)

$$\vec{J} = -\frac{i\hbar}{2} \int \vec{r} \times [\Psi^\dagger \nabla \Psi - (\nabla \Psi^\dagger) \Psi] dV + \frac{\hbar}{2} \int \Psi^\dagger \vec{\sigma} \Psi dV = \vec{J}_{orb} + \vec{J}_{spin} = \vec{L} + \vec{S}$$

kde prvý člen opäť reprezentuje *orbitálny* moment Diracovej vlny (nezávisiaci od stavu spinu), a druhý člen reprezentuje spin, presnejšie *strednú hodnotu* operátora¹²⁶ spinu $\frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$, pôsobiaceho na *spinor* (polovicu bispinoru), s vlastnými hodnotami (jedinej) diagonálnej zložky $S_z = \pm \frac{\hbar}{2}$.

Spin elektrónu (a podobných častíc) sa často (a nesprávne) prezentuje ako *relativistický* efekt, vyplývajúci z relativistickej DIR. V skutočnosti však DIR, ako *jedna z viacerých* relativistických pohybových rovníc, je „skonštruovaná“ tak, aby adekvátne opisovala pravdepodobnostné vlnové excitácie („častice“) *práve* so spinom $\frac{1}{2}$. Iná relativistická pohybová rovnica - vlnová rovnica EM poľa pre vektor $\vec{A}$ (pozri kap. II.4.7) opisuje „častice“ so spinom 1 ($S_z = \hbar$). Výraz $\vec{J}_{spin}$ pre *jeden* fotón z kap. II.1.5 je *z-ovou* zložkou spinu (v smere šírenia), pričom pre moment hybnosti fotónu rovnako platí priestorové kvantovanie (kap. II.4.6) s hodnotou $s = 1$, avšak len s priemetmi $m_s = \pm 1$. Absencia priemetu $m_s = 0$ (dostupného podľa pravidiel priestorového kvantovania) súvisí s nulovou hmotnosťou fotónov. Z klasickej predstavy momentu hybnosti ako prejavu rotácie v určitej rovine v kombinácii s relativistickou *kontrakciou rozmerov* v smere pohybu (obr.) totiž vyplynie, že pri translačnej rýchlosti $v = c$ (lebo $m = 0$) nadobúda v *laboratórnej* sústave moment hybnosti len smery pozdĺž translácie.



¹²⁵nem. *Zitterbewegung*.

¹²⁶V *spojitej* súradnicovej reprezentácii definícia strednej hodnoty operátora $\hat{\alpha}$ z Dodatku O prejde na

$$\langle \alpha \rangle = \int \Psi^\dagger \hat{\alpha} \Psi dV$$

Napokon spomeňme aj relativistickú KGR, opisujúcu *bezspinové* „častice“, $s = 0$. Ako teda vidíme, samotná „relativistickosť“ (t.j. lorentzovská symetria) neurčuje veľkosť ani existenciu spinu. Z formalizmu kvantovej mechaniky vyplýva, že operátor spinového momentu hybnosti je generátorom rotácií - v tomto prípade rotácií „okolo vlastnej osi častice“. Spin - jeho existencia aj veľkosť vyjadrujú teda vlastnosti objektu výlučne s ohľadom na takéto rotácie. V Dodatku O sme ukázali, že unitárne posunutie stavu (v smere x) o konečnú vzdialenosť Δx dosiahneme aplikovaním operátora $e^{\frac{i\Delta x}{\hbar}\hat{p}_x}$ na tento stav. Toto pravidlo však platí pre unitárnu transformáciu stavu pozdĺž *akejkol'vek* dynamickej premennej $\mathcal{X}$, generovanú hermitovským operátorom premennej *kánonicky konjugovanej* ku $\mathcal{X}$. Patria sem dvojice $(x, p_x), \dots, (\varphi_x, J_x), \dots$. Rotáciu stavu okolo osi z o uhol $\Delta\varphi_z$ teda dosiahneme aplikovaním operátora $e^{\frac{i\Delta\varphi_z}{\hbar}\hat{J}_z}$.

Naša „častica“ je v priestore rozložená ako *pravdepodobnostné pole* $\psi(\vec{r}, t)$, jej rotáciu „okolo vlastnej osi“ (čiže v pokojovej sústave „častice“, $\vec{L} = 0$) generuje operátor $\hat{J}_z = \hat{S}_z$, a našim stavom je konfigurácia *vnútorných stupňov voľnosti poľa* ψ v každom mieste a čase. Ak ide o *skalárnu* „časticu“, je ψ skalárom s *jediným* (vo všeobecnosti komplexným) stupňom voľnosti - veľkosťou skaláru, a rotácia „okolo vlastnej osi“ o ľubovoľné $\Delta\varphi_z$ ho *nezmení*. Ak ide o *vektorovú* „časticu“ (akou je fotón), je jej vlnovou funkciou vektor s *troma* vnútornými stupňami voľnosti - komponentami vektora v každom bode ($\psi \rightarrow$ vektor EM poľa - EM potenciál $\vec{A}(\vec{r}, t)$). Rotácia vektora o 2π je identitou,

$$e^{i\frac{2\pi}{\hbar}\hat{S}_z} = e^{i\frac{2\pi}{\hbar}m_s\hbar} = e^{\pm i2\pi} = 1 \quad \text{lebo } m_s = \pm 1$$

(V pokojovej sústave sa spin zachováva, takže diagonálny operátor $\hat{S}_z$ nahrádzame vlastnými hodnotami.) Ak ide o *spinorovú* „časticu“ (akou je elektrón), je Ψ spinorom s *dvoma komplexnými* stupňami voľnosti („spin hore“ a „spin dole“), a rotácia o 2π okolo osi z (v každom bode) znamená

$$e^{i\frac{2\pi}{\hbar}\hat{S}_z} = e^{i\frac{2\pi}{\hbar}(\pm\frac{\hbar}{2})} = e^{\pm i\pi} = -1 \quad \text{lebo } m_s = \pm\frac{1}{2}$$

Táto transformácia síce je unitárnou (lebo $|-1| = 1$), ale *vlnová funkcia zmení znamienko* (čo nemá vplyv na pravdepodobnosť). Identitou je teda rotácia o 720° ! Tento podivný výsledok ľahšie pochopíme, ak si v každom bode (časopriestoru) predstavíme „pripnutý“ abstraktný *vnútorný* N -rozmerný priestor, kde N je počet vnútorných stupňov voľnosti. Spinor má 2 komplexné, čiže 4 reálne rozmery, a je teda (na rozdiel od vektora) *rozmerovo nekompatibilný* s fyzikálnym 3D priestorom. Pri rotácii fyzikálneho priestoru (čiže pozorovateľa) sa preto tento vnútorný priestor transformuje *odlišne*.¹²⁷ (Dá sa však ukázať, a vyššie uvedený vzťah pre celkový moment hybnosti $\vec{J}$ to potvrdzuje, že rotácii vektora odpovedá spinorová transformácia $\Psi^\dagger \vec{\sigma} \Psi$.) Kvantifikátorom rotácie vnútorného priestoru je práve spinové kvantové číslo s .

Spinové stupne voľnosti môžeme teda identifikovať ako *polarizačné* stupne voľnosti. V kap. I.4.2 sme prezentovali dve „ortogonálne“ polarizácie *gravitačnej* vlny, odpovedajúce pootočeniu v *našom* 3D priestore o 45° ! Znamená to, že *vnútorný* priestor gravitačného poľa sa otáča „*dvojnásobnou* rýchlosťou“ v porovnaní s *naším* priestorom, čomu odpovedá spin $s = 2$. Predpokladané (dosiaľ experimentálne nepotvrdené) kvantum gravitačného poľa - **gravitón** je teda „časticou“ so spinom 2. Všeobecne platné kvantovanie momentu hybnosti by v tomto prípade viedlo na 5 stavov jeho priemetu s magnetickými kvantovými číslami $m_s = \pm 2, \pm 1, 0$. Keďže však ide o objekt šíriaci sa rýchlosťou c , z rovnakých dôvodov ako v prípade fotónu sa realizujú len dva krajné priemety $m_s = \pm 2$, príslušné k uvedeným kvadrupólovým polarizáciám.

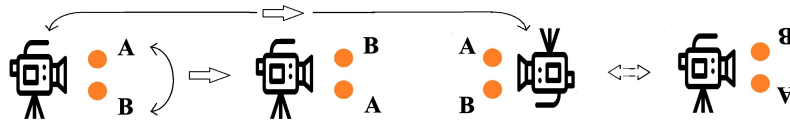
Je spin pohybom? O pohybe v pokojovej sústave „častice“ môžeme hovoriť len v zmysle *stacionárnej rotácie pravdepodobnostného poľa bez jeho zmeny* („čo pritečie to odtečie“), podobne ako pri *orbitálnom* pravdepodobnostnom toku na *stacionárnych* „kružniciach“, či lineárnom pravdepodobnostnom

¹²⁷V „našom“ 3D priestore predstavujú smery pohybu „hore“ a „dole“ *ten istý* stupeň voľnosti. Pre spinory však pojmy „spin hore“ a „spin dole“ vyjadrujú *dva ortogonálne* stupne voľnosti. Zmena z „hore“ na „dole“ totiž vyjadruje rotáciu *pozorovateľa/prístroja* v 3D o 180° , čo v spinorovom priestore znamená (ortogonálnu) rotáciu o 90° .

toku v rovinnej vlne (kap. II.3.5). Z hľadiska rozdelenia pravdepodobností a stredných hodnôt však k žiadnej časovej zmene nedochádza.

II.5.6 Pauliho vylučovací princíp.

Zmena znamienka spinoru pri rotácii o 360° má dopad aj na vzájomnú zámenu spinorových „častíc“. Predpokladajme dve *identické* spinorové „častice“ A a B, rozlíšiteľné len „polohami“ $\vec{r}_A, \vec{r}_B$. V kvantovom kontexte to znamená, že amplitúda pravdepodobnosti tejto konfigurácie je $\psi_A(\vec{r}_A) \cdot \psi_B(\vec{r}_B)$. Zámena polôh týchto „častíc“ znamená v ich pokojovej sústave rotáciu pozorovateľa o 180° (obr.), čo je z pohľadu pozorovateľa ekvivalentné rotácii každej z častíc o 180° ,



$$\psi_{AB} = \psi_A \psi_B \rightarrow e^{i\frac{\pi}{\hbar}\hat{S}_z} \psi_A e^{i\frac{\pi}{\hbar}\hat{S}_z} \psi_B = \dots = -\psi_{AB}$$

Vzájomná zámena *spinorov* teda znamená otočenie znamienka ich spoločnej vlnovej funkcie,

$$\psi_A(\vec{r}_B) \psi_B(\vec{r}_A) = -\psi_A(\vec{r}_A) \psi_B(\vec{r}_B)$$

Ak by sme chceli obe tieto „častice“ lokalizovať v spoločnom mieste, $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 = \vec{r}$, dostali by sme

$$\psi_{AB} = \psi_A(\vec{r}) \psi_B(\vec{r}) = -\psi_A(\vec{r}) \psi_B(\vec{r}) \Rightarrow \psi_{AB} = 0$$

Znamená to, že

nerozlíšiteľné spinorové „častice“ sa nemôžu nachádzať v tom istom priestorovom stave

- to je tzv. **Pauliho vylučovací princíp**. Ak by však spinory ψ_A a ψ_B mali rôzne priemety spinu ($m_s = \pm\frac{1}{2}$), boli by už rozlíšiteľné, a mohlo by platiť aj $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$.

Pauliho vylučovací princíp sa pochopiteľne nevzťahuje na skalárne ($s = 0$) ani vektorové ($s = 1$) „častice“. Platí vo všeobecnosti pre všetky druhy „častíc“ s *poločíselným* spinom - tzv. **fermióny**, a neplatí pre všetky druhy „častíc“ s *celočíselným* spinom - tzv. **bozóny**. Toto delenie „častíc“ má zásadný vplyv na ich kolektívne správanie a štatistiku.

Uvedené závery sa vzťahujú na prípady, keď stav/vlnovú funkciu vieme priradiť *každej* „častici“. Situácia sa skomplikuje v prípade *kvantovo previazaných* objektov, keď dvom či viacerým „časticiam“ priradíme *jediný neredukovateľný* stav. Vlnová funkcia ako reprezentácia takéhoto stavu môže pritom byť symetrickou alebo antisymetrickou vzhľadom na vzájomnú zámenu ľubovoľnej dvojice takto kvantovo previazaných „častíc“. V kap. II.2.5 sme videli, že aj *antisymetricky previazaná* dvojica *fotónov* (bozónov so spinom 1) sa preto riadi Pauliho vylučovacím princípom (ako pár fermiónov).

II.6 Spinový magnetický moment.

II.6.1 Pauliho rovnica.

V relativistickej teórii môžeme EM pole reprezentovať štvorpotenciálom $A_\mu = (\varphi/c, \vec{A})$, a DIR pre „časticu“ s nábojom q v EM poli má potom tvar

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \left(c \vec{\alpha} \cdot \left[-i\hbar \nabla - q \vec{A}(\vec{r}, t) \right] + q\varphi(\vec{r}, t) + \beta mc^2 \right) \Psi(\vec{r}, t) \quad \Psi(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \chi(\vec{r}, t) \\ \xi(\vec{r}, t) \end{pmatrix}$$

Nerelativistickú limitu $0 < E \cong E_0 = mc^2$ získame analogicky ako v kap. II.5.1, teda vyňatím výrazu $e^{-iE_0t/\hbar}$ z riešení pre spinorové zložky bispinoru $\Psi(\vec{r}, t)$

$$\chi(\vec{r}, t) \cong e^{-iE_0t/\hbar} \psi(\vec{r}, t) \quad \xi(\vec{r}, t) \cong e^{-iE_0t/\hbar} \Theta(\vec{r}, t)$$

Úpravami a zanedbaním členov malých oproti E_0 (Dodatok S) dostaneme *nerelativistickú* rovnicu pre spinor ψ - tzv. **Pauliho rovnicu** (PAR)

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} \cong \left[\frac{\left(-i\hbar \nabla - q\vec{A}(\vec{r}, t)\right)^2}{2m} - \frac{q\hbar}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) + q\varphi(\vec{r}, t) \right] \psi(\vec{r}, t) = \hat{H}_{Pauli} \psi(\vec{r}, t)$$

pričom spinor Θ (reprezentujúci *antičasticu*) v tejto limite *zanikne*. V porovnaní so SCHR v EM poli Pauliho hamiltonián obsahuje dodatočný člen s *operátorom*¹²⁸ spinu $\hat{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$. Výraz

$$-\frac{q\hbar}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} = -\frac{q}{m} \hat{S} \cdot \vec{B} = -\hat{\vec{\mu}}_s \cdot \vec{B}$$

má fyzikálny význam operátora interakčnej energie **magnetického dipólu** s dipólovým momentom $\vec{\mu}_s$ v magnetickom poli $\vec{B}$. Podiel tohto magnetického momentu a spinového momentu hybnosti (spinu) sa nazýva **spinovým gyromagnetickým pomerom**,¹²⁹

$$\gamma_s = \frac{\vec{\mu}_s}{\hat{S}} = \frac{q}{m} \quad \text{pre elektrón } q = -e \Rightarrow \vec{S} \uparrow \downarrow \vec{\mu}_s$$

Spinový magnetický moment elektrónu je teda rovnako *priestorovo kvantovaný* ako jeho spin, a jeho *z*-ový priemet nadobúda len hodnoty

$$\mu_{sz} = \mp \frac{e}{m_e} \frac{\hbar}{2} = \mp \mu_B \quad \text{pričom } |\vec{\mu}_s| = \sqrt{3} \mu_B$$

kde $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$ je tzv. **Bohrov magnetón**.

Magnetické pole $\vec{B}$ vstupuje do hamiltoniánu aj prostredníctvom EM potenciálu $\vec{A}$ (vo vybranej kalibrácii), a tým ovplyvňuje smer pohybu „častice“, touto otázkou sa tu však nebudeme zaoberať.

II.6.2 Precesia magnetického momentu.

Podľa zákonov *klasikkej* fyziky by magnetické pole $\vec{B}$ pôsobilo na magnetický moment $\vec{\mu}_s$ momentom sily $\vec{\tau} = \vec{\mu}_s \times \vec{B}$, a menilo by jeho mechanický moment hybnosti $\vec{S}$,

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{\tau} = \vec{\mu}_s \times \vec{B} = \gamma_s \vec{S} \times \vec{B}$$

V prípade $\vec{B} = (0, 0, B)$ by jednotlivé zložky tejto pohybovej rovnice pre $\vec{S}$ boli

$$\frac{dS_x}{dt} = \gamma_s S_y B \quad \frac{dS_y}{dt} = -\gamma_s S_x B \quad \frac{dS_z}{dt} = 0$$

¹²⁸V tom spočíva principiálny rozdiel medzi PAR a SCHR - tá bez operátora pôsobiaceho na spinorovú časť vlnovej funkcie je obyčajnou *skalárnou* rovnicou.

¹²⁹Pre porovnanie, *klasický orbitálny* gyromagnetický pomer nabitkej častice o hmotnosti m na kružnici o polomere r je *polovičný*, $\gamma_{orb} = \frac{q}{2m}$, lebo moment hybnosti cirkulujúcej hmotnosti je $|\vec{L}| = m\omega r^2$, a magnetický moment cirkulujúceho náboja ako prúdovej slučky je $|\vec{\mu}_{orb}| = I\Sigma = \frac{q\omega}{2\pi} \pi r^2 = \frac{q\omega r^2}{2}$.

Znamená to, že $S_z = |\vec{S}| \cos \vartheta$ je zachovávajúcou sa veličinou (ϑ je uhol medzi $\vec{S}$ a $\vec{B}$), kým časový vývoj zvyšných dvoch zložiek je riešením dvojice zviazaných rovníc

$$S_x(t) = |\vec{S}| \sin \vartheta \cos(\omega_s t) \quad S_y(t) = -|\vec{S}| \sin \vartheta \sin(\omega_s t) \quad \omega_s = \gamma_s B = \frac{qB}{m}$$

čo je *precesia* $\vec{S}$ okolo $\vec{B}$ pod uhlom ϑ a s frekvenciou $\omega_s \sim B$ - tzv. **Larmorova precesia**.

V kvantovom formalizme interakciu spinového magnetického momentu s poľom $\vec{B}$ vyjadruje spinová časť Pauliho hamiltoniánu

$$\hat{H}_s = -\frac{q}{m} \hat{\vec{S}} \cdot \vec{B} = -\hat{\vec{\mu}}_s \cdot \vec{B}$$

Skalárny súčin vektorov znamená, že operátorom je operátor *priemetu* spinu do smeru $\vec{B}$, v našom prípade $\hat{S}_z$,

$$\hat{H}_s = -\frac{qB}{m} \hat{S}_z = -\frac{\hbar\omega_s}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vlastnými stavmi $\hat{H}_s$ (aj $\hat{S}_z$) sú $|\psi_+\rangle, |\psi_-\rangle$ s energiami $E_{\pm} = \pm \frac{\hbar\omega_s}{2}$. Pre elektrón je $q = -e$, a teda $E_{\pm} = \pm \mu_B B$, pričom nižšia hodnota energie odpovedá *antiparalelnej* orientácii spinu voči $\vec{B}$. Prechod z jedného stacionárneho stavu do druhého je možný len pohltením/vyžiarovaním kvanta energie $|E_+ - E_-| = \hbar\omega_s (= 2\mu_B B$ pre elektrón).

Všeobecný (nestacionárny) stav je superpozíciou týchto stavov

$$|\psi(t)\rangle = a_+ |\psi_+\rangle e^{-iE_+ t/\hbar} + a_- |\psi_-\rangle e^{-iE_- t/\hbar} = \begin{pmatrix} a_+ e^{-iE_+ t/\hbar} \\ a_- e^{-iE_- t/\hbar} \end{pmatrix}$$

kde koeficienty a_+, a_- sú určené počiatocnými podmienkami, pričom $a_+^2 + a_-^2 = 1$ (normovanie). Bez ujmy na všeobecnosti môžeme preto položiť $a_+ = \cos(\alpha/2)$, $a_- = \sin(\alpha/2)$. Stredné hodnoty (Dodatok O) priemetov spinu na jednotlivé osi budú potom

$$\begin{aligned} \langle S_x \rangle &= \langle \psi(t) | \hat{S}_x | \psi(t) \rangle = \begin{pmatrix} a_+ e^{iE_+ t/\hbar} & a_- e^{iE_- t/\hbar} \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_+ e^{-iE_+ t/\hbar} \\ a_- e^{-iE_- t/\hbar} \end{pmatrix} = \\ &= \dots = \frac{\hbar}{2} \sin \alpha \cos(\omega_s t) \\ \langle S_y \rangle &= \langle \psi(t) | \hat{S}_y | \psi(t) \rangle = \dots = -\frac{\hbar}{2} \sin \alpha \sin(\omega_s t) \\ \langle S_z \rangle &= \langle \psi(t) | \hat{S}_z | \psi(t) \rangle = \dots = \frac{\hbar}{2} \cos \alpha \end{aligned}$$

čo korešponduje s klasickou precesiou, v zmysle Ehrenfestovej teóremy (kap. II.4.5).

II.6.3 Spinová polarizácia a interferencia.

V predchádzajúcom texte sme ukázali, že ak (klasická) častica s nenulovým spinovým magnetickým momentom $\vec{\mu}_s$ vletí do magnetického poľa $\vec{B} = (0, 0, B)$, vektor $\vec{\mu}_s$ bude vykonávať precesný pohyb okolo vektora $\vec{B}$ so zachovávajúcou sa zložkou μ_{sz} . Navyše, ak $\vec{B}$ bude *nehomogénne*, napr. $\frac{\partial B}{\partial z} \neq 0$, na dipól bude pôsobiť sila

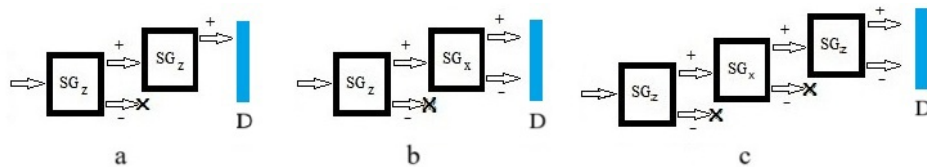
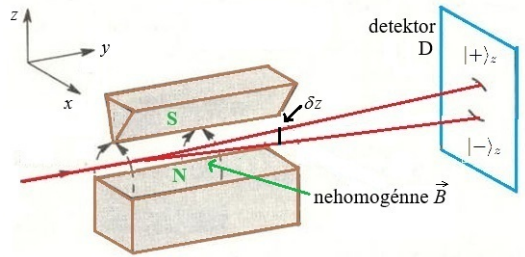
$$\vec{F} = -\nabla \left(-\vec{\mu}_s \cdot \vec{B} \right) \rightarrow \mu_{sz} \frac{\partial B}{\partial z}$$

Pre elektrón so spinom $s = \frac{1}{2}$ je $\mu_{sz} = \pm\mu_B$, čo odpovedá dvom navzájom opačným vychýleniam dráhy častice. Predpokladajme pre jednoduchosť *elektricky neutrálnu* časticu, takže pôjde o jediný vychýľujúci účinok magnetického poľa.¹³⁰

Zariadenie na obr. je **Sternov-Gerlachov prístroj** (SG). Prúd (elektricky neutrálnych) častíc, prelietajúci oblasťou nehomogénneho poľa medzi pólmi magnetu, je rozdelený podľa priemetov μ_{sz} na zväzky vychýľované do rôznych oblastí plošného detektora. Za čas preletu t medzi pólmi sa zväzky rozídu o $\delta z = 2\frac{F_z}{2m}t^2$. Pre jednotlivé *kvantové* „častice“ však platí až do kolapsu na detektore

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_z + |-\rangle_z)$$

Ak sledujeme len *horný* kanál SG_z,¹³¹ „častica“ detegovaná na D bude *s istotou* v stave $|+\rangle_z$, o čom sa môžeme presvedčiť zaradením ďalšieho SG_z (obr. a). Ak však namiesto SG_z zaradíme SG_x (obr. b), na jeho výstupoch dostaneme s pravdepodobnosťou 50:50 stavy $|+\rangle_x$ a $|-\rangle_x$, lebo operátory $\hat{\mu}_{sz}$ a $\hat{\mu}_{sx}$ *nekomutujú*. Ak napokon za horný kanál sekvencie SG_zSG_x zaradíme ďalší SG_z (obr. c), dostaneme s pravdepodobnosťou 50:50 stavy $|+\rangle_z$ a $|-\rangle_z$.



$$|+\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_x + |-\rangle_x)$$

$$|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_z + |-\rangle_z)$$

Ak detektor zaznamená „cvak“, potom (až potom môžeme povedať, že) prvý SG_z *pripravil* „časticu“ v stave $|+\rangle_z$. Ten však nie je vlastným stavom $\hat{\mu}_{sx}$, čiže následným SG_x prejde „častica“ *oboma* kanálmi s 50% pravdepodobnosťou. Ak detektor zaznamená „cvak“ napr. v dolnom kanáli posledného SG_z, história „častice“ (až vtedy) skolabuje do sekvencie stavov $|+\rangle_z \rightarrow |+\rangle_x \rightarrow |-\rangle_z$. Nekomutativnosť $\hat{\mu}_{sz}$ a $\hat{\mu}_{sx}$ spôsobuje, že sekvencia SG_zSG_xSG_z vo všeobecnosti *nezachová* „pripravený“ stav $|+\rangle_z$.

Z *klasického* pohľadu ak častica v stave $|+\rangle_z$ (pripravenom prvým SG_z) prelieta následným SG_x, jej magnetický moment vykonáva precesiu okolo smeru x , čím sa mení μ_{sz} . Na výstupe z SG_x (s ostrou hodnotou μ_{sx}) má preto μ_{sz} *neurčitú* hodnotu, čiže pôvodne pripravený stav $|+\rangle_z$ sa nemusí potvrdiť (následným SG_z). Dá sa táto neurčitosť eliminovať, napr. skrátením doby preletu t či znížením precesnej frekvencie ω_s ? Nedá, ak chceme zachovať ostrú hodnotu μ_{sx} . Tá je totiž podmienená rozlíšením rozbiehavých zväzkov na výstupe z SG_x. Keďže princíp neurčitosti diktuje *nenulovú* šírku zväzku $\Delta x \approx \frac{\hbar}{\Delta p_x}$ a s tým súvisiacu rozbiehavosť $\frac{\Delta p_x}{m}t \approx \frac{\hbar}{m\Delta x}t$ pozdĺž SG_x, podmienka rozlíšiteľnosti zväzkov (a teda ostrości μ_{sx}) je

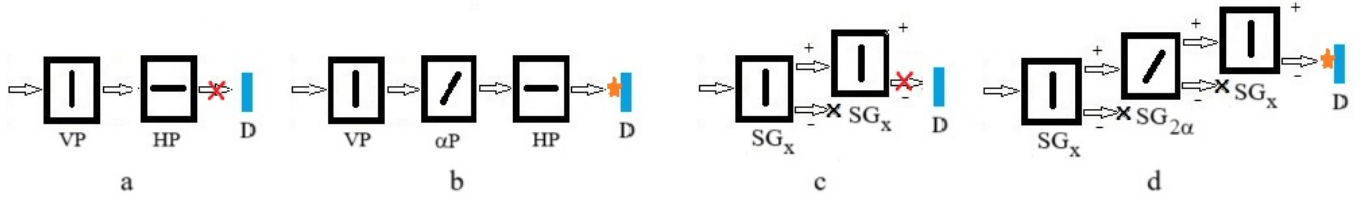
$$\delta x = \frac{F_x}{m}t^2 = \frac{\mu_{sx}}{m} \frac{\partial B}{\partial x} t^2 > \frac{\hbar}{m\Delta x} t \quad \Rightarrow \quad \Delta\omega_s t > 1$$

kde $\Delta\omega_s \approx \frac{\mu_{sx}}{\hbar} \frac{\partial B}{\partial x} \Delta x$ je neurčitosť precesnej frekvencie v dôsledku variácie poľa $\vec{B}$ naprieč zväzkom. Táto podmienka zjavne neumožňuje definovať ostrú hodnotu μ_{sz} . Ak by sme chceli túto podmienku „podliezť“, zväzky na výstupe SG_x by sa zliali, a stratili by sme ostrú informáciu o μ_{sx} .

Všimnime si tiež analógiu medzi polarizátormi fotónov a SG: Výstupnými stavmi polarizátorov VP resp. HP sú navzájom ortogonálne stavy $|V\rangle$ resp. $|H\rangle$, sekvenciou VP-HP teda žiaden fotón nepreletí (obr. a), rovnako ako žiadna spinorová „častica“ s magnetickým momentom nepreletí sekvenciou kanálov SG_x⁺SG_x⁻ (obr. c).

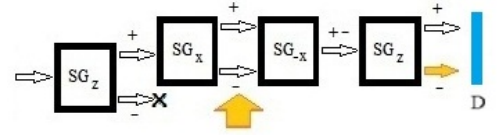
¹³⁰Pre *elektrón* by sme totiž museli dodatočne uvažovať aj vychýlenie v dôsledku magnetickej zložky Lorentzovej sily. Neskôr ukážeme, že existujú aj elektricky neutrálne (kompozitné) častice s *nenulovým* magnetickým momentom.

¹³¹Bázové stavy detektora každého z kanálov sú len „cvak“ a „necvak“.



Vložením αP resp. $SG_{2\alpha}$ (α - uhol voči VP/ SG_x) do týchto sekvencií (obr. b,d) budeme registrovať $(1 - \cos^2 \alpha) \cdot 100\%$ častíc. Spinorovým „časticiam“ odpovedá pootočenie o dvojnásobný uhol v porovnaní s vektorovými fotónmi (kap. II.5.5).

Superpozícia stavov odpovedajúcich jednotlivým kanálom na výstupe SG nielen pripomína prelet „častice“ sústavou štrbín (prípadne MZI), ale fyzikálne je s ňou *identická*. Ak za sekvenciu $SG_z SG_x$ zaradíme SG_{-x} (identický SG_x s *opačne* orientovaným poľom), rozchádzajúce zväzky sa spoja do jediného, ktorý môžeme monitorovať následným SG_z (obr.). Prvý SG_z opäť „pripraví“ stav $|+\rangle_z$, a následný SG_x vyrobí superpozíciu stavov $|+\rangle_x$ a $|-\rangle_x$. Nerušeným prechodom do SG_{-x} tieto dva kanály *interferujú* (stratí sa informácia „*welcher Weg*“), a detektor za posledným SG_z zaregistruje „cvak“ vždy pre $|+\rangle_z$ (horný kanál, konštruktívna interferencia) a „necvak“ pre $|-\rangle_z$ (dolný kanál, deštruktívna interferencia).



Ak však (bližšie nešpecifikovaným spôsobom) lokalizujeme „časticu“ medzi SG_x a SG_{-x} (t.j. vyvoláme kolaps superpozície, žltá šípka na obr.), zrušíme interferenciu, a detektor bude registrovať stavy $|+\rangle_z$ a $|-\rangle_z$ s pravdepodobnosťou 50:50.

Zdôraznime, že ak pozorovaním nenarušíme prelet „častice“ sústavou SG, vloženie sekvencie $SG_x SG_{-x}$ medzi dvojicu SG_z *nezmení* pôvodne pripravený stav. Môže pritom ísť o dvojicu (navzájom inverzných) SG ľubovoľnej orientácie, či dokonca dvojicu úplne odlišných zariadení rozdeľujúcich a následne spájajúcich pripravený stav do/z rôznych „kanálov“. Vo formalizme kvantovej fyziky ide o rozklad stavu do superpozície stavov *ľubovoľnej úplnej* bázy (reprezentácie, kap. II.4.1).

CESTA K ATOMOVEJ FYZIKE

III.1 Atóm.

III.1.1 Základný model atómu.

Súčasná predstava o vnútornej štruktúre **atómov** sa rodila postupne, ruka v ruke so zdokonaľovaním experimentálnych techník a matematického aparátu kvantovej fyziky, ako aj so zbavovaním sa vžitých stereotypov. Rovnako ako pre elementárne „častice“ (akými sú elektrón či fotón), aj pre atóm však platí, že hoci na úrovni elementárnej kvantovej fyziky sa atóm nepodobá ničomu, čo poznáme z našej každodennej skúsenosti, na vyššej úrovni komplexity hmoty (ako napr. v chémii alebo pri skúmaní štruktúry a vlastností materiálov) sú „hračkárske modely“ atómu nielen prípustné, ale aj (vďaka svojej názornosti a jednoduchosťi) užitočné. V tejto časti však načrtujeme obraz atómu vychádzajúci z elementárnych faktov a súvislostí prezentovaných v predchádzajúcom texte.

O elementárnych „časticiach“ vieme, že ak sú *izolované* od okolia, nemá zmysel hovoriť o ich rozmeroch. (Najlepším príkladom sú páry „častíc“ z kap. II.2, kvantovo previazané na makroskopických vzdialenostiach.) Dokážeme ich viac-menej lokalizovať interakciou s makroskopickým okolím (čo modelujeme rôznymi potenciálovými jamami, ako v kap. II.3.5). Ak však elementárne častice *navzájom* silovo (napr. elektrostaticky) interagujú, vytvárajú viac-menej lokalizované zhľuky aj *bez* pôsobenia makroskopického okolia. To je práve prípad atómov. Dnes spoľahlivo vieme, že prakticky celá hmotnosť atómu je sústredená v jeho **jadre**,¹ ktoré je veľmi dobre lokalizované na rozmere $\approx 10^{-15}\text{m}$. Jadro je zhľukom určitého počtu **nukleónov** - **protónov** (**protónové číslo** Z určuje **chemický prvok**) a **neutrónov** ($A - Z$, kde A je **nukleónové číslo** určujúce **izotop** prvku), ktoré sami osebe sú zhľukmi ešte elementárnejších „častíc“. Podrobnejšiemu opisu atómového jadra sa venujú kap. III.2 a III.3, nateraz si vystačíme s faktom, že daný počet protónov s celkovým elektrickým nábojom $+Ze$ vytvára prakticky sférickú potenciálovú jamu, v ktorej viac-menej lokalizuje odpovedajúci počet elektrónov (Z pre neutrálny atóm) na vzdialenosti $\approx 10^{-10}\text{m}$.

Uvedená hodnota predstavuje *minimálny* rozmer atómu, vyplývajúci z princípu neurčitosti: Predpokladajme atóm s číslom $Z = 1$ (vodík) a polomerom a . Pre neurčitosti polohy a hybnosti elektrónu platí $\Delta x \approx a$, $\Delta p_x \approx \hbar/a$ (a rovnako pre y, z). Neurčitosti kinetickej a potenciálnej energie elektrónu sú potom

$$\Delta E_{kin} \approx \frac{(\Delta p_x)^2}{2m_e} \approx \frac{\hbar^2}{2m_e a^2} \qquad \Delta E_{pot} \approx -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

Minimálnu energiu - základný stav atómu - dostaneme z podmienky $\frac{d}{da}(E_{kin} + E_{pot}) = 0$, čo vedie na

$$a \approx \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} \cong 0.5 \text{ nm} \qquad E_{min} \approx -\frac{m_e e^4}{32(\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \approx -13.6 \text{ eV} \qquad (1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J})$$

¹Tento fakt bol prvýkrát doložený experimentmi H. Geigera a E. Mardsena pod vedením E. Rutherforda v r. 1911, keď skúmali rozptyl energetických α -častíc na tenkej zlatej fólii.

Záporná hodnota energie znamená, že ide o **viazaný stav** - na uvoľnenie elektrónu z potenciálovej jamy jadra treba energiu *dodať*.

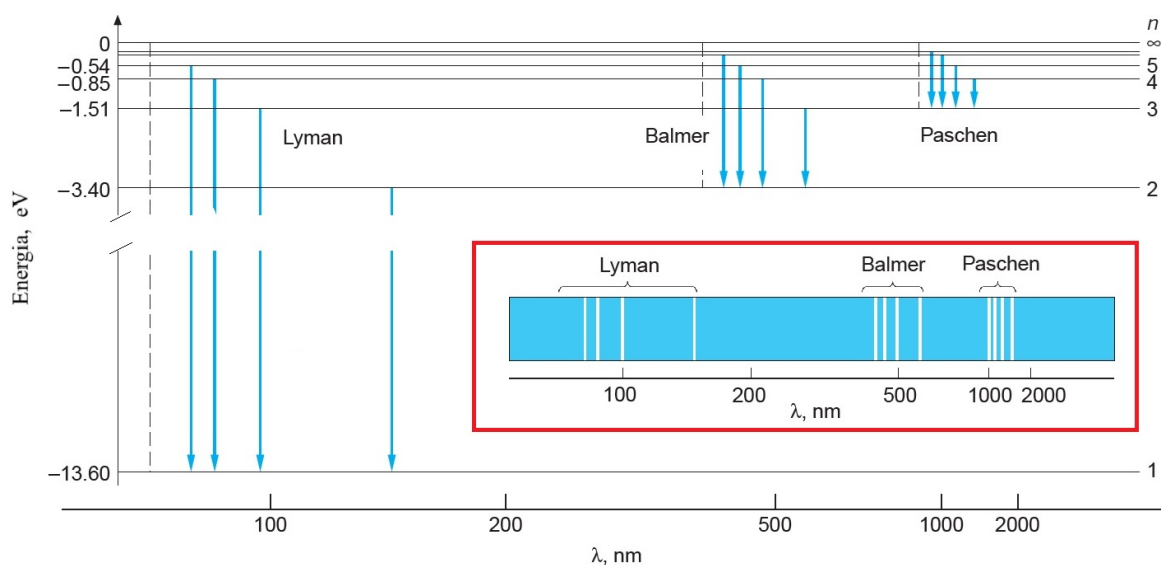
„Pohyb“ nerelativistického elektrónu (a pri ignorovaní jeho spinu) v dokonale sférickom coulombovskom potenciáli (nehybného) protónu - zjednodušený model izolovaného atómu vodíka - sa dá exaktne vyriešiť pomocou SCHR. Technické detaily riešenia presahujú záber tohto textu, uvedieme tu však jeho najdôležitejšie závery. Prvým je existencia *stacionárnych* stavov elektrónu s energiami (vlastnými hodnotami hamiltoniánu, nezávisiaceho explicitne od času), nadobúdajúcimi kvantované hodnoty

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{32(\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2 n^2} = \frac{E_1}{n^2}$$

pričom $E_1 = E_{min}$ je energia základného stavu. Tak ako v prípade všetkých stacionárnych stavov (pozri kap. II.3.5), priestorové rozdelenie pravdepodobnosti *detekcie* elektrónu sa v čase nemení, a nemá zmysel hovoriť o pohybe v klasickom ponímaní. (Kladné hodnoty kinetickej energie odzrkadľujú len cirkuláciu amplitúdy pravdepodobnosti s *nulovou divergenciou*.) Tento výsledok bol veľkým triumfom rodiacej sa kvantovej mechaniky, pretože vyriešil dilemu stability atómu,² a vypočítané *rozdiely* energetických hladín veľmi presne reprodukovali série spektrálnych čiar v meraných absorpčno-emisných spektrách vodíka (obr., s vloženým emisným spektrom na tmavom pozadí),

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\omega}{2\pi c} = \frac{E_j - E_k}{hc} = \frac{E_1}{hc} \left(\frac{1}{n_k^2} - \frac{1}{n_j^2} \right) = R \left(\frac{1}{n_k^2} - \frac{1}{n_j^2} \right)$$

kde $R \cong 1.1 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ je tzv. **Rydbergova konštanta**. K vyžarovaniu (a rovnako aj pohlcovaniu) EM energie atómom teda dochádza len pri *kvantových skokoch* medzi stacionárnymi energetickými hladinami.



Silu princípu korešpondencie (kap. II.2.2) dokumentuje „hračkársky“ **Bohrov model** atómu,³ ktorý *postuluje* stacionárne obežné dráhy elektrónu, na ktorých elektrón nevyžaruje. Model poskytuje správne hodnoty stacionárnych energií na týchto dráhach na základe toho, že v *klasicknej* limite $n \rightarrow \infty$ (teda pre vysoké hladiny so zanedbateľnými vzájomnými odstupmi) stotožňuje kvantované frekvencie žiarenia s kruhovými frekvenciami klasického obehu (a vyžarovania). Pre klasický pohyb elektrónu obvodovou rýchlosťou v po kruhovej orbite o polomere r okolo jadra, danej rovnováhou

²Prevládajúcou predstavou v počiatkoch kvantovej mechaniky bol totiž model elektrónov *obiehajúcich* okolo jadra (na spôsob planét), čo by však muselo viesť ku spojitému vyžarovaniu EM energie (na frekvenciách odpovedajúcich kruhovým frekvenciám obehu) a postupnému ale rýchlemu pádu elektrónov na jadro, čiže ku zborteniu atómu.

³Sformuloval ho N. Bohr v r. 1911. Hoci nejde o správny model, jeho historický význam pri budovaní modernej fyziky je nespochybniteľný.

dostredivej Coulombovej a zotrvačnej odstredivej sily, platí

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = \frac{m_e v^2}{r} = \dots = \frac{L^2}{m_e r^3}$$

kde $L = m_e v r$ je orbitálny moment hybnosti elektrónu. Kinetická a celková energia elektrónu sú potom

$$E_{kin} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \quad E = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} = \dots = -\frac{m_e e^4}{32(\pi\epsilon_0)^2 L^2}$$

Podľa klasickej fyziky orbitujúci náboj stráca energiu vyžarovaním EM vlny na frekvencii svojho orbitálneho pohybu $\omega = \frac{L}{m_e r^2}$. Strata energie sa prejaví poklesom jeho momentu hybnosti

$$\frac{dE}{dL} = \dots = \frac{m_e e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 L^3} = \dots = \omega$$

Ak je úbytok energie ΔE nepatrný, odpovedajúca zmena momentu hybnosti sa prejaví skôr zmenou polomeru než frekvencie ($L \sim r^2$, kým $L \sim \omega$), a teda

$$\Delta E = \omega \Delta L$$

Ak vychádzame z predpokladu, že tento úbytok energie sa vyžiarí ako fotón, teda $\Delta E = n\hbar\omega$, potom porovnaním týchto dvoch výrazov dostávame $\Delta L = \hbar$. To však znamená, že elektrón v atóme môže existovať len na dráhach s kvantovaným momentom hybnosti

$$L_n = n\hbar \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Odtiaľ pre polomery takýchto stacionárnych dráh platí

$$r_n = \frac{n^2 \hbar^2 4\pi\epsilon_0}{m_e e^2}$$

Pre najnižšiu dráhu $n = 1$ je $r_1 \cong 0.5\text{\AA}$ - tzv. **Bohrov polomer** atómu. Aj keď energie týchto stacionárnych hladín sú zhodné s hodnotami vypočítanými zo SCHR, výsledky pre moment hybnosti korešpondujú s jeho priestorovým kvantovaním (kap. II.4.6) len pre $n \rightarrow \infty$ (keď sa maximálny priemet $L_z = n\hbar$ prakticky zhoduje s $|\vec{L}| = \sqrt{n(n+1)}\hbar$). Skombinovanie Bohrovho modelu s de Broglievovou hypotézou $\lambda = h/|\vec{p}|$ viedlo k záveru, že stacionárne dráhy spĺňajú podmienku *stojatých vĺn*, $2\pi r_n = n\lambda_n$, čo bol definitívny odklon od klasickej predstavy elektrónu-projektilu, a rozpoznanie príčiny „kvantovania“ energie na diskkrétne hladiny v priestorovom ohraničení delokalizovaného elektrónu.

III.1.2 Atómové orbitály.

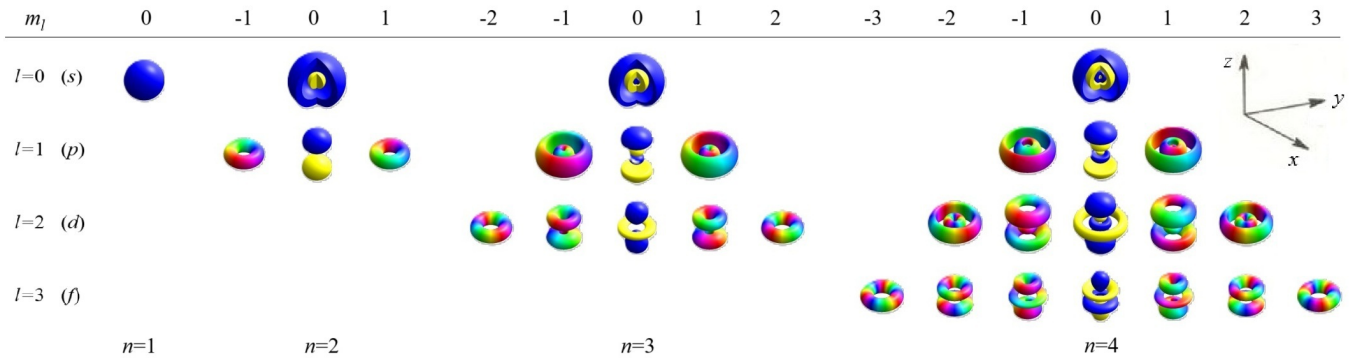
Najdôležitejším výsledkom riešenia SCHR pre atóm *vodíka* je priestorové rozloženie amplitúdy pravdepodobnosti - vlnovej funkcie elektrónu $\psi(\vec{r})$. Stacionárnym stavom elektrónu odpovedajú **orbitály** s *priestorovo kvantovaným* momentom hybnosti (kap. II.4.6). Každý orbitál je teda definovaný trojicou kvantových čísel, n, l, m_l . V najjednoduchšom priblížení (so sférickým coulombovským potenciálom jadra) je energia daného stavu určená *výlučne hlavným kvantovým číslom* n (kap. III.1.1). Každéj energetickej hladine odpovedá práve n rôznych hodnôt veľkosti momentu hybnosti, určených **orbitálnym kvantovým číslom** l

$$l = 0, 1, \dots, (n-1) \quad |\vec{L}| = \sqrt{l(l+1)}\hbar$$

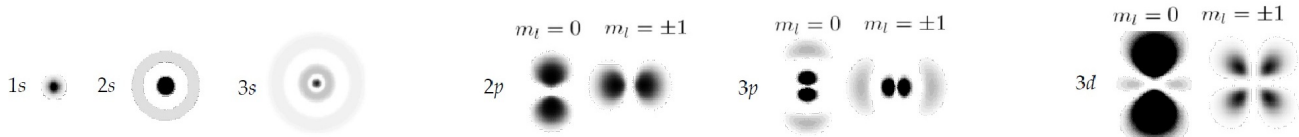
Pre každé l existuje $2l+1$ priemetov $\vec{L}$ do zvoleného smeru, kvantifikovaných **orbitálnym magnetickým kvantovým číslom** m_l

$$m_l = \pm l, \pm(l-1), \dots, 0 \quad L_z = m_l \hbar$$

Tieto stavy $|\psi_{nlm_l}\rangle$ sú teda súčasne *vlastnými* stavmi komutujúcich operátorov $\hat{H}, \hat{L}^2, \hat{L}_z$.



Keďže operátor $\hat{L}_z$ generuje rotáciu stavu okolo osi z , všetky jeho vlastné stavy, spĺňajúce rovnosť $\hat{L}_z|\psi_{nlm_l}\rangle = m_l|\psi_{nlm_l}\rangle$, sú *rotačne symetrické* (obr.). Stavy s $l = 0$ (a teda aj $m_l = 0$) - tzv. *s-orbitály* - majú dokonalú *sférickú* symetriu a nulový moment hybnosti. Aj *nenulový* moment (pre $l > 0$) však znamená len rotáciu vlnovej funkcie pri nemeniacej sa hustote pravdepodobnosti $\psi^*\psi$. V žiadnom prípade teda nejde o pohyb elektrónu v klasickom zmysle, a *elektrón môžeme stotožniť s jeho orbitálom*. Orbitály sa v literatúre často zobrazujú prostredníctvom akýchsi „rezov“ v rovine yz (obr., sýtosť určuje $\psi^*\psi$).



Na každú energetickú hladinu teda pripadá n^2 orbitálov. Elektrón v stave s kvantovými číslami n, l, m_l však môže existovať v dvoch rôznych *spinových* stavoch, $|\psi_{nlm_l+}\rangle$ a $|\psi_{nlm_l-}\rangle$, odlíšených **spinovým magnetickým kvantovým číslom** $m_s = \pm\frac{1}{2}$, s hodnotami priemetu spinu $s_z = \pm\frac{\hbar}{2}$. Bez prítomnosti magnetického poľa sú tieto spinové stavy energeticky ekvivalentné, a teda každá energetická hladina E_n je $2n^2$ -násobne degenerovaná⁴ - prislúcha jej $2n^2$ energeticky ekvivalentných stavov $|\psi_{nlm_l m_s}\rangle$.

V prítomnosti magnetického poľa $\vec{B}$ je však situácia odlišná. Pri uvažovaní spinu musíme SCHR nahraďiť (rovnako *nerelativistickou*) PAR (kap. II.6.1), ktorej hamiltonián v magnetickom poli má tvar

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{1}{2m} \left(-i\hbar\nabla + e\vec{A} \right)^2 - e\varphi + \frac{2\mu_B}{\hbar} \hat{\vec{S}} \cdot \vec{B} = \\ &= -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} - e\varphi - \frac{i\hbar e}{m} \left(\nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla \right) + \frac{e^2}{2m} A^2 + \frac{2\mu_B}{\hbar} \hat{\vec{S}} \cdot \vec{B}\end{aligned}$$

Pri voľbe symetrickej kalibrácie $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$ (spĺňajúcej $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$), s využitím vektorových identít $\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}) = \vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) = (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b}$ a definičného vzťahu pre orbitálny moment hybnosti $\hat{\vec{L}} = \vec{r} \times \hat{\vec{p}} = -i\hbar\vec{r} \times \nabla$ nadobudne hamiltonián tvar

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} - e\varphi + \frac{e^2}{8m}(\vec{B} \times \vec{r})^2 + \frac{\mu_B}{\hbar}(\hat{\vec{L}} + 2\hat{\vec{S}}) \cdot \vec{B}$$

Posledné dva členy sú interakčné hamiltoniány *orbitálneho* a *spinového magnetického* momentu (kap. II.6.2) v poli $\vec{B}$, s operátormi

$$\hat{\vec{\mu}}_l = \frac{\mu_B}{\hbar} \hat{\vec{L}} \qquad \hat{\vec{\mu}}_s = 2\frac{\mu_B}{\hbar} \hat{\vec{S}}$$

Rôznym priestorovo kvantovaným priemetom magnetických momentov odpovedajú *rôzne* energie, čiže pôvodné degenerované energetické hladiny sa štiepia na podhladiny - vzniká **jemná štruktúra**

⁴Uvedená degenerácia platí len pre elektrón výlučne v coulombovskom potenciáli *jadra*, $\sim \frac{1}{r}$, čiže v neprítomnosti iných elektrónov, t.j. pre atóm vodíka alebo ión hélia. Situáciu pre atómy/ióny s viacerými elektrónmi opíšeme nižšie.

spektrálnych čiar, s rozlíšením čiar úmerným $|\vec{B}|$ - tzv. **Zeemanov jav**.⁵ V nerelativistickom priblížení interaguje každý z týchto momentov s magnetickým poľom *samostatne*, z relativistickej DIR však vyplýva (kap. II.5.4), že spinové ani orbitálne momenty sa nezachovávajú *samostatne*, a treba ich nahradiť *celkovými* momentmi s operátormi⁶

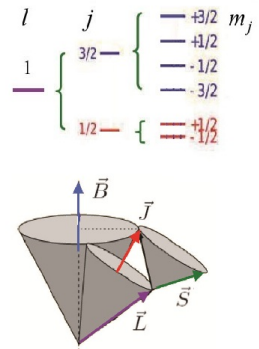
$$\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}} \quad \hat{\vec{\mu}}_j = g \frac{\mu_B}{\hbar} \hat{\vec{J}}$$

kde g je tzv. **Landého faktor**, ktorého hodnota je 1 pre čisto orbitálny moment, 2 pre čisto spinový moment, a hodnota v tomto intervale pre zmiešaný moment. Zachovávajúcimi sa (a teda priestorovo kvantovanými) sú potom hodnoty $|\vec{J}|$ a J_z s kvantovými číslami j, m_j

$$j = l + s, l + s - 1, \dots |l - s| \quad m_j = -j, -j + 1, \dots j - 1, j$$

$$J = \sqrt{j(j+1)}\hbar \quad J_z = m_j \hbar$$

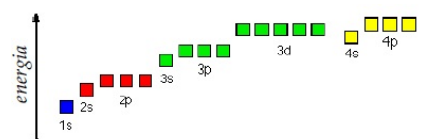
Klasickou analógiou Zeemanovho javu je precesia $\vec{J}$ a $\vec{\mu}_j$ okolo smeru $\vec{B}$ pod rôznymi kvantovanými uhlami.



III.1.3 Periodická tabuľka prvkov.

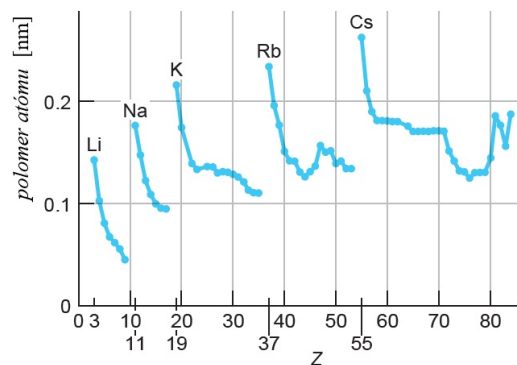
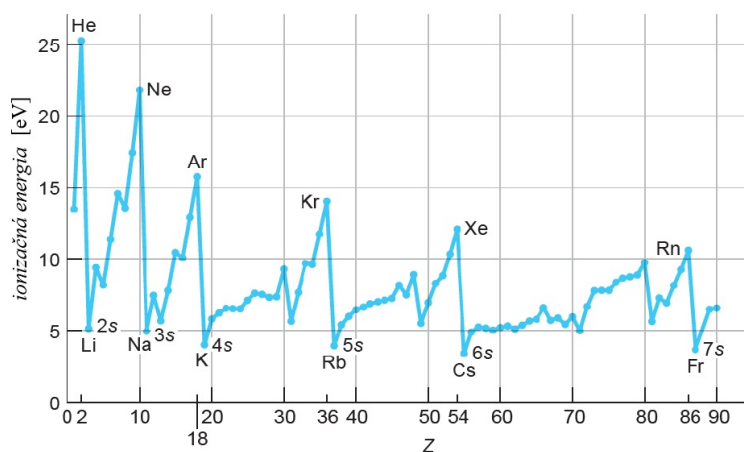
Pre atómy s protónovým číslom $Z > 1$ poskytuje SCHR aj pri zanedbaní relativistických efektov iba približné riešenia, v dôsledku zložitých *vzájomných* interakcií medzi elektrónmi v atómovom obale. Ak ich zanedbáme, dostávame riešenia ako pre atóm vodíka, ale s náhradou $e \rightarrow Ze$ v coulombovskej interakcii s jadrom. V súlade s Pauliho vylučovacím princípom (kap. II.5.6) môže byť každý orbitál obsadený najviac dvoma elektrónmi s *opačným* spinom. Vlnová funkcia reprezentujúca orbitál je potom (pri zanedbaní vzájomnej interakcie medzi elektrónmi v orbitále) *súčinom* jedoelektrónových vlnových funkcií, napr. základný stav atómu ${}_2\text{He}$ je $\psi = \psi_{100+} \psi_{100-}$. Pre najbližší ťažší atóm, ${}_3\text{Li}$, tretí elektrón musí už obsadiť ďalší orbitál, vo **vrstve** $n = 2$. Sféricke priestorové rozloženie náboja $-2e$ v obsadenej vrstve $n = 1$ (obsahujúcej jediný orbitál $1s$) však spôsobuje, že tento elektrón už „pociťuje“ *čistočne oddienené* pole bodového náboja jadra, teda $E_{pot} \propto 1/r$, a jeho energia už bude (aj pre $|\vec{B}| = 0$) závisieť tiež od orbitálneho kvantového čísla l , teda E_{nl} . Odlišná priestorová konfigurácia orbitálov **podvrstiev** $l = 0$ a $l = 1$ (pozri obr. v kap. III.1.2) totiž znamená rozdielnu mieru penetrácie do vrstvy $n = 1$, čiže odlišnú mieru tienenia. Energia podhládín teda vo všeobecnosti narastá s rastúcim l .

Počty stavov v jednotlivých podvrstvách $s, p, d, f, \dots$ (čiže $l = 0, 1, 2, 3, \dots$) sú 2, 6, 10, 14, ..., a teda v jednotlivých vrstvách n sú 2, 8, 18, 32, atď. Pre ľahšie prvky sa s narastajúcim protónovým číslom postupne obsadzujú stavy s narastajúcim l v danej vrstve n . Nárast elektrónového tienenia *v danej* vrstve pritom zaostáva za nárastom príťažlivého potenciálu jadra, a tým rastie aj **ionizačná energia** (energia potrebná na vytrhnutie elektrónu z atómového obalu), a periodické maximum dosiahne pre zaplnenú vrstvu. Počnúc vrstvou $n = 4$ však najmä koncentrovanejšie podvrstvy s (a neskôr aj p) penetrujú do nižšej vrstvy so slabším tienením, a postupnosť zaplnovania sa naruší. Ionizačná energia preto dosahuje maximá pre hodnoty $Z = 2, 10, 18, 36, 86$, čo sú *inertné* prvky Ne, Ar, Kr, Xe, Rn. Z rovnakých dôvodov má oscilujúci charakter aj atómový polomer, s maximami pre prvky nasledujúce za inertnými.



⁵Tento jav pozoroval v r. 1896 holandský fyzik P. Zeeman (čítaj *zéman*), Nobelovu cenu zaň získal v r. 1902.

⁶Vzhľadom na pravidlá priestorového kvantovania treba kvantovomechanické sčítavanie *vektorov* momentov chápať ako sčítavanie ich *priemetov*. Klasickou analógiou sčítania $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}$ by bola precesia $\vec{L}$ a $\vec{S}$ okolo smeru $\vec{J}$.



III.1.4 Chemická väzba a molekuly.

Väzbe atómov do molekúl hovoríme **chemická väzba**. Dochádza k nej ak energia molekuly ako celku je nižšia než energia izolovaných atómov. Existujú dva základné mechanizmy väzby, spravidla však ide o ich kombináciu.

Najjednoduchšou je **iónová väzba**. Vzniká medzi atómami s malou ionizačnou energiou E_i a atómami s vysokou **elektrónovou afinitou** E_a - energiou, ktorá sa uvoľní prijatím elektrónu neutrálnym atómom. Tá je najvyššia u atómov s jedným chýbajúcim elektrónom do zaplnenia vrstvy. Zbavením sa „vyčnievajúceho“ resp. získaním „chýbajúceho“ elektrónu vzniknú ióny opačných polarít so *sférickým* elektrickým poľom, ktoré sa navzájom priťahujú, čím sa uvoľní energia potrebná na prekonanie rozdielu $E_i - E_a$. Zmenšovanie vzdialenosti vzájomným priťahovaním sa zastaví prekryvom elektrónových obalov, ktorý núti elektróny v dôsledku Pauliho vylučovacieho princípu obsadzovať vyššie energetické hladiny.

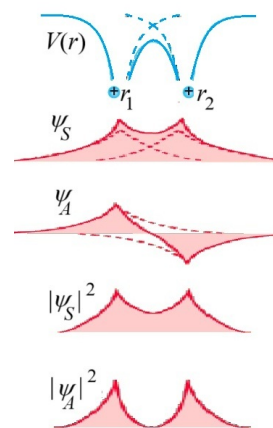
Druhým základným mechanizmom je **kovalentná väzba**, v ktorej atómy *zdieľajú spoločné* elektróny, aby doplnili svoje vonkajšie vrstvy. Príkladom je molekula H_2 . Ak by sme v tomto prípade uvažovali s mechanizmom iónovej väzby, energetická bilancia by k stabilnému stavu nevedla. Podstatu kovalentnej väzby najlepšie pochopíme, ak najprv preskúame molekulový ión H_2^+ , teda dvojicu protónov zviazanú *jediným* elektrónom. V kap. II.3.5 sme videli, že:

- 1.) energie stacionárnych stavov elektrónu uväzneného v potenciálovej jame o šírke L sú $E_n \sim \frac{1}{L^2}$,
- 2.) ak sú dve jamy oddelené dostatočne tenkou potenciálovou bariérou V , existuje nenulová pravdepodobnosť preniknutia - *tunelovania* elektrónu touto bariérou aj pre $E_n < V$.

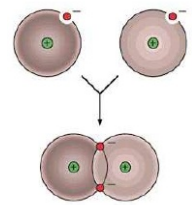
Takýmito jamami sú potenciály jadier natoľko blízko pri sebe, že oblasť výskytu jediného elektrónu sa môže tunelovaním rozšíriť na *obe* jamy, čím sa *zníži* jeho energia. Symetria jám si vyžaduje symetriu $|\psi(r)|^2$, samotná amplitúda $\psi(r)$ ako superpozícia lokalizácií v jednotlivých jamách pritom môže byť *symetrická* aj *antisymetrická* (obr.),

$$\psi_S = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi(r_1) + \psi(r_2))$$

$$\psi_A = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi(r_1) - \psi(r_2))$$

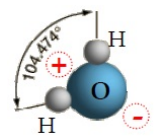


V limite $|r_1 - r_2| \rightarrow 0$ prejde ψ_S na základný stav elektrónu v jame, kým ψ_A na prvý vzbudený stav (pozri obr. v kap. II.3.5) - stav ψ_S je teda energeticky výhodnejší. Je to očakávaný výsledok, lebo koncentrácia záporného náboja v priestore medzi kladnými jadrami ich navzájom viaže. Pre neutrálnu molekulu H_2 to znamená dvojicu elektrónov, a teda silnejšiu väzbu a menšiu vzdialenosť jadier v porovnaní s molekulovým iónom.



Zámena dvoch *fermiónov* musí v súlade s Pauliho vylučovacím princípom podľa kap. II.5.6 viesť ku zmene znamienka vlnovej funkcie páru. Antisymetrickosť vlnovej funkcie ψ_S je zabezpečená jej *spinorovou* časťou - spiny elektrónov sú orientované *antiparalelne*, a výsledný spin *páru* je $s = 0$ - tzv. **singlet**. Ak by sa naopak realizovala *antisymetrická priestorová* vlnová funkcia ψ_A , jej spinorová časť by musela byť symetrickou - tzv. **triplet** s celkovým spinom $s = 1$ a tromi možnými priemetmi ($m_s = 0, \pm 1$). Pauliho vylučovací princíp je zodpovedný aj za nestabilitu molekuly H_3 : Keďže oba elektróny molekuly H_2 obsadzujú stavy $1s$, tretí elektrón by musel obsadiť vyšší stav, čo je už energeticky nevýhodné.

Molekuly atómov rovnakého druhu (ako O_2 , N_2 , atď.) sú tvorené výlučne kovalentnou väzbou, u molekúl s rôznymi atómami ide spravidla o zmes kovalentnej a iónovej väzby. Vďaka podielu iónovej väzby (resp. vďaka rozdielu **elektronegativít** atómov - schopnosti priťahovať valenčné elektróny) vykazujú viaceré molekuly *elektrický dipólový moment* $\vec{p}$ (napr. H_2O , obr.). Hovoríme o **polárnych molekulách**, v okolí ktorých existuje slabé dipólové elektrické pole $\vec{E}_d \sim \frac{1}{r^3}$ (hoci sú elektricky neutrálne). Iné polárne molekuly s momentom $\vec{p}'$ v ich blízkom okolí sú potom priťahované silou $\vec{F} = -\frac{\partial(-\vec{p}' \cdot \vec{E}_d)}{\partial r}$ s krátkym dosahom $\sim \frac{1}{r^4}$. Ide o **dipól-dipólovú interakciu**. Fluktuácie nábojovej hustoty v atómoch a *nepolárnych* molekulách takisto spôsobujú dipólový moment fluktuujúci okolo nulovej hodnoty, čo vedie na veľmi slabú - **van der Waalsovú** príťažlivú interakciu, so silovým dosahom $\sim \frac{1}{r^7}$. Keďže však takéto interakcie nijak zásadne nenarušujú *vnútornú štruktúru* molekúl, nemá zmysel v ich prípade hovoriť o *chemických* väzbách.



III.1.5 Stimulovaná a spontánna emisia a absorpcia.

V tejto kapitole rozoberieme kvantové preskoky atómov a molekúl medzi energetickými hladinami za účasti EM poľa. Tieto hladiny sú stacionárnymi riešeniami SCHR (spravidla v určitom priblížení). Predovšetkým, musíme mať na pamäti, že slovné spojenie „*prechod medzi stacionárnymi stavmi*“ je oxymoron⁷ - *stacionárne* stavy sú totiž z *definície* neinteragujúce, nevymieňajúce si energiu s okolím a teda *trvalo* si zachovávajúce energiu. Stavy, medzi ktorými dochádza k preskokom, majú teda *konečnú dobu života*, Δt , a ich energie musia mať prirodzenú neurčitosť ΔE , pričom platí

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

Hoci táto nerovnosť pripomína princíp neurčitosti, a v kontexte vlnového balíka (kap. II.3.1) je s ním dokonca ekvivalentná ($\Delta k \Delta x \geq \frac{1}{2}$, $\Delta \omega \Delta t \geq \frac{1}{2}$), vo formalizme nerelativistickej kvantovej mechaniky nie je čas (na rozdiel od súradnice) dynamickou premennou ale *parametrom* (nepriradujeme mu operátor). Fyzikálne ho však za princíp neurčitosti môžeme považovať v tom význame, že Δt predstavuje dobu, po ktorú nedochádza k „pozorovateľnej“ zmene stavu, a teda energie.⁸ Význam ΔE je pritom opäť len *štatistický*. V praxi to znamená, že pri meraní spektier atómov a molekúl

⁷oxymoron = spojenie slov protirečivého významu

⁸Zmena stavu kvantového systému môže nastať len interakciou - výmenou energie - s okolím (energia neinteragujúceho systému sa zachováva), s *neredukovateľným* minimálnym účinkom $\approx \hbar$.

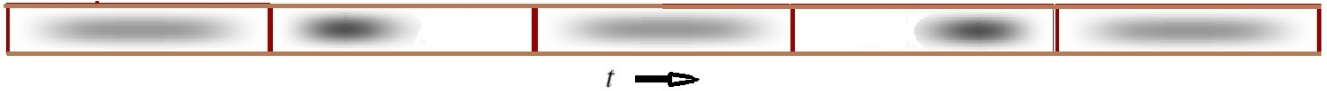
má každá emisná/absorpčná spektrálna čiara *nenulovú šírku*, spôsobenú (popri iných vplyvoch aj) štatistickým rozptylom hodnôt E_j v súbore atómov.

Predpokladajme teraz ako modelový systém elektrón v jednorozmernej potenciálovej jame z kap. II.3.5 s dvoma dostupnými hladinami E_1 a E_2 ($E_2 > E_1$), nachádzajúci sa v *nestacionárnom* stave v podobe superpozície stacionárnych stavov

$$\psi(x, t) = a_1\psi_1(x, t) + a_2\psi_2(x, t) \quad \psi_{1,2}(x, t) = \psi_{1,2}(x)e^{-iE_{1,2}t/\hbar} \quad |a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$$

Neurčitost energie tohto stavu je $\Delta E = E_2 - E_1$. Pre hustotu pravdepodobnosti $|\psi(x, t)|^2$ platí

$$|\psi(x, t)|^2 = \psi^*(x, t)\psi(x, t) = \dots = a_1^2\psi_1^2(x) + a_2^2\psi_2^2(x) + 2a_1a_2\psi_1^2\psi_2^2 \cos \omega_{12}t \quad \omega_{12} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$$



Priestorové rozloženie pravdepodobnosti elektrónu pozdĺž jamy *sa mení v čase* (obr.), nemení sa však váha stavov ψ_1 a ψ_2 , a teda ani pravdepodobnosť „nájdenia“ systému v týchto stavoch (t.j. kolapsu do niektorého z nich pri interakcii). Bez interakcie s okolím je takýto kvantový stav len matematickou konštrukciou, opäť však využijeme princíp korešpondencie: Odpovedajúci *makroskopický* stav by predstavoval oscilujúcu *nábojovú hustotu* - *oscilujúci elektrický dipól*, ktorý je „anténou“ pre emisiu/absorpciu *vektorového* (spin 1) EM poľa. Takýto stav nám teda slúži na opis interakcie s vonkajším EM poľom, ktoré modelujeme *ako časovo premennú* poruchu hamiltoniánu,

$$H_{EM}(t) = -e\varphi(x, t) = e \int E_x e^{-i\omega t} dx = eE_x e^{-i\omega t} x$$

(Predpokladáme, že vlnová dĺžka EM vlny $\gg$ rozmer atómu.) To sa prejaví časovou závislosťou váhových koeficientov, $a_{1,2}(t)$ - pravdepodobnosti nájdenia elektrónu na hladine E_1 alebo E_2 sa budú meniť. Výpočtom (ktorý presahuje rámec tohto textu) sa dá ukázať, že ak $\omega \cong \omega_{12}$, naozaj rastie pravdepodobnosť elektrónového preskoku $\psi_1 \rightarrow \psi_2$ *pohltením* fotónu, ale aj preskoku $\psi_2 \rightarrow \psi_1$ *vyžiarením* fotónu. Hovoríme o **stimulovanej absorpcii/emisii**, pričom ich pravdepodobnosť závisí od hustoty EM energie $w(\omega)$.

Predpokladajme teraz obrovský štatistický súbor N *identických* dvojhladinových systémov opísaných vyššie, v tepelnom kontakte s rezervoárom o teplote T (a izolovaný od iných zdrojov energie), pričom N_1 systémov sa nachádza v stave ψ_1 a N_2 systémov v stave ψ_2 . Pri $T = 0K$ budú všetky systémy v *základnom* stave s energiou E_1 . Ak $T > 0K$, existuje nenulová pravdepodobnosť tepelnej excitácie do stavu E_2 . Vzbudený stav má však *konečnú dobu života*, a po čase *samovoľne* (a náhodne) preskočí do základného stavu E_1 , pričom prebytočnú energiu *vyžiari* v podobe fotónu - ide o **spontánnu emisiu**. Rovnovážne prerozdelenie obsadenosti stavov pri teplote T (bez prítomnosti *vonkajšieho* EM poľa, a pre jednoduchosť tiež bez uvažovania degenerácie hladín) je

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{E_2 - E_1}{k_B T}}$$

Ide o *dynamickú* rovnováhu prechodov $\psi_1 \rightarrow \psi_2$ a $\psi_2 \rightarrow \psi_1$ (za jednotku času). Zapnutím vonkajšieho EM poľa sa táto dynamická rovnováha rozšíri aj o *stimulované* prechody. Keďže pravdepodobnosť preskoku z daného stavu závisí od *jeho* obsadenosti, bude platiť

$$N_1 B_{12} w(\omega) = N_2 [A_{21} + B_{21} w(\omega)] \quad \Rightarrow \quad w(\omega) = \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\frac{N_1 B_{12}}{N_2 B_{21}} - 1} = \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\frac{B_{12}}{B_{21}} \exp \frac{E_2 - E_1}{k_B T} - 1}$$

kde A_{21} , B_{21} , B_{12} sú **Einsteinove koeficienty** spontánnej emisie a stimulovanej emisie/absorpcie. V tepelnej rovnováhe s EM žiarením musí tento výraz odpovedať Planckovmu zákonu žiarenia (Dodatok E), odkiaľ pre $\omega = \omega_{12} = (E_2 - E_1)/\hbar$ dostávame

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \quad B_{21} = B_{12}$$

Vidíme, že $\frac{A_{21}}{B_{21}} \sim \omega^3$, čiže podiel spontánnej absorpcie prudko narastá s rozdielom energií. Na druhej strane, rovnosť koeficientov stimulovanej emisie a absorpcie by na základe vyššie uvedenej analýzy pre jeden systém nemala byť prekvapením.

V stimulovanej emisii spočíva podstata **laserov**⁹, k ich správnej činnosti je však potrebná tzv. **inverzia obsadenosti** hladín, $N_2 > N_1$, a na jej dosiahnutie sú potrebné systémy s viac než dvoma energetickými hladinami.

III.1.6 Výberové pravidlá pri kvantových preskokoch.

Kvantové preskoky medzi elektrónovými hladinami v atómoch a molekulách za účasti fotónov sú limitované všetkými relevantnými *zákonmi zachovania*, ktoré postupne preberieme.

Zákon zachovania elektrického náboja. Fotón nemá elektrický náboj, takže jeho pohltením/vyžiarením sa celkový náboj prirodzene zachováva.

Zákon zachovania energie-hybnosti. Súčasťou energetickej bilancie je aj kinetická energia atómu/molekuly súvisiaca so zachovaním celkovej hybnosti pri „náraze/vymrštení“ fotónu. Vďaka hmotnosti atómových jadier je však tento efekt zanedbateľný.

Zákon zachovania momentu hybnosti. Tu je dôležité si uvedomiť, že sčítavanie momentov hybnosti v kvantovej mechanike je v skutočnosti sčítavanie priestorovo kvantovaných *priemetov*. Fotón má dva možné priemety, $\pm\hbar$, čiže (výsledné) magnetické kvantové číslo elektrónu m_j sa môže zmeniť o $\Delta m_j = \pm 1$. Navyše však fotón môže byť aj v *superpozícii* týchto stavov, čomu odpovedá *nulový* priemet spinu.¹⁰ Dovoľený je teda aj kvantový prechod s $\Delta m_j = 0$. Ak siahame ku klasickej predstave oscilujúceho dipólu z kap. III.1.5, ide o interakciu elektrónu výlučne s *elektrickou* zložkou EM poľa, ktorá *nepôsobí* na elektrónový spin (ani jeho magnetický moment), čiže

$$\Delta m_s = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta m_j = \Delta m_l = \pm 1, 0$$

Zákon zachovania parity. Transformácia **parity** je inverziou všetkých priestorových súradníc, $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$, a takmer všetky fyzikálne procesy sú symetrické voči tejto transformácii.¹¹ Pre všetky tzv. *polárne* vektory, akými sú $\vec{r}$ či $\vec{v}$, transformácia parity znamená vynásobenie koeficientom $(-1)^3 = -1$, kým pre tzv. *axiálne* vektory či *pseudovektory*, akým je napr. moment hybnosti $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$, je to vynásobenie koeficientom $(-1)^6 = 1$. Reprezentáciou (vlnovou funkciou) fotónu je *polárny* vektor $\vec{A}$ (EM potenciál), a teda vnútorná parita fotónu je $P_f = -1$. Na druhej strane, parita elektrónu je daná *súčinom* jeho vnútornej parity $P_{ei} = 1$ (danej *konvenciou*) a paritou *priestorovej časti* jeho vlnovej funkcie, danej orbitálnym kvantovým číslom l , $P_{el} = (-1)^l$. Súčiny parít sa pri preskoku musia zachovať, čo vedie k podmienke

$$\Delta l = 1$$

(Tento zákon v zásade pripúšťa *ľubovoľné nepárne* Δl , pre fotón však platí len $\Delta l = 1$.¹²)

Tieto obmedzenia nazývame **výberovými pravidlami** pre tzv. **dovoľené elektrónové prechody** v atómoch a molekulách. Existuje však určitá malá pravdepodobnosť porušenia výberových pravidiel, vtedy hovoríme o tzv. **zakázaných prechodoch**. Navyše viacatómové molekuly majú dodatočné

⁹Termín *laser* je *akronymom* - slovom skonštruovaným zo začiatočných písmen slovného spojenia *Light Amplification of Stimulated Emission of Radiation*.

¹⁰Priemety fotónového spinu $\pm\hbar$ odpovedajú dvom *kruhovým* polarizáciám EM vlny. Ich rovnomernou superpozíciou je *lineárne* (rovinne) polarizovaná vlna s priemetom spinu 0, ako *štatistickou* strednou hodnotou priemetov $\pm\hbar$.

¹¹Jedinou známou výnimkou je tzv. **slabá jadrová interakcia**, o ktorej bude reč v kap. III.2.4.

¹²Ak opäť uplatníme klasický pohľad (s odvolaním sa na mocný princíp korešpondencie), ľahko pochopíme, prečo nedochádza k preskoku elektrónu medzi *sféricky symetrickými* s-stavmi ($l = 0$), ako je napr. prechod $2s - 1s$. EM impulz vzniknúc pri takomto prechode by mal totiž *výlučne radiálnu* zložku elektrického poľa, teda *v smere* pohybu impulzu. EM vlna vo voľnom priestranstve však pozdĺžnu zložku *nemá*.

stupne voľnosti, súvisiace so *vzájomným* pohybom atómov v molekule. S týmito stupňami voľnosti súvisia *rotačné* a *vibračné* emisno-absorpčné spektrá, ktoré stručne opíšeme.

Predpokladajme pre jednoduchosť dvojatómovú molekulu *rotujúcu* okolo osi prechádzajúcej svojím ťažiskom (daným rovnosťou $m_1r_1 = m_2r_2$) kolmo na os molekuly (obr.). Moment zotrvačnosti molekuly vzhľadom na túto rotáciu je

$$I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(r_1 + r_2) = Mr^2$$

a kinetická energia rotácie s kruhovou frekvenciou ω je

$$E_r = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{L^2}{2I} = \frac{l(l+1)}{2I}\hbar^2 \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

kde sme uvažili obvyklé kvantovanie momentu hybnosti, odpovedajúceho tejto rotácii molekuly, a l je tzv. **rotačné kvantové číslo**. Rozdiel energií susedných hladín je teda $\Delta E = (l+1)\frac{\hbar^2}{I}$. Aby však došlo k emisii/absorpcii fotónu, musí mať táto rotácia charakter oscilujúceho elektrického dipólu, t.j. musí ísť o *polárnu* molekulu. Výberové pravidlo je potom

$$\Delta l = \pm 1$$

Okrem rotácie okolo spoločného ťažiska existujú aj *oscilácie* vzájomnej vzdialenosti atómov v takejto molekule na charakteristických frekvenciách ω_0 . V priblížení harmonického oscilátora (kap. II.4.8) je vibračná energia kvantovaná, s konštantnými odstupmi susedných hladín

$$E_v = \left(v + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_0 \quad v = 0, 1, 2, \dots \quad \Delta E = \hbar\omega_0$$

kde v je tzv. **vibračné kvantové číslo**. Výberové pravidlo pre emisiu/absorpciu fotónu je potom prirodzene

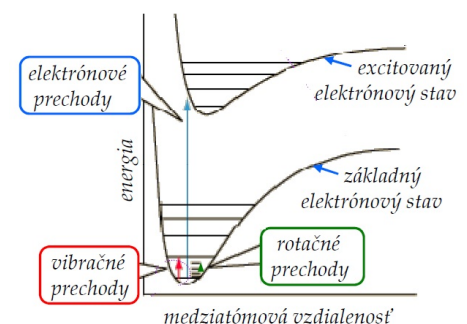
$$\Delta v = \pm 1$$

Medzi typickými odstupmi susedných hladín v elektrónových, vibračných a rotačných spektrách molekuly sú silné nerovnosti

$$\Delta E_e \gg \Delta E_v \gg \Delta E_r$$

$$(\approx 1\text{eV}, \approx 0.1\text{eV}, \approx 10^{-4}\text{eV})$$

Na každú vibračnú hladinu molekuly (v rámci danej elektrónovej hladiny molekuly) teda pripadá husté spektrum rotačných hladín (obr.) - **vibračno-rotačný pás**. Tepelná energia pri bežných teplotách ($\approx 300\text{K}$) je $\approx 10^{-2}\text{eV}$, čiže rotačné hladiny sú excitované.



Ak je molekula v kontakte s okolím (inými molekulami v plyne, kvapaline či tuhej látke), dochádza k odovzdávaniu energie aj *nežiarivými* procesmi (bez účasti fotónov). Kombinácie žiarivých a nežiarivých prechodov sa môžu prejavovať v podobe luminiscenčných efektov:

Predpokladajme, že elektrón v molekule prejde pohltením fotónu $\hbar\omega$ zo základnej na excitovanú *elektrónovu* hladinu do niektorého z *excitovaných* vibračno-rotačných stavov. Ak v dôsledku nežiarivých procesov následne prejde do jedného z nižších vibračno-rotačných stavov (na danej elektrónovej hladine), žiarivý prechod späť do základného elektrónového stavu sa realizuje emisiou fotónu $\hbar\omega'$, pričom $\omega' < \omega$. Tento jav sa nazýva **fluorescencia**.¹³ Pri nežiarivých procesoch môže dôjsť aj k *zakázaným* prechodom s preklopením spinu, $\Delta m_s = \pm 1$. Návrat elektrónu do pôvodného základného stavu bude

¹³Využíva sa na konverziu svetla z blízkej UV do viditeľnej oblasti, napr. v osvetľovacej technike či prácach prášokoch.

potom opäť zakázaným prechodom, ktorý preto nastáva (kvôli malej pravdepodobnosti) s výrazným *oneskorením*. Tomuto javu hovoríme **fosforescencia**.¹⁴

III.2 Jadrové sily.

III.2.1 Fundamentálne interakcie.

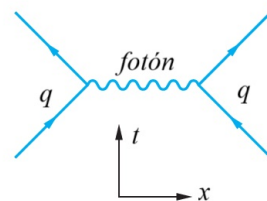
Fyzika atómového jadra je výrazne zložitejšia než fyzika jeho elektrónového obalu, v ktorom dominantnú úlohu hrá EM interakcia elektrónov medzi sebou a s jadrom, pri splnení zákonov kvantovej mechaniky. Nukleóny (protóny a neutróny) tvoriace jadro sú totiž sami kompozitnými „časticami“, na stavbe a vzájomných väzbách ktorých sa podieľa nielen viacero elementárnejších „častíc“ ale aj viacero **fundamentálnych interakcií**, ktoré postupne opíšeme.

V našom makroskopickom svete sa *merateľne* prejavujú len dve fundamentálne interakcie - gravitačná a EM. Priamo pozorujeme *silové* účinky im príslušných *polí* na objekty „viažuce sa“ na tieto polia. Túto väzbu vyjadruje odpovedajúci **náboj** - v prípade EM poľa ide o *elektrický* náboj, v prípade gravitačného poľa je to *gravitačný* náboj - hmotnosť/energia. V *klasicknej* fyzike považujeme tieto náboje súčasne za *zdroje* odpovedajúcich polí. Náboje teda medzi sebou interagujú prostredníctvom polí, ktoré sami vytvárajú.

Súčasná *kvantová* fyzika však tieto **silové polia** považuje za *fundamentálne entity* - nositeľov energie meniacej sa len v kvantách - *fotónoch* pre EM pole a *gravitónoch* pre gravitačné pole.¹⁵ Bez prítomnosti vonkajších porúch (z klasického pohľadu „zdrojov“ silových polí) je každý mód takéhoto poľa kvantovým harmonickým oscilátorom v *základnom* energetickom stave - **vákuu** s energiou $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$ (kap. II.4.7), čiže s nulovým počtom kvánt. Rovnaký je však prístup modernej fyziky aj k *látkovým* objektom - „častice“ látky, ako elektróny či protóny, sú len *kvantovanými energetickými excitáciami príslušných látkových polí* (elektrónového či protónového poľa), pričom základným stavom týchto polí je opäť vákuum s nulovým počtom kvánt. Zásadný rozdiel medzi kvantovanými excitáciami („časticami“) silových a látkových polí je však ten, že kým prvé z nich sú *bozóny*, *všetky elementárne* a viaceré kompozitné *látkové* častice (napr. protón či neutrón) sú *fermióny* s *poločíselným* spinom (kap. II.5.5), riadiace sa Pauliho vylučovacím princípom (kap. II.5.6), a teda dovolené vlastné hodnoty operátora počtu „častíc“ v každom móde sú len 0 a 1.¹⁶

Klasická koncepcia nábojov ako zdrojov sa do tejto modernej predstavy premieta ako energetický transfer medzi „časticami“ látkových polí prostredníctvom „zvlnenia“ (excitácií) silových polí: Elektricky nabitá „častica“ akoby emitovala fotón, ktorý je vzápätí pohltý inou „časticou“. Počas doby života takéhoto fotónu, Δt , je energia celého systému zaťažená neurčitou ΔE , spĺňajúcou neurčitosť

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$



¹⁴Pozorujeme ju ako svetielkovanie v tme po predchádzajúcej expozícii na svetle.

¹⁵Pripomínáme, že fotóny aj gravitóny sú „častice“ s nulovou (pokojovou) hmotnosťou a celočíselným spinom $s = 1$ resp. 2 (kap. II.5.5).

¹⁶Pre kreačné a anihilačné operátory *fermiónov*, $\hat{a}^+$ resp. $\hat{a}$, platí pre každý mód namiesto komutačného vzťahu z kap. II.4.7 **antikomutačný vzťah** $\{\hat{a}, \hat{a}^+\} = \hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a} = 1$, a energia základného stavu fermionového harmonického operátora je $E_0 = -\frac{1}{2}\hbar\omega_0$.

čo sa zvykne naivne interpretovať ako energia fotónu „vypožičaná a vrátená“ z/do EM vákua. Uvedený princíp neurčitosti v skutočnosti vyjadruje len *principiálnu nemožnosť definovania energie s ľubovoľnou presnosťou počas ľubovoľne krátkeho času*.¹⁷ Celková energia/hybnosť interagujúcich nabitých látkových „častíc“ „pred a po“ takomto procese sa pritom dôsledne zachováva.¹⁸ Naproti tomu fotón uvažovaný v tejto interakcii označujeme ako **virtuálny** - na rozdiel od *reálnych* fotónov¹⁹ je experimentálne *nemerateľný*. Je preto namieste sa pýtať, či takýto (virtuálny) fotón naozaj existuje, alebo ide len o matematický nástroj. Túto otázku si však môžeme (a mali by sme si) klásť mimo detekcie *vždy* pri pojme „častica“.

V prípade gravitačnej interakcie hovoríme skôr o virtuálnom zvlnení *časopriestoru*.²⁰ Dosah oboch interakcií je nekonečný, čo priamo súvisí s nulovou hmotnosťou excitácií (fotónov aj gravitónov), a dôsledkom čoho je ich makroskopický charakter. Zásadný rozdiel medzi nimi spočíva v tom, že kým gravitačná interakcia je *univerzálna* - gravitačný náboj je vlastnosťou *všetkej* hmoty/energie, EM interakcie sa zúčastňujú len objekty s *nenulovým* nábojom q . Hovoríme, že náboj je *generátorom* tejto interakcie, a v časticovej fyzike (kvantovej teórii *polí*) mu priradujeme bezrozmerný *operátor*²¹ $\hat{Q}$ s vlastnými hodnotami (kvantovými číslami) Q spĺňajúcimi vzťah

$$q = Qe$$

pričom *elementárny elektrický náboj* e je *fundamentálnou väzbovou konštantou* „častíc“ látky na EM pole. V základných pohybových rovniciach látkových „častíc“ (SCHR, DIR) sa ich väzba na EM pole vyjadruje členom (s operátorom EM hybnosti)

$$q\vec{A}\psi \rightarrow e\vec{A}\hat{Q}\psi \quad \text{resp.} \quad eA^\mu\hat{Q}\psi$$

kde ψ reprezentuje látkovú „časticu“, $\vec{A}$ resp. A^μ EM pole, a q veľkosť ich *vzájomnej väzby*.²²

Vzdialenosti relevantné pre atómové jadro si už vyžadujú dôsledne *relativistický* opis (malá vzdialenosť $\Leftrightarrow$ vysoká energia), ktorého súčasťou je nielen existencia párov „častica-antičastica“, ale aj *premena* jedného druhu „častíc“ na iný. Takéto premeny sa v atómových jadrách (a časticových urýchľovačoch) dejú vďaka dvom ďalším fundamentálnym „silám“ - **slabej a silnej jadrovej interakcii**. Podobne ako v prípade EM interakcie, tieto „sily“ pôsobia len medzi „časticami“ s *odpovedajúcim* nábojom: V prípade slabej jadrovej interakcie je týmto nábojom tzv. **slabý izospin**, a v prípade silnej interakcie tzv. **farebný náboj**. Aj formálny opis týchto interakcií je analogický EM prípadu - generátorom týchto interakcií (nábojom) prislúchajú *vektorové* polia (analogické A^μ) resp. „častice“ so spinom $s = 1$ (analogické fotónom), a väzbové členy obsahujú fundamentálne väzbové konštanty odpovedajúce danej interakcii (analogické e). Dôkladný opis týchto interakcií však náročnosťou výrazne presahuje rámec tohto textu, v nasledujúcich kapitolách preto ponúkneme len ich veľmi zjednodušený výklad.

¹⁷Makroskopickou analógiou je napr. nezmyselnosť ľubovoľne presného definovania frekvencie ľubovoľne krátko znejúceho hudobného tónu.

¹⁸Práve na platnosti zákonov zachovania sú založené metódy detekcie a identifikácie častíc v urýchľovačoch, aké sú napr. v CERNe.

¹⁹Za *reálny* jednoznačne považujeme napr. fotón emitovaný elektrónom pri jeho „brzdení“ na povrchu látky. Takýto fotón reálne detegujeme ako tzv. **brzdne röntgenové žiarenie**.

²⁰Kvantová teória gravitácie dodnes nebola uspokojivo vypracovaná. Gravitáciou sa tu však nebudeme podrobnejšie zaoberať predovšetkým preto, že na atomárnej úrovni je úplne bezvýznamná.

²¹Už v kap. II.4 sme naznačili, že hermitovské operátory sú generátormi určitých symetrií, za ktorými stoja príslušné zákony zachovania. V súvislosti s operátorom náboja sa k tomu vrátíme v kap. III.2.4.

²²V kap. II.5.2 sme poukázali na význam Comptonovej vlnovej dĺžky λ_C v súvislosti s tvorbou párov „častica-antičastica“, ak meranú „časticu“ lokalizujeme na rozmere $\approx \lambda_C$ (vysokoenergetickým fotónom, ktorému odpovedá takto malá vlnová dĺžka). Fyzikálne to interpretujeme tak, že každá „častica“ je „oblečená“ do oblaku takýchto párov, o rozmere $\approx \lambda_C$. Hoci je výsledný elektrický náboj každého páru nulový, oblak ako celok pôsobí ako *elektrické tienenie*. Experimentálne meraný (a bežne uvažovaný) náboj q je teda len akýmsi „efektívnym“ - *tieneným* nábojom.

III.2.2 Kvarky, gluóny a hadróny.

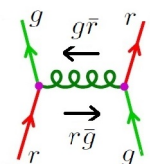
Podľa súčasnej úrovne poznania sú základnými stavebnými prvkami atómových jadier **kvarky**.²³ Sú to „častice“ so spinom $s = \frac{1}{2}$, teda *fermióny* (ich pohybovou rovnicou je DIR). Existuje 6 druhov - tzv. **vôní**²⁴ kvarkov rôznych hmotností, zoradených (podľa narastajúcej hmotnosti) do 3 dvojíc - **generácií** približne rovnakej hmotnosti. Dvojica v každej generácii sa navzájom líši aj elektrickým nábojom Q a slabým izospinom I_3 . Kvark každej vône navyše môže existovať v 3 „farbách“ - farebných nábojoch r, g, b (pre antičastice $-m_s, -Q, -I_3$ a v 3 „antifarbách“ $\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$). Každý kvark danej vône tvorí teda farebný *triplet*, ktorého komponenty sa líšia *len* farebným nábojom.

up $u_{r,g,b}$ ($Q = +\frac{2}{3}, I_3 = +\frac{1}{2}$), **down** $d_{r,g,b}$ ($Q = -\frac{1}{3}, I_3 = -\frac{1}{2}$) a ich antičastice $\bar{u}_{\bar{r},\bar{g},\bar{b}}, \bar{d}_{\bar{r},\bar{g},\bar{b}}$

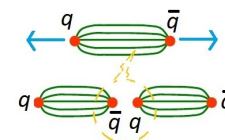
charm $c_{r,g,b}$ ($Q = +\frac{2}{3}, I_3 = +\frac{1}{2}$), **strange** $s_{r,g,b}$ ($Q = -\frac{1}{3}, I_3 = -\frac{1}{2}$) a ich antičastice $\bar{c}_{\bar{r},\bar{g},\bar{b}}, \bar{s}_{\bar{r},\bar{g},\bar{b}}$

top $t_{r,g,b}$ ($Q = +\frac{2}{3}, I_3 = +\frac{1}{2}$), **bottom** $b_{r,g,b}$ ($Q = -\frac{1}{3}, I_3 = -\frac{1}{2}$) a ich antičastice $\bar{t}_{\bar{r},\bar{g},\bar{b}}, \bar{b}_{\bar{r},\bar{g},\bar{b}}$

Kvarky nesú všetky druhy nábojov a zúčastňujú sa teda *všetkých* fundamentálnych interakcií. Dominantnou je však silná jadrová (10^2 -krát silnejšia než EM) interakcia, ktorej podstatou je výmena nehmotných vektorových „častíc“ - **gluónov** medzi kvarkami. Na rozdiel od EM interakcie existuje až 8 druhov gluónov, z ktorých *žaden nie je bezfarebný*. Keďže celkové farebné náboje sa pri interakcii musia zachovávať, výmenou gluónov sa interagujúce kvarky *neustále* „prefarbujú“. Mechanizmus tejto farebnej väzby ilustruje kvark (danej vône) farby r (na obr. vľavo dole), emitujúci gluón nesúci farbu r a antifarbu $\bar{g}$ (šípka doprava). Gluón odoberie kvarku farbu r a zanechá farbu g (emitovaná antifarba = absorbovaná farba). Následne je gluón pohltitý iným kvarkom (vo všeobecnosti inej vône) farby g (vpravo dole), ktorú anihiluje svojou antifarbou, a zanechá farbu r . Z formálnych dôvodov sa za „fyzikálny“ gluón považuje superpozícia $(r\bar{g} + g\bar{r})/\sqrt{2}$. Existuje práve 8 takýchto *lineárne nezávislých* kombinácií s nenulovým výsledným farebným nábojom.



Takáto farebná „rotácia“ kvarkov (bez zmeny vône) prebieha s veľmi krátkou časovou konštantou ($\approx 10^{-23}$ s). Keďže gluóny nesú farebný náboj, môžu interagovať aj *medzi sebou*. Dôsledkom toho je, že farebné pole gluónov medzi kvarkami, na rozdiel od EM poľa, *neklesá* so vzdalovaním kvarkov. *Vzájomná* interakcia gluónov sústreďuje toto pole (vyjadrené siločiarami na obr.) do trubice s *konštantnou hustotou* energie, čiže oddďalovaním kvarkov rastie *celková* energia poľa (t.j. rastie sila vzájomného priťahovania kvarkov), a po prekročení istej hodnoty vedie k tvorbe *nových párov* kvark-antikvark z vákua.



Jednotlivé kvarky teda *nie je možné od seba izolovať*, vytvárajú *len viazané* stavy (častice) - tzv. **hadróny**. *Celkový farebný náboj hadrónov je vždy nulový*. Tento efekt sa nazýva **farebné uzavretie**.²⁵ Gluóny sú uväznené „vnútri“ hadrónov²⁶ ($\approx 10^{-15}$ m, čo je dosah silnej interakcie), a energiou ich farebného poľa výrazne prispievajú k „pokojovej“ hmotnosti hadrónov. Všetky hadróny majú popri *nulovom farebnom* náboji aj *celočíselný elektrický* náboj Q (násobok e). Delíme ich na dve skupiny:

²³ angl. *quark*

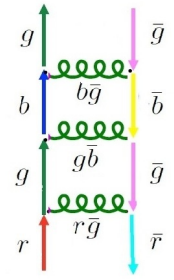
²⁴ angl. *flavour*

²⁵ angl. *colour confinement*

²⁶ Keďže hadróny sú *kompozitné* častice, má zmysel uvažovať o ich rozmeroch, daných dosahom väzbovej sily. Pokiaľ ide o samotné kvarky, považujú sa za „bodové“, čo treba chápať len v zmysle ich *nedeliteľnosti pri detekcii* (rovnako ako pri elektrónoch, kap. II.3.1).

Mezóny s *párnym* počtom kvarkov a *celočíselným* spinom sú *bozónmi*. Najčastejšie ide o páry kvark-antikvark s rotujúcou kombináciou farba-antifarba, zabezpečenou neustálou výmenou väzbových gluónov (obr).

Baryóny s *nepárnym* počtom kvarkov a *poločíselným* spinom sú *fermiónmi*. Najčastejšie ide o trojice kvarkov s rotujúcimi farbami *rgb* alebo trojice antikvarkov $\bar{r}\bar{g}\bar{b}$. Miešanie kvarkov a antikvarkov nie je v trojici dovolené - narušilo by sa farebné uzavretie. (Je však možné napr. v tzv. **pentakvarkoch**, pridaním dvojice kvark-antikvark.)



Najľahšími a najstabilnejšími baryónmi sú *nukleóny* - protón a neutrón - tvoriace jadrá atómov. Najľahšie mezóny - **pióny** - zas držia pohromade nukleóny v jadrách (kap. III.2.3). Ťažšie a nestabilné (krátko žijúce) hadróny sa vyskytujú vo vysokoenergetických reakciách (napr. v urýchľovačoch).

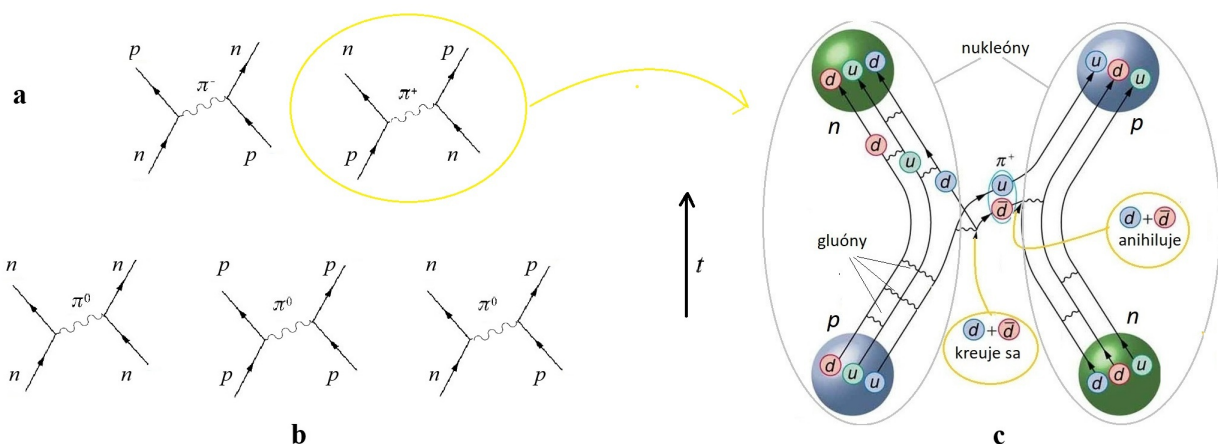
III.2.3 Nukleóny.

Jadrá všetkých atómov sú tvorené len kvarkami prvej generácie, *u* a *d*: *Protón* je baryón *uud* s elektrickým nábojom $Q_p = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 1$, a *neutrón* je baryón *udd* s $Q_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$. Spin oboch nukleónov je $s = \frac{1}{2}$, a oba majú aj *magnetický* moment ako „súčet“²⁷ magnetických momentov kvarkov $\mu_z = \pm \frac{eQ_q}{m_q} \frac{\hbar}{2}$ (kap. II.6.1) - tým je vysvetlený nenulový magnetický moment neutrónu s $Q_n = 0$. Jednotkou magnetického momentu nukleónov, analogickou Bohrovmu magnetónu $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$ pre elektrón (kap. II.6.1), je **jadrový magnetón** $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p}$, kde m_p je hmotnosť protónu, a $\mu_N/\mu_B \approx 10^{-3}$. Veľkosti *z*-ových zložiek magnetických momentov protónu a neutrónu sú, vďaka rôznym hodnotám nukleónového Landého faktoru (kap. III.1.2),

$$\mu_{pz} \cong +2.8\mu_N$$

$$\mu_{nz} \cong -1.9\mu_N$$

Súčet pokojových hmotností kvarkov pritom tvorí len $\approx 1\%$ hmotnosti nukleónov - prakticky celá ich hmotnosť je daná väzbovou energiou, zahrňujúcou kinetickú energiu kvarkov a všetkých väzbových polí.



Všetky hadróny sú farebne *neutrálne* celky, *nezúčastňujú* sa teda už priamo silnej interakcie. Inými slovami, bezfarebný protón či neutrón nemôže emitovať farebný gluón. Väzba protónov a neutrónov do ťažších atómových jadier (prekonávajúca odpudivú EM interakciu protónov) preto *nie* je silnou jadrovou interakciou. Princíp neurčitosti $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$ však umožňuje vytváranie krátko žijúcich bezfarebných *mezónov* kvark-antikvark. Najľahšími (a teda najčastejšími) sú 3 druhy *piónov*: π^+ ($u\bar{d}$),

²⁷Ukazuje sa, že celkový spin aj magnetický moment nukleónov je zložitou kombináciou príspevkov spinov aj orbitálnych momentov kvarkov, gluónov, a navyše mračen párov kvark-antikvark obklopujúcich „základnú“ trojicu.

$\pi^- (d\bar{u})$ a $\pi^0 (\frac{u\bar{u}-d\bar{d}}{\sqrt{2}})$. Nukleóny potom môžu emitovať a absorbovať takéto pióny (a v menšej miere aj mezóny tvorené ťažšími kvarkami), čo spôsobuje väzbu medzi nimi - hovoríme o **zvyškovvej silnej interakcii**. Keďže $\pi^\pm$ majú elektrický náboj $Q = \pm 1$, dochádza touto výmenou k premene nukleónov, $p \leftrightarrow n$ (obr. a, detail výmeny π^+ je na obr. c). Výmenou elektricky neutrálneho π^0 sa nukleóny nemenia (obr. b).

Pokoiová hmotnosť takýchto *virtuálnych* mezónov limituje prostredníctvom princípu neurčitosti ich dobu života, a „doletová vzdialenosť“ $c\Delta t \approx \frac{\hbar}{mc}$ určuje rozmer atómového jadra.

III.2.4 Slabá jadrová interakcia a leptóny.

Jedinou fundamentálnou silovou interakciou, pri ktorej dochádza k *premenám elementárnych* „častíc“, je *slabá jadrová interakcia*. Založená je na emisii/absorpcii 3 druhov vektorových bozónov, W^+ , W^- a Z . Bozóny $W^\pm$ majú elektrický náboj $Q = \pm 1$ aj slabý izospin $I_3 = \pm 1$, bozón Z je elektricky aj izospinovo neutrálny. Farebné náboje nemajú. Na rozdiel od ostatných troch fundamentálnych interakcií, bozóny $W^\pm, Z$ sú *hmotné*, majú teda veľmi krátku dobu života a krátky dosah (o niekoľko rádov menší než silná interakcia), dôsledkom čoho je relatívna „slabosť“ tejto interakcie. (V intenzite, čiže početnosti, je o niekoľko rádov slabšia než EM interakcia.)

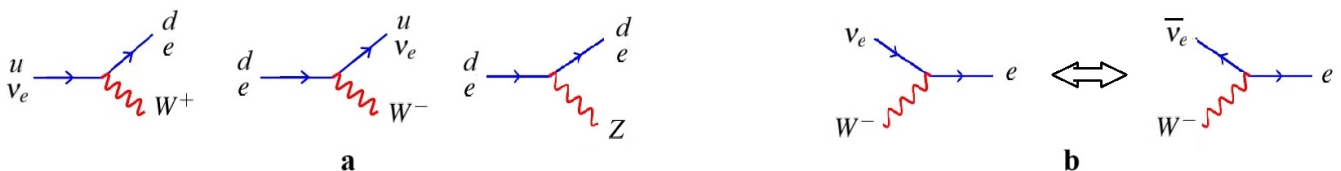
Na slabej interakcii sa zúčastňujú *všetky elementárne fermióny*²⁸ - všetky majú totiž slabý izospin $I_3 = \pm \frac{1}{2}$. Okrem kvarkov (kap. III.2.2) sem patria **leptóny** - elementárne fermióny so spinom $s = \frac{1}{2}$ *bez* farebného náboja (teda *nezúčastňujúce* sa silných interakcií). Leptóny (podobne ako kvarky) existujú v 6 vňach rozdelených do 3 generácií (podľa narastajúcej hmotnosti prvej z vňí). Neutrína v každej generácii majú *takmer nulovú* hmotnosť.²⁹

elektrón e ($Q = -\frac{1}{2}, I_3 = -\frac{1}{2}$), **e-neutrino** ν_e ($Q = 0, I_3 = +\frac{1}{2}$) a ich antičastice $\bar{e}, \bar{\nu}_e$

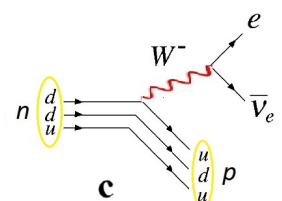
mión μ ($Q = -\frac{1}{2}, I_3 = -\frac{1}{2}$), **μ -neutrino** ν_μ ($Q = 0, I_3 = +\frac{1}{2}$) a ich antičastice $\bar{\mu}, \bar{\nu}_\mu$

tauón τ ($Q = -\frac{1}{2}, I_3 = -\frac{1}{2}$), **τ -neutrino** ν_τ ($Q = 0, I_3 = +\frac{1}{2}$) a ich antičastice $\bar{\tau}, \bar{\nu}_\tau$

Emisiou bozónu $W^\pm$ jedným z kvarkov/leptónov dochádza k jeho premene na iný kvark/leptón *danej generácie*, pri zachovaní celkového elektrického náboja aj slabého izospinu. Emisiou neutrálneho bozónu Z sa vňa kvarkov/leptónov nemení (obr. a).



Emitovaný bozón sa vzápätí rozpadá na dvojicu kvarkov/leptónov *nejakej* generácie, pričom jeden z produktov rozpadu je (kvôli zachovaniu kvantových čísel) *antičasticou*. Je to proces ekvivalentný pohlteniu jedným z kvarkov/leptónov (obr. b). V podstate ide o výmenu bozónov medzi generáciami kvarkov/leptónov. Takýmto procesom sa napr. rozpadá neutrón na protón, elektrón a jeho antineutrino (obr. c). Slabá jadrová interakcia takto vytvára mechanizmus rozpadu všetkých ťažších baryónov na najľahší z nich - protón.



Pri všetkých procesoch, v ktorých sa *nezachovávajú* „častice“, sa okrem energie/hybnosti a momentu hybnosti, elektrického či farebného náboja a slabého izospinu, zachováva ešte niekoľko ďalších kvan-

²⁸Toto tvrdenie nie je celkom správne, detaily však presahujú rámec tohto textu.

²⁹Otázka hmotnosti neutrín nie je v čase písania tohto textu celkom uzavretá.

tových čísel. Každému leptónu je priradené **leptónové číslo** danej generácie, L_e, L_μ, L_τ s hodnotou ± 1 pre časticu/antičasticu, a pre každé z nich platí zákon zachovania. Podobná situácia je s baryónmi: Kvarkom/antikvarkom priradíme **baryónové číslo** $B = \pm \frac{1}{3}$, čiže každý baryón/antibaryón má $B = \pm 1$ (a mezóny majú $B = 0$), a toto číslo sa pri interakciách rovnako v súčte zachováva. Za každým takýmto zákonom zachovania sa skrýva určitá symetria (aj keď nie všetky sú zjavné).³⁰ Dôležitou *univerzálnou* symetriou je tzv. **CPT-symetria** - invariantnosť zákonov voči *súčasnej* zámene častíc za antičastice (*Charge*), transformácii parity (*Parity*, $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$) a transformácii behu času (*Time*, $t \rightarrow -t$). Väčšina fundamentálnych interakcií zachováva C-, P- a T-symetriu aj *samostatne*, slabá jadrová interakcia ich narušuje.

Najvýraznejšou odlišnosťou slabej jadrovej interakcie od ostatných troch fundamentálnych interakcií je však *nenulová* hmotnosť bozónov $W^\pm, Z$. Vysvetľuje sa interakciou týchto bozónov s ďalším fundamentálnym poľom - tzv. **Higgsovým poľom**, prostredníctvom mechanizmu, ktorého dôsledkom je aj existencia tzv. **Higgsových bozónov**.³¹ *Skalárny* ($s = 0$) Higgsov bozón dopĺňa a nateraz uzatvára zoznam elementárnych „častíc“ hmoty - tzv. **Štandardný model** (obr., bez gravitácie).

mc^2	2,4 MeV	1,27 GeV	171,2 GeV	<2,2 eV	<0,17 MeV	<15,5 MeV	91,2 GeV	0
Q	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	0	0	0
s	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
	u up	c charm	t top	ν_e e-neutrino	ν_μ μ -neutrino	ν_τ τ -neutrino	Z Z-bozón	γ fotón
? GeV	4,8 MeV	104 MeV	4,2 GeV	0,511 MeV	105,7 MeV	1,777 GeV	80,4 GeV	0
0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1	-1	-1	-1	± 1	0
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
H Higgs	d down	s strange	b bottom	e elektrón	μ mión	τ tauón	$W^\pm$ W-bozóny	g gluóny
skalárny bozón	kvarky			leptóny			vektorové bozóny	

III.3 Premeny atómového jadra.

III.3.1 Stabilita jadier.

V kap. III.2 sme ukázali, ako kvarky vytvárajú prostredníctvom gluónov nukleóny, a ako sa nukleóny výmenou virtuálnych piónov viažu do atómových jadier, a prekonávajú tak odpudivú EM silu medzi protónmi. S nárastom počtu nukleónov v jadre, A , narastá aj polomer jadra ako $R \sim A^{1/3}$. Objem teda narastá *lineárne* s počtom nukleónov, pričom si zachováva približne sférický tvar.³²

Pre každé atómové číslo Z (počet protónov) existuje viacero **izotopov**, líšiacich sa počtom neutrónov N , a teda nukleónovým číslom A . Len menej než 10% z asi 3000 všetkých známych izotopov je *stabilných*. Čisto kvantovomechanická úvaha ($Z+N$ *fermiónov* v potenciálovej jame) energeticky favorizuje

³⁰Nepochybne najznámejšími a zjavnými sú symetrie fyzikálnych zákonov vzhľadom na translácie a rotácie časopriestoru (alebo pozorovateľa), ktorým odpovedajú zákony zachovania energie-hybnosti a momentu hybnosti.

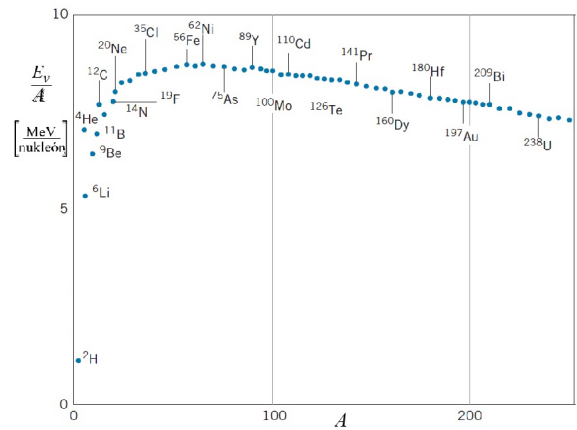
³¹Toto pole, mechanizmus aj bozón sú pomenované podľa P. Higgsa, ktorý (súbežne s ďalšími fyzikmi) navrhol tento mechanizmus, spočívajúci v **spontánnom narušení symetrie** Higgsoho poľa, a predpovedal existenciu Higgsoho bozónu, objaveného neskôr. Dostal zaň Nobelovu cenu v r. 2013. Aj pokojové hmotnosti kvarkov a leptónov sa pripisujú interakcii s Higgsovým poľom, aj keď odlišným mechanizmom. Detaily opäť presahujú rámec tohto textu.

³²Excentricita pri mierne elipsoidálnom tvare nepresahuje 20%.

izotopy s $N = Z$. Ak zohľadníme aj EM energiu narastajúcu ako Z^2 , narastá so Z výhodnosť nerovnováhy $N - Z > 0$, s preferenčne *párny*mi N, Z . Približne izotropná povaha interakcií, stabilizujúca sférickú symetriu pripomínajúcu uzavreté vrstvy atómového obalu, vedie na tzv. **magické nukleónové čísla** $A = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$ odpovedajúce výrazne stabilnejším jadrám. V každom prípade pre hmotnosť M stabilného jadra musí platiť

$$M < Zm_p + Nm_n \quad E_v = c^2(Zm_p + Nm_n - M)$$

kde $E_v (>0)$ je **väzbová energia jadra** - energia, ktorú treba jadrú dodať na jeho úplnú dezintegráciu na nukleóny. Graf E_v/A pre najstabilnejšie izotopy jednotlivých prvkov (obr.) vykazuje *saturáciu* pre $A \gtrsim 20$ ako dôsledok obmedzeného dosahu väzby medzi nukleónmi (len na niekoľko „najbližších susedov“).



Všetky nestabilné jadrá sa skôr či neskôr rozpadávajú prostredníctvom viacerých mechanizmov, z ktorých najdôležitejšie postupne opíšeme. Podmienkou nestability (a teda rozpadu) jadra je hmotnosť pôvodného jadra *väčšia* než súčet hmotností produktov rozpadu. Spoločnou črtou všetkých rozpadových procesov je pritom ich *štatistická náhodnosť*. Ak n je *štatisticky významný* počet identických jadier, potom ich úbytok $-dn$ za čas dt môžeme vyjadriť ako

$$-dn(t) = \lambda n(t)dt \quad \Rightarrow \quad n(t) = n_0 e^{-\lambda t}$$

kde n_0 je „pôvodný“ počet (v $t = 0$) a λ je tzv. **rozpadová konštanta**.³³ Pre štatistickú *rýchlosť* úbytku ešte nerozpadnutých jadier - **rádioaktivitu** - potom platí

$$-\frac{dn(t)}{dt} = \lambda n_0 e^{-\lambda t} = \lambda n(t)$$

čo znamená, že s poklesom počtu ešte nerozpadnutých jadier *klesá aj rádioaktivita*. Relatívny počet rozpadov v intervale $(t, t + dt)$ je daný výrazom

$$\frac{\lambda n(t)dt}{n_0} = f(t)dt$$

a určuje štatistické rozdelenie dôb života nerozpadnutých jadier, so strednou hodnotou - **strednou dobou života** jadra

$$\tau = \int t f(t)dt = \dots \frac{1}{\lambda}$$

Druhou často používanou časovou konštantou je **polčas rozpadu** $t_{1/2}$ - doba, za ktorú klesne počet ešte nerozpadnutých jadier na polovicu, čiže $n_0 e^{-\lambda t_{1/2}} = n_0/2$. (Za čas $2t_{1/2}$ klesne $n(t)$ na $n(t)/4$, atď.) Platí

$$t_{1/2} = \tau \ln 2 \cong 0.7 \tau$$

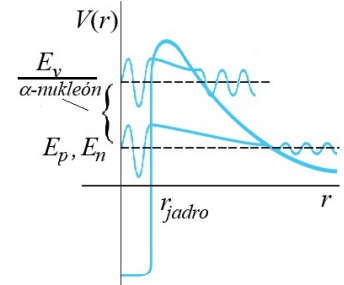
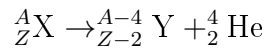
V SI je jednotkou rádioaktivity **becquerel**,³⁴ $1\text{Bq} = 1 \text{ rozpad/s}$.

³³Každý jednotlivý rozpad tu chápeme ako „skokový“ proces, ktorého trvanie je *zanedbateľné* na časovej škále dt , čo v štatistickom súbore vedie na *hladkú* funkciu $n(t)$.

³⁴čítaj *bekrel*, podľa H. Becquerela, spoluobjaviteľa rádioaktivity a nositeľa Nobelovej ceny za r. 1903 (spolu s M. a P. Curieovými).

III.3.2 Spontánny rádioaktívny rozpad jadier.

Jedným z najčastejších mechanizmov spontánneho rozpadu jadier je tzv. **α -rozpad**, čiže emisia **α -častice** - jadra ${}^4_2\text{He}$. Podstatou tohto mechanizmu je *tunelovanie* (kap. II.3.5) α -častice potenciálovou bariérou tvorenou jadrovými silami (zvýškovou jadrovou interakciou, kap. III.2.3), a pre protóny aj vzájomným EM odpudzovaním.³⁵ V základnom stave jadra je pre individuálne protóny a neutróny na najvyšších obsadených hladinách E_p, E_n táto potenciálová bariéra (prakticky) nepreniknuteľná. Špecifikom α -častice je jej *extrémne veľká väzbová energia*, $E_v(>0) = (2m_p + 2m_n - m_\alpha)c^2$, ktorá sa v jadre uvoľní pri tvorbe α -častice, a následne využije na pretunelovanie bariéry (na vyššej energetickej hladine, kde je bariéra tenšia a teda priehľadnejšia pre tunelovanie, obr.). Schéma α -rozpadu je



U všetkých ťažkých jadier (so $Z > 82$) teda dochádza k *postupnému* α -rozpadu v 4 **rozpadových radoch** ($A = 4n, 4n + 1, 4n + 2, 4n + 3$), až kým jadrá nezískavajú stabilitu. Pri rozpade sa uvoľní energia

$$E_{emit} = (m_{jadropredrozpadom} - m_{jadroporozpade} - m_\alpha)c^2$$

a to prevážne vo forme kinetickej energie α -častice, $E_{\alpha,kin} \approx \frac{A-4}{A}E_{emit}$. Keďže $A \approx 200$, platí $E_{\alpha,kin} \approx E_{emit}$, čo vedie na výrazne *čiarové* spektrum kinetických energií vylietavajúcich α -častíc.

Druhým základným mechanizmom rádioaktívneho rozpadu je tzv. **β -rozpad**. Ide o emisiu elektrónu (β^-) alebo pozitrónu (β^+) z jadra, v dôsledku premeny neutrónu na protón, resp. naopak, v jadre pri súčasnom vzniku $W^\mp$ -bozónu, ktorý sa následne rozpadne na elektrón/pozitrón a jeho antineutrino/neutrino (kap. III.2.4)

$$\beta^- : \quad n(ddu) \rightarrow p(udu) + W^- \quad \text{a následne} \quad W^- \rightarrow e + \bar{\nu}_e$$

$$\beta^+ : \quad p(udu) \rightarrow n(ddu) + W^+ \quad \text{a následne} \quad W^+ \rightarrow \bar{e} + \nu_e$$

Emitované pozitróny následne anihilujú s elektrónmi za vzniku vysokoenergetických fotónových párov.³⁶ V nestabilnom atómovom jadre môžu nastať oba tieto procesy, *mimo* jadra však len β^- pri rozpade $n \rightarrow p$ ($m_n > m_p$).³⁷ Fyzikálne je β^+ -rozpad ekvivalentný *záchytu* elektrónu z najnižšej vrstvy atómového obalu, $n = 1$ (tzv. K-vrstvy), jadrom - tzv. **K-záchytu**

$$p + e \rightarrow n + \nu_e$$

(absorpcia častice $\Leftrightarrow$ emisia antičastice, pri zachovaní leptónového čísla). Do uvoľnených elektrónových stavov pri K-záchyte preskakujú elektróny z vyšších vrstiev obalu za súčasného vyžiarovania prebytočnej energie v podobe fotónov (RTG). Schémy β -rozpadov sú

$$\beta^- : \quad {}^A_Z\text{X} \rightarrow {}^A_{Z+1}\text{Y} + e + \bar{\nu}_e$$

$$\beta^+ : \quad {}^A_Z\text{X} \rightarrow {}^A_{Z-1}\text{Y} + \bar{e} + \nu_e$$

$$\text{K-záchyt} : \quad {}^A_Z\text{X} + e \rightarrow {}^A_{Z-1}\text{Y} + \nu_e$$

³⁵ Ak by sme chceli protón *pridať* do jadra, museli by sme najprv prekonať odpudivú EM silu kladne nabitého jadra, kým by sme prenikli do oblasti pôsobenia príťažlivej zvýškovej jadrovej interakcie. Potenciálová bariéra pritom *nezávisí od smeru tunelovania*, existuje teda aj pre protón *unikajúci* z jadra.

³⁶ Tento proces je základom tzv. **pozitrónovej emisnej tomografie** (PET).

³⁷ Doba života voľného neutrónu je cca 15 min., naopak protón je (na škále veku Vesmíru) stabilný.

Uvoľnená energia sa náhodným spôsobom prerozdelení medzi kinetické energie emitovaných elektrónov a neutrín – ich energetické spektrum je preto *spojité*.

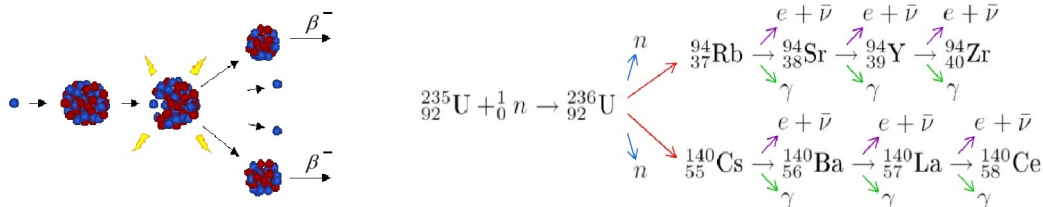
Jadrá sa po rádioaktívnom α - alebo β -rozpade spravidla nachádzajú v excitovaných energetických stavoch, a následnými preskokmi do nižších stavov vyžarujú prebytočnú energiu v podobe vysokoenergetických fotónov – tzv. γ -žiarenia s *čiarovým* spektrom.

III.3.3 Štiepenie a syntéza jadier.

Posledným dôležitým mechanizmom (rádioaktívneho) rozpadu jadier je tzv. **štiepenie** – rozpad materského jadra na dve menšie (spravidla nerovnaké) jadrá – **fragmenty**. Platí pritom

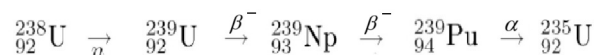
$$m_{\text{pred rozpadom}} > (m_1 + m_2)_{\text{po rozpade}}$$

Nejde tu však o *spontánny* proces (v prípade nestabilných jadier je totiž oveľa pravdepodobnejším α - alebo β -rozpad), k štiepeniu jadra dochádza v dôsledku *nepružnej* zrážky s iným projektilom. Typickým prípadom je zrážka ťažkého jadra s *pomalým* neutrónom sprevádzaná *záchyтом* tohto neutrónu v jadre.³⁸ Jadro tým prejde do vyššieho energetického stavu, a ak tento prírastok energie/hmotnosti prevýši energiu potrebnú na prekonanie (pretunelovanie) potenciálovej bariéry voči rozpadu na fragmenty, jadro sa následne rozpadne.³⁹ Samotným štiepením jadier zväčša dochádza (popri uvoľnení energie) len k emisii jedného alebo viacerých neutrónov. Fragmenty – produkty štiepenia sú však spravidla rádioaktívne, a *následne* u nich dochádza k α - alebo β -rozpadu.



Kinetická energia fragmentov sa v reaktoroch (a bombách) prejavuje ako *tepelná* energia *uvoľnená* takouto tzv. **exotermickou reakciou**. Z praktického hľadiska je pri štiepení jadier dôležitá emisia (dostatočne pomalých) *sekundárnych* neutrónov, čím sa dosahuje **reťazovosť** takéhoto procesu,⁴⁰ za predpokladu dostatočného – **nadkritického** – množstva paliva (t.j. nerozpadnutých jadier).

Tzv. **transuránové prvky** so $Z > 92$ sa v prírode *nevyskytujú*, vyrábajú sa bombardovaním (najmä izotopu ^{238}U neutrónmi) v reaktoroch, a sú nestabilné.



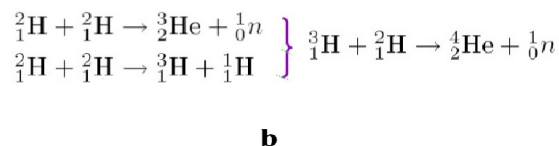
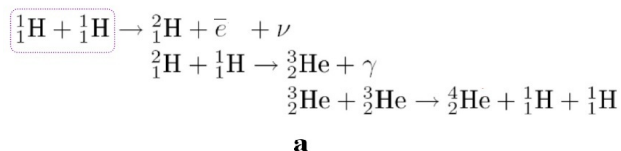
³⁸Pravdepodobnosť záchytu neutrónu jadrom narastá s dobou výskytu neutrónu v blízkosti jadra, je teda malá pre vysokoenergetické neutróny.

³⁹V tom je zásadný rozdiel medzi izotopmi uránu 235 a 238 – pre druhý z nich nepredstavuje záchyt neutrónu dostatočný energetický zisk. Preto je pri príprave jadrového paliva potrebné tzv. **obohacovanie** prírodnej zmesi 235/238 (obsahujúcej menej ako 1% izotopu 235).

⁴⁰V jadrových reaktoroch sa regulovaním rýchlosti neutrónov ich interakciou s tzv. **moderátormi** (napr. uhlíkovými tyčami) riadi intenzita reťazovej reakcie.

Opačným procesom ku štiepeniu jadier je ich *syntéza* - **fúzia**. Aby sa však dve jadrá spojili, opäť musí byť prekonaná potenciálová bariéra voči ich vzájomnému priblíženiu. Na uskutočnenie fúzie je teda potrebné dodať veľké množstvo energie, samotnou fúziou sa však uvoľní ešte väčšie množstvo energie (dané rozdielom hmotností vstupných a výstupných produktov). Je to teda opäť *exotermická* reakcia, aké prebiehajú vo vnútri hviezd.⁴¹

Príkladmi takejto reakcie sú uzavretý vodíkový cyklus so syntézou hélia (a), a spaľovanie vodíka na hélium (b).



⁴¹Vo vnútri hviezd je dostatočná teplota aj (vďaka gravitačnému stlačeniu) dostatočná hustota jadier na zapálenie a udržanie takýchto reakcií, v laboratórnych podmienkach sa zatiaľ nedarí takéto reakcie kontrolovane udržať s kladnou energetickou bilanciou.

DODATKY

A Skalárny a vektorový potenciál.

Pre fyzikálne realistické vektorové polia, ktoré dostatočne rýchlo zanikajú so vzdialenosťou od zdrojov (sú nulové v nekonečne), z vektorovej analýzy vyplýva tzv. **Helmholtzova teoréma**: Každé dostatočne hladké (diferencovateľné) pole $\vec{\mathcal{X}}$ sa dá rozložiť na *žriedlové*, $\vec{\mathcal{X}}_d$, a *vírové* pole, $\vec{\mathcal{X}}_r$,

$$\vec{\mathcal{X}} = \vec{\mathcal{X}}_d + \vec{\mathcal{X}}_r \quad \nabla \cdot \vec{\mathcal{X}} = \nabla \cdot \vec{\mathcal{X}}_d \quad (\nabla \cdot \vec{\mathcal{X}}_r = 0) \quad \nabla \times \vec{\mathcal{X}} = \nabla \times \vec{\mathcal{X}}_r \quad (\nabla \times \vec{\mathcal{X}}_d = 0)$$

Platnosť identít $\nabla \times (\nabla \Phi) = 0$ a $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{\mathcal{U}}) = 0$ naznačuje, že bez újmy na všeobecnosti môžeme písať

$$\vec{\mathcal{X}}_d = -\nabla \Phi \quad \vec{\mathcal{X}}_r = \nabla \times \vec{\mathcal{U}}$$

Žriedlové vektorové pole je teda *gradientom nejakého skalárneho poľa* Φ , kým vírové pole je *rotáciou nejakého vektorového poľa* $\vec{\mathcal{U}}$. Výber polí $\Phi, \vec{\mathcal{U}}$ pritom *nie je jednoznačný*.

Magnetické pole je vírové, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, môžeme mu teda priradiť tzv. **vektorový potenciál** $\vec{A}$, kým *elektrostatické* pole je žriedlové, $\nabla \times \vec{E}_d = 0$, a môžeme mu priradiť **skalárny potenciál** φ ,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \vec{E}_d = -\nabla \varphi$$

Elektrické pole má však aj vírovú zložku, $\nabla \times \vec{E}_r = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{A})$, a teda

$$\vec{E} = \vec{E}_d + \vec{E}_r = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Voľba polí $\varphi, \vec{A}$ nie je jednoznačná, ich prípadná zmena - tzv. **kalibrácia** - však nesmie zmeniť polia $\vec{E}, \vec{B}$. Tejto požiadavke vyhovuje kalibračná transformácia

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \Lambda$$

B Tok energie v okolí prúdovodiča.

Predpokladajme priamy valcový prúdovodič o polomere a dĺžky L v smere z vložený do osi dutého uzemneného valca o polomere R a vodivo spojený s jeho dnom. Po pripojení vrchu prúdovodiča na elektrický potenciál $\mathcal{U}$ ním preteká do dna uzemneného valca (obr.) pri mernej vodivosti σ prúd I , generujúci v ňom spád potenciálu a pozdĺžne elektrické pole, nezávisiace od r ($r < a$)

$$\varphi(z) = \frac{\mathcal{U}z}{L} \quad \vec{E} = -\frac{\mathcal{U}}{L}\vec{z}^o = \frac{I}{\pi a^2 \sigma}\vec{z}^o$$

To ale znamená, že v jeho okolí $a < r < R$ existuje popri azimutálnom magnetickom poli aj elektrické pole s radiálnou zložkou

$$\vec{B}(r) = -\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 r}\vec{\theta}^o = -\frac{\mathcal{U}a^2\sigma}{2\epsilon_0 c^2 L r}\vec{\theta}^o \quad \varphi(r, z) = \frac{\mathcal{U}z \ln(R/r)}{L \ln(R/a)}$$

$$\vec{E}(r, z) = -\nabla\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{r}^o - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{z}^o = \dots = \frac{\mathcal{U}}{L \ln(R/a)} \left[\frac{z}{r}\vec{r}^o - \ln(R/r)\vec{z}^o \right]$$

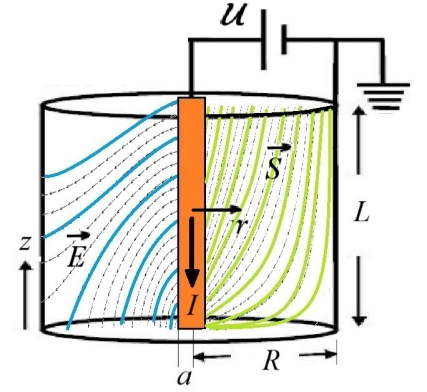
(na modro vyznačené v ľavej časti valca) a odpovedajúci Poyntingov vektor

$$\vec{S}(r, z) = \epsilon_0 c^2 \vec{E}(r, z) \times \vec{B}(r) = -\frac{\mathcal{U}^2 a^2 \sigma}{2L \ln(R/a)} \left[\frac{z}{r^2}\vec{z}^o + \frac{\ln(R/r)}{r}\vec{r}^o \right] = \vec{S}_z(r, z) + \vec{S}_r(r, z)$$

(na zeleno vyznačený v pravej časti valca). Vidíme teda, že EM energia tečie zo zdroja *popri* vodiči a *postupne* doň vniká. Celková energia pretekajúca plochou kolmou na prúdovodič vo výške z ,

$$E(z) = \int_a^R \vec{S}_z(r, z) 2\pi r dr = \dots = \frac{\pi a^2 \sigma \mathcal{U}^2}{L^2} z = \mathcal{U} I \frac{z}{L}$$

je presne energiou, ktorá sa vo vodiči pod touto plochou premení na teplo.



C Maxwellov tenzor napätia.

Integrálny tvar zákona zachovania hybnosti v EM poli určuje silu, ktorou EM pole vo všeobecnosti pôsobí na nábojové/prúdové rozloženie,

$$\vec{F} = \int_V (\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}) dV = \int_V \frac{\partial \vec{\pi}_{mech}}{\partial t} dV = \int_V \nabla \cdot \overleftrightarrow{T} dV = \oint_{\Sigma} \overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{\Sigma} - \int_V \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} dV$$

Bodový náboj nemôže svojím vlastným elektrickým poľom silovo pôsobiť sám na seba, a to isté platí o magnetickom poli nekonečne tenkého prúdovodiča. Ak však pracujeme s nabitým *kontinuom* s hustotami $\rho, \vec{j}$, jednotlivé elementárne objemy na seba navzájom silovo pôsobia, čo je obsiahnuté práve v tenzore $\overleftrightarrow{T}$. Rozoberme fyzikálny zmysel tenzora napätia v partikulárnych prípadoch:

Predpokladajme *statické* rozloženie nábojov a/alebo stacionárne prúdy vo vodičoch, generujúce *statické* polia $\vec{E}, \vec{B}$. V závislosti od ich konfigurácie Poyntingov vektor (tok EM energie) môže ale nemusí byť nulový, v každom prípade však $\vec{g} \neq \vec{g}(t)$, a integrálny tvar rovnice kontinuity prejde na

$$\vec{F} = \int_V \frac{\partial \vec{\pi}_{mech}}{\partial t} dV = \oint_{\Sigma} \overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{\Sigma}$$

Zložky T_{ij} tenzora napätia reprezentujú statickú silu, ktorou EM pole pôsobí v rôznych smeroch na elementárne plôšky $d\vec{\Sigma}$ povrchu pomyselného objemu nábojového rozloženia (smerom von z objemu). Ako príklad uveďme doskový kondenzátor nabitý nábojom s plošnou hustotou $\pm\sigma$, a s elektrickým poľom $|\vec{E}| = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ v smere x : Opačne nabité platne sa priťahujú silou o plošnej hustote $\frac{1}{2}\sigma|\vec{E}| = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$, čo práve odpovedá nenulovej zložke T_{xx} (tlaku na konštrukciu kondenzátora). Nenulové (a záporné) sú však aj zložky T_{yy} a T_{zz} , vyjadrujúce pnutie v rovinách dosiek v dôsledku vzájomného odpudzovania nábojov rozložených na ich povrchoch. Pnutie pociťuje aj solenoid pretekaný prúdom: Ľahko nahliadneme, že magnetická Lorentzova sila medzi prúdom vo vinutí a magnetickým poľom solenoidu vyvoláva tlak na steny solenoidu smerujúci do strán. Pri vytváraní polí v kondenzátore či solenoide sa nenulovosť týchto tlakov/napätí prejaví v požiadavke na výkon zdrojov.

Iným je prípad EM energie *šíriacej sa prázdny priestorom* (bez nábojov a prúdov). Tentokrát $\vec{g} = \vec{g}(t) \neq 0$, ale $\vec{F} = 0$ (lebo $q, \vec{j} = 0$), čiže⁴²

$$\oint_{\Sigma} \overleftarrow{T} \cdot d\vec{\Sigma} - \frac{d}{dt} \int_V \vec{g} dV = 0$$

V prázdnom priestore zvolíme pomyselný infinitezimálny integračný objem $\Delta t \vec{v} \cdot d\vec{\Sigma}$, ktorý EM energia „preletí“ za čas Δt rýchlosťou $|\vec{v}| = c$. V limite $\Delta t \rightarrow dt \rightarrow 0$ potom dostaneme

$$\overleftarrow{T} = -\vec{g}\vec{v}$$

definitorky so znamienkom -. Keďže ľavá strana rovnosti je tenzor, je zrejmé, že súčin $\vec{g}$ a $\vec{v}$ musí byť *dyadický* (tenzorový),

$$\vec{g}\vec{v} = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{pmatrix} (v_x \ v_y \ v_z) = \begin{pmatrix} g_x v_x & g_x v_y & g_x v_z \\ g_y v_x & g_y v_y & g_y v_z \\ g_z v_x & g_z v_y & g_z v_z \end{pmatrix} = -\overleftarrow{T}$$

Znamená to tiež, že vektory $\vec{g}$ a $\vec{v}$ môžu mať *rôzne* smery. Každá zložka T_{ij} je (záporne vzatou) j -tou zložkou *toku* i -tej zložky hustoty hybnosti EM poľa. Ak by takýto tok postupoval nábojovým prostredím, diagonálne zložky tenzora by v ňom odpovedali *tlaku* v smere šírenia, a mimodiagonálne zložky *strihovému napätiu*.

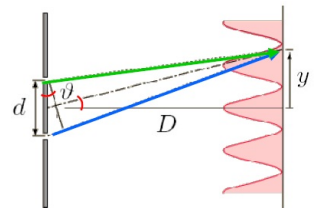
D Interferencia svetla na sústave štrbín.

Predpokladajme nepriesvitnú platňu v rovine xy s dvomi štrbinami pozdĺž smeru x o vzájomnej vzdialenosti d , a paralelné tienidlo v z -ovej vzdialenosti D ($\gg d$) (obr.). Ak z oboch štrbín vychádzajú svetelné zväzky o intenzitách I_0 , výsledná intenzita na tienidle vo vzdialenosti y od osi štrbín je (kap. II.1.1)

$$I(y) = 2I_0[1 + \cos \Delta\varphi(y)]$$

Fázový rozdiel interferujúcich lúčov je daný rozdielom ich optických dráh, ktorý (ako vyplýva z obrázka) je $d \sin \vartheta$, čiže

$$\Delta\varphi(y) = kd \sin \vartheta(y) = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \vartheta(y) = \frac{2\pi}{\lambda} d \frac{y}{D}$$



⁴²Zámena $\frac{\partial}{\partial t}$ za $\frac{d}{dt}$ pri objemovom integráli v relativistickom zápise nerobí problém ak derivujeme podľa *vlastného* času.

kde λ je vlnová dĺžka svetla. Interferenčné maximá, resp. minimá nastanú ak $\Delta\varphi = 2l\pi$, resp. $(2l+1)\pi$, $l = 0, 1, 2, \dots$, čomu odpovedajú polohy maxím/miním

$$y_{max} = l\lambda \frac{D}{d} \qquad y_{min} = (2l+1)\lambda \frac{D}{2d}$$

E Planckov zákon.

Predpokladajme dutú kovovú krabicu v tvare kocky o strane L , naplnenú EM vlnami. Dokonalý odraz vĺn od stien krabice odpovedá podmienke *nulovej* elektrickej zložky vĺn na stenách, čo znamená, že v dutine môžu existovať len módy *stojatých vĺn*, a to len na určitých vlnových dĺžkach

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \qquad k_j = \frac{2\pi}{\lambda_j} = \frac{\pi l_j}{L} \qquad l_j = 1, 2, \dots \qquad j = x, y, z$$

Dosadením do vlnovej rovnice pre EM pole vo vákuu dostaneme *disperzný vzťah*

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 = \sum_j k_j^2 = \frac{\pi^2}{L^2} \sum_j l_j^2$$

Tieto módy tvoria v reciprokom $\vec{k}$ -priestore 3D mriežku bodov s periódami $\Delta k_j = \frac{\pi}{L}$. Zaujímá nás len jeden oktant ($\frac{1}{8}$) odpovedajúci $l_j > 0$. Počet mriežkových bodov v objemovom elemente $\frac{1}{8}4\pi k^2 dk$ tohto oktantu (čiže módov EM vlny) je

$$N(k)dk = \frac{1}{8}4\pi \left(\frac{Lk}{\pi}\right)^2 \frac{L}{\pi} dk = \frac{L^3 k^2}{2\pi^2} dk = \frac{L^3 \omega^2}{2\pi^2 c^3} d\omega = N(\omega)d\omega$$

Po započítaní 2 možných polarizácií EM vĺn je objemová hustota módov (v objeme L^3) v intervale frekvencií $d\omega$ (k *spojitému* spektru sa dostaneme limitou $L \rightarrow \infty$)

$$n(\omega)d\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega$$

Každý mód je harmonickým oscilátorom s príslušnou frekvenciou. Ak predpokladáme výmenu energie medzi jednotlivými módmi a stenami krabice, v termodynamickej rovnováhe pri teplote T na každý z dvoch stupňov voľnosti EM poľa (Dodatok H) pripadá podľa ekvipartičnej teóremy zo štatistickej fyziky energia $\frac{1}{2}k_B T$. Objemová hustota energie na danej frekvencii je potom

$$w(\omega)d\omega = \frac{\omega^2 k_B T}{\pi^2 c^3} d\omega$$

čo je **Rayleighov-Jeansov zákon**. Na nízkych frekvenciách je tento zákon vo veľmi dobrej zhode s experimentom. Ak však predpokladáme, že táto energia je vyžarovaná malým otvorom v stene krabice, privedie nás to k tzv. **ultrafialovej katastrofe** - energia vyžiarená v celom spektre bude *nekonečná*, $\int_0^\infty w(\omega)d\omega \rightarrow \infty$.

Ultrafialovej katastrofe sa môžeme vyhnúť ak predpokladáme,⁴³ že energia každého módu na frekvencii ω môže byť len celočíselným násobkom kvanta $\hbar\omega$. Podľa boltzmanovskej štatistiky pravdepodobnosť, že určitý mód obsahuje energiu $E_n = n\hbar\omega$, a stredná energia módu s frekvenciou ω sú

$$\mathcal{P}(E_n) = \frac{\exp(-E_n/k_B T)}{\sum_n \exp(-E_n/k_B T)} \qquad \bar{E}(\omega) = \sum_n E_n \mathcal{P}(E_n)$$

⁴³M. Planck, 1900

Po dosadení za E_n a matematických úpravách dostaneme **Boseho-Einsteinovo rozdelenie**

$$\bar{E}(\omega) = \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}$$

Dosadením do vyššie uvedenej hustoty módov v intervale $d\omega$ dostaneme **Planckov zákon žiarenia absolútne čierneho telesa**⁴⁴

$$w(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}$$

V *klasicknej* limite $\frac{\hbar\omega}{k_B T} \ll 1$, čiže pri nízkych frekvenciách a/alebo vysokej teplote, dostaneme Rayleighov-Jeansov zákon. Integrovanie cez všetky frekvencie zas vedie na **Stefanov-Boltzmannov zákon**

$$w \sim T^4$$

F Comptonov jav.

Pri pružnej zrážke fotónu s elektrónom sa musí zachovávať celková energia aj hybnosť,

$$\hbar\omega + E_e = \hbar\omega' + E'_e \quad E_e = \sqrt{(m_e c^2)^2 + (Pc)^2} \quad , \quad E'_e = \sqrt{(m_e c^2)^2 + (P'c)^2}$$

$$\hbar\vec{k} + \vec{P} = \hbar\vec{k}' + \vec{P}' \quad \vec{P} = \gamma m_e \vec{v}_e \quad , \quad \vec{P}' = \gamma m_e \vec{v}'_e$$

Pre jednoduchosť predpokladajme pred zrážkou, $\vec{v}_e = 0$ a teda $\vec{P} = 0$. Úpravou zákonov zachovania dostávame

$$c^2 P'^2 = (\hbar[\omega - \omega'] + m_e c^2)^2 - m_e^2 c^4$$

$$c^2 P'^2 = c^2 \vec{P}' \cdot \vec{P}' = c^2 \hbar^2 (\vec{k} - \vec{k}') \cdot (\vec{k} - \vec{k}') = c^2 \hbar^2 (k^2 + k'^2 - 2kk' \cos \vartheta)$$

Porovnaním pravých strán a úpravami dostaneme

$$2\hbar m_e c^2 (\omega - \omega') = 2\hbar^2 \omega \omega' (1 - \cos \vartheta)$$

a odtiaľ

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \vartheta)$$

V prípade odrazu fotónu do pôvodného smeru, $\vartheta = 180$, platí

$$P' = \hbar(k + k') = \frac{\hbar}{c} (\omega + \omega') = \gamma m_e v = \gamma \beta m_e c$$

Z Comptonovho výrazu pre tento uhol vieme vyjadriť $m_e c = \dots = \frac{2\hbar}{c} \frac{\omega\omega'}{\omega - \omega'}$, a po dosadení dostaneme (kvadratickú) rovnicu pre ω'

$$\omega + \omega' = 2\gamma\beta \frac{\omega\omega'}{\omega - \omega'}$$

ktorej kladný koreň je $\omega' = \gamma\omega(1 - \beta)$, čo je výraz pre pozdĺžny dopplerovský posuv.

⁴⁴ Absolútne čierne teleso je definované ako teleso, ktoré pohltí všetku dopadajúcu energiu na všetkých frekvenciách, a teda vyžaruje (neodráža) so *spojitým* spektrom.

G Moment hybnosti elektromagnetickej vlny.

Moment hybnosti EM vlny vo vákuu v určitom objeme je

$$\vec{J}_{EM} = \frac{1}{c^2} \int \vec{r} \times \vec{S} dV = \varepsilon_0 \int \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}) dV = \varepsilon_0 \int \vec{r} \times [\vec{E} \times (\nabla \times \vec{A})] dV$$

Upravme najprv výraz v hranatej zátvorke,

$$\vec{E} \times (\nabla \times \vec{A}) \rightarrow \varepsilon_{ijk} E_j \varepsilon_{klm} \partial_l A_m = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) E_j \partial_l A_m = E_j \partial_i A_j - E_j \partial_j A_i \rightarrow \sum_j E_j \nabla A_j - (\vec{E} \cdot \nabla) \vec{A}$$

Moment hybnosti môžeme potom zapísať ako

$$\vec{J}_{EM} = \varepsilon_0 \int \left[\vec{r} \times \sum_j (E_j \nabla A_j) - \vec{r} \times (\vec{E} \cdot \nabla) \vec{A} \right] dV$$

Druhý člen podintegrálneho výrazu sa dá upraviť ako

$$\begin{aligned} \left[\vec{r} \times (\vec{E} \cdot \nabla) \vec{A} \right]_i &= \left[\vec{r} \times \sum_k E_k \partial_k \vec{A} \right]_i = \sum_k E_k \left[\vec{r} \times \partial_k \vec{A} \right]_i = \sum_k E_k \varepsilon_{ilm} x_l \partial_k A_m = \\ &= \sum_k E_k \varepsilon_{ilm} [\partial_k (x_l A_m) - \overbrace{(\partial_k x_l) A_m}^{\delta_{lk}}] = \sum_k E_k [\partial_k \varepsilon_{ilm} x_l A_m - \varepsilon_{ikm} A_m] \rightarrow (\vec{E} \cdot \nabla) (\vec{r} \times \vec{A}) - (\vec{E} \times \vec{A}) \end{aligned}$$

Predpokladáme reálnu situáciu, pri ktorej EM polia dostatočne rýchlo klesajú k nule v „nekonečne“, a integrovaním *per partes* dostaneme

$$\int (\vec{E} \cdot \nabla) \overbrace{(\vec{r} \times \vec{A})}^{\vec{\xi}} dV = \sum_k \int E_k \partial_k \vec{\xi} dV = \sum_k \left[E_k \vec{\xi} \right]_{-\infty}^{\infty} - \sum_k \int (\partial_k E_k) \vec{\xi} dV = - \int (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{\xi} dV$$

Vo vákuu bez nábojov navyše platí $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, takže konečný výraz pre moment hybnosti je

$$\vec{J}_{EM} = \varepsilon_0 \int \vec{r} \times \sum_{j=1}^3 (E_j \nabla A_j) dV + \varepsilon_0 \int \vec{E} \times \vec{A} dV = \vec{J}_{orb} + \vec{J}_{spin}$$

H Stupne voľnosti elektromagnetickej vlny.

Pole ako *kontinuum* má nekonečný počet stupňov voľnosti. Každému bodu poľa však prislúcha určitý počet *vnútorných* stupňov voľnosti - nezávislých premenných jednoznačne určujúcich pole *v danom bode*. Vektorové pole má vo všeobecnosti 3 vnútorné stupne voľnosti (určujúce okrem veľkosti aj *smer*). EM pole je však tvorené *dvojicou* vektorov, $\vec{E}$ a $\vec{B}$, naivne by sme teda očakávali, že EM vlna bude mať $2 \times 3 = 6$ *vnútorných* stupňov voľnosti, pripadajúcich na zložky vektorov *v každom bode poľa*. V Maxwellových rovniciach sú však jednotlivé zložky polí navzájom previazané, a teda nie sú nezávislé. Počet týchto rovníc (2 vektorové a 2 skalárne, t.j. 8 rovností), jednoznačne určujúcich EM pole, navyše presahuje počet 6 domnelých stupňov voľnosti. Rovnice

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

naznačujú 3 väzby medzi zložkami E_j a B_j , a ďalšiu väzbu medzi zložkami B_j navzájom. Ide však o väzby medzi priestorovými deriváciami, dávajúce do súvisu daný bod so svojím okolím. Aby sme sa tohto problému zbavili, musíme prejsť do Fourierovho obrazu, teda od premenných $\vec{r}, t$ k premenným $\vec{k}, \omega$. Tu majú uvedené rovnice tvar

$$\vec{k} \times \vec{E}(\vec{k}, \omega) = \omega \vec{B}(\vec{k}, \omega) \quad \vec{k} \cdot \vec{B}(\vec{k}, \omega) = 0$$

Máme teda 3 + 1 podmienok zväzujúcich jednotlivé zložky polí (v každom bode fourierovského obrazového priestoru $(\vec{k}, \omega)$). Počet *nezávislých* stupňov voľnosti EM vlny je teda $6 - 4 = 2$.

Ak reprezentujeme EM vlnu prostredníctvom potenciálov $\varphi, \vec{A}$, opäť by sme mohli očakávať tentokrát $1 + 3 = 4$ stupne voľnosti. Kalibračná voľnosť však znamená, že niektoré stupne voľnosti sú *redundantné* (nadbytočné). Väzba daná lorenzovskou kalibráciou (kap.I.3.2)

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

síce eliminuje 1 redundantný stupeň voľnosti, tejto kalibrácii však stále vyhovuje nekonečné množstvo kalibračných skalárnych funkcií Λ , spĺňajúcich rovnicu $\square \Lambda = 0$. Ďalší redundantný stupeň voľnosti môžeme redukovať *dodatočnou* kalibráciou, napr. coulombovskou,

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (\text{napr. } \varphi = 0)$$

Tým je už vektorový potenciál $\vec{A}$ jednoznačne fixovaný (skalárny potenciál φ už nie je dynamic-kou premennou). Ak predpokladáme rovinnú EM vlnu $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$, potom coulombovská kalibrácia znamená

$$\vec{k} \cdot \vec{A}_0 = 0 \quad (\text{a to isté pre } \vec{E}_0, \vec{B}_0)$$

čiže EM vlna je *transverzálna* (priečna), $\vec{A}_0, \vec{E}_0, \vec{B}_0 \perp \vec{k}$, čomu odpovedajú dve priečne polarizácie. Ich lineárnymi kombináciami zas môžeme vytvoriť dve navzájom opačne orientované *kruhovú* polarizácie (a naopak).

I Machov-Zehnderov interferometer.

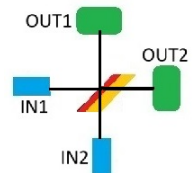
Prenosovú charakteristiku polopriepustného zrkadla s dvojicou vstupov IN1, IN2 a dvojicou výstupov OUT1, OUT2 môžeme vyjadriť sústavou rovníc

$$\begin{aligned} \text{OUT1} &= r_1 \text{IN1} + t_1 \text{IN2} \\ \text{OUT2} &= t_2 \text{IN1} + r_2 \text{IN2} \end{aligned} \quad (\text{S}) = \begin{pmatrix} r_1 & t_1 \\ t_2 & r_2 \end{pmatrix}$$

kde r_j a t_j sú koeficienty odrazu a prechodu v zrkadle, a (S) je matica tejto sústavy rovníc. Prenos potom môžeme zapísať v tvare

$$(\text{OUT}) = (\text{S}) (\text{IN})$$

Toku energie na vstup IN1 odpovedá stav $|\text{IN}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, a toku na vstup IN2 stav $|\text{IN}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ak zrkadlo nemá pohlcovať žiadnu energiu, jeho matica musí byť (v obore komplexných čísel) *unitárnou*. Takou je napr. $(\text{S}) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* e^{i\varphi} & b^* e^{i\varphi} \end{pmatrix}$, kde $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Bez újmy na všeobecnosti môžeme zvoliť $a = e^{i\alpha} \cos \theta$ a $b = e^{i\beta} \sin \theta$. Ak zvolíme α, β, φ tak, že $\alpha = \varphi/2$ a $\beta = (\varphi + \pi)/2$,



potom $(S) = e^{i\varphi/2} \begin{pmatrix} \cos \theta & i \sin \theta \\ i \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. Pre $\varphi = 0$ požiadavka symetrickosti (50%:50%) polopriepustného zrkadla vedie na

$$(S) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

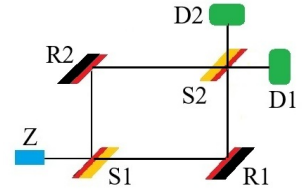
Prechod zrkadlom z jednotlivých vstupov potom znamená

$$\text{IN1: } \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{IN2: } \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Prvý prípad odpovedá zrkadlu S1 v MZI z kap. II.2.1. Prenos zrkadlom S2 je potom

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}$$

(S2 má otočené vstupy a výstupy voči S1), čo znamená nenulovú amplitúdu na D1. Detegovaná energia (z definície *kladná*) je daná kvadrátom amplitúdy, teda $|i^2| = 1$. Naopak, pre D2 je amplitúda nulová.



Prípadné dodatočné fázové posuvy môžeme zohľadniť vynásobením príslušných prvkov matice (S) výrazmi typu $e^{i\varphi}$. Ak v spodnom ramene MZI vytvoríme fázový posuv φ (napr. predĺžením ramena), reprezentovať ho bude matica $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix}$, a amplitúda prenosu z IN1 celým MZI bude

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dots = ie^{i\varphi/2} \begin{pmatrix} \cos \varphi/2 \\ -\sin \varphi/2 \end{pmatrix}$$

Intenzity detekcie na D1 resp. D2 sú potom $\cos^2 \varphi/2$ resp. $\sin^2 \varphi/2$. Spojitou zmenou φ z 0 na π tak môžeme postupne presunúť interferenčné maximum z D1 na D2, a minimum z D2 na D1.

J Bellove nerovnosti.

Pri predom určených 8 párových konfiguráciách binárnych premenných (α, β, γ)

$$(+, +, +), (+, +, -), \dots, (-, -, -)$$

je celkový počet párových meraní N daný súčtom početností jednotlivých zrealizovaných konfigurácií,

$$N = N(\alpha+, \beta+, \gamma+) + N(\alpha+, \beta+, \gamma-) + \dots + N(\alpha-, \beta-, \gamma-)$$

Zaujímá nás počet meraní s výsledkom $(\alpha+, \beta-)$, pre ktorý musí platiť

$$N(\alpha+, \gamma-) = N(\alpha+, \beta \text{ ľubovoľné}, \gamma-) = N(\alpha+, \beta-, \gamma-) + N(\alpha+, \beta+, \gamma-)$$

Keďže prirodzene platí

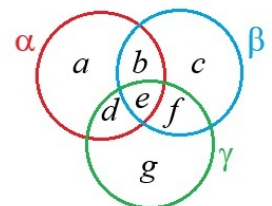
$$N(\alpha+, \beta-, \gamma-) \leq N(\alpha+, \beta-)$$

$$N(\alpha+, \beta+, \gamma-) \leq N(\beta+, \gamma-)$$

dostávame príslušnú Bellovu nerovnosť

$$N(\alpha+, \gamma-) \leq N(\alpha+, \beta-) + N(\beta+, \gamma-)$$

ktorá sa dá názorne demonštrovať na Vennovom diagrame:



$$N(\alpha+, \gamma-) = a + b$$

$$N(\alpha+, \beta-) = a + d$$

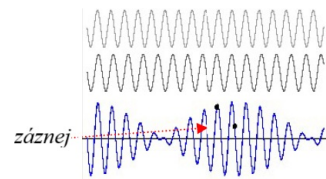
$$N(\beta+, \gamma-) = b + c$$

$$a + b \leq a + b + c + d$$

K Vlnový balík a grupová rýchlosť.

Superpozícia dvoch (skalárnych) harmonických vln blízkyh frekvencií spôsobuje **zázneje** (pre jednoduchosť uvažujme rovnaké amplitúdy)

$$\begin{aligned}\psi_1(x, t) + \psi_2(x, t) &= Ae^{i(k_1x - \omega_1t)} + Ae^{i(k_2x - \omega_2t)} = \dots \\ &= 2Ae^{i(k_0x - \omega_0t)} \cos(\Delta kx - \Delta\omega t)\end{aligned}$$



$$\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad \Delta\omega = \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2} \quad k_0 = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad \Delta k = \frac{|k_1 - k_2|}{2}$$

Fázové rýchlosti vln ψ_1 a ψ_2 sú $v_1 = \frac{\omega_1}{k_1}$ a $v_2 = \frac{\omega_2}{k_2}$, a rýchlosť záznejev - tzv. **grupová rýchlosť** - je

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

Zázneje s frekvenciou $\Delta\omega$ tvoria amplitúdovú „obálku“ pre „nosnú“ vlnu frekvencie ω_0 , šíriacu sa fázovou rýchlosťou $v_f = \frac{\omega_0}{k_0}$. Ak $v_1 = v_2 = v_f$, potom aj $v_g = v_f$. Ak však $v_1 \neq v_2$, potom $v_g \neq v_f$. Môže pritom nastať prípad $v_g > v_f$ aj $v_g < v_f$.

Predpokladajme teraz superpozíciu harmonických vln zo spojitého spektra frekvencií/vlnových dĺžok/vlnových čísel v tvare gaussiánu,

$$F(k) = \frac{A}{\sqrt{\sigma_k}} e^{-\left(\frac{k-k_0}{2\sigma_k}\right)^2}$$

so štandardnou odchýlkou σ_k a normovacím koeficientom A , (závisiacim od konvencie), ktorý budeme ďalej ignorovať. Fourierovou transformáciou

$$\psi(x) \sim \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk$$

dostávame *priestorové* rozloženie vlny v danom čase - **vlnový balík** monochromatických vln bez začiatku a konca (delokalizovaných pozdĺž celej osi x) so spojitým spektrom vlnových čísel o šírke $\Delta k \cong \sigma_k$ v okolí k_0 . Zvoľme čas $t = 0$, v ktorom sú tieto vlny sfázované tak, že všetky majú v mieste $x = 0$ maximálnu výchylku (amplitúdu). Z vlastností fourierovskej transformácie gaussiánu vyplýva, že mimo intervalu $\Delta x \approx \sigma_x = \frac{1}{2\sigma_k}$ okolo $x = 0$ sa jednotlivé monochromatické komponenty sčítavajú s *náhodnou* fázou a tým sa vzájomne *eliminujú*.

Takýto vlnový balík sa bude šíriť v superpozícii jednotlivých postupujúcich komponent,

$$\psi(x, t) \sim \frac{1}{\sqrt{\sigma_k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{k-k_0}{2\sigma_k}\right)^2} e^{i(kx - \omega(k)t)} dk$$

Ak sa všetky komponenty šíria *rovnakou* fázovou rýchlosťou $v_f = \frac{\omega(k)}{k}$, čiže $\omega(k) = kv_f$, integrál môžeme upraviť do tvaru

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{k-k_0}{2\sigma_k}\right)^2} e^{i(k-k_0)(x-v_ft)} e^{ik_0(x-v_ft)} d(k-k_0) = e^{i(k_0x - \omega_0t)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{q}{2\sigma_k}\right)^2} e^{iq(x-v_ft)} dq$$

kde $q = k - k_0$. Po ďalších úpravách dostaneme

$$\psi(x, t) \sim \frac{1}{\sqrt{\sigma_x}} e^{-\left(\frac{x-v_ft}{2\sigma_x}\right)^2} e^{i(k_0x - \omega_0t)} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_x}} e^{-\left(\frac{x-v_ft}{2\sigma_x}\right)^2} e^{ik_0(x-v_ft)}$$

Vlnový balík sa teda pohybuje ako *kompaktný* celok rýchlosťou v_f .

Ak sa však jednotlivé monochromatické vlny tvoriace balík budú šíriť *rôznymi* fázovými rýchlosťami, rozvojom $\omega(k)$ do Taylorovho radu v okolí k_0 do druhého stupňa dostaneme

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \left(\frac{d\omega(k)}{dk} \right)_{k=k_0} (k - k_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\omega(k)}{dk^2} \right)_{k=k_0} (k - k_0)^2$$

Označme $v_f = \left(\frac{\omega(k)}{k} \right)_{k=k_0}$, $v_g = \left(\frac{d\omega(k)}{dk} \right)_{k=k_0}$ a $\Gamma = \left(\frac{d^2\omega(k)}{dk^2} \right)_{k=k_0}$. Náš balík je potom

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &\sim \frac{1}{\sqrt{\sigma_k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{k-k_0}{2\sigma_k} \right)^2} e^{i(kx - \omega(k)t)} dk = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sigma_k}} e^{i(k_0(x - v_f t))} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\{i(x - v_g t)(k - k_0) - \left(\frac{\Gamma t}{2} + \sigma_x^2 \right)(k - k_0)^2\}} dk \end{aligned}$$

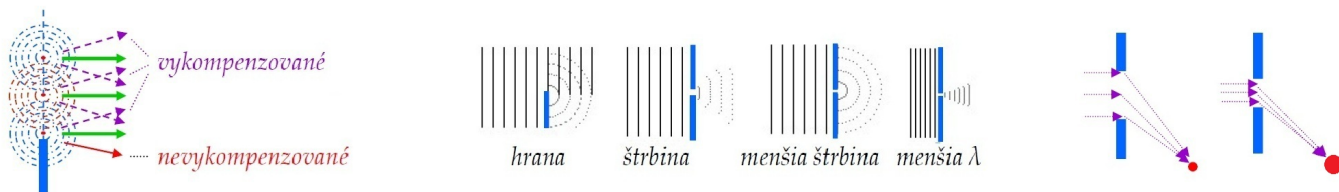
Pomocou série dômyselných substitúcií dostaneme integrál typu $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \sqrt{\pi}$, a po úpravách dostaneme výsledný vzťah

$$\psi(x, t) \sim \frac{1}{\sqrt{\sigma_x \left(1 + \frac{\Gamma t}{2\sigma_x^2} \right)}} e^{-\left(\frac{x - v_g t}{2\sigma(t)} \right)^2} e^{i\theta(x, t)}$$

kde $\sigma(t) = \sigma_x \sqrt{1 + \left(\frac{\Gamma t}{2\sigma_x^2} \right)^2}$ a $\theta(x, t)$ je (nepříjemne vyzerajúca) fáza postupujúcej vlny, ktorá nás nezaujíma. (Pravdepodobnosť nájdenia častice bude daná výrazom $\psi(x, t)\psi^*(x, t)$, a odtiaľ fáza vypadne.) Vidíme, že gaussovský vlnový balík sa šíri *grupovou* rýchlosťou v_g , pričom jeho charakteristická šírka $\sigma(t)$ sa s časom neustále *zväčšuje* rýchlosťou úmernou $\Gamma = \left(\frac{d^2\omega(k)}{dk^2} \right)_{k=k_0}$. Balík sa teda postupne *rozplynie*. Je to zrejmé, keďže každá z vln tvoriacich balík sa šíri *inou* fázovou rýchlosťou. Grupová rýchlosť preto má fyzikálny zmysel len dokiaľ je balík kompaktný.

L Difrakcia vlny na štrbine.

Vlnenie sa podľa **Huygensovho princípu** šíri tak, že *každý bod vlnoplochy je pomyselným zdrojom sekundárnych vln, ktoré navzájom interferujú*. Výsledkom ich interferencie v homogénnom prostredí je šírenie podľa zákonov geometrickej optiky. Ak rovinná vlna dopadne na hranu prekážky, sekundárne vlny smerujúce šikmo za hranu ostanú nevykompenzované - nastáva **ohyb vlny - difrakcia**. Ak vlna prechádza štrbinou, ohyb nastáva vo všetkých smeroch pozdĺž okrajov štrbiny. Dosah a intenzita vlny „ohnutej“ za hranami závisí od jej vlnovej dĺžky λ , a tiež od pomeru λ ku rozmeru štrbiny.

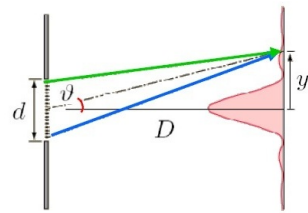


Na konštruktívnej interferencii sa podieľajú len zložky so vzájomným fázovým posuvom $\Delta\varphi < \frac{\pi}{2}$, čiže s malým relatívnym dráhovým rozdielom $\frac{\Delta r}{\lambda}$. Ohyb je teda tým výraznejší, čím väčšia je λ a čím menší je rozmer štrbiny.

Rovnako ako pri interferencii na sústave štrbín (Dodatok D), na vzdialenom tienidle za štrbinou pozorujeme interferenčný/difrakčný obrazec

$$\Delta\varphi(y) = kd \sin \vartheta(y) = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \vartheta(y) = \frac{2\pi}{\lambda} d \frac{y}{D}$$

$$y_{max} = l\lambda \frac{D}{d} \quad l = 0, 1, 2, \dots$$



M Schrödingerova rovnica.

Vynásobme HJR pre nerelativistickú časticu (kap. II.3.4) ansatzom $\psi = e^{iS/\hbar}$,

$$\frac{\partial S}{\partial t} e^{iS/\hbar} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} e^{iS/\hbar} + V e^{iS/\hbar} = 0$$

Prvé dva členy vyjadrime ako

$$\frac{\partial S}{\partial t} e^{iS/\hbar} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad \frac{(\nabla S)^2}{2m} e^{iS/\hbar} = \frac{i\hbar}{2m} (\nabla^2 S) e^{iS/\hbar} - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 (e^{iS/\hbar}) = \frac{i\hbar}{2m} (\nabla^2 S) \psi - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi$$

a po vynásobení rovnice komplexne združenou vlnovou funkciou ψ^* dostaneme

$$\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V \psi \right) \psi^* + \frac{i\hbar}{2m} (\nabla^2 S) \psi \psi^* = 0$$

Ten istý postup pre ψ^* dá

$$\left(-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi^*}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^* + V \psi^* \right) \psi - \frac{i\hbar}{2m} (\nabla^2 S) \psi \psi^* = 0$$

Sčítaním oboch rovníc dostávame

$$\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V \psi \right) \psi^* + \left(-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi^*}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^* + V \psi^* \right) \psi = 0$$

Keďže ψ a ψ^* sú navzájom nezávislé, musí platiť

$$\underline{\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V \psi = 0}$$

$$\underline{-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi^*}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^* + V \psi^* = 0}$$

N Dopad elektrónu na potenciálový skok.

Predstavme si pohyb elektrónu v smere x v osi valcového potrubia, ktorého prvá časť je elektricky uzemnená, kým druhá časť je privedená na potenciál φ . Vnútro oboch častí potrubia je oblasťou s konštantným potenciálom, a rozhranie predstavuje *potenciálový skok*. Elektrické pole $\vec{E} = -\nabla\varphi$ na rozhraní, pôsobiace na dopadajúci elektrón silou

$$\vec{F} = -e\vec{E} = e\nabla\varphi \quad (e > 0)$$

koná na ňom prácu

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{l} = e \int \nabla \varphi \cdot d\vec{l} = e\varphi$$

ktorá sa prejaví zmenou jeho kinetickej energie E_{kin} . (Nech je prechod akokoľvek strmý, práca je konečná.) Definujme teda potenciálnu energiu elektrónu $V = 0$ v prvej časti potrubia $x < 0$, a $V = -e\varphi$ v druhej časti $x > 0$. Ak by bol elektrón *klasickou* časticou, rozhranie by spôsobilo jeho *odraz* pre $E_{kin} < V$, *prechod so spomalením* pre $E_{kin} > V$ alebo *urýchlením* pre $V < 0$.

Letiaci elektrón je však reprezentovaný vlnovým balíkom, a jeho pohyb je opísaný SCHR. Riešenie je pomerne komplikované. Ak sa zriekneme potreby určiť *trajektóriu balíku v čase*, a uspokojíme sa s určením pravdepodobnosti odrazu a prechodu (bez bližšej lokalizácie), vystačíme si s *ľubovoľnou komponentou* balíku s *ostrou* hodnotou energie, čiže so *stacionárnym* stavom v tvare $\psi(x, t) = \psi(x)e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$. Dosadením do SCHR dostaneme

$$E\psi(x) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x)$$

pričom nezaujímavú časovú závislosť $e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$ sme vykrátili. Pre $x < 0$ je *priestorovým* riešením superpozícia dopadajúcej a odrazenej vlny

$$\psi_1(x) = Ae^{ip_1x/\hbar} + Be^{-ip_1x/\hbar} \quad p_1 = \sqrt{2mE_{kin}}$$

Pre $x > 0$ je riešením

$$\psi_2(x) = Ce^{ip_2x/\hbar} + De^{-ip_2x/\hbar} \quad p_2 = \sqrt{2m(E_{kin} - V)}$$

pričom $D = 0$ (žiadna odrazená vlna). Pre $E_{kin} > V$ teda máme *postupujúcu* vlnu so zmenenou hybnosťou. Ak $E_{kin} < V$, potom $p_2 = i\kappa$, $\kappa = \sqrt{2m(V - E_{kin})}$, čo predstavuje *tlmenú* vlnu $e^{-\kappa x/\hbar}$.

Riešenia na rozhraní musia byť „zošité“, čo znamená spojitosť $\psi(x)$ aj $\frac{d\psi(x)}{dx}$ v $x = 0$,

$$A + B = C \quad p_1(A - B) = p_2C$$

Riešením tejto sústavy rovníc dostávame *amplitúdové* koeficienty odrazu a prechodu

$$R = \frac{B}{A} = \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} = \frac{\sqrt{E_{kin}} - \sqrt{E_{kin} - V}}{\sqrt{E_{kin}} + \sqrt{E_{kin} - V}}$$

$$T = \frac{C}{A} = \frac{2p_1}{p_1 + p_2} = \frac{2\sqrt{E_{kin}}}{\sqrt{E_{kin}} + \sqrt{E_{kin} - V}} = 1 + R$$

V *každom* z prípadov sa elektrón na rozhraní *čiastočne odrazí a čiastočne prejde*.

Vzorce pre R a T sú analogické vzorcom pre klasické vlny, kde namiesto hybností p vystupujú **charakteristické (vlnové) impedancie** prostredí

$$R = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad T = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} = 1 + R$$

Pri impedančnom neprispôbení dochádza na rozhraní prostredí *vždy* k odrazu. V prípade EM vlny je $Z = \sqrt{\frac{\mu_0\mu_r}{\epsilon_0\epsilon_r}} = Z_0\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}$ ($Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cong 377\Omega$ je charakteristická impedancia vákua). Pre väčšinu látok na optických frekvenciách platí $\mu_r \cong 1$ a index lomu $n = \frac{c}{v_f} = \sqrt{\mu_r\epsilon_r} \cong \sqrt{\epsilon_r}$. Odtiaľ

$$R = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} \quad T = \frac{2n_2}{n_1 + n_2}$$

Črtá sa tu však paradox: Hustoty pravdepodobnosti odrazeného, resp. prechádzajúceho elektrónu majú byť dané štvorcami amplitúd, $|\frac{B}{A}|^2$, resp. $|\frac{C}{A}|^2$. Pre prípad $E_{kin} > V > 0$ je prvá z nich menšia než 1 (čo je prirodzené), druhá je však väčšia než 1 ! Pri klasických mechanických vlnách máme vysvetlenie: Amplitúda vlny sa po prechode do „mäkšieho“ prostredia (menšia impedancia) *zvýši*, tým však *nenarastie* energia (rýchlosť šírenia sa zmenší a impulz sa skráti). Pre prenos energie nie je rozhodujúce ψ^2 ale $Z\psi^2$. Ekvivalentom mechanicky „mäkšieho“ prostredia je opticky „hustejšie“ prostredie ($Z \sim \frac{1}{n}$). Podobne v prípade elektrónu je pre prenos (tok) pravdepodobnosti rozhodujúce $p\psi^2$. V prípade odrazu *do pôvodného* prostredia sa p nemení, a teda vo výraze pre hustotu pravdepodobnosti odrazeného elektrónu sa vykrátí, a dostávame $|\frac{B}{A}|^2$. V prípade prechádzajúcej vlny však do výrazu pre hustotu pravdepodobnosti prechádzajúceho elektrónu pribudne $\frac{p_2}{p_1}$, a teda dostávame $\frac{p_2}{p_1} |\frac{C}{A}|^2$.

Má alebo nemá teda ψ^2 *vždy* význam hustoty pravdepodobnosti výskytu častice? Má, ak ide o vlnovú funkciu častice. Naša ψ ňou však *nie je*: Riešili sme *nestacionárny* problém pohybu jednej častice cez rozhranie pomocou *stacionárneho* riešenia SCHR - jedinej komponenty pohybujúceho sa vlnového balíka. Podmienky spojitosti na rozhraní preto musíme aplikovať na *toky*, $\frac{p}{m}\psi^*\psi$, čím získame správne výsledky. Na prvý pohľad absurdný výsledok $T > 1$ však predsa len pripúšťa racionálnu interpretáciu: Pokles hybnosti p_2 oproti p_1 totiž zvyšuje pravdepodobnosť nájdenia elektrónu na určitom mieste v prostredí 2. Zvyšok je už vecou správneho normovania, a to zabezpečíme už spomenutým spôsobom.

O Unitárne transformácie operátorov.

Infinitezimálne posunutie stavu $|\psi\rangle$ v smere x o δx , generované hermitovským operátorom $\hat{p}_x$, je podľa kap. II.4.4

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle \cong \left(1 + \frac{i}{\hbar}\delta x \hat{p}_x\right) |\psi\rangle$$

Posunutie stavu o *konečný* interval Δx je mnohonásobným ($N \rightarrow \infty$) opakovaním infinitezimálnych posunutí ($\delta x \rightarrow 0$), čiže

$$\Delta x = \lim_{N \rightarrow \infty} N\delta x \quad |\psi'\rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i}{\hbar} \frac{\Delta x}{N} \hat{p}_x\right)^N |\psi\rangle = e^{\frac{i\Delta x}{\hbar} \hat{p}_x} |\psi\rangle = \hat{U}_x |\psi\rangle$$

(kde sme využili matematickú rovnosť $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{N}\right)^N = e^\alpha$). Keďže $|e^{\frac{i\Delta x}{\hbar} \hat{p}_x}| = 1$, je zrejmé, že pri takýchto transformáciách sa nemení **norma** stavu $\langle\psi|\psi\rangle$

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = \hat{U}|\psi\rangle \quad \langle\psi| \rightarrow \langle\psi'| = \langle\psi|\hat{U}^\dagger \quad \langle\psi|\psi\rangle \rightarrow \langle\psi|\overbrace{\hat{U}^\dagger \hat{U}}^1|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle$$

čiže $\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{U}^{-1} \hat{U} = 1$. Preto sa tieto transformácie nazývajú **unitárnymi**, a ich generátormi musia byť *hermitovské operátory* - v našom prípade $\hat{p}_x$,

$$\hat{p}_x = \hat{p}_x^\dagger \Rightarrow \mathcal{U}_x^\dagger \mathcal{U}_x = e^{\frac{i\Delta x}{\hbar} \overbrace{(\hat{p}_x - \hat{p}_x^\dagger)}^0} \rightarrow \left(1 - \frac{i}{\hbar}\delta x \hat{p}_x^\dagger\right) \left(1 + \frac{i}{\hbar}\delta x \hat{p}_x\right) \cong 1 + \frac{i}{\hbar}\delta x \overbrace{(\hat{p}_x - \hat{p}_x^\dagger)}^0 = 1$$

Uvedené unitárne posunutie stavu $|\psi\rangle$, generované operátorom $\hat{p}_x$, teda znamená *nemeniace sa pravdepodobnosti* namerania jednotlivých vlastných hodnôt ľubovoľnej veličiny α pozdĺž osi x . Napriek tomu však výsledky meraní premennej α pozdĺž osi x môžu byť vo všeobecnosti rôzne, pokiaľ meraný

stav $|\psi\rangle$ nie je jedným z vlastných stavov $|\alpha_n\rangle$ operátora $\hat{\alpha}$, ale náhodne doňho kolabuje až meraním. Konštantnou však bude štatistická *stredná hodnota* $\langle\alpha\rangle$. Tá je daná ako

$$\begin{aligned}\langle\alpha\rangle &= \sum_j \mathcal{P}_j \alpha_j = \sum_j \psi_j^* \psi_j \alpha_j = \sum_j \langle\psi|\alpha_j\rangle \langle\alpha_j|\psi\rangle \alpha_j = \sum_j \langle\psi|\hat{\alpha}|\alpha_j\rangle \langle\alpha_j|\psi\rangle = \\ &= \langle\psi|\hat{\alpha} \underbrace{\left\{ \sum_j |\alpha_j\rangle \langle\alpha_j| \right\}}_1 |\psi\rangle = \langle\psi|\hat{\alpha}|\psi\rangle\end{aligned}$$

kde sme využili rozklad stavu $|\psi\rangle$ do bázy stavov $|\alpha_j\rangle$,

$$|\psi\rangle = \sum_j \psi_j |\alpha_j\rangle = \sum_j |\alpha_j\rangle \psi_j = \overbrace{\sum_j |\alpha_j\rangle \langle\alpha_j|}^1 |\psi\rangle$$

a z čisto formálnych dôvodov musí platiť⁴⁵ $\sum_j |\alpha_j\rangle \langle\alpha_j| = 1$. Pre **strednú hodnotu operátora** (v zmysle *strednej vlastnej hodnoty*) v stave $|\psi\rangle$ teda platí

$$\underline{\langle\alpha\rangle} = \langle\psi|\hat{\alpha}|\psi\rangle$$

Hoci sa unitárnou transformáciou táto stredná hodnota *nemení*, mení sa stav, $|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = \hat{\mathcal{U}}|\psi\rangle$, a nevyhnutne sa transformuje aj operátor, $\hat{\alpha} \rightarrow \hat{\alpha}'$. Vložením $1 = \hat{\mathcal{U}}^{-1}\hat{\mathcal{U}}$ do výrazu pre strednú hodnotu dostaneme

$$\langle\psi|\hat{\alpha}|\psi\rangle = \langle\psi|(\hat{\mathcal{U}}^{-1}\hat{\mathcal{U}})\hat{\alpha}(\hat{\mathcal{U}}^{-1}\hat{\mathcal{U}})|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{\mathcal{U}}^{-1}(\hat{\mathcal{U}}\hat{\alpha}\hat{\mathcal{U}}^{-1})\hat{\mathcal{U}}|\psi\rangle = \langle\psi'|\hat{\alpha}'|\psi'\rangle$$

Ľubovoľný operátor sa teda unitárne transformuje ako

$$\underline{\hat{\alpha} \rightarrow \hat{\alpha}' = \hat{\mathcal{U}}\hat{\alpha}\hat{\mathcal{U}}^{-1}}$$

P Kvantovanie operátorov momentu hybnosti.

Definujme „pomocné“ operátory ako *komplexné* kombinácie operátorov $\hat{L}_x, \hat{L}_y$

$$\hat{L}_+ = (\hat{L}_x + i\hat{L}_y)/\sqrt{2} \quad \hat{L}_- = (\hat{L}_x - i\hat{L}_y)/\sqrt{2} \quad \hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 = \hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_-\hat{L}_+ + \hat{L}_z^2$$

s komutačnými vzťahmi

$$[\hat{L}_+, \hat{L}_-] = \hat{L}_z \quad [\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \pm\hat{L}_\pm \quad [\hat{L}^2, \hat{L}_j] = 0 \quad [\hat{L}^2, \hat{L}_\pm] = 0$$

Operátory $\hat{L}_\pm$ sú potom **zvyšovacím/znižovacím operátorom** vzhľadom na vlastné hodnoty $m\hbar$ príslušné k vektorom $|\psi_m\rangle$, lebo platí

$$\hat{L}_z|\psi_m\rangle = m\hbar|\psi_m\rangle \quad \hat{L}_z(\hat{L}_\pm|\psi_m\rangle) = \hat{L}_z|\psi_{m\pm 1}\rangle = \dots = (m \pm 1)\hbar|\psi_{m\pm 1}\rangle$$

Hermitovský operátor $\hat{L}^2$ *komutuje so všetkými* týmito operátormi. Pre jeho vlastné hodnoty môžeme formálne písať

$$\hat{L}^2|\psi_m\rangle = \mu^2|\psi_m\rangle \quad (\mu - \text{reálne číslo})$$

⁴⁵Vo vektorovej algebre $\langle a|$ odpovedá riadkovému a $|a\rangle$ stĺpcovému vektoru, $|a\rangle\langle a|$ je teda **dyadický súčin vektorov**, ktorého výsledkom je *matica*. V našom kontexte je $|\alpha_j\rangle\langle\alpha_j| = \hat{P}_j$ tzv. **projekčný operátor** - aplikovaním na $|\psi\rangle$ „vyprojektuje“ jeho priemet na $|\alpha_j\rangle$. Podmienka $\sum_j \hat{P}_j = 1$ znamená *úplnosť* bázy.

kde μ vyjadruje *veľkosť* momentu hybnosti $\vec{L}$. Pre zvyšovací/znižovací operátor potom vieme odvodiť vzťah

$$\hat{L}_{\pm}|\psi_m\rangle = \sqrt{\mu^2 - m(m \pm 1)} \hbar |\psi_{m \pm 1}\rangle \quad \Rightarrow \quad \mu^2 \geq m(m \pm 1)\hbar^2$$

Spektrum vlastných hodnôt $m\hbar$ je ohraničené zdola, resp. zhora, len ak platí

$$\begin{aligned} \hat{L}_-|\psi_{min}\rangle = 0 & \quad \hat{L}_z|\psi_{min}\rangle = m_{min}\hbar|\psi_{min}\rangle & \quad \hat{L}^2|\psi_{min}\rangle = \mu^2|\psi_{min}\rangle & \quad m_{min}(m_{min}-1)\hbar^2 = \mu^2 \\ \hat{L}_+|\psi_{max}\rangle = 0 & \quad \hat{L}_z|\psi_{max}\rangle = m_{max}\hbar|\psi_{max}\rangle & \quad \hat{L}^2|\psi_{max}\rangle = \mu^2|\psi_{max}\rangle & \quad m_{max}(m_{max}+1)\hbar^2 = \mu^2 \end{aligned}$$

Z toho vyplýva

$$\underline{m_{max} = -m_{min} := l} \quad \underline{\mu^2 = l(l+1)\hbar^2}$$

a jednotkový pokles/nárast vlastných hodnôt $m\hbar$ je obojstranne *ohraničený*, $-l \leq m \leq l$. Existuje teda N jednotkových preskokov medzi hodnotami $-l$ a l , čiže $l = -l + N$ a odtiaľ $l = \frac{N}{2}$. Hodnota l teda môže očividne byť *len celočíselná alebo poločíselná*, a pre každé l existuje $2l + 1$ hodnôt m ,

$$\underline{l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots} \quad \underline{m = l, l-1, \dots, -l+1, -l}$$

Úplné otočenie stavu o 2π však v *reálnom* 3D priestore musí znamenať identitu, $\psi(\varphi + 2\pi) = \psi(\varphi)$, čo pre $m = l$ znamená $e^{il(\varphi+2\pi)} = e^{il\varphi}$, čiže l môže byť *len celočíselné*.

Identická algebra (s výnimkou poslednej poznámky) platí pre operátory momentov hybnosti $\vec{S}$ a $\vec{J}$ z kap. II.5.4.

Q Znižovací a zvyšovací operátor.

Definujme operátory $\hat{a}$, $\hat{a}^+$ a $\hat{n} = \hat{a}^+\hat{a}$ pomocou komutačného vzťahu

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1 \quad \Rightarrow \quad [\hat{a}, \hat{n}] = \hat{a} \quad [\hat{a}^+, \hat{n}] = -\hat{a}^+$$

Predpokladajme tiež, že $|\psi_n\rangle$ sú vlastné stavy operátora $\hat{n}$ s prislúchajúcimi vlastnými hodnotami n ,

$$\hat{n}|\psi_n\rangle = n|\psi_n\rangle$$

Potom platí

$$\hat{n} \underbrace{\hat{a}|\psi_n\rangle}_{\hat{a}|\psi_n\rangle} = (\hat{n}\hat{a} - \overbrace{\hat{a}\hat{n} + \hat{a}\hat{n}}^0)|\psi_n\rangle = [\hat{n}, \hat{a}]|\psi_n\rangle + \hat{a}\hat{n}|\psi_n\rangle = -\hat{a}|\psi_n\rangle + \hat{a}n|\psi_n\rangle = (n-1) \underbrace{\hat{a}|\psi_n\rangle}_{\hat{a}|\psi_n\rangle}$$

Znamená to, že stav $\hat{a}|\psi_n\rangle$ je vlastným stavom operátora $\hat{n}$ s vlastnou hodnotou zníženou o 1 oproti stavu $|\psi_n\rangle$, čiže $\hat{a}|\psi_n\rangle \rightarrow |\psi_{n-1}\rangle$. Rovnakým spôsobom môžeme ukázať, že $\hat{a}^+|\psi_n\rangle \rightarrow |\psi_{n+1}\rangle$. Operátory $\hat{a}$ a $\hat{a}^+$ nazývame preto **znižovacím** resp. **zvyšovacím operátorom**.

Pre vlastné stavy hamiltoniánu harmonického oscilátora podľa kap. II.4.8 platí

$$\hat{H}|\psi_n\rangle = \hbar\omega_0 \left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2} \right) |\psi_n\rangle = \hbar\omega_0 \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right) |\psi_n\rangle = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) |\psi_n\rangle$$

odkiaľ dostaneme správne normovanie pre operátory $\hat{a}$, $\hat{a}^+$

$$\hat{a}|\psi_n\rangle = \sqrt{n}|\psi_{n-1}\rangle \quad \hat{a}^+|\psi_{n-1}\rangle = \sqrt{n}|\psi_n\rangle$$

R Moment hybnosti Diracovho poľa.

Vo všeobecnosti, hybnosť a moment hybnosti *poľa* získame z tenzora energie-hybnosti-napätia, ktorý zas odvodzujeme z lagrangiánu daného poľa. Lagrangián pritom, v rámci určitej voľnosti, konštruujeme tak, aby dosadením do Eulerovej-Lagrangeovej rovnice viedol na *správnú* pohybovú rovnicu (t.j. takú, ktorej riešenia sú v zhode s experimentom).

Objemová hustota hybnosti Diracovho poľa, získaná týmto spôsobom, je

$$\vec{g} = -\frac{i\hbar}{4} \left(\psi^\dagger \nabla \psi - \frac{1}{c} \psi^\dagger \vec{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial t} - (\nabla \psi^\dagger) \psi + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \vec{\alpha} \psi \right)$$

Po dosadení časových derivácií z DIR a úpravách dostaneme

$$\vec{g} = -\frac{i\hbar}{2} [\psi^\dagger \nabla \psi - (\nabla \psi^\dagger) \psi] + \frac{\hbar}{4} \nabla \times (\psi^\dagger \vec{\alpha} \psi)$$

Moment hybnosti je potom

$$\begin{aligned} \vec{J} &= -\frac{i\hbar}{2} \int \vec{r} \times [\psi^\dagger \nabla \psi - (\nabla \psi^\dagger) \psi] dV + \frac{\hbar}{4} \int \vec{r} \times [\nabla \times (\psi^\dagger \vec{\alpha} \psi)] dV = \\ &= -\frac{i\hbar}{2} \int \vec{r} \times [\psi^\dagger \nabla \psi - (\nabla \psi^\dagger) \psi] dV + \frac{\hbar}{2} \int \psi^\dagger \vec{\alpha} \psi dV \end{aligned}$$

S Odvodenie Pauliho rovnice.

DIR v EM poli rozpísaná na zložky bispinoru je (kap. II.6.1)

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \chi &= c \vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{\pi}} \xi + q\varphi \chi + E_0 \chi & \hat{\vec{\pi}} &= (-i\hbar \nabla - q\vec{A}) & E_0 &= mc^2 \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \xi &= c \vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{\pi}} \chi + q\varphi \xi - E_0 \xi \end{aligned}$$

Pre $0 < E \cong E_0$ hľadáme riešenia v tvare

$$\chi(\vec{r}, t) \cong e^{-iE_0 t/\hbar} \psi(\vec{r}, t) \quad \xi(\vec{r}, t) \cong e^{-iE_0 t/\hbar} \Theta(\vec{r}, t)$$

a v limite $\left| \frac{i\hbar}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|, \left| \frac{i\hbar}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial t} \right|, q\varphi \ll E_0$ dostaneme sústavu rovníc

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi &= c \vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{\pi}} \Theta + q\varphi \psi \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Theta &= c \vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{\pi}} \psi + q\varphi \Theta - 2E_0 \Theta \end{aligned}$$

a odtiaľ

$$\Theta \cong \frac{\vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{\pi}}}{2mc} \psi \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \frac{(\vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{\pi}})^2}{2m} \psi + q\varphi \psi$$

Komponenta Θ je nepodstatne malá ($|\vec{\pi}| \ll mc$), a môžeme ju *ignorovať*. Zdlhhavejšími úpravami dostávame

$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{\pi}})^2 = \hat{\vec{\pi}}^2 + i\vec{\sigma} \cdot [\hat{\vec{\pi}} \times \hat{\vec{\pi}}] \quad [\hat{\vec{\pi}} \times \hat{\vec{\pi}}]_j = \epsilon_{jkl} [\hat{\pi}_k, \hat{\pi}_l] = \dots = iq(\nabla \times \vec{A})_j \epsilon_{jkl} = iqB_j \epsilon_{jkl}$$

kde $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ je magnetické pole. Nerelativistická DIR teda prejde na **Pauliho rovnicu** pre dvojkomponentný spinor $\psi(\vec{r}, t)$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) \cong \left[\frac{(-i\hbar \nabla - q\vec{A}(\vec{r}, t))^2}{2m} - \frac{q\hbar}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) + q\varphi(\vec{r}, t) \right] \psi(\vec{r}, t)$$