

KVANTOVÁ FYZIKA

- ako jej rozumieť?

Michal Mahel

Bratislava
2022

KVANTOVÁ fyzika - ako jej rozumieť?

Autor:

Michal Maheľ

Univerzita Komenského v Bratislave

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Katedra experimentálnej fyziky

Vydavateľ:

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK

Knižničné a edičné centrum

Bratislava 2022

1. vydanie

Dielo je vydané pod medzinárodnou licenciou Creative Commons CC BY-NC-ND 4.0 (vyžaduje sa: povinnosť uvádzať pôvodného autora diela; len nekomerčné použitie; žiadne odvodené diela). Viac informácií o licencií a použití diela: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

**ISBN:**

978-80-8147-121-6

ÚVAHY

ku kľúčovým pojmom kvantovej fyziky,
ktoré v učebniciach nenájdete,
a možno tam ani nepatria,
ale snáď vám pomôžu ju lepšie pochopiť.

Cieľom nasledujúcich úvah je zodpovedať často vyslovené (a snáď aj tie nevyslovené) otázky študentov, ktorým sa štandardné učebnice príliš nevenujú, ale ktoré dotvárajú mozaiku kvantového sveta. Snahou pritom nie je prezentovať kvantový svet taký aký JE, ale taký ako si ho môžeme predstavovať, bez zložitého rigorózneho matematického aparátu, na základe pojmov a skúseností z nášho bežného života.

Na druhej strane, cieľom matematicky exaktne sformulovaných teórií rovnako nie ukázať aký svet je, ale ako máme počítať, aby sme dostali výsledky v zhode s pozorovaniami tohto sveta.

Aký svet NAOZAJ JE, to vie len Boh, a o ňom zas my nevieme, či naozaj *je*. A keby sme to aj vedeli, nášmu poznaniu fyzického sveta by to asi nijak nepomohlo...

*Eine neue wissenschaftliche Wahrheit pflegt sich nicht
in der Weise durchzusetzen, daß ihre Gegner überzeugt werden
und sich als belehrt erklären, sondern vielmehr dadurch,
daß ihre Gegner allmählich aussterben und daß die heranwachsende
Generation von vornherein mit der Wahrheit vertraut gemacht ist.
Max Planck*

Obsah

Kedy a prečo si nevystačíme s KLASICKOU fyzikou?

(Na úvod o ilúziách.)

6

Kde je častica, keď ju NEMERIAME?

(Princíp superpozície.)

8

O NELOKÁLNOSTI.

(Kvantová previazanosť na diaľku.)

12

VLNA alebo ČASTICA?

(Vlnovo-časticový dualizmus.)

14

Má častica DRÁHU?

(Princíp najmenšieho účinku.)

17

PRINCÍP KOREŠPONDENCIE.

(Bohrov model atómu.)

19

Má častica IDENTITU?

(Odraz a Comptonov jav.)

21

O NEURČITOSTI.

(Vlnový balík.)

24

Netradičný pohľad na PRINCÍP NEURČITOSTI.

29

Čo (nie) je FOTÓN.

34

O ABSOLÚTNE ČIERNOM TELESE.

(Vysvetľujúce poznámky.)

37

Poznámka k SCHRÖDINGEROVEJ ROVNICI.

(Podobnosť úloh.)

39

O VLNOVEJ FUNKCII.

(Mýtus komplexnosti.)

40

Špehujme časticu.

(Myšlienkový experiment.)

42

Čo (nie) je ČASTICA.

44

Kde končia všetky predstavy.

(O Planckovej škále.)

46

STAV, OPERÁTORY a MERANIE.

49

Hýbe sa častica v STACIONÁRNOM STAVE?

(Je pohyb to čo si myslíme?)

55

O jednej častici a DVOCH STAVOCH.

60

O SYMETRIÁCH a ZÁKONOCH ZACHOVANIA.

64

O (symetriách, zákonoch zachovania a) VÝBEROVÝCH PRAVIDLÁCH.

67

Trochu viac o PRINCÍPE NEURČITOSTI.

70

Trochu viac o SUPERPOZÍCII

(Dvojštrbinový a Sternov-Gerlachov experiment.)

74

Čo (nie) je MERANIE

(Kolaps stavu.)

78

Trochu viac (a formálnejšie) o STAVE.

82

Trochu viac o DEKOHERENCII.

86

Superpozícia a REALITA.

(Zachráňme Schrödingerovu mačku.)

89

Rekviem pre časticu.

(Revízia dvojštrbinového experimentu a spol.)

92

Akou vlnou je ψ ?

(Čo ostane z vlnovo-časticového dualizmu.)

94

V POLI je pravda.

(Niečo ako katarzia.)

97

Kedy a prečo si nevystačíme s KLASICKOU fyzikou? (Na úvod o ilúziách.)

Základným pilierom klasickej fyziky je newtonovská mechanika (resp. jej ekvivalenty - v lagran-geovskom či hamiltonovskom formalizme), ktorá slávi úspech všade tam, kde pojmy, z ktorých je zostavená, majú jasný zmysel. Ak hovoríme o „*trajektórii telesa*“, mlčky predpokladáme, že teleso v každom okamihu zaberá jasne vymedzenú oblasť priestoru. Rovnako predpokladáme, že rozumieme významu pojmov „*miesto v priestore*“ (niečo ako *tu* alebo *tam*) a „*okamih*“ (niečo ako *teraz* alebo *o sekundu*). Pokiaľ nás netrápia otázky „*z čoho je utkaný priestor?*“ alebo „*čo je to čas a prečo plynie?*“ (v tomto texte nás naozaj trápiť nebudú), cítime pevnú pôdu pod nohami. Definujeme teda **stav** telesa - *polohu* aj jej okamžitú zmenu v čase - *rýchlosť* \vec{v} (resp. *hybnosť*, po zarátaní hmotnosti telesa m). Trochu väčšiu mieru abstrakcie si vyžaduje pojem *sila* ako príčina zmeny pohybového stavu (hybnosti). S pôsobením telies „*telo na telo*“ máme bohaté skúsenosti, na hodinách fyziky sme si však zvykli aj na silové pôsobenie telies „*na diaľku*“ - gravitačné či elektromagnetické. (Hlbším štúdiom zistíme, že aj facka na líce či úder kladiva o kovadlinu sú vlastne pôsobením „*na diaľku*“ - aj keď mikroskopickú.) Ak sa to dá (pre *konzervatívne* sily), vyjadrujeme silu pomocou gradientu (príslušného) *potenciálu* φ

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{m}\nabla\varphi$$

Tým sme však schopnosť silovo pôsobiť na teleso (a meniť jeho rýchlosť) „delegovali“ na samotný priestor - **pole**.

Podobné „pohybové“ rovnice používame v klasickej fyzike aj na opis „migrácie“ obrovského množstva teliesok (častíc) - *difúziu*, či na *tok tepelnej energie*

$$\vec{j}_n = -D\nabla n \qquad \vec{j}_T = -\alpha\nabla T$$

kde \vec{j}_n, \vec{j}_T sú hustoty difúzneho, resp. tepelného toku, n a T určujú hodnoty príslušného *poľa* (koncentrácia častíc resp. teplota *v danom mieste*), a D, α sú príslušné koeficienty. Na rozdiel od Newtonovej pohybovej rovnice však \vec{j}_n, \vec{j}_T v týchto rovniciach nereprezentujú pohyb žiadneho „telesa“. Na úrovni častíc sú difúzia aj tepelný tok *chaotickým* pohybom myriád častíc, a len na *makroskopickej* úrovni (pri pohľade „z veľkej výšky“) vnímame ILÚZIU *usmerneného* pohybu častíc či tepla v smere klesajúceho „potenciálu“ - koncentrácie či teploty.

Vedenie elektrického prúdu vo vodičoch (s vodivosťou σ) opisujeme Ohmovým zákonom

$$\vec{j} = -\sigma\nabla\varphi$$

V skutočnosti prúdová hustota \vec{j} neopisuje pohyb *žiadneho* nosiča náboja v kove. Podobne ako v predchádzajúcich dvoch prípadoch, prenos náboja v smere klesajúceho potenciálu φ je síce realitou (za predpokladu, že sa netrápime nad pojmom „realita“), jeho *usmernený tok* podľa danej rovnice je však len *makroskopickou ilúziou*. Na mikroskopickej úrovni je pohyb nosičov náboja *dramaticky* iný.

Späť k prvej rovnici: Rýchlosť \vec{v} reprezentuje pohyb *makroskopickej ilúzie* zvanej „*teleso o hmotnosti m* “. „Identitu“ sme telesu prisúdili *my*, v skutočnosti je myriádou mikroskopických častíc „*žijúcich vlastným životom*“. „Teleso“ a jeho pohyb sú rovnakou makroskopickou ilúziou ako teplo a jeho tok, či difúzia alebo elektrický prúd. Pojmy ako teplota, koncentrácia, tlak, objem či tvar, tok či prúd sú makroskopickými ilúziami, ktoré sú v mikrosвете neznáme - *nemajú zmysel*. Zákony klasickej fyziky sú zákonmi týchto makroskopických ilúzií, vzišlých z *nášho* pohľadu „z veľkej výšky“.

Sú však zákony mikrosвета iné? Prirodzene podliehame vábeniu, že makroskopické teleso sa dá pomyslene „rozobrať“ na mikrotelieska (v nejakej prípadnej vzájomnej interakcii), pričom arzenál ich charakteristík je rovnaký ako pre makroteleso. V *klasickej* molekulovej fyzike opisujeme objem plynu

(makroteleso) ako myriádu *klasických* guľôčok (molekúl). V *klasických* materiálových modeloch opisujeme pohyb nosičov náboja ako pohyb *klasických* nabitých guľôčok (Drudeho model vodivosti) alebo pohyb *klasických* magnetiek (*klasické* modely magnetizmu), a pod. V niektorých prípadoch sú kvantitatívne predpovede takýchto modelov uspokojujúce, v iných prípadoch však totálne zlyhávajú. Celkom isto^(*) zlyhajú vtedy, keď sa zameriame na pohyb JEDNOTLIVÝCH mikroskopických objektov. Tu (ako uvidíme) „skolabujú“ obvyklé predstavy polohy, veľkosti a tvaru, rýchlosti či trajektórie, a pod., rovnako ako aj zákonitosti medzi nimi. Nie je však správne tvrdiť, že tu nastupujú INÉ zákony (v zmysle pomyselného „prepínača“ makro/mikro). Tak ako makroskopické pojmy - *ilúzie* vziđu z makroskopického pohľadu „z veľkej výšky“ (a štatistiky obrovského počtu mikročastíc), rovnako zákony makrosвета sú EMERGENTNÝMI zákonmi vzišlými zo zákonov mikrosвета.

Kvantová mechanika (predmet, ktorý sa vyučuje v základnom kurze fyziky) poskytuje pojmový aparát a súbor zákonov, ktoré nahrádzajú klasickú mechaniku pri opise mikroskopických objektov (ale aj makroskopických objektov v prípade javov, ktoré klasická fyzika nedokáže adekvátne opísať - napr. supravodivosti), a to vyššie opísaným spôsobom - zákony a pojmy klasickej mechaniky prirodzene vziđu z kvantovomechanických *v klasickej* (makroskopickej) *limite*.

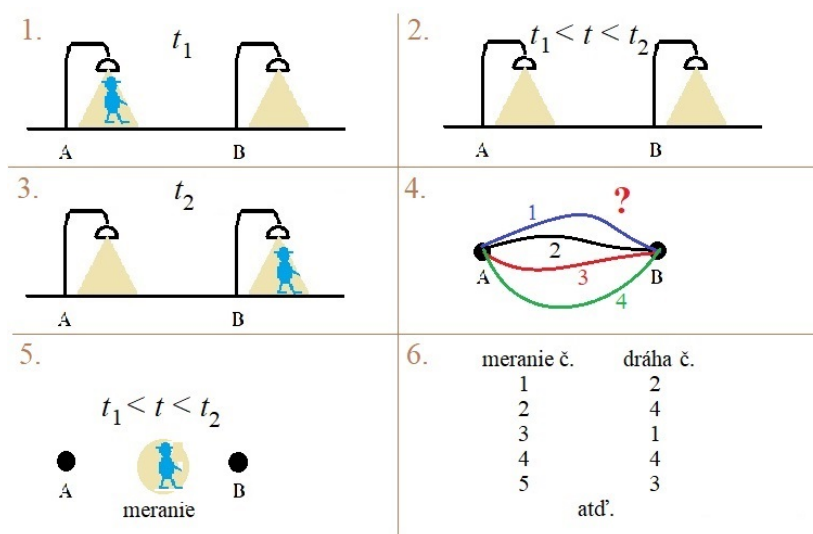
Jednotlivé kapitoly tohto textu poskytujú odpovede na niektoré otázky či paradoxy, týkajúce sa ústredného pojmu kvantovej mechaniky - **častice**, a to v duchu *štandardnej interpretácie* kvantovej mechaniky. Hoci sa nám častice mikrosвета v styku s makroskopickými meracími prístrojmi javia ako „malé tuhé guľôčky“, zákony kvantovej mechaniky nám odhaľujú niečo úplne iné. „Malé tuhé guľôčky“ sú len ilúziou vnímanou „očami“ (klasického) makrosвета.

Nebolo by však správne podľahnúť predstave, že kým klasický obraz sveta je len ilúziou, ten kvantovomechanický je tým „pravým“. Kvantová mechanika je nepochybne adekvátnejším opisom mikrosвета, sama je však len limitným prípadom presnejšej koncepcie (toho času je ňou **kvantová teória poľa**), v ktorej „elementárne“ častice nie sú fundamentálnou substanciou vesmíru, ale len excitáciami čohosi fundamentálnejšieho - *polí*. (V neinerciálnych sústavách či v gravitačnom poli dokonca *existencia častíc závisí od pozorovateľa!*) Častice, rovnako ako zákony kvantovej mechaniky, môžeme teda v tomto zmysle vnímať tiež len ako isté ilúzie.

Keď však v lese prekvapíte medvedicu s mláďatami, nie je príliš múdre vnímať ju ako makroskopickú ilúziu (ktorou z tohto pohľadu naozaj je) - je rozumné považovať ju za *skutočnú*. A vo veľkej miere to platí aj pre kvantovú mechaniku.

(*) Napriek tomuto silnému tvrdeniu existujú prípady, keď klasický prístup aj na *mikroskopickej* úrovni vedie na rovnaký výsledok ako kvantovomechanický prístup. Typickým príkladom je učebnicový opis Comptonovho javu (rozptylu fotónu na elektróne) ako zrážky biliárdových guľ. Tradičné odôvodnenie jednoduchosťou podľa mienky autora celkom neobstojí - benefit jednoduchosti je viac než vyvážený rizikom vybudovania neadekvátnej predstavy, neprenosnej na zložitejšie situácie.

Kde je častica, keď ju NEMERIAME? (Princíp superpozície.)



Predstavme si pána idúceho po chabo osvetlenej ulici počas tmavej noci. Vidíme ho jasne len keď prechádza popod jednu z lúčok (A, t_1). Keď odíde z dosahu lampy, akoby ZMIZOL. My však vieme, že nezmiol, že tam v tme niekde JE. Ak sa po čase zjaví pod druhou lampou (B, t_2), vieme, že medzitým ($t_1 < t < t_2$) prešiel po nejakej dráhe. Nevieme síce po akej, vieme ale s ISTOTOU, že to bola nejaká KONKRÉTNÁ dráha. Taký je náš KLASICKÝ svet.

V čom je svet kvantovej fyziky (QF) iný? Okamihy pod lampou predstavujú MERANIE - odmeriame skúmaný objekt - je to ČASTICA. Rovnako nevieme, kde častica je keď ju „nevidíme“ (t.j. nemerame). Ak „osvetlíme“ prechod medzi lampami (t.j. uskutočníme meranie), žiadne prekvapenie nás nečaká - častica niekde bude, na *jednej* z dráh. Ak však budeme opakovať tento príbeh znova a znova, zakaždým nájdeme časticu na *inej* dráhe, a to celkom NÁHODNE. Tak sa klasické častice zväčša nechovajú. V newtonovskej fyzike vieme dráhu *voľnej* častice medzi dvoma bodmi zrátať. A až teraz príde to pravé prekvapenie: Ak chceme správne (t.j. v zhode s výsledkami meraní) zrátať dráhu QF častice, musíme predpokladať, že častica sa šíri SÚČASNE VŠETKÝMI MOŽNÝMI DRÁHAMI. Tak sa ale žiadna častica nechová, tak sa chovajú VLNY - šíria sa priestorom, teda po rôznych „dráhach“ a INTERFERUJÚ.

Kde je teda PRAVDA? Vo fyzike platí, že najvyšším arbitrom pravdy je EXPERIMENT. Akokoľvek „rozumná“ pravda nie je pravdou, ak nesúhlasí s experimentom. A naopak, akokoľvek bláznivý scenár, ktorý je v súlade s experimentom, je *kandidátom* na pravdu. (Pochopiteľne, ak len nie je logicky nekonzistentný - bláznivosť nevadí, nelogickosť áno.) Takých kandidátov však môže byť (a aj je) veľa. Z nich vyberáme scenár *najmenej zložitý* (to je tzv. **pravidlo Occamovej britvy**), úsporne a elegantne sformulovaný do základných rovníc a postulátov.

Aký je teda *náš* scenár? Základnou „pohybovou“ rovnicou mikroskopického systému (našej častice) v *našej* QF je **Schrödingerova rovnica** (SCHR), opisujúca vývoj (pohyb) systému NERUŠENÝ MERANÍM. Ten dovetok je veľmi dôležitý, pretože jeden z postulátov QF tvrdí, že *nemožno zmerať stav kvantového systému bez jeho ovplyvnenia* (kvantový systém je natoľko subtilný, že „čo i len pohľad naň“ ho zmení). No a akt merania zatiaľ v jazyku SCHR poriadne opísať nevieme. *Jednotlivý* výsledok merania teda *nie je jednoznačným* potvrdením stavu opísaného SCHR, čiže stavu PRED meraním - výsledok merania odzrkadľuje stav *bezprostredne* PO meraní.

SCHR ako *lineárna* dif. rovnica ctí tzv. **princíp superpozície**, podľa ktorého úplný stav systému je *ľubovoľným spôsobom rozložiteľný* do lineárnej kombinácie navzájom nezávisých stavov - napríklad

do kombinácie všetkých možných výsledkov merania. Pre našu časticu medzi lampami to znamená všetky možné dráhy odpovedajúce všetkým možným polohám jej najdenia meraním. „Váha“ jednotlivej dráhy v tejto superpozícii určuje PRAVDEPODOBNOŠŤ nájdania častice *na príslušnom mieste*. Jednotlivé meranie teda „vylúpane“ či potvrdí len jednu zo zložiek úplného stavu opísaného SCHR. Až dostatočne veľký (v závislosti od počtu týchto zložiek) štatistický súbor meraní potvrdí úplnú superpozíciu stavov v SCHR. Opakované meranie medzi lampami teda akoby poskytovalo pravdepodobnosti pohybu po jednotlivých dráhach. To však nie je pravdou, ak NEprebieha meranie! Bez merania medzi lampami totiž pravdepodobnosť „dorazenia“ častice k druhej lampe NIE JE SÚČTOM PRAVDEPODOBNOŠŤÍ pre jednotlivé dráhy. Podobne ako v optike pri prechode koherentného svetla sústavou štrbín výsledná intenzita nie je súčtom intenzít pre jednotlivé dráhy - dochádza totiž k *interferencii*. Úplný stav v SCHR je **koherentnou** superpozíciou svojich zložiek (teda takou, ktorá pripúšťa ich interferenciu).

Fungovanie princípu superpozície najlepšie pochopíme na príklade prechodu svetla polarizátorom: Vieme, že svetlo po prechode napr. zvislým polarizátorom je lineárne polarizované v zvislom smere. Môžeme to interpretovať tak, že *zvislým* polarizátorom prešlo len *zvislo* polarizované svetlo. Ak by sme mu následne postavili do cesty *šikmý* polarizátor, nemalo by teda prejsť nič - čo *nie je pravda*. Svetlo čiastočne prejde, a to *šikmo* polarizované. Kde sa v pôvodne zvislo polarizovanom svetle (pred šikmým polarizátorom) vzalo svetlo polarizované šikmo (aby ním prešlo)? Odpoveď poznáme: Zvislo polarizované svetlo rozložíme na dve *navzájom kolmé* zložky, pričom jedna z nich - tá v smere šikmého polarizátora - ním prejde. Tieto dve šikmé (navzájom kolmé) zložky sú rovnako „reálne“ ako tá pôvodná zvislá. O výbere konkrétnej „reality“ rozhoduje aktuálny experiment - v tomto prípade smer polarizátora. Rovnako je to v prípade prechodu sústavou štrbín - tá určuje „ponuku“ možných dráh, podobne ako rozlišovacia schopnosť našej „hľadacej lampy“ určuje spektrum možných dráh našej častice. Stav QF objektu pred meraním je v superpozícii stavov rozpoznateľných meracím zariadením. Ak zameníme merací prístroj za iný, zmení sa aj táto superpozícia.

Čo je teda „fyzikálna realita“ (či obraz pohybu našej častice), ktorú nám tento scenár poskytuje? Meraním nájdeme časticu vždy *na jednej z identifikovateľných* dráh - to je realita *po meraní*. Bez merania je jedinou realitou, ktorú máme, stav podľa SCHR, a tým je *koherentná superpozícia všetkých, navzájom interferujúcich dráh*. Argument, že častica sa *musí* pohybovať *vždy len po jednej z dráh*, lebo ju vždy na jednej z dráh zmeriame, je falošný - každým meraním totiž vstupujeme do príbehu a meníme ho! Apel na „zdravý rozum“ s tým, že častica sa predsa nedelí, tiež nie je na mieste, pretože pracuje s predstavou KLASICKEJ častice. Ale predovšetkým, je popretím *jedinej* „reality“, ktorú máme, a tou je nerušený vývoj stavu podľa SCHR. (Uvedené tvrdenia sa opierajú o základné piliere *štandardnej* („ortodoxnej“, tzv. *kodanskej*) interpretácie QF. Podľa jedného z nich formalizmus QF poskytuje ÚPLNÝ opis mikrosveta v tom zmysle, že „Príroda nedisponuje“ žiadnymi „skrytými parametrami“, ktoré by vo formalizme QF neboli zhrnuté.)

Je jasné, že matematickému formalizmu, exaktne vyjadrujúcemu základné zákonitosti mikrosveta neodpovedá žiaden obraz či mozaika zložená z *klasických* pojmov. To však v žiadnom prípade neznamená, že by QF bola menej funkčnou (môžeme to nanajvýš vnímať ako „chybičku krásy“). No ak predsa len túžime po uspokojivom „predstaviteľnom“ obraze mikrosveta, musíme dovoliť jednotlivým kamienkom tejto mozaiky byť tak trochu „nevšednými“. Mieru našej fantázie pritom však musíme držať na uzde: Rigorózna matematická formulácia zákonov QF je ako hrdlo zázračnej (Aladinovej) lampy, cez ktoré môžeme vypustiť von džina a podriaďiť ho našej predstavivosti - v strohom jazyku tomu hovoríme *interpretácia* QF. Musíme pritom dôsledne dbať o to, aby sa náš džin rovnako ľahko prepchal hrdlom lampy aj dnu. Inými slovami, naša interpretácia nesmie byť v protiklade s experimentami overeným matematickým formalizmom. Majme tiež na pamäti Occamovu britvu, ktorá (ako Damoklov meč) utne hlavu našej prílišnej rozšafnosti.

Ak sa držíme týchto pravidiel, potom predstava *letiacej častice*, ktorá nemá časticové ale vlnové vlastnosti, je vlastne *zbytočná*. Nahraďme ju rovno *vlnou*. Častica, akonáhle zmizne „spod lampy“

(teda keď ju nemeríme), prestáva byť časticou, je vlnou. Kde je teda *častica*, keď ju nemeríme? NIKDE. Častica vtedy NIE JE.

Ale moment! Tá častica je predsa nositeľom nejakých vlastností, a mnohé z nich sa musia zachovať (napr. náboj, hybnosť, a pod.). Kto sa kúpala v mori pri vlnobití, vie, akú energiu a hybnosť vám vlna môže odovzdať - a to sa žiadna voda vlastne *nešíri* (voda zostáva v mori, s výnimkou tsunami). Podobne je na tom zvuk. S prenosom energie a hybnosti *vlnou* by teda nemusel byť problém. A prečo? Lebo energiu ani hybnosť nepovažujeme za VEC. Energia je SCHOPNOSŤ (konať mech. prácu), hybnosť je *schopnosť* (vyraziť vám zuby), moment hybnosti je *schopnosť* (roztočiť vás). A čo „hmatateľnejšie veci“ ako hmotnosť alebo náboj? Hmotnosť nám „vyfúkol“ Einstein, keď ju stotožnil s energiou. A náboj predsa tiež nie je vec - je to *schopnosť* zúčastniť sa elektromagnetickej interakcie. Poznáte vôbec nejakú črtu častice, ktorá je VECOU (tak ako toto slovo vnímame v bežnom živote)? Je teda vôbec častica vecou?

Ak akceptujeme, že *vlna*, ktorá sama osebe nie je šírením sa *veci*, môže prenášať niečo čo tiež nie je *vecou*, nemuseli by sme mať viac problém vnímať letiacu QF časticu ako *vlnu*, ktorá sa úplne riadi vlnovými pravidlami, ohýba sa, interferuje. Časticou (nech už pod tým rozumieme čokoľvek) sa opäť stáva až *pri interakcii s inými objektami*. (Podľa P. Jordana, jedného z otcov QF, takáto interakcia časticu nielen *odmeria*, ona ju VYTVORÍ.) To je **vlnovo-časticový dualizmus**. Ak hovoríme, že „*častica tam niekde je*“ (napr. pri normovaní vlnovej funkcie), máme tým na mysli, že ČASTICU tam niekde *môžeme NAMERATĚ* (keď bude interagovať s *látkou* meracieho zariadenia, prípadne inými časticami).

Uvedený scenár je v súlade s tzv. **princípom komplementarity**, ležiacim priamo „v srdci“ *štandardnej* QF. Podľa neho *úplný* obraz mikrosвета pomocou *klasických* pojmov je možný prostredníctvom DVOCH KOMPLEMENTÁRNÝCH (*disjunktných*) opisov: *kauzálneho* (časticového) a *časopriestorového* (vlnového). *Častici medzi meraniami* teda môžeme pripísať zachovávaciu sa *energiu, hybnosť* či *moment hybnosti*, ale NIE *polohu* - časopriestorový vývoj patrí *vlnu*. Neznamená to však, že „*nevieme kde častica je*“ - znamená to, že uvažovať v časopriestorových súvislostiach o pohybe *častice* NEMÁ ZMYSEL. „Pohybovou rovnicou“ častice je SCHR, a jej riešením NIE JE jednoznačná *trajektória*. Pracovať s predstavou obsahujúcou trajektóriu síce niekedy môžeme (sú prípady, keď nás to dokonca dovedie k správne výsledku), vo všeobecnosti je to však predstava falošná (*metafyzická*), ktorá NEMÁ OPORU v zákonoch QF.

Istý zmätok do tejto idylky môže vnieť pojem **pravdepodobnostná vlna** (spájaný s vlnovou funkciou čiže stavom častice), lebo zaváňa prílišnou matematickou abstraktnosťou - ako keby išlo len o objekt „na papieri“. Pozrime sa na atómy, z ktorých pozostávame sami (pre jednoduchosť zvolme atóm vodíka). Jadro (ak ho vnímame ako tradičnú „vec“) zaberá objem $\approx (10^{-15})^3 = 10^{-45}m^3$. Okolo neho v objeme $\approx (10^{-10})^3 = 10^{-30}m^3$ krúži elektrón (ktorý vnímame ako „bodovú vec“). Prečo nepadne na jadro (keď ho to jadro elektrostaticky priťahuje)? Lebo ten elektrón, *keď ho nemeríme, nie je „bodovou vecou“* ale vlnovým oblakom (ktorý je nositeľom *všetkých* jeho vlastností) o rozmere atómu. Tak napríklad spojité rozloženie náboja v oblaku (s hustotou danou ŠTVORCOM amplitúdy vlnovej funkcie) je REALITOU, až kým elektrón ako *časticu nelokalizujeme* v „bode“ *meraním*. Keby to tak nebolo, razom by sme sa scvrkli o 15 rádov! (Malo by to aj svoje výhody - konečne by sme spoznali mikrosvet.) Tá vlna je vlnou PRAVDEPODOBNOTI len vo vzťahu k NÁJDENIU ČASTICE!!! Ako nositeľka *vlastností* je vlnou, ktorá má - za istých okolností - svoju „hmatateľnú“ *tuhosť*.

Ale aby to nebolo také jednoduché, sú situácie, kedy vlnovej funkcii rozhodne nemôžeme (priam NESMIEME) priradiť spojité rozloženie žiadnej merateľnej vlastnosti (ako hustoty náboja či energie, a pod.). Správne rozhodnúť, že kedy áno a kedy nie, to si vyžaduje skúsenosť a cit. Takže ak je po prečítaní týchto riadkov vôbec niečo isté, tak je to to, že si musíme s plnou vážnosťou položiť aj otázky: Čo je to vlastne VLNA a čo rozumieme pod pojmom ČASTICA? A čo je to MERANIE?

O NELOKÁLNOSTI.

(Kvantová previazanosť na diaľku.)

V predchádzajúcej kapitole sme tvrdili, že *voľne* sa pohybujúci kvantový objekt je *delokalizovaný*, s pravdepodobnosťou nájdenia rozloženou v priestore, a aktom merania polohy sa OKAMŽITE lokalizuje (na úrovni presnosti merania). Natískajú sa otázky: Ako sa môže objekt „rozptýlený“ v priestore „zhmotniť“ do bodu na detektore? Môže sa „informácia“ o meraní v danom mieste šíriť priestorom neobmedzenou rýchlosťou? A odkiaľ vieme, že je to práve takto?

Predovšetkým musíme pritvrdiť hru - nejde len o *priestorovú* lokalizáciu častice, ide o stanovenie (či vygenerovanie) hodnoty *akéhokoľvek* parametra, zaťaženého neurčitosťou, na veľké vzdialenosti neobmedzenou rýchlosťou.

Uvažujme nešpecifikovaný parameter častice - nazvime ho *polarita* - nadobúdajúci len hodnoty + alebo -, pričom pred meraním je táto hodnota *neurčitá* (hovoríme, že je *v superpozícii* stavov + a -). Detektor nalietaujúcich častíc náhodne udáva (t.j. *meraním vytvára*) hodnoty + alebo -.

Pripravujeme PÁRY častíc s *nulovou celkovou* polaritou, teda buď (+,-) alebo (-,+)- tzv. **kvantovo previazané páry**, a vystreľujeme ich do opačných smerov na veľké vzdialenosti k detektorom A a B. Vždy keď A zaznamená +, B zaznamená -, a naopak, pričom ale výsledok je dopredu neurčitý (nie neznámy ale NEURČITÝ) - hovoríme, že pár je v superpozícii stavov (+,-) a (-,+). Ak detektor A meraním VYGENERUJE (nie odhalí) stav +, ako „vie“ detektor B, že „musí“ vygenerovať stav - (a naopak)? Musel by A vyslať informáciu do B, ale to na takú veľkú vzdialenosť za taký krátky čas nedá (teória relativity nepustí)!

Zdravý rozum hovorí, že je to celé blbosť: „Častice si zrejme nesú so sebou skrytú informáciu - výsledok merania je dopredu daný, a je po záhade! Skrátka, náš opis sveta bez tohto **skrytého parametra** je neúplný.“

Ako dokážeme, že zdravý rozum sa mylí, a pravdu má naša kvantová teória?

Modifikujme experiment tak, že budeme skúmať TRI nezávislé časticové parametre - „polarity“ (každá + alebo -), kvantovo previazané s príslušnými „polaritami“ svojej dvojčky. Detektory potom vygenerujú trojice hodnôt. Majú však len po jednom displeji, na ktorom prepíname údaje 1,2,3. Ak porovnáme rovnaké údaje (napr. A1,B1), dostaneme pochopiteľne opäť (+,-) alebo (-,+). Čo však ak porovnáme *rôzne* údaje (napr. A1,B2)? Tu sa predpovede kvantovej teórie a kombinatoriky skrytých parametrov *lišia*, a môže teda rozhodnúť *experiment!*

A aj rozhodol, a opakovane a mnohokrát. Skryté parametre VYLÚČIL a našu kvantovú teóriu potvrdil. Ako tomu ale máme rozumieť?

Naša teória vníma kvantovo previazaný pár ako JEDEN kvantový objekt delokalizovaný v priestore. Meranie spôsobí **kolaps** neurčitosti meranej veličiny do konkrétnej hodnoty, *bez ohľadu* na vzdialenosti priestorovej delokalizácie.

Nie je tento záver v konflikte s teóriou relativity? Zdá sa, že Príroda bude potrebovať dobrého právnika ...

Zdrojom konfliktu je náš mentálny stereotyp: Máme tendenciu delokalizáciu častice vnímať ako ROZLOŽENIE jej „merateľných“ vlastností (hmotnosť, náboj,...) v priestore. Takýto pohľad je však ZLÝ!!! Spomínané vlastnosti majú význam *len v interakciách s okolím*. Ako spoznáme, že častica je elektricky nabitá? Len interakciou s elektromagnetickým poľom. Ako zistíme, že častica má hmotnosť? Len interakciou s iným hmotným objektom. Delokalizácia však súvisí s absenciou či nedostatočnosťou interakcie. (Delokalizácia elektrónu v rámci potenciálovej jamy znamená, že interakcia nie je dosta-

točne silná na to, aby elektrón lokalizovala „úplne“. Polomer atómu uránu je len cca 3-krát väčší než polomer vodíka hoci náboj jadra je 89-krát väčší.) Pri absencii interakcie (v rámci delokalizácie) teda náboj, hmotnosť, atď., predstavujú len POTENCIALITU k interakcii. A o šírení potencialít teória relativity nehovorí nič!

Ukážeme si (neskôr), že ak budeme túto potencialitu opisovať ako **vlny pravdepodobnosti**, budú sa v priestore šíriť **fázovou rýchlosťou**. A o tej vieme (z optiky), že nie je obmedzená teóriou relativity.

Záver (vyzerá to tak, že nepochybniteľne potvrdený experimentami) je taký, že kvantové objekty, ktorých osudy sa v istom okamihu „preplietli“ vzájomnou interakciou (kvantovo previazané), ostávajú naďalej JEDINÝM objektom so spoločnou „identitou“, a to aj keď sú od seba ľubovoľne vzdialené (v zmysle, že môžu byť priestorovo lokalizované na rôznych miestach). Akt merania (v danom mieste) ovplyvní ich existenciu *spoločne bez ohľadu na vzdialenosti*. V tomto zmysle je QF *nelokálnou*.

*Die Quanten sind doch eine
hoffnungslose Schweinerei!
Max Born*

VLNA alebo ČASTICA?

(Vlnovo-časticový dualizmus.)

Čo sú atribúty *klasickkej* VLNY (vlastnosti, bez ktorých by vlna nebola vlnou)?

- **Frekvencia.** Vlna je šírenie kmitov. Ak je vlna *monochromatická*, má *jedinú* frekvenciu, vo všeobecnosti má celé *spektrum* frekvencií (Fourier). Každéj frekvencii ω priradujeme **vlnovú dĺžku** $\lambda = \frac{2\pi v_f}{\omega}$ V DANOM PROSTREDÍ. Prechodom do iného prostredia sa vlnová dĺžka prispôsobí **fázovej rýchlosti** v_f v tomto prostredí, frekvencia sa NEMENÍ.

- **Energia.** Vlna je prenos energie (vlna vie konať prácu). Mierou energie je amplitúda vlny.

- **Hybnosť.** Každá vlna prenáša hybnosť (svetelný tlak, akustický tlak, tsunami,...). Hybnosť je *vektor* - vlna má *smer šírenia*. Definujeme **vlnový vektor** \vec{k} - jeho smer je *smerom* hybnosti vlny, jeho veľkosť $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v_f}$ súvisí *veľkosťou* hybnosti (rýchlosťou šírenia). Vzťah medzi vlnovým vektorom a hybnosťou vlny je teda veľmi intímny.

Ostatné vlastnosti vlny sú fakultatívne - za príplatok.

Kadiaľ prebieha *prenos energie a hybnosti vlnou* v *homogénnom* prostredí z miesta A do miesta B? Podľa pravidiel skladania vln a interferencie k prenosu prispievajú len dráhy z λ -okolía priamej spojnice AB - „koridor“ o šírke $\approx \lambda$. Pre *veľmi veľké* λ je tento „koridor“ VEĽMI široký. Pre *veľmi malé* λ sa „koridor“ zmení na tenký LÚČ - **lokalizovanú trajektóriu**.



Čo sú atribúty *klasickkej* ČASTICE (vlastnosti, bez ktorých by častica nebola časticou)?

- **Energia/hmotnosť** (medzi nimi je ekvivalencia). Prejaví sa pri interakcii s inými hmotnými objektami - aj na diaľku (gravitačne).

- **Hybnosť.** Prejaví sa pri zrážkach s inými hmotnými objektami. Definuje smer pohybu.

- **Lokalizovanosť** v časopriestore a **trajektória**. V každom okamihu je častica NIEKDE. Trajektória *voľnej* častice (tj. bez pôsobenia okolia) pohybujúcej sa z miesta A do miesta B je úsečka AB - teda LÚČ.

Na jej tvare nezáleží (guľatá, kockatá, ježkatá,...). Ostatné vlastnosti (náboj a pod.) sú tiež fakultatívne.

Vzhľadom na príbuznosť (ak nie priam zhodu) atribútov definujeme pojem *častica* takto:

Klasická častica je vlna s extrémne malou vlnovou dĺžkou.

(Vzápätí rozšírime túto definíciu pre prípad nemonochromatickej vlny so spektrom vlnových dĺžok.) Bráni nám v takejto definícii niečo iné než STEREOTYP (predsudky)?! Porozmýšľajte ...

Zdravý rozum ale varuje! Vlna s *jedinou* frekvenciou (monochromatická) je vlnou bez začiatku a konca - súvislým nepretržitým tokom energie. Dopad častice je však jednorazovou (okamžitou) udalosťou. Stotožnenie častice s monochromatickou vlnou je preto VÝSOSTNOU ABSTRAKCIU. (Táto abstrakcia je však neskutočne užitočná - dobre sa s ňou počíta - a neškodná - ak rozumieme, čo znamená.) Monochromatickej vlny s frekvenciou ω reálne odpovedá nepretržitý tok (identických) dopadajúcich častíc. Ak každá častica je nositeľom energie E , potom intenzita vlny (čiže miera jej energie) odpovedá POČTU DOPADNUVŠÍCH ČASTÍC za jednotku času.

Naopak, ak uvažujeme *jedinú* časticu, potom odpovedajúcou vlnou je krátky vlnový pulz v trvaní $\Delta t \rightarrow 0$. Z Fourierovej analýzy vieme, že frekvencia takéhoto pulzu má neurčitost $\Delta\omega \rightarrow \infty$. Pojem *frekvencia* pre takýto pulz nemá zmysel, rovnako ako nemá zmysel pre časticu. **Fotoelektrický jav** však ukazuje, že každej častici s energiou E môžeme *formálne* priradiť frekvenciu

$$E \text{ častice} = \hbar\omega \text{ vlny}$$

aj keď pre *jednotlivú* časticu ω NEMÁ fyzikálny zmysel. Symbol

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \cong \frac{6.626 \cdot 10^{-34} Js}{2\pi} \cong 1.054 \cdot 10^{-34} Js$$

je **Planckova konštanta**, ktorá vystupuje aj v *Planckovom zákone žiarenia absolútne čierneho telesa* (o ňom neskôr).

Súvislý tok identických častíc (t.j. častíc s rovnakou $E = \hbar\omega$) však vytvára monochromatickú vlnu s frekvenciou ω . Energia vlny (intenzita, čiže kvadrát amplitúdy) je daná počtom dopadajúcich častíc s energiou E , a frekvencia vlny je daná energiou častíc, ktorých tok túto (monochromatickú) vlnu vytvára.

Frekvencia vlny je emergentným prejavom makroskopického toku identických častíc s energiou E .

Rovnako hybnosť častice/častíc vytvára hybnosť takejto vlny, a súvisí s jej vlnovým vektorom

$$\vec{p} \text{ častice} = \hbar\vec{k} \text{ vlny}$$

Pre lepšiu predstavu urobme niekoľko *rádových* odhadov pre vlnovú dĺžku:

- projektil zo strelnej zbrane:

$$p = mv = \hbar k \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \quad h \approx 10^{-34} Js$$

$$v \approx 10^2 ms^{-1} \quad m \approx 10^{-3} kg \quad \lambda \approx 10^{-33} m$$

- nerelativistický elektrón (ten istý vzťah):

$$v \approx 10^6 ms^{-1} \quad m \approx 10^{-30} kg \quad \lambda \approx 10^{-10} m$$

- relativistický elektrón:

$$p = \gamma mv \qquad \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\gamma mv} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
$$v \approx 0.5c \qquad m \approx 10^{-30} kg \qquad \lambda \approx 10^{-12} m$$

Uvedené stotožnenie vlny s časticou sme urobili LEN v limite $\lambda \rightarrow 0$, aby sme zachovali *lokalizovanosť ako atribút klasickej častice*. Pre všetky *makroskopické* objekty je táto podmienka veľmi dobre splnená. Pre mikroskopické častice je však situácia iná. Ak totiž chceme lokalizovať (voľnú) časticu v smere pohybu, musíme ju „skomponovať“ z celého spektra vlnových dĺžok do impulzu - vlnového balíka, a ten sa (ako uvidíme neskôr) s časom rozplýva ako $\sqrt{\frac{\hbar}{m}t}$, čo je na mikroskopické pomery závratne rýchlo. (Pre makroskopické objekty je to nepozorovateľne pomalé. Ak sa ľudia s vekom rozširujú, je to z iného dôvodu.)

Ak by sme na lokalizovanosti častice NEtrvali, môžeme pojem *častica* rozšíriť na ľubovoľné λ a preniesť ho aj do mikrosвета ako *permanentný stav* (tak sa to aj robí). Ak však budeme na lokalizovanosti častice trvať, stane sa častica len *emergentným prejavom interakcie s makrosvetom* (detektor a pod.). Terminológia je vecou dohody (len sa treba dohodnúť).

Má častica DRÁHU? (Princíp najmenšieho účinku.)

Pri hľadaní univerzálneho zákona fyziky je azda najhorúcejším kandidátom **princíp najmenšieho účinku**, kde **účinnok** S je definovaný pomocou lagrangiánu \mathcal{L}

$$\delta S = 0 \quad \text{kde} \quad S(\vec{r}(t)) = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L} dt$$

Dá sa ukázať, že je ekvivalentnou formuláciou nielen Newtonovho pohybového zákona, Fermatovho princípu v optike, ale aj Schrödingerovej rovnice. Nie nadarmo sa teší prezývke „*princíp vesmírnej lenivosti*“.

V newtonovskej mechanike je lagrangián rozdielom kinetickej a potenciálnej energie telesa, a teleso sa pohybuje *vždy* po dráhe danej minimom účinku. Relativistická fyzika však vyžaduje zákon v tvare invariantnom voči zmene pohybového stavu pozorovateľa - a „klasický“ lagrangián túto požiadavku nespĺňa. Ak však pre hybnosť p požadujeme

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = \gamma m v \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

dostaneme pre *voľnú* časticu $\mathcal{L} = -mc^2/\gamma$, čo *nie je* relativistická kinetická energia! Klasický *hamiltonián* pre voľnú časticu, čiže kinetická energia, má potom tvar

$$H = pv - \mathcal{L} = \dots = \gamma mc^2$$

čo je správny relativistický výsledok. Relativistickým invariantom síce naďalej *nie je* ani H ani \mathcal{L} ani p , ale ani čas t . A vďaka tomu invariantným JE účinnok - a to je dôležité.

A teraz ku QF. Poďme opisovať pohyb častice s energiou E a hybnosťou p (v smere x) ako šírenie rovinatej vlny s frekvenciou $\omega = E/\hbar$ a vlnčtom $k = p/\hbar$. (Z takýchto vln môžeme kedykoľvek „skomponovať“ realistický vlnový balík.) Pre vlnovú funkciu v tvare rovinatej vlny platí

$$\psi(x, t) \sim e^{i(kx - \omega t)} = e^{i(px - Et)/\hbar} = e^{i(pv - E)t/\hbar} = e^{i\mathcal{L}t/\hbar} = e^{i\theta}$$

kde $\mathcal{L} = pv - E$. Za čas letu Δt naša častica „natočí“ (v našom ručičkovom zobrazovaní) fázový uhol $\Delta\theta = \mathcal{L}\Delta t/\hbar$, a na KAŽDEJ MYSLITEĽNEJ dráhe medzi bodmi A a B celkový fázový uhol

$$\theta = \frac{1}{\hbar} \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L} dt = \frac{S}{\hbar}$$

Účinnok - fyzikálna veličina múdro definovaná tak, aby bola minimálnou pre tú „správnu“ klasickú dráhu častice v mechanike - v prípade našej vlny vstupuje do jej fázy θ . Ak sa pýtame, kadiaľ letela QF častica zo zdroja na dané miesto detektora, musíme pripustiť, že ako *vlna* priletela po všetkých možných dráhach, pričom jednotlivé **komplexné amplitúdy prechodu** - t.j. vlny po rôznych dráhach - obsahujúce člen $e^{i\theta} = e^{iS/\hbar}$ navzájom INTERFERUJÚ.

Keďže účinnok S odpovedá energii a teda hmotnosti častice, pre *makroskopické* objekty platí $S \gg \hbar$ pre *každú* dráhu a aj pre *každý jej nepatrný úsek*, a teda aj medzi veľmi blízkymi dráhami je *veľký a náhodný* fázový rozdiel. *Deštruktívnej* interferencii teda podľahnú všetky dráhy okrem tej, ktorá odpovedá *klasickej dráhe* telesa, a blízkych dráh, pre ktoré je fázový rozdiel menší než π (nedostanú sa do protifázy). To je *klasická limita* QF ($\hbar \rightarrow 0$).

Pre nepatrný QF objekt však existuje množstvo dráh blízkyh tej „najkratšej“, pre ktoré je nárast účinku $\Delta S < h$ (tak aby $\Delta\theta < \pi/2$) - tieto dráhy interferujú *konštruktívne* - tvoria „koridor“, v ktorom je častica *delokalizovaná*. Na *mikroskopických* škálach, napr. pre elektrón pohybujúci sa v okolí jadra atómu, je účinok pre každú mysliteľnú dráhu porovnateľný s \hbar . VŠETKY tieto dráhy teda interferujú *konštruktívne* - ide o priestorovo „rozmazané“ **orbitály**. Na *makroskopických* dĺžkových škálach, keď integrálny účinok S pozdĺž dráhy výrazne prevyšuje \hbar aj pre QF častice, napr. pri ohybe na hrane prekážky či pri prechode sústavou štrbín, detektory zaznamenávajú interferenčné vzory v závislosti od polohy (oblasti konštruktívnej a deštruktívnej interferencie sa v priestore striedajú podobne ako pri interferencii koherentného svetla). Každá častica šíriaca sa súčasne po všetkých dostupných dráhach interferuje SAMA SO SEBOU.

Podmienka $\Delta S < h$ teda znamená, že žiadna „vyvolená“ *dráha*, v zmysle určenej trajektórie, **NE-EXISTUJE!** Všetky dráhy vyhovujúce tejto podmienke sú rovnako dobré. Rovnako ako v prípade šírenia „klasickej“ vlny, keď obvykle nehovoríme o konkrétnej dráhe, s výnimkou geometrickej optiky (Fermatov princíp). A práve limitný prechod od rovinnej *vlny*

$$e^{i(kx-\omega t)} = e^{i2\pi(x-v_f t)/\lambda} = e^{i\theta}$$

ku *dráhe lúča* v geometrickej optike je daný limitou $\lambda \rightarrow 0$ (v analógii s $\hbar \rightarrow 0$ pre QF). Dráha klasickej častice je teda limitným prípadom šírenia QF vlny-častice, podobne ako dráha optického lúča je limitným prípadom šírenia elektromagnetickej vlny.

Existuje teda **princiálna neurčitosť** účinku na úrovni $\approx \hbar$, a nielen pre dráhy. *Každému* procesu či interakcii môžeme priradiť istý účinok (angl. *action*), zaťažený principiálnou neurčitosťou $\approx \hbar$. *Rozlíšiteľné* stavy sú stavy líšiace sa najmenej o $\approx \hbar$ (vyjadrené účinkom pri zmene stavu). Prechod od kvantového ku klasickému opisu je daný limitou $\hbar \rightarrow 0$.

PRINCÍP KOREŠPONDENCIE. (Bohrov model atómu.)

Múdri ľudia vymysleli fyziku, aby vysvetlili svet, ktorý *poznáme*. Akokoľvek podivné by boli fyzikálne zákony *mikrosveta*, prechodom do „nášho“ *makrosveta* (t.j. do makroskopických mierok) musíme dostať nám dôverne známy obraz. Základným predpokladom QF je preto **princíp korešpondencie**:

V klasickej limite musí kvantová fyzika dávať klasický obraz sveta.

Klasickou limitou obvykle rozumieme prechod k veľkému počtu častíc či makroskopickým rozmerom. Náš klasický svet je EMERGENTNÝM javom - novou *kvalitou* vzišlou z *kvantity* mikrosveta.

Predpokladajme *klasický* pohyb elektrónu okolo jadra po kruhovej orbite, danej rovnováhou dostredivej Coulombovej sily a zotrvačnej odstredivej sily

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} = \dots = \frac{L^2}{mr^3}$$

kde $L = mvr$ je orbitálny moment hybnosti elektrónu. Kinetická energia elektrónu je teda $E_k = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$ a celková energia

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} = \dots = -\frac{me^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 L^2}$$

Záporná potenciálna i celková energia znamenajú, že elektrón je uväznený v atóme.

Podľa klasickej fyziky orbitujúci náboj stráca energiu vyžarovaním elmag. vlny na frekvencii svojho orbitálneho pohybu $\omega = \frac{L}{mr^2}$. Strata energie sa prejaví poklesom jeho momentu hybnosti

$$\frac{dE}{dL} = \dots = \frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 L^3} = \dots = \omega$$

Ak je úbytok energie $\Delta E \rightarrow dE$ nepatrný, odpovedajúca zmena momentu hybnosti sa prejaví skôr na zmene polomeru než frekvencie ($L \sim r^2$, kým $L \sim \omega$), a teda

$$\Delta E = \omega \Delta L$$

Experimenty (fotoelektrický jav) však ukazujú, že atóm môže strácať energiu len po kvantách $\Delta E = \hbar\omega$, a teda aj úbytok momentu hybnosti musí byť kvantovaný - v elementárnych kvantách $\Delta L = \hbar$. To však znamená, že *elektrón v atóme môže existovať len na dráhach s kvantovaným momentom hybnosti*

$$\underline{L = n\hbar} \quad n = 1, 2, 3\dots$$

(Moment hybnosti a Planckova konštanta majú rovnaký fyzikálny rozmer!)

Princíp korešpondencie motivoval Nielsa Bohra k postulovaniu modelu atómu:

- Existujú určité „stacionárne“ energetické hladiny, elektróny orbitujúce na nich nevyžarujú.
- Elektróny vyžarujú a pohlcujú pri preskokoch medzi týmito hladinami E_i . Vyžarovaná či pohlcovaná energia je $\hbar\omega = E_i - E_j$.
- Stabilné orbity sú tie, pre polomery ktorých platí, že moment hybnosti elektrónu je kvantovaný.

Kvantovanie momentu hybnosti vedie na polomery stacionárnych dráh

$$r_n = \frac{n^2 \hbar^2 4\pi\epsilon_0}{me^2} \quad n = 1, 2, 3\dots$$

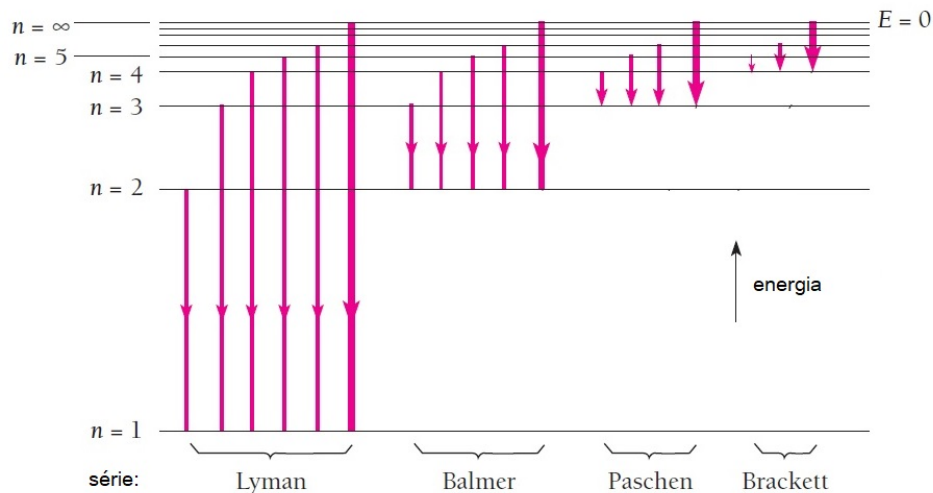
Najnižšia dráha $n = 1$ má $r_1 \cong 0.5\text{\AA}$ - **Bohrov polomer** atómu. Pre stacionárne hladiny vychádza

$$E_n = -\frac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2n^2} = \frac{E_1}{n^2} \quad E_1 \cong -13.6\text{eV}$$

Vlnové dĺžky odpovedajúce prechodom elektrónu medzi energetickými hladinami sú

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\omega}{2\pi c} = \frac{E_i - E_j}{hc} = \frac{E_1}{hc} \left(\frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) = R \left(\frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

kde $R \cong 1.1 \cdot 10^7\text{m}^{-1}$ je Rydbergova konštanta.



Bohrov model atómu je nepresný, frekvencie spektrálnych čiar však presné sú. Nie sú to však frekvencie klasického orbitálneho pohybu (presvedčte sa!) - to platí len pre veľké n ($n \rightarrow \infty$), keď sa energetické spektrum stáva *spojitým* (presvedčte sa!). Aj Bohrova podmienka kvantovania momentu hybnosti je presná len v limite $n \rightarrow \infty$. To je princíp korešpondencie.

Čo vlastne predstavuje $\hbar\omega$? Sú to kvantá ENERGIE, prepočítané na frekvenciu vlny, ktorú vytvoria *pri makroskopickom počte* - táto vlna aj jej frekvencia je *emergentným javom na makroskopickej úrovni* - KVANTUM ENERGIE ŽIADNU FREKVENCIU NEMÁ. Asociácia $\hbar\omega$ s *kmitmi* či *vlnou* má význam LEN V MAKROSKOPICKEJ MIERKE.

Ak $\hbar\omega$ je kvantom *elektromagnetickej* (EM) energie („svetlo“ nemusí byť jedinou formou vyžiarenej či pohltenej energie), nazývame ho **fotón**. Makroskopický počet fotónov vytvára EM vlnu. Energia klasickej vlny *nezávisí od jej frekvencie* - je daná len kvadrátom amplitúdy. Klasická amplitúda vlny je však daná stredným počtom fotónov (kvant energie odpovedajúcim frekvencii vlny). Kvantový pohľad na vlnu je teda v úplnom súlade s klasickým. Ak tvrdíme (napr. pri interpretácii fotoelektrického javu), že energia „kvantovej vlny“ fotónov závisí od ich *frekvencie*, vnucujeme fotónom vlastnosť, ktorú nemajú a nepoznajú. A to by sme nemuseli...

Vráťme sa ešte k Bohrovmu modelu atómu, kde sme postulovali stacionárne orbity elektrónu s kvantovaným momentom hybnosti, a všimnime si, čo znamená vzťah $p = \hbar k$:

$$L = rp = n\hbar \quad \Rightarrow \quad 2\pi r = \frac{nh}{p} = n\lambda$$

Stacionárne orbity elektrónu v tomto modeli atómu sú tie, ktoré vyhovujú (párnym) **stojatým vlnám** o vlnovej dĺžke elektrónu. S podobnou podmienkou sa stretne aj pri iných potenciálových jamách.

Má častica IDENTITU? (Odraz a Comptonov jav.)

Najprv odraz v *klasicknej* fyzike. Odraz *častice* je odrazom intaktnej biliardovej gule. S odrazom *vlny* je to už o čosi zložitejšie. „Feynmanovský“ pohľad je, že energia vlny sa POHLTÍ A NÁSLEDNE VYŽIARI odrazovým látkovým povrchom. Napr. energia EM vlny rozkmitá elektróny v atómových povrchoch (ako lineárne harmonické oscilátory), ktoré následne vyžiaria EM vlny do (takmer) všetkých smerov (spomeňte si na Huygensov princíp). Tieto vlny z rôznych miest povrchu navzájom INTERFERUJÚ tak, že zachovávajú len TEN smer, ktorý odpovedá *zákonu odrazu*.

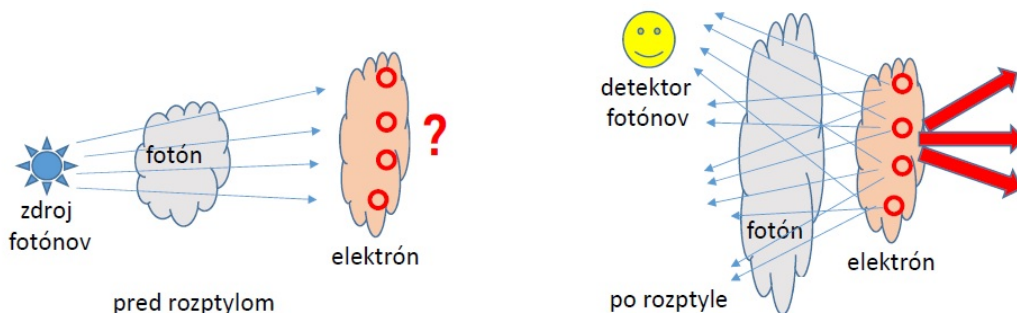
Ako je to v QF? Už z predchádzajúcich poznámok vyplýva, že QF objekt sa stáva časticou len pri interakcii s meracím prístrojom. Pýtajme sa teda, či sa dopadajúca vlna pohltí na odrazovom povrchu ako *častica*, aby sa následne vyžiarila ako *vlna*. Máme dôvod si to myslieť - pri fotoelektrickom jave sa EM vlna pohlcuje vo forme častíc - fotónov. Analýza fotoefektu to jasne ukazuje. Podobne, akurát v opačnom garde, je to s RTG žiarením vyvolaným elektrónovým bombardovaním povrchu. Môžeme to zovšeobecniť aj na dopad a odraz *tej istej* častice (elektrón, fotón). Nič teda nepokážime, ak si odraz EM *vlny* budeme predstavovať aj s časticovým (fotónovým) „medzipristátím“ v látke. A zrejme nie je dôvod pre elektrón(ovú vlnu) predpokladať niečo iné. Otázka však je, či je v konkrétnom prípade takéto časticové *intermezzo* nevyhnutné. Pri RTG či fotoefekte zrejme áno, pri braggovskom rozptyle elektrónov a neutrónov na atómovej mriežke či odraze svetla od zrkadla zrejme nie. V každom prípade, odraz sa riadi „vlnovými“ pravidlami (interferencia).

Tvrdošijného „vrtáka“ môže ale napadnúť, že vlnovo-časticový dualizmus musí byť predsa niečo *principiálne*. Ak sa *vlna* mení na *časticu* pri interakcii s látkou, musí sa to diať bez ohľadu na to, či to my považujeme za „potrebné“. Tu treba pripomenúť, že v QF je „ozajstným“ len výsledok MERANIA, všetko ostatné je hypotetické. Ak existuje experiment potvrdzujúci *časticovú* povahu kvantového objektu *počas* odrazu (vlny), potom je to „naozaj“. Ak takýto experiment nemáme, potom je to na našom „vkuse“. Presnejšie, je to otázka pragmatického prístupu (nakoľko si vieme opis zjednodušiť a vyhnúť sa detailom). Ak niekedy hovoríme, že častica sa (s istou pravdepodobnosťou) *odrazí*, nemá zmysel sa pýtať, či ide o *tú istú* časticu, a to hneď z dvoch dôvodov: (1) Kvantové častice sú nerozlíšiteľné. (2) Kvantové častice nalietajú na povrch a vylietavajú z neho ako VLNY - a tam už táto otázka očividne nemá zmysel.

Je tu ešte jeden háčik. Každý atóm má predsa svoje charakteristické *absorpčné* spektrum - akýsi „zoznam“ energií, ktoré môže pohltiť. Fotón, ktorý do tohto zoznamu nepatrí, sa nepohlí (tak sa to aspoň zvykne učiť). Čo teda spraví? Preletí atómom alebo a odrazí ako biliardová guľa? Hladký prelet fotónu atómom by mohol vysvetliť priezračnosť niektorých látok, napr. skla. Lenže nevysvetlí! Sklo má predsa jasne odlišný index lomu - vie zmeniť smer aj „rýchlosť šírenia svetla“. Interakcia fotónov s časticami látky je teda *nevyhnutná*. Ak štruktúru látky skomplikujeme rôznorodosťou atómov a chemickými väzbami medzi nimi (dodatocnými vibračnými a rotačnými spektrami), dopplerovským rozmazaním čiari kvôli chaotickému tepelnému pohybu všetkých častíc látky, dostávame predstavu dostatočného počtu „príležitostí“ na POHLTENIE A OPĀTOVNÉ VYŽIARENIE väčšiny fotónov. Ak navyše predpokladáme homogenitu materiálu na škále vlnových dĺžok odpovedajúcim energii fotónov, a aplikujeme čosi ako Huygensov princíp (konštruktívnu a deštruktívnu interferenciu), dostávame *priesvitnosť* látky a ILÚZIU *odrazu a lomu na rozhraniach* (ako s ňou pracujeme v optike).

Ale čo s **Comptonovým rozptylom** fotónu na *voľnom* elektróne? Ten tradične opisujeme jazykom biliardových gúľ, a manifestujeme tým *časticovú* povahu svetla. Rovnako *kovy*, obsahujúce „voľné“ elektróny, sú veľmi dobrými zrkadlami, ktoré „odrážajú“ svetlo. V oboch prípadoch však ide o *makroskopický* pohľad (užitočný v „našom“ svete), zahmlievajúci QF podstatu. Takýto pohľad vníma detektor (meracie zariadenie) ako *pasívneho* svedka prebiehajúceho „odrazu“ a zamlčuje jeho aktívnu úlohu v mikrosвете. Pozrime sa na Comptonov odraz „očami“ predchádzajúcich kapitol.

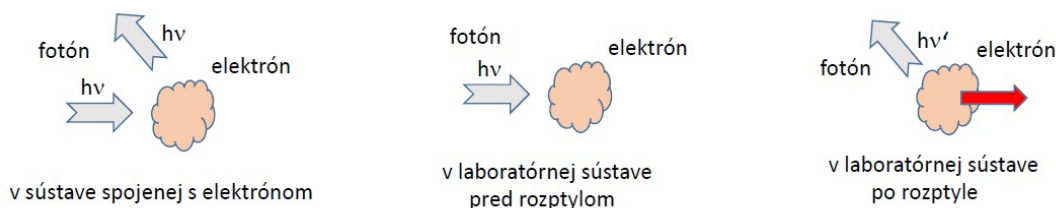
Predpokladajme fotón šíriaci sa svojím „koridorom“ od zdroja, a elektrón *delokalizovaný* v rámci neurčitosti svojej polohy. Tento príbeh je superpozíciou všetkých možných „histórií“ - zrážok v rôznych miestach a aj minútí. V každej z možných histórií sa však zachováva celková hybnosť aj energia páru fotón-elektrón.



Detektor fotónov zaznamenáva rozptyl fotónu do smeru, v ktorom je umiestnený (pod daným uhlom θ). Z klasického pohľadu „cvak“ na detektore zaznie vtedy, keď sa fotón rozptýli *náhodou* práve do smeru θ , inak nie. Z QF pohľadu sa však detektor *náhodne* „rozhodol“ pre „cvak“, a tým lokalizoval (vytvoril) časticu-fotón na svojom vstupe, resp. *vylúčil* pre fotón tento smer v prípade „necvak“. Z možných histórií teda jednu konkrétnu vybral alebo vylúčil. Po vzájomnej interakcii (rozptyle) tvoria fotón s elektrónom *kvantovo previazaný pár*, a história vybraná cvaknutím detektora je *spoločnou* históriou tohto páru *po* rozptyle (splňajúcou zákony zachovania). Výsledkom je detektorom nameraný posuv vlnovej dĺžky (čiže energie) fotónu

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$$

Klasická *časticová* interpretácia znie, že fotón (ako guľôčka) *stratil pri odraze* časť svojej energie v prospech pohybu elektrónu (druhej guľôčky). V QF však hovoríme o POHLTENÍ fotónu elektrónom a okamžitom VYŽIARENÍ INÉHO fotónu, a to v konkrétnej „histórii“ *vybranej detektorom*. Takto to vnímame v „laboratórnej“ sústave detektora. V sústave spojenjej s elektrónom však tento elektrón musí vyžiariť ROVNAKÚ energiu ako pohltil - keďže je vo vlastnej súradnicovej sústave *v pokoji*, nemá prebytočný stupeň voľnosti, do ktorého by energetický rozdiel uložil.



Nie je tento jav, keď *pohybujúci sa* elektrón vyžiari INÝ fotón než keď je *v pokoji*, podobný **Dopplerovmu javu** z klasickej fyziky vln? Nie je mu podobný, je s ním IDENTICKÝ. Výpočtom sa o tom môžete presvedčiť. (Prípady odpovedajúce $\theta = 180^\circ$ a 90° sú jednoduché, pre všeobecné θ je to zložitejší výpočet.) Ako vidíme, interpretácia Comptonovho javu ako dôkazu permanentnej „časticovosti“ svetla je zavádzajúca.

Je teda rozptyl fotónov na *voľných* elektrónoch biliardom alebo pohltitím a opätovným vyžiarovaním? **Kvantová elektrodynamika** nám dáva jednoznačnú odpoveď (a jej formalizmus produkuje neuveriteľnú zhodu s experimentom):

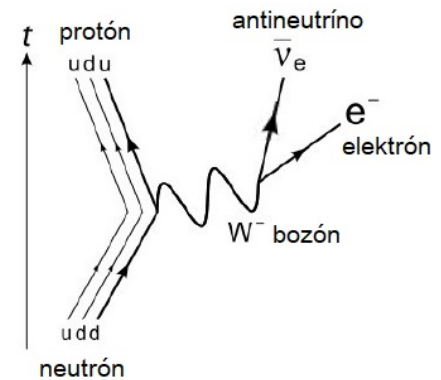
Každá interakcia fotónu s časticou látky je pohltením/vyžiarením

bez ohľadu na to, či je častica voľná alebo viazaná v kvantových stavoch látky. Aj „spomalenie“ svetla v skle či vode teda spokojne môžeme vnímať ako let fotónov plný medzipristátí s krátkym posedením pri káve.

Fotón zaručene nie je časticou, ktorá by si zachovávala svoju „identitu“ - vzniká a zaniká, mení svoju energiu od pozorovateľa k pozorovateľovi. Ako je to s časticami látky, akou je napr. elektrón? Vieme, že elektróny sú *nerozlíšiteľné* - nemá teda zmysel sa pýtať, či elektrón vchádzajúci do interakcie je *ten istý* ako elektrón z nej vychádzajúci. Elektrón je však nositeľom *súboru istých vlastností* (elektrický náboj, spin, a pod.), a má zmysel sa pýtať, či sa tieto vlastnosti zachovávajú, a či sa zachovávajú ako *identický súbor* (teda elektrón). Ako ilustračný príklad ukážeme β^- rozpad atómového jadra.

Pri β^- rozpade sa neutrón rozpadá na protón, elektrón a antineutríno. Neutrón však pozostáva z dvoch *d*-kvarkov a jedného *u*-kvarku, kým protón z dvoch *u*-kvarkov a jedného *d*-kvarku. Jeden *d*-kvark sa teda rozpadne na *u*-kvark a W^- bozón, ktorý sa vzápätí rozpadne na elektrón a antineutríno.

Ako vidíme, permanentnú existenciu *nemajú* protóny, neutróny, elektróny, neutrína, W bozóny ani kvarky. Čo však permanentnú existenciu má, sú zachovávajúce sa „vlastnosti“ (ako energia či hybnosť, elektrický náboj, baryónové a leptónové číslo a ďalšie), ktoré vyjadrujú fundamentálne symetrie Prírody.



Každá QF častica je teda DOČASNÝM „príbytkom“ súboru vlastností či skôr SCHOPNOSTÍ, podobne ako každá živá bytosť (počnúc vírusom končiac človekom) je dočasným nositeľom určitej komplexnej identity, ktorá s touto bytosťou vzniká a zaniká. Základné ingrediencie tejto identity *na najelementárnejšej úrovni* však pretrvávajú v kolobehu Prírody. Uvedomenie si tejto podobnosti nás oslobodzuje od potreby vnímať elementárne častice ako permanentné, a pomáha nám pochopiť vlnovo-časticový paradox (a v ňom úlohu makroskopických detektorov - merania).

O NEURČITOSTI. (Vlnový balík.)

Klasickú časticu si predstavujeme ako guľôčku. Od mikroskopickej *častice* preto požadujeme, aby bola slušne *lokalizovaná* (aj keď nešpecifikujeme, čo znamená „slušne“). Protóny a neutróny *v atómovom jadre* sú lokalizované na oblasti $\approx 10^{-15}\text{m}$ a teda spĺňajú našu predstavu častíc. Ešte viac to platí o kvarkoch vnútri protónov či neutrónov. Elektróny v atóme sú lokalizované vo svojich orbitáloch o rozmeroch $\approx 10^{-10}\text{m}$. Vnútri orbitálov však elektróny ostávajú *delokalizované*. (V podstate to znamená len toľko, že v rámci všeobecnej fyziky sme na týchto rozmeroch už naučení rozlišovať vzdialenosti.) Miera lokalizácie je teda očividne daná *silou* interakcie týchto častíc s okolím. (Smerom „dovnútra“ jadra táto sila prudko narastá.) Na makroskopických škálach máme miernejšie požiadavky na presnosť lokalizácie (aktívne plochy detektorov zvyknú mať makroskopické rozmery). Na každej úrovni teda existuje istá **neurčitosť** v lokalizácii, daná našou priestorovou *rozlišovacou schopnosťou*. Tu však treba prísne rozlišovať medzi neurčitostou polohy spôsobenou našou NEVEDOMOSŤOU (ak si doma neviem nájsť okuliare, neznamena to, že sú delokalizované v rámci celého domu) a PRINCIPIÁLNOU neurčitostou, danou silou lokalizujúcej interakcie. A o tej *druhej* budeme v ďalšom hovoriť.

Principiálna neurčitosť polohy v QF neznamena, že presnejšiu polohu nevieme *určiť*, znamená, že presná poloha *sama osebe neexistuje* - uvažovať o nej **NEMÁ ZMYSEL** ! Ak však nemá zmysel presná poloha, nemá zmysel ani jej *zmena* v čase - presná *rýchlosť* a *hybnosť*. Dokážeme ich však s „ľubovoľnou“ presnosťou VYTVORIŤ MERANÍM (aplikovaním „ľubovoľne“ silnej interakcie). Ostré hodnoty týchto veličín teda vo všeobecnosti nie sú permanentným stavom, podobne ako ním nie je samotná častica - vznikajú pri interakcii s makrosvetom. (O *meraní* rôznych veličín neskôr.)

Skúmame teraz, čo sa bude diať, ak takúto časticu *oslobodíme* zo zovretia interakcie - potenciálovej jamy, v ktorej je lokalizovaná, a udelíme jej rýchlosť v . Vieme už, že naša častica sa bude voľným priestorom šíriť ako *vlna*. Musíme pritom vychádzať z počiatočnej lokalizácie v čase $t = t_0$ s neurčitostou Δx v okolí x_0 (pre jednoduchosť sa obmedzíme na jednorozmerný prípad, a kľudne môžeme uvažovať $t_0 = 0$ a $x_0 = 0$). Vlnou spĺňajúcou túto požiadavku je krátky gaussovský vlnový pulz o šírke $\Delta x \cong \sigma_x$ (gaussovská štandardná odchýlka) v smere šírenia

$$\psi(x, t = 0) = A e^{-\left(\frac{x}{2\sigma_x}\right)^2} e^{ik_0 x}$$

kde $k_0 = p_0/\hbar$ odpovedá hybnosti častice. Takáto vlna - **vlnová funkcia** - má vyjadrovať *pravdepodobnosť* nájdenia (= vytvorenia meraním) častice v danom x . Keďže sme ju však skonštruovali ako *komplexnú* funkciu a pravdepodobnosť musí byť *reálne* číslo, definujeme pravdepodobnosť nájdenia častice v x ako

$$\mathcal{P}(x) = \psi(x)\psi^*(x) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\psi^*(x) = 1$$

pričom podmienka **normovanosti** pravdepodobnosti (časticu *niekde* určite nájdeme) určuje koeficient

$$A = \frac{1}{(2\pi)^{1/4} \sqrt{\sigma_x}} \qquad \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2} da = \sqrt{\pi} \right)$$

(V prípade *klasických* vln je analógom výskytu častice *energia* ako kvadrát amplitúdy.)

Fourierova analýza nás učí, že takýto pulz vieme vytvoriť *superpozíciou* rovinných monochromatických vln s amplitúdami

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)e^{-ikx} dx \qquad (\text{Fourierova transformácia, v danej konvencii})$$

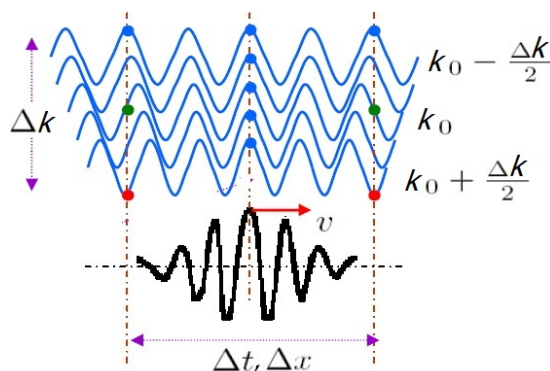
Po dosadení, s použitím substitúcie $x' = \frac{x}{2\sigma_x}$ a úpravou gausiánu do tvaru $e^{-(x'+i(k-k_0)\sigma_x)^2}$ dostávame

$$F(k) = \frac{(2\pi)^{1/4}}{\sqrt{\sigma_k}} e^{-\left(\frac{k-k_0}{2\sigma_k}\right)^2}$$

čo je opäť gausián s štandardnou odchýlkou $\sigma_k = \frac{1}{2\sigma_x}$. Spätnou Fourierovou transformáciou (v rovnakej konvencii)

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx} dk$$

dostávame pôvodné *priestorové* rozloženie vlny. Priestorovo *lokalizovaný* vlnový pulz je teda tvorený tzv. **vlnovým balíkom** monochromatických vln bez začiatku a konca (delokalizovaných pozdĺž *celej* osi) so spojitým spektrom vlnočtov o šírke $\Delta k \cong \sigma_k$ v okolí k_0 , sfázovaných tak, že v čase $t = 0$ majú všetky vlny v mieste $x = 0$ amplitúdu. Mimo intervalu $\approx \Delta x$ sa jednotlivé monochromatické komponenty sčítavajú s *náhodnou* fázou a tým sa vzájomne *eliminujú*.



Predpokladajme na začiatok, že sa všetky vlny šíria ROVNAKOU rýchlosťou v_f spolu s časticou ($v_f = v$). Každú z nich potom môžeme priradiť frekvenciu $\omega = v_f k$, a frekvenčné spektrum vlnového balíka so stredom $\omega_0 = v_f k_0$ a šírkou $\Delta\omega \cong \sigma_\omega = v_f \sigma_k$ bude

$$F(\omega) = \frac{(2\pi)^{1/4}}{\sqrt{\sigma_\omega}} e^{-\left(\frac{\omega-\omega_0}{2\sigma_\omega}\right)^2}$$

Časový priebeh vlnového balíka daným miestom (napr. $x = 0$) dostávame Fourierovou transformáciou

$$\psi(t, x = 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega t} d\omega$$

Analogickými úpravami ako v predchádzajúcom integráli dostávame

$$\psi(t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/4} \sqrt{\sigma_t}} e^{-i\omega_0 t} e^{-\left(\frac{t}{2\sigma_t}\right)^2}$$

čo je gaussovský balík *v čase* so šírkou $\sigma_t = \frac{1}{2\sigma_\omega}$. Keďže sme vlny sfázovali v $x_0 = 0$ práve v $t = 0$, gausián prechádza týmto miestom práve v tomto čase, po dobu $\Delta t \approx \sigma_t$.

Pre štandardné odchýlky našich gausiánov pritom platia vzťahy

$$\underline{\sigma_k \sigma_x = \frac{1}{2}} \quad \underline{\sigma_\omega \sigma_t = \frac{1}{2}}$$

Súčin vlnočtovej/frekvenčnej a priestorovej/časovej štandardnej odchýlky rozdelenia je pre *gaussovské* rozdelenie *najmenší možný*. Pre *všeobecný* tvar rozdelenia platí

$$\underline{\sigma_k \sigma_x \geq \frac{1}{2}} \quad \underline{\sigma_\omega \sigma_t \geq \frac{1}{2}} \quad \text{alebo} \quad \underline{\Delta k \Delta x \geq \frac{1}{2}} \quad \underline{\Delta \omega \Delta t \geq \frac{1}{2}}$$

Takýto vlnový balík realisticky modeluje časticu ako-tak lokalizovanú v rámci balíka. Ak uvážime, že rozptyl vlnočtov v balíku Δk odpovedá neurčitosti hybnosti častice $\Delta p/\hbar$ a rozptyl frekvencií $\Delta\omega$ neurčitosti jej energie $\Delta E/\hbar$, dostávame **princíp neurčitosti**

$$\underline{\underline{\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}}} \qquad \underline{\underline{\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}}}$$

Súčin neurčitostí polohy a hybnosti častice NIKDY „NEPODLEZIE“ $\frac{\hbar}{2}$ - je to FUNDAMENTÁLNA vlastnosť kvantových objektov (súvisí s ich *vlnovou* povahou), NEZÁVISLE NA MERANÍ. Rovnako energia častice je zaťažená nenulovou neurčitosťou. (Interpretácia Δt je zložitejšia. Môže ísť napr. o čas, ktorý „obetujeme“ na meranie energie. Vrátime sa k tejto otázke neskôr.) Neurčitosť *neznamená* našu nevedomosť ale NEEEXISTENCIU ostrej hodnoty (pred meraním).

Častica ako gaussovský vlnový balík (rovinných vln) má teda tvar

$$\psi(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/4} \sqrt{\sigma_k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{k-k_0}{2\sigma_k}\right)^2} e^{i(kx-\omega t)} dk$$

Sledujme ako sa bude šíriť časopriestorom. Ak platí *lineárny* disperzný vzťah $\omega = v_f k$, teda ak $v_f \neq v_f(\omega)$, integrál môžeme upraviť do tvaru

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{k-k_0}{2\sigma_k}\right)^2} e^{i(k-k_0)(x-v_f t)} e^{ik_0(x-v_f t)} d(k-k_0) = e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{q}{2\sigma_k}\right)^2} e^{iq(x-v_f t)} dq$$

kde $q = k - k_0$. Analogicky ako v predchádzajúcich výpočtoch dostávame

$$\psi(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/4} \sqrt{\sigma_x}} e^{-\left(\frac{x-v_f t}{2\sigma_x}\right)^2} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} = \frac{1}{(2\pi)^{1/4} \sqrt{\sigma_x}} e^{-\left(\frac{x-v_f t}{2\sigma_x}\right)^2} e^{ik_0(x-v_f t)}$$

Vlnový balík sa teda pohybuje ako KOMPAKTNÝ celok rýchlosťou v_f .

Čo však ak sa jednotlivé monochromatické vlny tvoriace balík budú šíriť *rôznymi* fázovými rýchlosťami (tento predpoklad ozrejníme vzápätí). Znamená to NELINEARITU disperzného vzťahu (rozvojom $\omega(k)$ do Taylorovho radu v okolí k_0 do druhého stupňa)

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \left(\frac{d\omega(k)}{dk}\right)_{k=k_0} (k - k_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\omega(k)}{dk^2}\right)_{k=k_0} (k - k_0)^2$$

a označme $v_f = \left(\frac{\omega(k)}{k}\right)_{k=k_0}$, $v_g = \left(\frac{d\omega(k)}{dk}\right)_{k=k_0}$ a $\Gamma = \left(\frac{d^2\omega(k)}{dk^2}\right)_{k=k_0}$. Náš balík je potom

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/4} \sqrt{\sigma_k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{k-k_0}{2\sigma_k}\right)^2} e^{i(kx-\omega(k)t)} dk = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/4} \sqrt{\sigma_k}} e^{i(k_0(x-v_f t))} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\{i(x-v_g t)(k-k_0) - \left(\frac{i\Gamma t}{2} + \sigma_x^2\right)(k-k_0)^2\}} dk \end{aligned}$$

Pomocou série dômyselných substitúcií opäť vyriešime integrál typu $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \sqrt{\pi}$, a po úpravách dostaneme

$$\psi(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/4} \sqrt{\sigma_x \left(1 + \frac{i\Gamma t}{2\sigma_x^2}\right)}} e^{-\left(\frac{x-v_g t}{2\sigma(t)}\right)^2} e^{i\theta(x,t)}$$

kde $\sigma(t) = \sigma_x \sqrt{1 + \left(\frac{\Gamma t}{2\sigma_x^2}\right)^2}$ a $\theta(x, t)$ je pomerne škaredá fáza postupujúcej vlny, ktorá nás nezaujíma.

(Pravdepodobnosť nájdenia častice bude daná výrazom $\psi(x, t)\psi^*(x, t)$, a odtiaľ fáza vypadne.) Vidíme zreteľne, že gaussovský vlnový balík sa šíri rýchlosťou v_g - **grupovou rýchlosťou**, pričom jeho

charakteristická šírka $\sigma(t)$ sa s časom neustále ZVÄČŠUJE, rýchlosťou úmernou $\Gamma = \left(\frac{d^2\omega(k)}{dk^2} \right)_{k=k_0}$. Balík sa teda postupne *rozplynie*. Je to zrejmé, keďže každá z vln tvoriacich balík sa šíri INOU fázovou rýchlosťou. Grupová rýchlosť preto má fyzikálny zmysel len dokiaľ balík „drží ako-tak pohromade“. Naopak, v bezdisperznom prípade $\Gamma = 0$, $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\omega}{k} = v_f$.

Pre voľnú (nerelativistickú) kvantovú časticu platí

$$E = E_k = \frac{p^2}{2m} \quad E = \hbar\omega \quad p = \hbar k \quad \omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m} \quad v_g = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m} \quad \Gamma = \frac{\hbar}{m}$$

Rýchlosť vlnového balíka je teda rýchlosťou *klasickkej* častice! Disperzný vzťah $\omega(k)$ je NELINEÁRNY (kvadratický), a doba, za ktorú sa vlnový balík rozťahne na dvojnásobok svojej pôvodnej šírky σ_x , je $\approx \frac{m\sigma_x^2}{\hbar}$. Pre elektrón pôvodne lokalizovaný na rozmere atómu $\approx 10^{-10}m$ je to $\approx 10^{-16}s$! Ak by sme elektrón „vyslobodili“, rozplynul by sa *extrémne rýchlo*.

Pre *fotón* (relativistickú časticu $m = 0$) platí

$$E = \hbar\omega = pc = \hbar kc \quad \omega = kc \quad v_g = c = v_f$$

Vlnový balík reprezentujúci fotón sa vo voľnom priestore NEROZPADÁVA. (Neplatí to pre pohyb v disperznom látkovom prostredí.)

Ako vidíme, vlnový balík je to čo hľadáme - realistická reprezentácia kvantovej častice. Kvôli matematickej jednoduchosti však častice obvykle reprezentujeme pomocou *harmonických* vln. Keďže zákony kvantovej mechaniky sú **lineárne** - platí **princíp superpozície** - z riešení pre harmonické vlny vieme vždy „skomponovať“ riešenie pre realistický vlnový balík.

Princíp neurčitosti $\Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$ teda vzíde z štúdia vlnového balíka reprezentujúceho časticu. Videli sme, ako sa vlnový balík nerelativistickej častice ($m \neq 0$) postupne rozplýva V SMERE POHYBU (hybnosti) - voľná častica sa postupne (ale veľmi rýchlo) delokalizuje v smere pohybu, neurčitosť Δx narastá. Neurčitosť Δp sa však NEMENÍ. Prečo?

Fyzikálny argument „časticový“: Ide o voľný *pohyb* častice - nepôsobia žiadne sily - hybnosť sa *nemení* (vrátane neurčitosti).

Fyzikálny argument „vlnový“: Pôvodný balík bol „skomponovaný“ zo spektra rovinných vln o šírke Δk , nikto žiadnu vlnu (k) neubral a ani (nové k) nepridal.

Formálny (matematický) argument: Je síce pravdou, že *gaussovský* balík sa fourierovsky transformuje (medzi x - a k -priestorom) opäť na *gaussovský* balík pri ROVNOSTI $\Delta k \Delta x = \frac{1}{2}$, avšak v našom rozptýlenom balíku $\psi(x, t) \sim e^{-\left(\frac{x-v_g t}{2\sigma(t)}\right)^2} e^{i\theta(x, t)}$ je fáza $\theta(x, t) \neq kx - \omega t$. Dodatočné „škaredé“ členy v $\theta(x, t)$ (obsahujúce Γ) spôsobia, že pri spätnej fourierovskej transformácii dostaneme pôvodné Δk .

Počiatočný nerozptýlený gaussovský balík odpovedá MINIMÁLNEMU súčinu neurčitostí, ktorý sa s časom môže (ale nemusí - pre bezdisperzný fotón) zväčšovať.

Výpočtom stredných hodnôt „polohy“ a „hybnosti“ častice v balíku by sme dospeli ku vzťahom

$$\langle p(t) \rangle = p_0 \quad \langle x(t) \rangle = \langle x_0 \rangle + \frac{p_0}{m} t$$

čo odpovedá *klasickému voľnému* pohybu častice. Ustredňovanie cez neurčitosti nás vracia do nášho klasického sveta.

Doteraz sme hovorili o delokalizácii častice *v smere pohybu* balíka (x). Ako je to v kolmých smeroch (y, z)? Aj tu platí princíp neurčitosti

$$\Delta p_y \Delta y \geq \frac{\hbar}{2} \quad \Delta p_z \Delta z \geq \frac{\hbar}{2}$$

Ak by bola častica v týchto smeroch dokonale lokalizovaná ($\Delta y, \Delta z \rightarrow 0$), znamenalo by to obrovskú neurčitosť hybnosti, teda *pohybu* v týchto smeroch - a to je logický nezmysel. Musí teda existovať *nenulová a konečná* neurčitosť polohy i hybnosti - šírka „koridoru“ (balíka) a rozbiehavosť/zbiehavosť pohybu.

Je častica TOTOŽNÁ s vlnovým balíkom? Ortodoxná „puristická“ interpretácia znie:

Vlnový balík určuje pravdepodobnosť LOKALIZOVANIA ČASTICE MERANÍM. NEurčuje pravdepodobnosť výskytu častice, nezávisle na meraní !!!

Pri absencii merania je častica delokalizovaná vnútri balíka. NEznamená to však, že jej „hmatateľné“ vlastnosti (hmotnosť, náboj,...) sú *spojite rozložené* v balíku - to by pri lokalizovaní meraním museli neobmedzenene rýchlo skolabovať do danej polohy, a to teória relativity *nedovoľuje*. Predstava „utajenej“ polohy (ako *skrytého parametra*) vnútri balíka bola *experimentálne vylúčená*.

Delokalizácia sa však nevzťahuje len na polohu - rovnako „delokalizovaná“ je aj hybnosť a energia častice reprezentovanej vlnovým balíkom. Hodnoty polohy hybnosti či energie v rámci intervalov $\Delta x, \Delta p, \Delta E$ sú „ponukou“ možných merateľných hodnôt - ktorúkoľvek z týchto hodnôt môže príslušné meranie NÁHODNE nadobudnúť. Žiadna z týchto hodnôt pred meraním NEexistuje (ako skrytý parameter) - to je podstata *neurčitosti*. Konkrétne hodnoty (čísla) týmto premenným priraďujú („vyrábajú“) až merania. V matematickom formalizme túto úlohu zohrávajú **operátory**.

Často sa argumentuje, že princíp neurčitosti je vyjadrením *nezanedbateľného vplyvu merania na meraný objekt*. Ak chceme napríklad zmerať polohu častice, musíme sa jej „dotknúť“ (napr. rozptýliť na nej fotón) a tým ovplyvníme jej hybnosť, a podobne. Je to nepochybne pravda, NEznamená to však, že bez vplyvu merania sú hodnoty dynamických premenných určité. *Neredukovateľný* vplyv merania a *principiálna* neurčitosť premenných su dve strany tej istej mince. Obe sú *fundamentálne* a ROVNAKÉ. (Ak by jedna dokázala „podliezť“ druhú, tá by už nebola fundamentálnou.)

Netradičný pohľad na PRINCÍP NEURČITOSTI.

Iste vám neuniklo, že QF je doslova popretkávaná Planckovou konštantou \hbar , podobne ako teória relativity (TR) sa hemží rýchlosťou svetla c . V oboch prípadoch sa za tým skrýva nejaký dôležitý PRINCÍP. V TR je to invariantnosť maximálnej rýchlosti. Čo je to v QF?

Čo vlastne reprezentuje \hbar ? Pozrime sa na fyzikálny rozmer \hbar – je to Js. Taký rozmer má *moment hybnosti* (to si treba zapamätať), ale aj **účinnok** (angl. *action*) – časový integrál lagrangiánu, $S = \int \mathcal{L} dt$. NEOFICIÁLNY princíp QF teda môžeme sformulovať takto:

$$\Delta S \geq \hbar/2$$

*V prírode existuje minimálny merateľný účinok (akcia) o veľkosti \hbar .
(Neexistuje v prírode proces, ktorého merateľný účinok by bol menší než \hbar .)
(Neurčitosť je daná polovicou najmenšej hodnoty, odtiaľ faktor 1/2.)*

Neoficiálny preto, lebo sa nevyskytuje v tradičných učebniciach. (Formalizmus každého konzistentného systému je možné budovať alternatívnymi spôsobmi, pričom *prvé princípy* a ich kľúčové *dôsledky* si vymenia úlohy.) Než dešifrujeme obsah a dôsledky tohto princípu, pripomeňme, že z takýchto princíпов, a im odpovedajúcich FUNDAMENTÁLNYCH KONŠTÁNT je vybudovaná celá kostra fyziky i celý systém základných nástrojov merania vo fyzike – *prirodených jednotiek* aj *základných jednotiek SI*.

Aké dôsledky vieme vydedukovať z tohto princípu? Zčať treba azda tým, čo je vo fyzike „najhmataateľnejšie“ – výsledkami meraní: Neexistuje meranie s *celkovým* účinkom na meraný objekt menším než $\approx \hbar$. Neexistuje teda *ideálny experiment*, ktorý by neovplyvnil stav meraného objektu. (V klasickej fyzike sa ideálny experiment považuje často za samozrejmosť, a vzhľadom na „malosť“ \hbar je to rozumné priblíženie.) Po druhé, musíme sa korektne vysporiadať s abstrakciami typu *izolovaný systém* či *stacionárny stav*. V prírode žiaden izolovaný systém NEEEXISTUJE. Interakcie, ktoré môžeme spokojne zanedbávať v makroskopickej mierke, sú na účinkovej škále porovnateľnej s \hbar *neprehliadnutelné*. Ani vo vákuu nie je častica „osamotená“ - vákuum nie je prázdnotou ale „bublajúcou penou“ plnou života - tzv. *fluktuácií vákua* (v podobe vynárajúcich sa a vzápätí miznúcich párov častica-antičastica). Koncept *stacionárny stav*, v QF tak užitočný, je *definitoricky* viazaný na izolovaný systém (so *zachovávajúcou sa* energiou), neprístupný *vonkajšiemu* vplyvu ani meraniu. (Podobnou extrémne užitočnou absurditou v QF je napr. pojem *rovinná vlna*.) Všadeprítomné fluktuácie na mikroskopickej úrovni interagujú aj s tým najizolovanejším objektom, a robia dobu života jeho „stacionárneho“ stavu *konečnou*. Z toho vyplýva, že v prírode sa „stále niečo deje“ – *pokoj neexistuje*. Pokoj bez zmeny je len (makroskopické) *spriemerovanie* cez veľa QF systémov (častíc) a/alebo cez dlhý čas. Príprava „*identických*“ *počiatočných podmienok* (ako sa to často v učebniciach píše pri tzv. *myšlienkových experimentoch*) je *principiálne* nerealizovateľná! \hbar je minimom *zmeny*, a teda je základom všetkých *mier*. (Priestorové rozmery častíc sa odvíjajú od \hbar .) Minimum akcie implikuje *neexistenciu spojitosti* – teda akúsi „granularitu“ - *kvantovanosť* - hmoty aj pohybu – toku, vlnenia, žiarenia.

Zmena účinku za čas Δt (napr. počas merania) súvisí so zmenou ΔE energie systému (lagrangián je energia), teda

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$$

Tento zápis **princípu neurčitosti** vrhá tiež podozrenia na *zákon zachovania energie* - akoby platil „len“ s presnosťou $\Delta E \geq \hbar/2\Delta t$!!! Pre extrémne krátke časy môže príroda zdanlivo začať výraznú energetickú sekeru – môže si napr. „požičať energiu z ničoho“ na vytvorenie nových častíc (tzv. *virtuálnych*), ktoré vzápätí zaniknú, a dlh je splatený (ako keď si z cudzej peňaženky tajne požičiate

na útraty a vrátite to skôr než si to dotýchny všimne). Ak si ale viete „požičať“ z NIČOHO, to znamená, že NIČ \neq nič (prázdno). Prázdnota *neexistuje* – je preplnená energiou *kvantových fluktuácií!* Mikrosvet je vskutku vzrušujúce ihrisko... A pokiaľ ide o samotný zákon zachovania - súčet všetkých energií *pred* interakciou aj po nej ostáva *rovnaký!!!*

V (makro)sвете KLASICKÝCH ČASTÍC je uvedený princíp neurčitosti *neznámy*. Známy je však vo svete KLASICKÝCH VLŔN. Klasický vlnový balík, vytvorený rovinnými (monochromatickými) vlnami z intervalu frekvencií $\Delta\omega$ je impulzom v trvaní Δt (ako sa presvedčíme Fourierovou transformáciou), pričom platí

$$\Delta\omega\Delta t \geq 1/2$$

(presne 1/2 je to pre gaussovský balík). Ak tento výraz vynásobíme \hbar , dostávame QF princíp neurčitosti za *predpokladu*, že stotožníme $\hbar\omega$ s energiou QF objektu (častice). Nečudo, že veľkí fyzici minulosti podľahli tomuto vábeniu, a odvtedy opisujeme pohyb QF častíc *formalizmom šírenia klasických vlŔn*. Neznamená to však, že ich s klasickými vlnami stotožňujeme !!!

Ten istý klasický vlnový balík môžeme reprezentovať aj spektrom (intervalom) vlnových čísel Δk_x , a pre jeho „šírku“ Δx (v jednom rozmere x) potom platí

$$\Delta k_x \Delta x \geq 1/2$$

Opäť jasnozrivým priradením (de broglievovských) vlnových parametrov QF časticiam, $\hbar k = p$, dostávame náš princíp neurčitosti v najznámejšom tvare

$$\Delta p_x \Delta x \geq \hbar/2$$

Názorná „časticová“ interpretácia tohto princípu je založená na poznatku z optiky, že (priestorová) rozlišovacia schopnosť je limitovaná vlnovou dĺžkou použitého svetla, resp. de Broglieho vlnovou dĺžkou použitých zobrazovacích častíc (napr. v elektrónovom mikroskope). Čím presnejšie chceme zmerať polohu nášho objektu, tým *kratšiu* vlnovú dĺžku dopadajúceho zväzku (fotónov, elektrónov, atď.) musíme použiť. Tým väčšia je však hybnosť častíc tohto zväzku, a tým viac OVPLYVNÍME hybnosť *meraného* objektu. (Pre masívne objekty je tento efekt zanedbateľný, nie však pre QF častice.)

Nevyhnutne nenulová neurčitosť Δx (ak len neuvažujeme nefyzikálny prípad $\Delta p_x \rightarrow \infty$) znamená nevyhnutnú mieru *delokalizovanosti*. K neúplnej lokalizácii častice dochádza pri *všetkých* potenciálových jamách. Princíp neurčitosti „vnucuje“ častici nenulovú neurčitosť hybnosti a teda aj kinetickej energii - základný stav častice v jame preto nemôže byť stavom s nulovou energiou. Poznáme to z pravouhlej aj parabolickej jamy (harmonického „oscilátora“), a aj z Bohrovho atómu.

Princíp neurčitosti sa NETýka polohy a hybnosti v *navzájom nezávislých* smeroch, napr. $\Delta x \Delta p_y$. Je vzťahom **kánonicky konjugovaných** párov premenných. (V teoretickej mechanike sú to páry s nenulovými *Poissonovými zátvorkami*.) Takýmto párom *zovšeobecnená hybnosť - zovšeobecnená súradnica* je aj pár *moment hybnosti L - uhol ϕ* pri rotačnom pohybe, pre ktorý platí

$$\Delta L \Delta \phi \geq \frac{\hbar}{2}$$

(s maličkou chybičkou krásy, že ϕ je *cyklickou* premennou modulo 2π). Pri predstave rotačného pohybu to znamená *rozmazanie* momentu hybnosti. Všetky LÁTKOVÉ ELEMENTÁRNE častice vykazujú aj vlastný moment hybnosti - **spin** - o hodnote práve $\hbar/2$, ktorý sa doslova *vynoril* z teórie, aby „zachránil“ zachovanie momentu hybnosti *voľnej* častice (a ktorý zrejme súvisí so základnou vlastnosťou mikrosвета – neexistenciou pokoja). Kvôli nedostatku overiteľných poznatkov QF, podobne ako klasická fyzika, pracuje (a pracuje naozaj skvelo) s elementárnymi časticami ako BODOVÝMI, a teda koncepciu *vlastnej rotácie* odmieta. Rodiace sa *kvantové teórie časopriestoru* však bodovosť

nepripúšťajú. Otázka podstaty spinu (a jeho *prípadného* súvisu s princípom neurčitosti) na konečnú odpoveď ešte čaká.

Uvedený vzťah aplikovaný na Bohrov model atómu znamená, že presným kvantovaným hodnotám L na stacionárnych dráhach odpovedajú ÚPLNE NEURČITÉ polohy (uhly) elektrónu na týchto dráhach. V tomto bode je však Bohrov model nepresný, a to práve kvôli princípu neurčitosti: Ak by totiž išlo o presnú hodnotu veľkosti CELÉHO vektoru momentu hybnosti, napr. orientovaného v smere osi z , $|\vec{L}| = L_z$, znamenalo by to pohyb v kolmej rovine ($x - y$) s lokalizovanou z -ovou súradnicou, a teda úplne neurčitou z -ovou zložkou hybnosti, čo je logický nezmysel. Rovina pohybu preto MUSÍ byť neurčitá (v smere z), čomu odpovedá nenulová neurčitosť zložiek L_x, L_y

$$\Delta L_i \Delta L_j \geq |\langle L_k \rangle| \hbar / 2$$

Presná hodnota teda odpovedá len zložke $L_z < |\vec{L}|$. V *správne korigovanom* modeli atómu presné kvantované hodnoty prislúchajú len JEDNEJ zo zložiek momentu hybnosti, pričom ostatné dve sú *neurčité*. Vektor momentu hybnosti sa musí akoby neustále „potácať“ a nakláňať voči osi z , čím takisto nakláňa rovinu (klasického) pohybu častice, a teda generuje *rozmazané* zložky momentu hybnosti v kolmých smeroch x, y . Obľúbenou klasickou predstavou je *precesia* vektoru \vec{L} okolo osi z so zachovávajúcou sa zložkou L_z .

Dôsledkom princípu neurčitosti teda je, že *vektorové* veličiny opisujúce pohyb objektov (ako ich poznáme z klasickej fyziky) v QF *nemajú presný smer!*

Hoci cieľom tejto úvahy je naznačiť, že všetky formy princípu neurčitosti majú spoločnú podstatu, nemožno zatajiť námietky: *Formalizmus* vlnovej QF vyjadruje jednotlivé princípy neurčitosti pomocou *komutačného vzťahu* medzi OPERÁTORMI *konjugovaných* (fourierovsky združených) párov veličín ($x - p_x, L - \varphi$ atď.). Jednotlivé hermitovské operátory sú však v QF priradované veličinám *charakterizujúcim skúmaný QF systém* (časticu). Inými slovami, častica MÁ hybnosť, MÁ polohu, MÁ energiu, ... Častica však NEMÁ čas! Teda niežeby mala naponáhlo, ale čas v nerelativistickej kvantovej mechanike je chápaný ako UNIVERZÁLNY čas - *parameter* určený *nezávislými* pomyselnými „nástennými hodinami“ - nie je teda *charakteristikou častice*. Tento čas je „absolútne určitý“. Neurčitosťou Δt sa rozumie neurčitosť TRVANIA daného procesu či stavu. Meranie energie, podobne ako frekvencie, je o to presnejšie, čím dlhšiu dobu trvá. Absolútna presnosť energie prislúcha len stavom PRETRVÁVAJÚCIM NEOBMEDZENE - *stacionárnym stavom*, a o tých už vieme, že sú len *idealizáciou*. Každá z energetických hladín, ktoré sa podieľajú na kvantových preskokoch, má nenulovú neurčitosť $\Delta E \approx \frac{\hbar}{\Delta t}$, danú dobou života častice na tejto hladine, Δt .

V dôsledku toho ČASU NIE JE PRIRADENÝ OPERÁTOR. Tým sa princíp neurčitosti vo forme $E - t$ formálne vydeľuje spomedzi ostatných. (K tejto otázke sa vrátíme v jednej z ďalších kapitol.) Rovnako definovanie operátora uhla otočenia φ je problematické, vzhľadom na nejednoznačnosť uhla modulo 2π . Je diskutovateľné, nakoľko námietky tohto typu dokážu jednotu princípu neurčitosti (v jeho rôznych podobách) spochybníť, a nakoľko sú len (snáď dočasnou) formálnou prekážkou. Jestvujúca QF je to najlepšie čo máme, nikto však nepredpokladá, že je konečná.

Je dôležité si uvedomiť, že *páry* veličín vstupujúce do princípov neurčitosti nie sú „neviniatkami“ ani v *klasickom svete!* V našom klasickom svete dôverne poznáme nespočetne veľa takých párov úkonov (operácií), ktorých *poradie* nemôžeme zamieňať. Ak napr. dostanete chuť na slepačie vajce *na tvrdo*, je treba ho *najprv* uvariť a až *potom* olúpať škrupinu - neskúšajte zmeniť poradie!!! Zmena poradia úkonov zmení výsledok. V jazyku matematiky vravíme, že takého operácie **nekomutujú**. Vložte ľubovoľný predmet (napr. ľavú papuču) do pevne zvoleného kartézskoho súradnicového systému, a následne pootočte tento predmet - najprv okolo osi x o uhol φ_x a potom okolo osi y o uhol φ_y . Ak zopakujete tento pokus s vymeneným poradím pootočení, zistíte, že výsledné polohy predmetu (papuče) sa líšia. *Pootočenia okolo dvoch rôznych osí* skrátka *nekomutujú*. Pripomeňme, že tieto pootočenia úzko súvisia so *zložkami momentu hybnosti*. Alebo skúste v úplnej tme určiť polohu

malej loptičky na stole. Nahmatáte ju rukou - dotykom (čiže nárazom) jej však udelíte *hybnosť* v smere pohybu ruky, teda *v smere jej lokalizácie*. Je zrejmé, že operácie určenia polohy a hybnosti v danom smere tiež nekomutujú. Na druhej strane, existuje nespočetné množstvo *komutujúcich* párov úkonov, ktorých poradie môžete bez následkov zameniť - napr. príprava vajca na tvrdo a prestretie jedálenského stola (pravda, len ak nelúpete *neuvarené* vajce práve nad týmto stolom).

Pokúsme sa o zovšeobecnenie týchto príkladov: Operácie *navzájom* nekomutujú, ak pôsobenie jednej z nich ovplyvní výsledok tej druhej, čiže ak nie sú navzájom nezávislé. Učenejšie povedané, ak sú navzájom *čiastočne korelované*. Naopak, komutujú operácie buď navzájom nezávislé, teda *úplne nekorelované*, alebo *úplne korelované*, čiže prakticky totožné. Korelovanosť či nekorelovanosť operácií sa na ich (ne)komutatívnosti prejaví rovnako v klasickom i kvantovom svete - *nenulovosť* súčinu neurčitostí *nekomutujúcich* veličín sama osebe teda NIE JE „výdobytkom“ QF, a ich rôznorodosť je čisto *klasická*. QF však stanovuje *dolnú hranicu* toho, ako možno - citlivými postupmi - túto nekomutatívnosť redukovať. Táto dolná hranica je JEDINÁ a SPOLOČNÁ pre všetky vzťahy neurčitosti - je ňou *minimum účinku* \hbar .

Dôležitosť vnímania vzťahov neurčitosti prostredníctvom (ne)korelácií je zrejmá aj z nasledujúcej úvahy: Vzťahy neurčitosti medzi zložkami polohy a hybnosti majú tvar

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad \Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2} \quad \Delta x \Delta p_y \geq 0 \quad (\text{atď.})$$

Merania polohy a hybnosti v *navzájom rôznych smeroch* sa *neovplyvňujú* - *neexistuje* korelácia, dolná hranica súčinu neurčitostí v poslednej nerovnosti je teda *nula*. Dosiahnutie tejto dolnej hranice, napr. ak $\Delta x = 0$, by však znamenalo úplnú delokalizovanosť konjugovanej zložky vo svojom priestore, $\Delta p_x \rightarrow \infty$, a pod. (Viac a formálnejšie o tom v kapitole o stavoch.)

Je namieste položiť si otázku: Je princíp neurčitosti fundamentálnou vlastnosťou QF systému *ako takého*, alebo je dôsledkom principiálnej nemožnosti „zmerať“ systém bez *ovplyvnenia* jeho stavu? Považuje sa za všeobecne prijaté, že ide o *dve strany tej istej mince*.

Nie je možné individuálnym meraním vniesť do systému menšiu neurčitosť než je tá, ktorá vyplýva z matematických princípov teórie.

A naopak,

minimálna teoretická neurčitosť nemôže „podliezť“ minimálnu neurčitosť vnesenú meraním.

Obe podliehajú tomu istému princípu neurčitosti. Treba pritom zdôrazniť, že kým neurčitosť vnesená meraním sa týka *každého jedného individuálneho merania*, neurčitosť vyplývajúca z formalizmu QF má *štatistický charakter*. Niet tu však rozporu: Ak je účinok merania na stav meraného objektu *principiálne neodstrániteľný*, potom neexistuje spôsob ako takýto „objektívny neporušený“ stav identifikovať. Interpretačný minimalizmus ortodoxnej QF preto vedie k záveru, že o takomto stave NEMÁ ZMYSEL uvažovať inak, než v kontexte štatistiky (*náhodnosti* výsledkov *individuálnych* meraní) - „objektívny neporušený“ stav v QF existuje LEN v štatistickom zmysle (a presne tak je aj opísaný matematickým formalizmom). Obe strany tejto mince majú aj svoje jazykové vyjadrenie v striedaní pojmov *neistota* (výsledku jednotlivého merania) a *neurčitosť* meraného stavu (v anglickej terminológii sa v názve tohto princípu striedajú prívlastky *uncertainty* a *indeterminacy*), a aj toto striedanie svedčí o ich jednote.

Treba zdôrazniť, že princíp neurčitosti neobmedzuje presnosť *individuálneho* stanovenia žiadnej veličiny JEJ SAMOSTATNÝM zmeraním, obmedzuje len SÚČIN neistôt veličín tvoriacich konjugované páry. *Principiálne* teda možno jednu veličinu z takéhoto páru zmerať s *ľubovoľnou* presnosťou, *na úkor*

rozsiahlej neurčitosti konjugovanej veličiny. (Pochopiteľne, pojmy „nekonečná“ presnosť či nepresnosť sú nefyzikálne.) Musíme však rozlišovať medzi *jednorázovým* veľmi presným meraním danej veličiny, obmedzeným len presnosťou meracieho prístroja, a PRAVDEPODOBNOŠŤOU tohto výsledku - tá je určená formalizmom QF. Individuálne meranie si NÁHODNE „vyberie“ zo štatistickej „ponuky“ možných presných výsledkov. Tento akt „výberu“ v sebe zahŕňa spomínané nevyhnutné ovplyvnenie ($\geq \hbar/2$) meraného objektu meracím zariadením.

V tejto súvislosti je zaujímavé analyzovať aj *opakované presné* meranie tej istej premennej (daného objektu). Výsledok *prvého* merania je predpovedateľný v rámci teoreticky danej neurčitosti, meraním je však „vybraný“ stav meraného objektu s konkrétnou presnou hodnotou. Pravdepodobnosť, že *následujúce* meranie túto hodnotu potvrdí, závisí od časového intervalu medzi meraniami a dynamiky vývoja stavu počas tohto intervalu (opísanej SCHR), ale rovnako aj od charakteru merania. Každé meranie je interakciou meracieho prístroja s meraným objektom, ktorá stav tohto objektu *ovplyvní*, pričom výsledok merania odpovedá stavu BEZPROSTREDNE PO takomto ovplyvnení. No a miera tohto ovplyvnenia závisí od spôsobu merania.

Isté rozpaky do týchto úvah môže vnieť matematickým formalizmom motivované tvrdenie, že ak sa systém po meraní jeho ENERGIE nachádza v *stacionárnom* stave so zmeranou ostrou hodnotou energie, následným meraním energie sa tento stav *nezmení*. V čom sa teda prejaví ovplyvnenie systému meraním (účinnok $\geq \hbar/2$)? Rozpor odstránime, ak odstránime *idealizáciu* - stacionárny stav. (Stacionárny stav je z definície nemerateľný.) Každý reálny stav sa vyznačuje *nenulovou* neurčitosťou energie ΔE (súvisiacou s konečnou „dobou života“ stavu $\tau \cong \frac{\hbar}{2\Delta E}$ - vrátime sa k tomu v jednej z ďalších kapitol). Opakovaným meraním energie s presnosťou lepšou než ΔE by sme dostali náhodný rozptyl hodnôt energie v tomto intervale. A to je „priestor“ pre účinok merania. Po druhé, ide tu o veľmi nešetrné narábanie s pojmom *meranie*, ktoré v experimentálnom kontexte zahŕňa veľmi široké spektrum možných interakcií. (Spravidla je tým myslené opakované aplikovanie operátora meranej veličiny v matematickom zmysle, čo nie je to isté ako reálne meranie!) A po tretie, vôbec nie je jasné, čo si môžeme v praxi predstaviť pod slovným spojením „meranie energie“.

Princíp neurčitosti nám teda dovoľuje vidieť len obraz sveta, ktorý je ROZMAZANÝ na škále \hbar . Ak sa pokúsime cez túto rozmazanosť preniknúť, odpoveďou bude NÁHODNOSŤ. Ak sa spýtame, ktorý výsledok je *ten správny*, odpoveď je: VŠETKY !!!

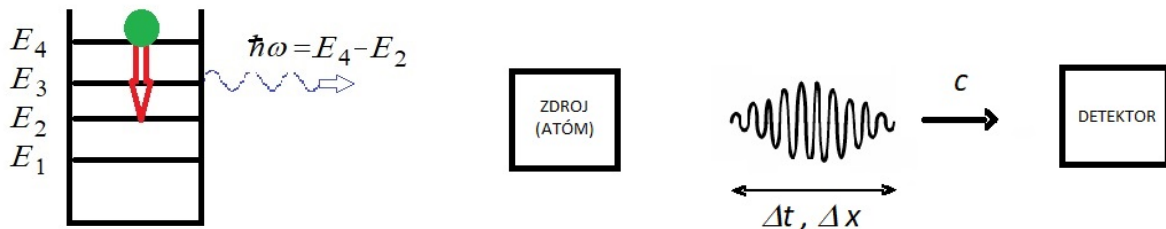
These uncertainties (...) are simply a consequence of the fact that we describe the experiment in terms of classical physics.

Werner Heisenberg, 1958

Čo (nie) je FOTÓN.

Die ganzen fünfzig Jahre bewusster Grübeleien haben mich der Antwort auf die Frage 'Was sind Lichtquanten?' nicht näher gebracht. Heute glaubt zwar jeder Lump er wisse es, aber er täuscht sich.
Albert Einstein, 1951

Jedno z obvyklých tvrdení znie, že fotóny vznikajú emisiou „prebytočnej“ energie iných častíc, napr. pri kvantovom preskoku elektrónu medzi energetickými hladinami (v atóme, molekule).



Aby mohol takýto fotón vzniknúť, musí byť KONEČNOU doba života Δt vzbudeného stavu danej častice (napr. elektrónu na hladine E_4 na obr.). Princíp neurčitosti má na svedomí odpovedajúcu neurčitost energie tohto stavu, $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$. Každý fotón teda vzniká s istou neurčitostou energie (frekvencie) $\Delta E = \hbar \Delta \omega$. Tomu odpovedá vlnový balík o šírke $\Delta t \approx \frac{1}{2\Delta \omega}$, šíriaci sa od zdroja. Δt môžeme interpretovať aj ako neurčitost okamihu vyžiarovania fotónu. Čím sú energetické hladiny „ostrejšie“ (presnejšie), tým širší je vlnový balík. Priestorovú šírku balíka (v smere pohybu)

$$\Delta x \approx \frac{1}{2\Delta k} = \frac{c}{2\Delta \omega}$$

nazývame **koherenčnou dĺžkou**. Keďže vlnočet k závisí *lineárne* od frekvencie, $k = \frac{\omega}{c}$, grupová a fázová rýchlosť sú totožné

$$v_f = \frac{\omega}{k} = c \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = c$$

a k disperzii („rozlezeniu sa“) vlnového balíka nedochádza.

Ak detektor meria energiu fotónu, presnosť tohto merania je daná detektorom (spôsobom merania) a *môže byť oveľa lepšia než $\hbar \Delta \omega$* . (K problematike merania v QF sa dostaneme neskôr.) $\Delta \omega$ vlnového balíka však určuje mieru *náhodnosti*, t.j. *štatistický rozptyl* hodnôt nameraných detektorom (pri mnohonásobnom meraní IDENTICKÉHO experimentu). Ak pojmom *fotón* označujeme *časticu* (v klasickom zmysle), ktorú môžeme lokalizovať detektorom (čo NIE JE jediný možný význam tohto pojmu), potom dôležitý záver je:

fotón \neq vlnový balík

Fotón ako *častica* sa len DÁ ZMERAŤ s danou pravdepodobnosťou „niekde“ v balíku. $\Delta \omega$ teda NIE JE vlastnosťou INDIVIDUÁLNEHO fotónu, ale vyjadruje *štatistický* charakter vzniku fotónu. „Skutočná“ energia (frekvencia) fotónu *neexistuje* - existuje len NAMERANÁ hodnota. Pri interakcii

s detektorom fotón úplne odovzdá svoje „vlastností“ - energiu, hybnosť a moment hybnosti, a tým *zaniká*. Rozptyl fotónu na inej častici (napr. Comptonov jav) môžeme chápať aj ako pohltenie a opätovné vyžiarenie *iného* fotónu (s pozmenenými vlastnosťami). Rozumné (aj keď nie nevyhnutné) je energiu a hybnosť priradovať fotónu ako *častici*, a frekvenciu a vlnové číslo/vlnovú dĺžku (vzhľadom na rozmazanie $\Delta\omega$) asociovať s šíriacim sa vlnovým balíkom. (V každom prípade je však užitočné si pri ľubovoľnej zmienke o fotóne dohodnúť, čo budeme mať pod týmto pojmom na mysli.)

Fotón (v zmysle voľného QF objektu, nie produktu detekcie!) sa šíri SÚČASNE PO VŠETKÝCH MOŽNÝCH DRÁHACH. Pravdepodobnosť detekcie fotónu (na danom mieste v danom okamihu) je daná *interferenciou* vlnových balíkov *zo všetkých dráh*. Vieme už, že vo voľnom priestranstve *deštruktívnu* interferenciu „prežijú“ len dráhy líšiace sa od „geometrickej“ o menej než $\lambda/2$. Rovnakou úvahou dostaneme zákon lomu či odrazu. Pri ohybe na úzkej štrbine či difrakčnej mriežke však do výslednej amplitúdy *konštruktívne* prispievajú aj dráhy *výrazne* odlišné. Takéto šírenie svetla poznáme z klasickej fyziky (vysvetľujeme ho pomocou Huygensovho princípu). Nahradíť pojem *svetlo* pojmom *fotón* je však v tomto kontexte neadekvátne. Po jednotlivých dráhach sa nešíri fotón (*častica*, ktorú vyprodukuje detektor) ale vlnový balík - *amplitúda pravdepodobnosti*! Slávny Diracov výrok, že „*každý fotón interferuje sám so sebou*“ treba chápať v zmysle interferencie amplitúd pravdepodobností či jednotlivých „*histórií*“. (Treba pripomenúť, že za storočie svojej existencie sa chápanie pojmu *fotón* menilo, a nie je bez otáznikov dodnes.) Pre šírenie a interferenciu fotónu (a nielen fotónu) platí nasledovné: K interferencii v rôznych smerov dochádza len ak *nevieme* odkiaľ častica prichádza. Ak to *vieme*, interferenciu NEPOZORUJEME. (O tejto záhade podrobnejšie v kapitolách o meraní.)

Ak každú mysliteľnú dráhu stotožníme s *možnou históriou vlnového balíka*, potom dráham rôznych dĺžok prislúchajú rôzne časy „príchodu“ vlnového balíka na detektor. Aby však jednotlivé histórie mohli interferovať, musia všetky „príchody“ spadať do intervalu *koherenčného času* Δt , teda dráhy sa nesmú líšiť o viac než o koherenčnú dĺžku $\Delta x \approx \frac{c}{2\Delta\omega}$. Pre vysoko koherentné svetlo je koherenčná dĺžka veľmi veľká, právom teda hovoríme o všetkých možných dráhach. Naproti tomu interferencia je takmer nepozorovateľná pre „obyčajné“ svetlo s malými koherenčnými dĺžkami.

Ak by sme jednotlivé dráhy priradili *nesprávne* fotónu ako (bodovej) *častici*, narazili by sme aj na potrebu rôznych rýchlostí (po rôzne dlhých dráhach), čo je v rozpore s princípmi TR. Treba tu poznamenať, že pokročilejšie kvantové teórie pracujú aj s tzv. *virtuálnymi* fotónmi - takými, ktoré *za nijakých okolností nemôžeme namerať*. Pre takéto častice limit c nič neznamená - veď základný postulát TR hovorí „... rovnaká pre každého POZOROVATEĽA“. Čo je principiálne nepozorovateľné, môže si teda robiť „čo chce“. A aj robí (prinajmenšom v našej predstavivosti). Vo fyzike môžeme (a to aj na makroskopických škálach) dovoliť aktérom robiť aj zakázané veci, ak nám zaručia, že v experimente to nijak nezistíme (napr. vďaka deštruktívnej interferencii).

Interferencia je súčasťou šírenia *vln*. *Časticový* obraz *fotónu* (s energiou a hybnosťou) sa vynorí až pri interakcii s „detektorom“. Tieto dva obrazy sú *komplementárne* - navzájom sa VYLUČUJÚ. Oplatí sa riadiť nasledujúcim receptom: Porovnajme priestorovú škálu nášho záujmu l s vlnovou dĺžkou $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$, určenou *nosnou* frekvenciou vlnového balíka (v strede intervalu $\Delta\omega$). Ak $l \gg \lambda$, čo je prípad vysokých energií fotónov v interakcii s makroskopickými objektami, výhodnejším bude *časticový* pohľad. Na mikroskopických škálach je to však pri vysokých energiách „*fifty-fifty*“, $l \approx \lambda$ (takže v QF dilema zostane). Pri veľkých vlnových dĺžkach (napr. kilometrové „*rádiové*“ vlny) pojem fotónu (*častice*) úplne stráca *reálny* zmysel. (*Jednotlivé* dlhovlnné fotóny nikdy neboli pozorované! Ak sa aj v niektorých teóriách objavujú *fotóny* s $\hbar\omega \rightarrow 0$, ide skôr o matematický „*trik*“ nesúvisiaci - podľa dnešnej úrovne chápania - s *merateľnou realitou*.)

Opačným extrémom ku pohybu *jedného* fotónu je šírenie *zväzku obrovského množstva fotónov* (vyžiarovaných s pomerne ostro definovanou energiou). Každý fotón nesie energiu $\hbar\omega$, a celková energia

zväzku N fotónov je $E = N\hbar\omega$, s neurčitostou danou vzťahom

$$\Delta E \Delta t = \Delta N \hbar \Delta \omega \Delta t = \hbar \Delta N \Delta \theta \geq \frac{\hbar}{2} \quad \text{teda} \quad \Delta N \Delta \theta \geq \frac{1}{2}$$

kde $\Delta\theta$ je neurčitosť fázy EM vlny tvorenej týmito fotónmi, $\theta = \omega t$. Ak ΔN je *obrovské* (maximálne neurčitý počet fotónov - takýto stav sa dá modelovať lineárnou kombináciou stavov s 1, 2, 3 ... fotónmi), potom fáza takéhoto zväzku je veľmi dobre definovaná $\Delta\theta \rightarrow 0$. Toto je dokonale „sínusová“ - **koherentná** vlna. („Čím viac fotónov, tým lepší sínus.“)

Hoci neurčitosť energie ΔE takéhoto zväzku (úmerná neurčitosti počtu fotónov) je obrovská, ešte „obrovskjšia“ je jej stredná hodnota $\langle E \rangle \sim \langle N \rangle$. (Dá sa ukázať, že $\frac{\Delta E}{E} = \frac{\sqrt{N}}{\langle N \rangle} \rightarrow 0$). Aj *intenzita* takejto vlny $I = \frac{\langle E \rangle}{\omega}$ je teda veľmi dobre definovaná (malé *relatívne* fluktuácie). Toto je presne tá svetelná vlna, s ktorou pracujeme v optike pri interferencii

$$\mathcal{E}(x, t) = \mathcal{E}_0 \exp\{i(kx - \omega t)\}$$

(ostrá fáza a dobre definovaná amplitúda), a ktorú produkujú lasery. Jej koherenčná dĺžka dosahuje aj tisícky kilometrov (pri rýchlosti c je Δt však stále len zlomkom sekundy)! V rámci *koherenčného objemu* (daného koherenčnou dĺžkou) strácajú fotóny svoju priestorovú identitu („kto je kto“ a „kto s kým interferuje“), môžeme preto pozorovať výrazné interferenčné obrazce.

Fotón je časticou sprostredkujúcou EM interakciu - prítomnosť MAKROSKOPICKÉHO počtu fotónov v EM vlne vnímame ako EM POLE, reprezentované *intenzitou* \mathcal{E} (a mag. indukciou $B = \mathcal{E}/c$). Hustota energie EM poľa je úmerná \mathcal{E}^2 a B^2 - to odpovedá štatisticky strednej hustote fotónov danej energie. Tieto veličiny sú teda (s istými výhradami) akosi obdobou vlnovej funkcie fotónu (viac o tom v stati o vlnovej funkcii).

Pre úplnosť, EM vlna je okrem energie a hybnosti (danej energiou a hybnosťou fotónov) aj nositeľom *momentu hybnosti* v podobe pravo- a ľavotočivej KRUHOVEJ polarizácie vektorov EM poľa. Tomu odpovedá *vlastný* moment hybnosti fotónu - SPIN so spinovým kvantovým číslom $s = 1$ a dvoma priemetmi do zvoleného smeru: $+\hbar$ a $-\hbar$. Súvisí to s jeho vznikom: Kvantový prechod medzi hladinami je určený tzv. *výberovými pravidlami* pre zmenu priemetu momentu hybnosti, $\Delta m = 0, \pm 1$ (m - *magnetické kvantové číslo*). Prechodu $\Delta m = 0$ odpovedá *lineárne* polarizovaná vlna - superpozícia pravo- a ľavotočivej polarizácie, čo znamená, že ŠTATISTICKÁ polovica fotónov má spin $+\hbar$ a druhá polovica $-\hbar$ (viac o tom v kapitolách o zákonoch zachovania a výberových pravidlách).

O ABSOLÚTNE ČIERNOM TELESE. (Vysvetľujúce poznámky.)

AČT je podľa definície teleso, ktoré ÚPLNE pohlcuje EM žiarenie VŠETKÝCH vlnových dĺžok, dopadajúce na jeho povrch. Jeho vyžarovanie opisuje Planckov zákon. Ako tomu všetkému treba rozumieť?

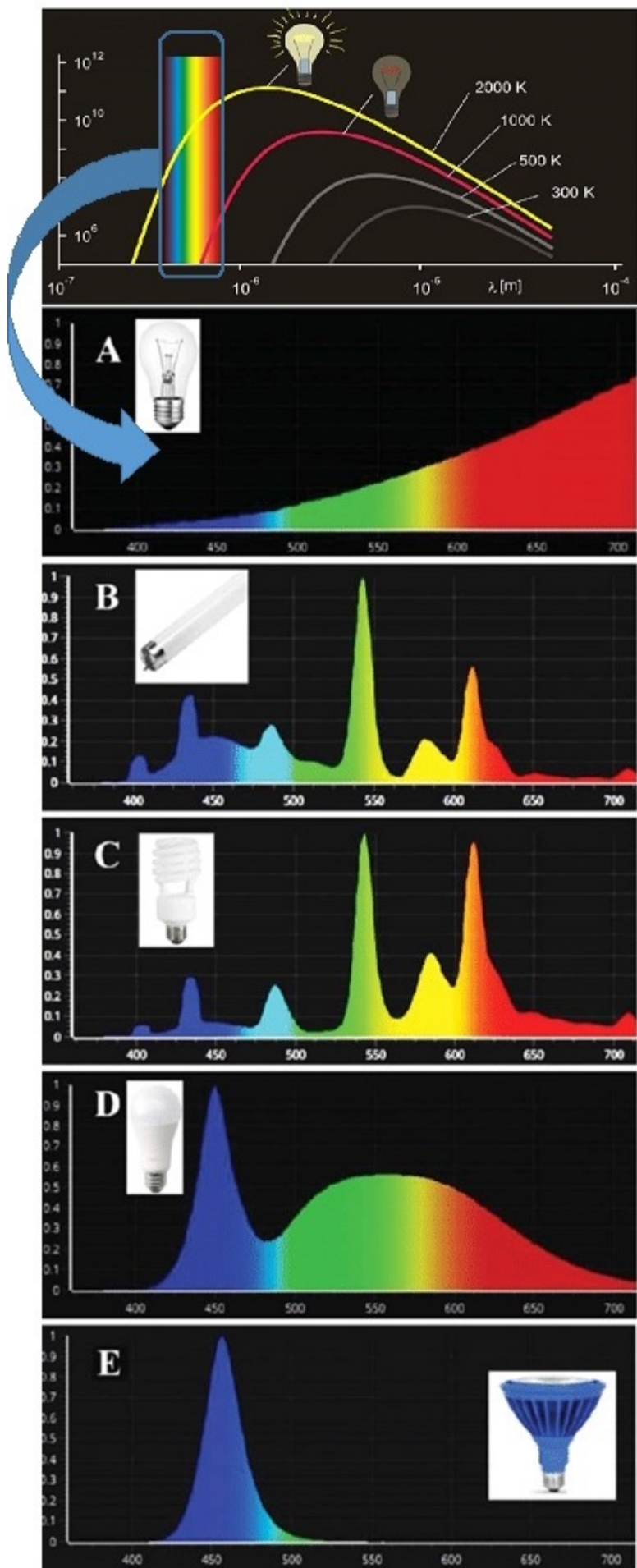
V každom telese zohriatom na určitú teplotu prebieha vnútorný pohyb nabitých častíc. Jeho dôsledkom je vyžarovanie EM vln. Na QF úrovni ide o emisiu fotónov *rôznymi* mechanizmami (preskoky elektrónov z excitovaných metastabilných hladín na základné, preskoky atómových jadier z excitovaných hladín na základné, preskoky molekúl z excitovaných vibračných i rotačných hladín, brzdné žiarenie voľných elektrónov v látke, atď.). Z MAKROskopického pohľadu teleso skratka vyžaruje *úmerne svojej teplote* (miera excitácií totiž narastá s teplotou) - pod „krycím“ názvom **tepelné žiarenie**.

Súčasne však na teleso dopadá EM žiarenie zvonka, ktoré sa čiastočne pohlcuje, čím ohrieva teleso, a čiastočne ODRÁŽA. (O odraze sme už hovorili. Zjednodušene povedané, odrazí sa energia, ktorú nemožno ani krátkodobo „uskladniť“.) Vtedy je ťažké rozlíšiť *odrazené* žiarenie od *tepelného*. Preto sa vymyslela *idealizácia* s názvom ACT - TELESO, KTORÉ NIČ NEODRÁŽA - všetko dopadnuté žiarenie sa pohltí a premení na teplo. Teda všetko jeho žiarenie je *tepelné* - a da sa skúmať samostatne.

Žiarenie AČT v praxi si často pripodobňujeme žiarením v plechovke s dierkou. Čo vletí cez tú dierku dnu, už nevyletí, lebo sa pri mnohonásobných odrazoch vnútri pohltí na stenách skôr než nájde cestu von. Je to názorná predstava, sami však pridete na isté jej úskalía: Každá plechovka má *konečné* rozmery. V jej vnútri môžu existovať len módy STOJATÝCH vln, čo vedie na DISKRÉTNE spektrum - a to je v rozpore s definíciou AČT. Ani všetky fotóny, ktorých energia dáva vlnové dĺžky (aspoň 2-krát) väčšie než plechovka, v nej nemajú čo hľadať. Ak sa pýtate, ako má tá krpatá častička fotón viedieť, či do plechovky môže alebo nemôže vletieť, pamätajte, že fotón, dokiaľ si lieta, NIE JE časticou ale VLNOU. A podľa pravidiel vln, ak tam nepatrí, musí sa ODRAZIŤ. (Elegantne sa to dá sformulovať pomocou pojmu *impedancia*.) Dá sa tomu všetkému ale pomôcť, ak rozmery plechovky natiahneme do nekonečna.

A teraz to podstatné. AČT bolo síce „pôrodnou babou“ QF, je to však pojem TERMODYNAMICKÝ. Planckov zákon predpokladá AČT v **tepelnej rovnováhe** (vtedy je dobre definovaná jeho *teplota*). To platí pre teleso, ktoré vyžiari presne toľko energie koľko *celkovo* pohltí. Pre teleso vnútri našej plechovky so stenami danej teploty je to ideálne splnené. Čo však, ak takéto teleso z „teplúčka“ svojej plechovky vytiahneme? Pokiaľ je dostatočne veľké na to, aby ho bolo možné považovať za **rezervoár** s dobre definovanou teplotou (napr. *veľmi pomaly* chladnúce teleso), je opäť všetko O.K. Trochu väčším problémom je, ak vnútri telesa existuje výraznejší *tok/prúdenie* tepla (napr. zo zdroja tepla vnútri objemu na jeho povrch) - toto *nie je* rovnovážny stav, a pojem teploty je len istým *priblížením*.

Planckov zákon (tak ako celá termodynamika) navyše *nerieši* konkrétne QF mechanizmy tohto vyžiarovania. Jednoducho predpokladá (v zmysle definície AČT), že teleso JE SCHOPNÉ POHLTIŤ AJ VYŽIARIŤ VŠETKY VLNOVÉ DĹŽKY. Zákon teda definuje SPOJITÉ spektrum žiarenia a jeho spektrálnu hustotu. Existujú síce reálne fyzikálne objekty, ktoré túto požiadavku celkom dobre spĺňajú (napr. povrch Slnka), ale oveľa viac je takých, ktorých absorpčné a emisné spektrum je buď diskkrétne alebo kvázispojité v *ohraničených* intervaloch (patria sem všetky pozemské zdroje svetla). Ako možno na takéto objekty aplikovať Planckov zákon? Spojité spektrum AČT funguje pre takéto objekty ako OBÁLKA - objekt *danej teploty* vyžaruje LEN na tých vlnových dĺžkach, ktoré mu zákony QF dovoľujú, a LEN TOĽKO, koľko mu *na týchto vlnových dĺžkach* dovoľuje (patrične znormovaný) Planckov zákon *pre danú teplotu*. Dostávame teda akýsi „štrbavý“ Planckov zákon.



„klasická“ volfrámová žiarovka
 (veľmi slušná napodobenina AČT,
 väčšina energie sa vyžiari v IČ ob-
 lasti v podobe „tepla“)

žiarivka
 (výbojka, „neónka“)

tzv. „úsporná žiarovka“
 (jeden zo zločínov ekoteroristov)

biela LED – žiarovka

modrá LED – žiarovka
 (ťažko si vieme predstaviť, že by
 tento skromný energetický výdaj
 mohol byť ekvivalentný energii tisíc-
 ok kelvinov, ako to píšú na obale
 žiarovky – je to len jeden zub z kom-
 pletného chrupu AČT)

Poznámka k SCHRÖDINGEROVEJ ROVNICI.

(Podobnosť úloh.)

I. Rovnica šírenia tepla

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T$$

T - teplota, α - tepelná vodivosť prostredia

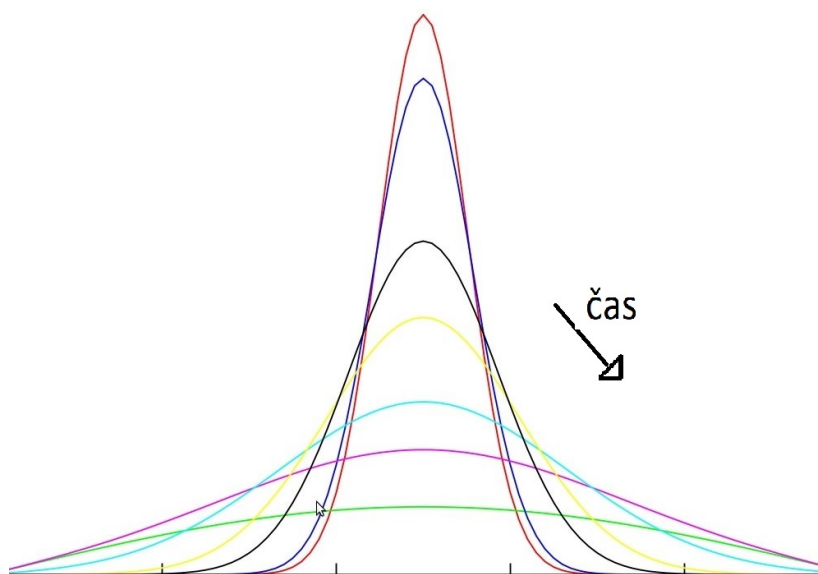
Ak dodáme teplo na dané miesto, teplo sa z tohto miesta postupne (v čase) odvedie do okolia. (Poznáme to zo skúseností.)

II. Rovnica difúzie

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \nabla^2 n$$

n - hustota častíc, D - koeficient difúzie

Ak dodáme súbor častíc na dané miesto, častice sa z tohto miesta postupne (v čase) rozptýlia do okolia. (Poznáme to zo skúseností - farebný dym či vôňa.)



III. SCHR pre voľnú časticu

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(\frac{i\hbar}{2m} \right) \nabla^2 \psi$$

Ak dodáme na dané miesto elektrón ako dobre lokalizovaný vlnový balík, pozostávajúci z rovinných vĺn

$$e^{-i(\omega t - kx)} + e^{-i(\omega t + kx)}$$

z intervalu Δk (resp. $\Delta \omega$), vlnový balík sa postupne (v čase) rozplynie do okolia. Ako to vieme?

1. Rovnaké úlohy musia dať rovnaké riešenia (pozri predchádzajúce dve rovnice).
2. Dosaďme rovinnú vlnu do rovnice, dostaneme $\omega = \frac{\hbar}{2m} k^2$ - *nelineárny* disperzný zákon. Každá vlna z intervalu Δk sa šíri *inou fázovou rýchlosťou* $v_f(k) = \frac{\omega(k)}{k} = \frac{\hbar}{2m} k$ - vlnový balík sa *rozpadne*.

O VLNOVEJ FUNKCII. (Mýtus komplexnosti.)

Poznatok, že kľúčový pojem kvantovej vlnovej mechaniky, vlnová funkcia ψ , je KOMPLEXNOU veličinou, môže niekoho viesť do pomykova, najmä ak sa zdôrazní, že je *principiálne* komplexnou. A tento dojem ešte umocňuje „chlácholenie“, že to vlastne nevadí, lebo ψ aj tak nie je merateľná - merateľné je $\psi\psi^*$, a to je už reálne. Čo sa za tým teda skrýva? Vôbec NIČ! ψ je komplexná, pretože SME SA TAK ROZHODLI. Konvenčný zápis SCHR, ako *postulátu* QF,

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\psi$$

explicitne obsahuje i (imaginárnu jednotku), a preto ψ musí *nevyhnutne byť komplexné*. Alternatívne by sme mohli pravdepodobnostnú vlnu reprezentovať DVOJICOU REÁLNYCH funkcií ψ_1 a ψ_2 , a základný zákon našej (nerelativistickej) QF formulovať DVOJICOU REÁLNYCH rovníc

$$\hbar\frac{\partial\psi_1}{\partial t} = \left(\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\psi_2 \quad \hbar\frac{\partial\psi_2}{\partial t} = -\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\psi_1$$

Lahko nahliadnete, že jednoduchou substitúciou $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ dostaneme pôvodnú SCHR. Rovnako ako komplexné ψ a ψ^* , aj reálne ψ_1 a ψ_2 by boli len „pomocné“ (fyzikálne nemerateľné) veličiny, *merateľná* pravdepodobnosť by bola $\psi_1^2 + \psi_2^2$, čo je to isté ako $\psi\psi^*$. Zavedenie komplexných čísel je teda len vecou *formálnej* (matematickej) *úspornosti* či elegancie. Vlnová funkcia je len natoľko *principiálne komplexná*, nakoľko je váš mobil *principiálne* Huawei či Motorola (prípadne iná značka, pre ktorú ste sa rozhodli).

A prečo vlastne potrebujeme na opis vlny DVE reálne funkcie? Jednoduchá odpoveď: Lebo je to VLNA - potrebujeme v každom bode (a čase) definovať *amplitúdu aj fázu*. (Mimochodom, ak nášmu kvantovému objektu priradíme aj spin, nevystačíme už s jednou dvojicou reálnych čísel - budeme potrebovať dve. A ak pridáme relativitu, pribudnú ďalšie dva páry - pre antičasticu.)

Pozrime sa do inej oblasti fyziky. Základné rovnice elektromagnetizmu (EM) vo vákuu sú

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad c^2 \nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0$$

Čo tak namiesto dvoch *reálnych* veličín reprezentujúcich EM pole definovať jednu „*principiálne*“ *komplexnú*, $\vec{G} = \vec{\mathcal{E}} + ic\vec{B}$, a základné EM rovnice vyjadriť v tvare

$$-ic\nabla \times \vec{G} = \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} \quad \nabla \cdot \vec{G} = 0$$

No a hustota energie by bola úmerná GG^* , čo je to isté ako $\mathcal{E}^2 + (cB)^2$. Mohla by sa EM *vlna* šíriť, keby nemala DVE reálne zložky - elektrickú a magnetickú? Nie. Komplexné veličiny vo fyzike sú vždy len „ekonomickým“ zápisom dvojice REÁLNYCH veličín. Často sa oplatí túto skutočnosť ignorovať, to však na veci nič nemení. Vo fyzike je síce dobré pridržiavať sa konvencií, nesmieme však zabúdať, že sú to stále LEN KONVENCIE.

Štandardná interpretácia dáva do súvisu vlnovú funkciu ψ hmotnej častice (napr. elektrónu) s *pravdepodobnosťou nájdenia* častice v danom mieste a čase. Formulácie tohto typu môžu navodzovať pocit dôležitosti *pozorovateľa*, ktorý časticu „hľadá“, meria. (Niektoré alternatívne interpretácie sa naozaj uberajú týmto smerom.) V niektorých prípadoch to však vyzerá, akoby takýto objekt ku svojim výpočtom potrebovala samotná PRÍRODA, a to aj pri absencii akéhokoľvek pozorovateľa. Aj po

sto rokoch výraznejšia zhoda medzi učencami panuje len v tom, že koncept vlnovej funkcie je veľmi užitočným nástrojom k našim výpočtom. A z takéhoto rýdzo pragmatického hľadiska nemôže byť nič „fundamentálne“ na tom, či pravdepodobnostnú vlnu charakterizujeme dvojicou reálnych polí, komplexným poľom, či iným formalizmom. Pre častice so spinom 1/2 (napr. elektrón) zvykneme používať dvojkomponentný *spinorový* formalizmus $\psi(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow}(\vec{r}, t) \\ \psi_{\downarrow}(\vec{r}, t) \end{pmatrix}$, kde jednotlivé komponenty spinoru reprezentujú alternatívne orientácie spinu „hore“ a „dole“ - nič než pohodlný a úsporný zápis zahrňujúci fakt, že okrem priestorovo závislej amplitúdy a fázy je naša vlna charakterizovaná ešte novým *nezávislým* stupňom voľnosti - priemetom spinu do vybraného smeru. A keďže tento priemet nadobúda len *dve* možné hodnoty, zvolil sa zápis v podobe dvojkomponentnej matice. A ani na tejto matici nie je nič *principiálne*.

Sú však formalizmus a interpretácia obvyklé pre hmotné častice (ako elektrón) použiteľné aj pre *nehmotnú* časticu, akou je *fotón*? Predovšetkým, fotón je častica *relativistická* (existuje len pri rýchlosti c), kým QF založená na SCHR je *nerelativistická*. *Formálny* sobáš TR s elektrónom je teda uskutočniteľný len po nahradení SCHR jej relativistickou obdobou. (V prípade *relativistického* spinu je zakomponovanie spinorového formalizmu do SCHR len relativistickou čerešničkou na nerelativistickej torte.) Po druhé, vlnová funkcia fotónu by sotva zniesla pravdepodobnostnú interpretáciu - *fotón nemožno nájsť v danom mieste a čase !!!* (Fotón nanajvýš daným „miestom“ preletí rýchlosťou c .) Detektor, ktorý by ho „zastavil“, ho razom zničí. Čo je teda *vlnová funkcia fotónu*?

Keďže prítomnosť fotónov makroskopicky vnímame ako EM pole, šírenie fotónov a šírenie poľa by sa malo riadiť rovnakými rovnicami. V QF je zvykom EM pole reprezentovať potenciálmi ϕ a \vec{A} namiesto polí \vec{E} a \vec{B} . V neprítomnosti náboja si (pri vhodnej kalibrácii) vystačíme s vektorovým EM potenciálom \vec{A} , ktorý zvykneme (pre potreby našich výpočtov) stotožňovať s vlnovou funkciou fotónu. Samotné \vec{A} je *nemerateľné*, podobne ako ψ , a merateľným prejavom takejto vlnovej funkcie sú „silové“ polia \vec{E} a \vec{B} (podobne ako výskyt hmotnej častice je merateľným prejavom ψ). „Pohybovou“ rovnicou pre \vec{A} je „obvyklá“ vlnová rovnica (2. rádu v priestore aj čase). Na rozdiel od ψ , ktorú normujeme na výskyt častice, $\int \psi\psi^* d^3r = 1$, v prípade \vec{A} normujeme výraz

$$\int \left(\left| \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right|^2 + c^2 |\nabla \vec{A}|^2 \right) d^3r$$

v ktorom vytušíme (zachovávajúc sa) *energiu* EM poľa.

Vlnová funkcia fotónu je teda *vektorom* (v dôsledne relativistickom zápise *štvorvektorom*). V kapitole o symetriách uvidíme, že takejto „vektorovej“ častici *musí* prislúchať CELOČÍSELNÝ spin.

Špehujme časticu. (Myšlienkový experiment.)

Myšlienkový experiment je postupnosť *pomyselných* experimentálnych krokov, pričom sa nezaobráme technickou stránkou týchto krokov (ako ten či onen krok uskutočniť). Predpokladáme len, že každý krok je *nejak uskutočniteľný* (inak by takáto úvaha nemala veľkú hodnotu). Odštartujeme teda mikroskopickú látkovú časticu (napr. elektrón) s hmotnosťou m a sledujeme jej pohyb.

Prvý krok je „pripraviť“ časticu čakajúcu na štartovacej čiare, v $x_0 = 0$ s hybnosťou $p_0 = 0$. Pochopiteľne, princíp neurčitosti nám dovoľuje zrealizovať tento krok len s navzájom zviazanými neurčitostami Δx_0 a Δp_0 , teda ako vlnový balík s vlnovými číslami z intervalu $(-\frac{\Delta p_0}{\hbar}, \frac{\Delta p_0}{\hbar})$. So štartom nesmieme otáľať, inak sa nám tento balík „rozlezie“ do strán - už vieme, že jeho časový vývoj podľa SCHR je *difúzia*, pričom priestorová „šírka“ balíka s časom narastá o $\sqrt{\frac{\hbar}{m}t}$ (rovnako ako vzdialenosť potácajúceho sa opitého námorníka od krčmy).

Udeľme teraz častici štartovaciu hybnosť p_1 (povedzme s pôvodnou neurčitosťou $\pm\Delta p_0$) a nechajme ju *voľne* letieť. Bude sa šíriť ako vlnový balík, postupne sa *rozplývajúci* v priestore (vo všetkých smeroch - pre jednoduchosť skúmame len smer x). Jeho poloha bude čoraz rozmazanejšia, hybnosť častice sa však nemení (veď nepôsobia žiadne sily), rovnako ako ani jej *neurčitosť*.

V istom okamihu sa rozhodneme zmerať polohu častice. Priestorové rozloženie (hustoty) pravdepodobnosti jej nájdenia je dané amplitúdou vlnového balíka v každom mieste. Presnosť lokalizovania častice bude závisieť od nášho meracieho „zariadenia“. Môžeme napr. vypustiť „pátracie“ fotóny. (Detailmi sa nemusíme zaoberať, veď ide o *myšlienkový experiment*.) Z optiky vieme, že rozlišovacia schopnosť svetla je daná jeho vlnovou dĺžkou. Presnosť lokalizovania *častice niekde v balíku* bude teda určená hybnosťou nalietaujúcich fotónov, $\Delta x_1 \approx \hbar/p_f$. S touto presnosťou nájdeme našu časticu. Celý rozlezený vlnový balík sa teda *razom zmrští* do tohto miesta $x_1 \pm \Delta x_1$ (pravdepodobnosť sa zmení na *istotu* výsledku merania). Môžeme síce špekulovať, že samotné meranie má nenulovú dobu trvania, ale „okraje“ balíka (ak vôbec nejaké sú) môžu byť už tak vzdialené, že na zmrštenie sa do miesta „nálezu“ potrebujú *nadsvetelnú* rýchlosť. To ale nevádi - veď nejde o pohyb hmoty, len vln pravdepodobnosti. Hovoríme tomu **kolaps vlnovej funkcie**. A čo sa stalo s hybnosťou častice? Meranie znamenalo „dotyk“ fotónom s hybnosťou p_f , a teda nevyhnutnú zmenu hybnosti častice, $p_1 \rightarrow p_2 \approx p_1 \pm p_f$.

Po tomto meraní vlnový balík opäť vyštartuje z miesta merania $x_1 \pm \Delta x_1$, s novou počiatočnou hybnosťou $p_1 \pm \Delta p_1$, kde $\Delta p_1 \approx p_f$. Je to princíp neurčitosti pre tento nový vlnový balík? Samozrejme, veď $\Delta x_1 \approx \hbar/p_f$. Balík sa opäť šíri ako vlna a rozlieza.

Ak v priečnom smere obmedzíme balík viac než na šírku „prirodzeného koridoru“, napr. prekážkou s otvorom o šírke $D < \lambda = \frac{\hbar}{p_x}$, neurčitnosť hybnosti v priečnom smere (napr. y) bude $\Delta p_y \approx \frac{\hbar}{D}$, a dôjde k rozbiehavosti - **ohybu (difrakcii)**. Na vzdialenosti d bude rozbiehavosť

$$\Delta y \approx d \frac{\Delta p_y}{p_x} \approx d \frac{\hbar \lambda}{D \hbar} \approx \frac{d}{D} \lambda$$

čo je výsledok známy z optiky. Šírka difrakčného obrazca $\sim \frac{1}{D}$ - čím viac sa snažíme otvorom lokalizovať časticu v priečnom smere, tým viac sa nám rozletia.

Ak by sme mu do cesty postavili prekážku s *dvomi* otvormi (vo vzdialenosti menšej než priečna veľkosť balíka), balík by sa prepchal **OBOMI** otvormi, a za prekážkou by **ZINTERFEROVAL**.

Je prechod balíka otvormi tiež *kolapsom*, keďže v rovine prekážky je celá vlnová funkcia skoncentrovaná do otvorov? OMYL! Vlna pravdepodobnosti dopadne na bariéru, časť vlny pravdepodobnosti

sa odrazí (tak ako sa *môže* odraziť aj častica, keď netrafí otvor), časť vlny vnikne do povrchu bariéry a utlmí sa (častica *môže* uviaznuť v stene - predpokladajme hrubú stenu a zanedbateľnú pravdepodobnosť tunelovania), a časť vlny, ktorá „trafila“ otvory, sa cez nich šíri ďalej (a interferuje). Celková pravdepodobnosť výskytu *za* prekážkou je určite menšia než *pred* ňou. A všetko sú to VLNY.

Vlny (pravdepodobnosti) prestanú byť vlnami až keď nastane MERANIE ČASTICE - to by už bol *kolaps vlny*. Môžeme napr. inštalovať detektor do otvoru a detegovať v ňom *časticu*. Čo ak sa častica odrazí od alebo zaborí do steny? Mohli by sme merať nárast elektrického potenciálu povrchu po pohltení *nabitej* častice, alebo zmenu hybnosti povrchu po náraze či odraze častice. Stačí pritom, aby takéto meranie bolo USKUTOČNITEĽNÉ (nemusí byť USKUTOČNENÉ). Všetky uvedené prípady sú interakciou s *makroskopickým* objektom, a ak účinkom prevyšujú $\approx \hbar$, znamenajú kolaps. Príroda je nielen lenivá (princíp najmenšieho účinku), ale aj pragmatická - *čo oko nevidí, srdce nebolí*.

Difúzny vývoj vlnového balíka nám našepkáva, že ak by sme bezprostredne po meraní uskutočnili opakované meranie (skôr než sa vlnový balík výraznejšie rozšíri), nájdeme časticu v blízkosti prvého nálezu (vo vzdialenosti danej *grupovou* rýchlosťou balíka) so zanedbateľnou mierou náhodnosti (danou len presnosťou merania - hybnosťou fotónu). Neustálym opakovaním meraní by sme teda mohli so slušnou určitosťou vyznačovať *trasu* častice! Viedla by JEDNÝM z otvorov prekážky. Za prekážkou by sme však žiadnu interferenciu (pri *mnohonásobnom* opakovaní experimentu) NEPOZORovali. Nebolo by s čím interferovať.

Ešte poznámka k PRESNOSTI lokalizácie hľadanej častice. Vieme ju zvýšiť zväčšením hybnosti „pátrača“ (napr. fotónu) p_f , pravda, za cenu zväčšenia neurčitosti hybnosti hľadanej častice. Trocha to pripomína hľadanie ihly v kope sena. Zvyšovaním energie pátračov „uťahujeme slučku“ okolo miesta, kde sa naša častica „naozaj“ nachádza. Dá sa to robiť donekonečna? Kvantová teória poľa nás varuje: Ak kinetická energia „pátrača“ dosiahne hodnotu pokojovej energie hľadanej častice mc^2 (presnejšie jej dvojnásobku), môže pri interakcii dôjsť ku *zrodu novej identickej* častice (presnejšie páru častica-*antičastica*), a tým sa celé „hľadanie“ skončí (nebudeme vedieť „kto je kto“). Hraničnou presnosťou je teda

$$\Delta x \cong \frac{h}{p_f} = \frac{hc}{\hbar\omega_f} \cong \frac{hc}{(mc^2)\xi} = \frac{h}{mc} = \lambda_C$$

čo je „stará známa“ **Comptonova vlnová dĺžka** pre hľadanú časticu. Ako súvisí tento limit s *rozmerom* častice? Ak by bol v kope sena schovaný traktor, našli by sme ho rýchlo a nemuseli by sme siahať až na limit presnosti - veď λ_C ťažkého traktora je extrémne malá (oveľa menšia než jeho rozmer). Elektrón je však zaručene menší než jeho λ_C . (Nemáme šancu mu teda zmerať obvod v drieku. U protónu a neutrónu to však dokážeme.) Predpokladajme, že meraná častica je *kompozit* - skladá sa z menších častí(c). Hmotnosť každej z jej súčastí, m_i , zákonite musí byť menšia než celok m , a teda každá súčasť musí mať *väčšiu* λ_C než celok. Ak teda stiahneme našu slučku ku hranici λ_C našej častice a nič nové odtiaľ nevyletí (vygenerované identické častice ku menším súčastiam), môžeme oprávnenne tvrdiť, že žiadne dielčie časti tam nie sú, a naša častica je *elementárna*. Toto tvrdenie môžeme podporiť aj nasledovnou úvahou: Ak častica má vnútornú štruktúru, musí mať aj vnútorný *pohyb* (všetko je v pohybe) na svojom rozmere r . Pre účinok (akciu) pohybu každej súčasti o hybnosti p_i musí platiť

$$S \approx rp_i \leq rm_i c < rmc$$

Ak sa tento účinok má pozorovateľne prejaviť (inak by šlo o *neoveriteľnú* hypotézu), nesmie byť menší než $\approx \hbar$, čo vedie na nerovnosť $r \geq \lambda_C$. Jedným z možných kritérií elementárnosti teda je, že

$$\textit{elementárna častica musí byť menšia než jej } \lambda_C$$

Elektrón takou je, protón a neutrón nie.

Čo (nie) je ČASTICA.

Pojmy *vlna* a *častica* sa v našich úvahách striedajú a navzájom VYLUČUJÚ. Mikroskopické objekty opisujeme *buď* ako vlny *alebo* ako častice - a neradno tieto „jazyky“ miešať. O vlnách už čo-to vieme: Vlna nie je „šíriaca sa VEC“, ale spôsob prenosu (šírenia) SCHOPNOSTÍ - schopnosti konať prácu (energia), meniť pohybový stav hmoty (hybnosť a moment hybnosti), schopnosti zúčastňovať sa silových interakcií (náboj), a pod. V žiadnom prípade nejde o prenos LÁTKY (tak ako toto slovo bežne chápeme). Špeciálnym druhom vlny, a v kontexte QF tým najdôležitejším, je *pravdepodobnostná* vlna. Opäť ale ide iba o prenos *schopnosti* častice „nechať sa načapať“ meracím zariadením. A čo je teda *častica*?

V „nám známom všednom svete“ pod pojmom častica rozumieme stavebný element *látky*. Zelenú plastovú stoličku si vieme predstaviť rozomletú na malé zelené zrnká, každé malé zelené zrnko ako zložené z mikroskopických zelených molekúl... STOP! Vieme z optiky, že objekty menšie než vlnová dĺžka viditeľného svetla (menej ako 400 nm) nevidíme ani pod mikroskopom. Vieme teda povedať ako vyzerajú? Vieme - oni NEVYZERAJÚ. Vzhľad (vyzeranie) je totiž vlastnosť *viazaná na proces optického pozorovania vo viditeľnom spektre*. Čo nevidíme vo viditeľnom spektre, nemá vzhľad - nevyzerá. I keď poznáme rozličné fyzikálne zobrazovacie metódy, a to až do atomárnych rozmerov, neposkytujú nám *vzhľad*. (Nemôžete si dať RTG, MRI, USG, či termovízu snímku hlavy do preukazu, lebo tak predsa *nevyzeráte*.) Dospeli sme k dôležitému poznatku: Pojmy, ktoré v bežnom živote majú jasný význam, pri „prechode“ do mikrosвета musíme podrobiť revízii (a to nielen tie, na ktoré vás upozornia učebnice).

Ale vráťme sa k našim zeleným molekulám. Už vieme, že nevyzerajú, môžu teda byť zelené? MÔŽU! *Byť zeleným znamená vyžarovať zelené svetlo*. (To je úplne niečo iné ako mať vzhľad.) Vieme už, že v napr. v Balmerovej sérii emisného spektra atómu vodíka nájdeme niekoľko farebných čiar. To isté platí aj pre iné atómy či molekuly. Naš výsledný farebný vnem z látky jednoduchým alebo niekedy aj veľmi zložitým spôsobom súvisí s „farbou“ atómov. Atómy teda síce nevyzerajú, ale zato farbu majú. Rovnako ale vieme, že atómy sú *kompozity* - skladajú sa z jadra a elektrónového obalu. A „farbu“ atómu vyrába obal - preskokmi elektrónov medzi energetickými hladinami. Obal pozostáva z elektrónov a ... prázdnoty (v zmysle absencie častíc *látky*). Elektróny však vyžarujú „farbu“ *len* pri kvantových preskokoch, na stacionárnych dráhach elektróny nevyžarujú - farba teda *nie je permanentnou vlastnosťou* elektrónov - farba je PROCES. (To isté platí o všetkých mechanizmoch vyžarovania v látke.) Samotné elektróny i jadro, *ako také*, sú beznádejne bezfarebné, a teda NEVIDITEĽNÉ (ich prítomnosť vieme iba „mapovať“ nepriamymi metódami).

Vieme už, že Comptonova dĺžka pre daný objekt je dolnou hranicou pre rozmer slučky, ktorú môžeme tomuto objektu uviazať „pod krkom“. Ak sa nám častica z takejto slučky vyšmykne, je ELEMENTÁRNOU (nie je kompozitom „ešte elementárnejších“ častíc). Elektrón to dokáže, jadro už nie - veď je kompozitom. Nedokážu to však ani stavebné častice jadra - protóny a neutróny. Ani oni nie sú elementárnymi - skladajú sa z **kvarkov** - tie už elementárnymi sú.

Mimochodom, existujú aj iné „testy“ elementárnosti. Ak sa tzv. **gyromagnetický pomer** častice - podiel vlastného, t.j. spinového magnetického momentu a vlastného momentu hybnosti, t.j. spinu (ktorý je pre všetky tieto častice rovný $\frac{\hbar}{2}$) - rovná práve 2 a máličko k tomu (v jednotkách $\frac{q}{2m}$, kde q a m sú náboj a hmotnosť častice), je častica elementárnou. Elektrón a kvarky testom opäť prejdú, protón a neutrón prepadnú. Protón aj neutrón sú akýmisi „atómami v atóme“, presnejšie v jadre atómu. (Súčasťou ruského folklóru sú tzv. *matrjošky* - bábika vnútri dutej bábiky vnútri dutej bábiky...atď.)

Tak sme teda skončili pri (naozaj) elementárnych časticiach (okrem elektrónu a kvarkov tam patrí ešte zopár ďalších), a právom sa nás môže zmocniť zúfalstvo. Sú beznádejne neviditeľné a *neuchopiteľné* - sú menšie než čokoľvek čo vieme zmerať. (Všetky fyzikálne teórie s výnimkou všeobecnej relativity

ich považujú za *bodové* - všeobecná TR bodovosť nepripúšťa.) Sú to vôbec VECI (tak ako pojem *vec* chápeme v bežnom slovníku)? Ako vlastne vieme, že v tom maličkom priestorčeku vymedzenom príslušnou Comptonovou dĺžkou vôbec niečo je? „Ozývajú“ sa odtiaľ ich SCHOPNOSTI: energia, spin, magnetický moment, elektrický a ďalšie „náboje“ - „vstupenky“ do rôznych interakcií. (Pre lepšiu predstavu odporúčam pozrieť si animovaný film *Horton*.) Jediné, čím vieme elementárne stavebné *častice látky* charakterizovať, sú *schopnosti* (nie veci - tie by sme museli vedieť „nahmatať“).

To isté sme ale povedali o *vlnách*! Aký je teda rozdiel medzi časticou a vlnou na mikroskopickú úroveň? „Častice“ sú SCHOPNOSTI a „vlny“ sú ICH POHYB. Obe sa vzťahujú na *tú istú substanciu* (podstatu). O akú substanciu ide? Čo sú tie body v (časopriestore, ktorý žiadne body nemá)? Sú to excitácie časopriestoru? A čo je samotný časopriestor? Tieto otázky snáď zodpovie kvantová teória gravitácie (zjednotenie QF a všeobecnej TR), a tá v konzistentnej podobe zatiaľ neexistuje. Dovtedy musíme vystačiť s vlnovo-časticovým dualizmom, ktorý robí z pojmov *vlna* a *častica* dve strany TEJ ISTEJ mince. V protiklade sú len v tom zmysle, že ich nemôžeme vidieť SÚČASNE. Sú ale prejavmi *tej istej podstaty*. Ich jednota je narušená len v našich hlavách - ak nie sme ochotní podrobiť revízií obsah pojmov *vlna* a *častica*, a lipneme na ich „bežnom každodennom“ význame.

Doteraz bola reč len o časticiach, ktoré sú stavebnými „tehličkami“ *látky*. Okrem nich v našej časticovej ZOO žije aj iná skupina častíc, ktoré tvoria „malú“ medzi tehličkami. Často vravíme, že vytvárajú (silové) *polia*. Sem patrí aj fotón. Tieto častice sa síce v porovnaní s tými „látkovými“ prejavujú inými SCHOPNOSTAMI (iné „náboje“, spin, atď.), ale ich duálna vlnovo-časticová podstata je rovnako zreteľná.

Zakončíme túto úvahu zaradením „spätného chodu“, a vráťme sa z mikro- do makrosveta. My všetci, aj všetky VECI okolo nás, sme tvorení *látkou* a *polom* (tak sa to učíme v škole). Oboje sú však len SCHOPNOSTAMI a ICH POHYBOM. Ako zistí subtilný detektor, že naň práve dopadla nabitá častica? Pocíti náraz, možno sa posunie či pootočí - to nie je *vec*, to je *pohyb*. Elektricky sa nabije nábojom projektilu - to tiež nie je *vec*, to je *schopnosť* elektricky pôsobiť na iné objekty. Narastie jeho hmotnosť o (pokojovú) hmotnosť projektilu - ani to nie je *vec*, to je *schopnosť* silnejšie gravitačne interagovať so Zemou. Atď. A čo platí *v malom* pre detektor a dopadajúcu časticu, platí aj *vo veľkom* pre nás a hamburger dopadajúci do našich úst. A ak sa vám zdá, že hamburger predsa len je viditeľný a hmatateľný, má objem, farbu a tvar (chuť určite nemá, a ak tak zlú), spomeňte si, že to je len ilúzia - „optický a hmatový klam“. Vieme už, že „veci“, ktoré majú objem, tvar a farbu, sú zložené VÝLUČNE z bezfarebných neviditeľných „bodových“ elementárnych častíc ... a PRÁZDNOTY. Všetky makroskopické vlastnosti objektov sú len prejavom *interakcií*, teda *pohybu*. My všetci sme, okrem tej PRÁZDNOTY, len SCHOPNOSTI V NEUSTÁLOM POHYBE. (Možno práve preto sa hovorí: „*Kto nemá v hlave, má v nohách.*“)

Kde končia všetky predstavy. (O Planckovej škále.)

Náš svet je práve taký aký je vďaka hodnotám základných fyzikálnych konštánt, ako sú \hbar či c alebo e . Ak by napr. rýchlosť svetla c bola o niekoľko rádov nižšia, alebo \hbar o niekoľko rádov vyššia, to by sme sa divili, čo by sme videli. (V skutočnosti by sme nevideli nič, pretože by sme tu neboli.) Jednou z takýchto FUNDAMENTÁLNYCH konštánt je aj **gravitačná konštanta** $G \cong 6,67 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2\text{kg}^{-2}$ (poznáme ju z Newtonovho gravitačného zákona $F_g = \frac{GmM}{r^2}$). Určuje charakter sveta na *astronomickej* škále. Na *mikroskopickej* škále je však gravitačné pôsobenie medzi časticami ABSOLÚTNE (a to je ešte veľmi slabé slovo) ZANEDBATEĽNÉ. Zdalo by sa teda, že táto konštanta do mikrosvetu nemá čo „fušovať“. Opak je však pravdou.

Nepochybne najpozoruhodnejšími vesmírnymi objektami sú **čierne diery**. Je príznačné, že tieto tajomné objekty vďaka za svoje miesto na výslni fyziky práve veľkým postavám QF (vrátane „otcov“ nukleárnych bômb J.R. Oppenheimera, J.A. Wheelera, J.B. Zel'doviča či A.D. Sacharova). *Horizont čiernej diery (horizont udalostí)* - miesto, spoza ktorého niet návratu - je jedným z fundamentálnych „horizontov“ fyziky, podobne ako c je horizontom pre rýchlosť šírenia hmoty-energie-signálu či \hbar je horizontom pozorovateľného účinku (akcie). Jeho veľkosť je určená tzv. **Schwarzschildovým polomerom**

$$r_S = \frac{2Gm}{c^2}$$

Čiernou dierou je teleso, ktorého hmotnosť m (môže byť aj *veľmi malá*) je *lokalizovaná* (skolabovaná) vo sfére o polomere r_S . (Pre 80 kg vážiaceho občana je $r_S \approx 10^{-25} \text{m}$, takže čiernou dierou by sa nestal, ani keby stiahol brucho.)

Akokoľvek je toto číslo malé (a pre hmotnosti mikroskopických častíc by bolo ešte výrazne menším), je jasné, že žiadna *hmotná* častica nemôže byť naozaj *bodovou* ($r \rightarrow 0$), pretože by bola ČIERNOU DIEROU. Na týchto nepredstaviteľne malých rozmeroch si teda QF a gravitácia podávajú ruky. Už vieme, že lokalizovateľnosť elementárnej častice je ohraničená jej Comptonovou vlnovou dĺžkou $\lambda_C = \frac{h}{mc}$. Kombinovaním oboch dĺžok dostávame

$$\sqrt{\lambda_C r_S} \approx \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = l_P \cong 1,6 \cdot 10^{-35} \text{m}$$

čo je tzv. **Planckova dĺžka** - PRIRODZENÁ miera *dĺžky* (určená len fundamentálnymi konštantami). Podobne je definovaná aj prirodzená miera *času* - tzv. **Planckov čas**

$$t_P = \frac{l_c}{c} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \cong 5,4 \cdot 10^{-44} \text{s}$$

Planckova časopriestorová škála je doménou kvantovej gravitácie. Skúsme si priblížiť jej fyzikálny význam.

Predstava časového intervalu je fyzikálne zmysluplná, ak je *principiálne* možné takýto interval zmerať (t.j. ak neexistujú *principiálne* prekážky, bez ohľadu na súčasné technické možnosti). Meranie času nie je ničím iným, než počítaním cyklov opakujúceho sa deja - *cyklického pohybu*. Takéto „hodiny“, nech už je ich mechanizmus akýkoľvek, musia spĺňať niekoľko základných požiadaviek: (1) Ak majú poskytovať informáciu o výsledku merania, nesmú byť čiernou dierou (ktorá každú informáciu zhltnie a nevypustí) - pre ich rozmer a hmotnosť musí platiť $l \geq \frac{Gm}{c^2}$. (2) Ak majú ako *celok* poskytnúť informáciu o čase s presnosťou Δt , pre ich rozmer musí platiť $l < c\Delta t$ (inak by každá ich časť „ukazovala“ iný čas). (3) Pre neurčitost' energie pohybu hodín musí platiť $\Delta E < mc^2$ - pre makroskopický objekt je to samozrejmosť, pre mikroskopické „hodiny“ je to požiadavka nevyexcitovať (z vákua) nový pár

„hodiny-antihodiny“ (a tým nejednoznačnosť merania). Princíp neurčitosti $\Delta E \Delta t \geq \hbar$ potom povedie na $m > \frac{\hbar}{c^2 \Delta t}$, čo možno interpretovať aj ako požiadavku robustnosti (odolnosti) časomieru voči kvantovým fluktuáciám. Kombinovaním uvedených podmienok (nerovností) napokon dostávame

$$\Delta t > \frac{l}{c} \geq \frac{Gm}{c^3} > \frac{G\hbar}{c^5 \Delta t} \quad \text{a teda} \quad \Delta t > \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = t_P$$

Časový úsek kratší než t_P je teda *principiálne nemerateľný*, a jeho *fyzikálny* zmysel sa STRÁCA.

Identickým spôsobom dokážeme nájsť minimálnu *fyzikálne zmysluplnú* dĺžkovú mieru Δl . Opäť musia platiť nerovnosti $\Delta l \geq \frac{Gm}{c^2}$ (meradlo nie je čiernou dierou) a $\Delta p < mc$ pre neurčitosť hybnosti meradla (aby sme nevyexcitovali pár „meter-antimeter“). Z princípu neurčitosti $\Delta l \Delta p \geq \hbar$ potom dostávame

$$\Delta l \geq \frac{Gm}{c^2} > \frac{G\Delta p}{c^3} > \frac{G\hbar}{c^3 \Delta l} \quad \text{a teda} \quad \Delta l > \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = l_P$$

Tradičné pojmy *bod v priestore* a *časový okamih* teda majú fyzikálny zmysel len ako „rozmazané“ na Planckovej škále l_P a t_P . „Bod“ a „okamih“ sú len idealizáciami, *časopriestor nie je nekonečne deliteľný*. „Bod“ a „okamih“ sú produktami nášho makroskopického (štatisticky spriemerovaného) pohľadu na fluktuujúci časopriestor akoby „z veľkej vzdialenosti“. Menšie škály sú, pochopiteľne, dostupné matematickým modelom, avšak bez akejkoľvek priamej fyzikálnej overiteľnosti.

Tieto závery majú ďalekosiahle dôsledky pre svet na Planckovej škále: Rozmazanosť času neumožňuje určiť *časovú následnosť* (poradie) dvoch „blízkych“ udalostí (v rozmedzí t_P), a teda určiť ich *kauzálnu súvislosť* (príčina-dôsledok). Tá však tvorí podstatu pojmu *čas*, tak ako ho vnímame (a tak ako s ním pracuje celá fyzika mimo kvantovej gravitácie). Skrátka, pre $t \leq t_P$ *čas prestáva existovať*. Putovanie do histórie nášho Vesmíru končí zhruba v čase t_P po Veľkom tresku, otázka „čo bolo predtým?“ vo FYZIKE nemá zmysel - žiadne „predtým“ neexistuje, lebo neexistuje čas. (Veľký tresk nie je žiadnym „okamihom v čase“.)

Schopnosť rozlíšiť dva body a určiť ich vzdialenosť je základom každej metriky priestoru, a je nevyhnutná aj pre určenie jeho *dimenzionality*. Pre $l \leq l_P$ toto všetko zlyháva. Tvorcovia matematických modelov na Planckovej škále (napr. teórie strún) majú voľné ruky pracovať napr. s 9- či 10-rozmerným časopriestorom. Neexistencia *spojitého* časopriestoru však neumožňuje poriadne definovať derivácie, pohybové rovnice, lineárnu algebru a superpozíciu, operátory, tradičné symetrie, ... preto sa konzistentná teória kvantovej gravitácie nijak neponáhľa na svet.

A ako sa v tomto svete na Planckovej škále darí našim „bodovým“ elementárnym časticiam? Je jasné že ich obvykle deklarovaná „bodovosť“ je *zdola ohraničená* l_P , a to *nielen* kvôli nemožnosti experimentálnej lokalizácie. Na menších rozmeroch by totiž častica prišla o svoju *identitu*: Rozmazanosť času, a teda časovej následnosti, neumožňuje rozlíšiť medzi časticou a *antičasticou* (*antičastica* je v QF reprezentovaná ako častica pohybujúca sa *proti smeru času*, a tento smer tu nie je definovaný). Rozmazanie priestoro-časových symetrií (kvôli rozmazanej metrike) neumožňuje identifikovať *spin* častice (ten totiž úzko súvisí s rotačnou symetriou časopriestoru), a teda ani jej identifikáciu ako *fermión* či *bozón*. (Pritom zásady sociálneho správania v kolektíve sú pre elementárne častice prinajmenšom tak dôležité ako pre ľudí.) A to najhoršie ešte len príde.

Ak uvážime ohraničenie veľkosti elementárnej častice zhora Comptonovou vlnovou dĺžkou a Planckovou dĺžkou zdola, dostávame

$$\frac{\hbar}{mc} \geq l \geq \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \quad \text{a teda} \quad m \leq \sqrt{\frac{c\hbar}{G}} = m_P \cong 2,2 \cdot 10^{-8} \text{ kg}$$

kde m_P je tzv. **Planckova hmotnosť**. Ide o „veľkorysé“ ohraničenie hmotnosti elementárnej častice zhora - splnené s tak obrovskou rezervou, že zdanlivo nedáva zmysel. Čo však zmysel dáva, je ohraničenie *hustoty hmoty* - **Planckova hustota** - podiel maximálnej hmotnosti a minimálneho objemu

elementárnej častice

$$\rho \leq \rho_P = \frac{m_P}{l_P^3} = \frac{c^5}{G^2 \hbar} \cong 5,2 \cdot 10^{96} \text{kg/m}^3$$

Odhadnime *principiálnu neurčitosť* určenia hmotnosti objektu vnútri objemu l^3 (vo všeobecnosti). Princíp neurčitosti dáva

$$\hbar \leq \Delta l \Delta p \leq l \Delta mc \quad \text{a teda} \quad \Delta m \geq \frac{\hbar}{lc}$$

Principiálna neurčitosť hmotnosti objektu teda nezávisí od samotnej hmotnosti, ale závisí od jeho *rozmerov*. Pre *makroskopické* objekty je očividne zanedbateľná, ak však položíme $l = l_P$ (Planckov objem l_P^3), dostávame

$$\Delta m \geq \frac{\hbar}{l_P c} = \sqrt{\frac{c \hbar}{G}} = m_P$$

Neurčitosť v určení hmotnosti častice vnútri Planckovho objemu teda nezávisí od samotnej hmotnosti, a je *najmenej* tak veľká ako m_P - čo je ale *maximálna* hmotnosť častice v tomto objeme !!! Toto je šokujúci výsledok: Ak neurčitosť v stanovení hmotnosti je na tejto hmotnosti *nezávislá* a súčasne *prevyšuje jej maximálnu prípustnú hodnotu*, nevieme meraním tejto hmotnosti *principiálne* určiť NIČ. Nevieme ani rozlíšiť, či v Planckovom objeme vôbec nejaká častica je. Na Planckovej škále teda elementárne častice strácajú svoju identitu a sú *neodlíšiteľné od „prázdneho priestoru“*.

QF „umiestňuje“ hmotu - častice a žiarenie - do časopriestoru. Naproti tomu, v (všeobecnej) teórii relativity je časopriestor „modelovaný“ hmotou. Kvantová gravitácia vo svojom kráľovstve - na Planckovej škále - tieto prístupy zjednocuje: Na najelementárnejšej úrovni sú hmota a časopriestor tvorené *tou istou* substanciou. (Preto by nemuselo byť takým prekvapením, keď sa z vákua vynárajú a opäť miznú páry častica-antičastica.) Vzďaľovaním sa od Planckovej škály cez subatomárny mikrosvet do nášho makrosvetu z tejto substancie postupne „kryštalizujú“ časopriestor a od neho odlíšiteľná hmota, spočiatku v jej vlnovo-časticovom dualizme, a napokon nám dôverne známe samostatné entity - priestor, čas, častice a vlny.

*The best that most of us can hope to achieve in physics
is simply to misunderstand at a deeper level.*

Wolfgang Pauli

STAV, OPERÁTORY a MERANIE.

Pod pojmom **stav** skúmaného kvantového objektu (častice alebo aj zložitejšieho kvantového systému) rozumieme ÚPLNÝ súbor informácií o objekte. Formálne ho označujeme $|\psi\rangle$ (písmenko je ľubovoľné). Úplnosť však v kvantovej fyzike NEznamená *určitosť*. Každý stav je v značnej miere neurčitý. Dôvodom je, že dynamické premenné (poloha, hybnosť, energia,...) NEmajú vo všeobecnosti určité hodnoty (sú „delokalizované“ vo *svojich* „priestoroch“). Nemožno im preto priradiť klasické funkcie $(x(t), p(t), \dots)$

Každý stav má svoju vnútornú aj vonkajšiu (danú vonkajšími vplyvmi) dynamiku, mení sa teda s časom, $|\psi\rangle = |\psi(t)\rangle$. Pri daných vonkajších podmienkach je *časový vývoj* stavu DETERMINISTICKÝ (NEobsahuje prvok náhodnosti), a máme rovnice, ktorými sa riadi (SCHR).

Meranie danej veličiny je aktom KVANTITATÍVNEHO stanovenia tejto veličiny. Výsledkom merania napr. hybnosti či polohy MUSÍ byť KONKRÉTNÁ HODNOTA tejto veličiny (reálne číslo). Stav meraného objektu s *konkrétnou hodnotou danej veličiny* je teda vo všeobecnosti INÝ, než stav PRED meraním, keď bola daná veličina (vo všeobecnosti) neurčitá. Meranie teda (vo všeobecnosti) znamená ZMENU STAVU. Akt merania zatiaľ žiadnymi rovnicami *uspokojivo* opísať nevieme. Štandardná kvantová mechanika preto (dúfajme, že len dočasne) pracuje s vágnym pojmom **kolaps** stavu (do stavu s *ostrou* hodnotou *meranej* veličiny).

Následný vývoj tohto nového stavu PO meraní je deterministický (opísateľný rovnicami). Každé opakované meranie však tento stav opäť ovplyvní! Pamätajme, že každé meranie je interakciou s istým účinkom, a *principiálna neredukovateľná* neurčitosť účinku je $\approx \hbar$. Pri IDEÁLNE realizovanom meraní však účinok merania spadá do neurčitosti samotného stavu, a teda sa *neprejaví na výsledku opakovaného merania*. Za predpokladu, že prirodzený časový vývoj stavu je zanedbateľne pomalý vzhľadom na dobu medzi meraniami, **reprodukovateľnosť merania** je zachránená! (Zdá sa, že v tomto ohľade Príroda vychádza v ústrety našim potrebám.)

Ako sa s touto situáciou dá vysporiadať matematicky? Namiesto klasických funkcií $(x(t), p(t), \dots)$ priraďujeme dynamickým premenným **operátory**. Operátor je matematický predpis, ktorý z nejakej funkcie vyrobí funkciu inú (napr. operátor derivovania podľa súradnice $\frac{d}{dx}$).

$$p \rightarrow \hat{p} = \text{nejaký matematický predpis} \qquad x \rightarrow \hat{x} = \dots \qquad \text{atď.}$$

Kvantové operátory pôsobia na stav (podobne ako operátor derivovania) a menia ho vo všeobecnosti na *iný stav*.

$$\text{premenná } A \rightarrow \hat{A} \qquad \hat{A}|\psi\rangle_{\text{pred}} = |\xi\rangle_{\text{po}}$$

V špeciálnych prípadoch sa však táto schéma zmení na

$$\hat{A}|\psi\rangle_{\text{pred}} = A|\psi\rangle_{\text{po}} \qquad |\psi\rangle_{\text{pred}} = |\psi\rangle_{\text{po}}$$

(korešponduje to reprodukovateľnosti merania). Stav $|\psi\rangle$ spĺňajúce túto podmienku sa nazývajú **vlastné stavy operátora** \hat{A} , a ČÍSLO A je **vlastnou hodnotou operátora** \hat{A} . Napr. funkcia $e^{i\omega t}$ je vlastnou funkciou operátora $\frac{d}{dt}$, lebo

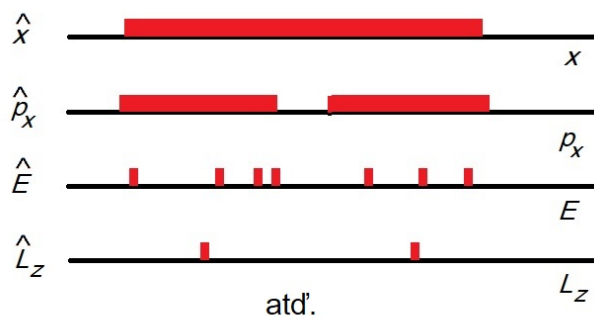
$$\frac{d}{dt}e^{i\omega t} = i\omega e^{i\omega t}$$

a $i\omega$ je vlastnou hodnotou tohto operátora. (Podobnosť s *maticami* v lineárnej algebre je viac než zjavná.)

Ak A je MERANOU (teda reálne merateľnou) veličinou, potom jej operátor musí byť matematicky skonštruovaný tak, aby bol tzv. **hermiteovský** (na detailoch teraz nezáleží). Potom A je *reálne* číslo

(v matematickom zmysle, čiže nie komplexné), a odpovedá JEDNEJ Z MOŽNÝCH hodnôt, ktoré meraním môžeme získať.

Neurčitost dynamických premenných znamená, že meraním môžeme získať *ľubovoľnú* z hodnôt v rámci neurčitosti stavu. Operátor príslušný k meranej veličine má teda **spektrum** vlastných hodnôt - potenciálnych výsledkov merania. Spektrum môže byť spojité, po častiach spojité, diskkrétne, kombinované, konečné i nekonečné.



Rovnica pre vlastné stavy a vlastné hodnoty operátora (tak sa volá) má potom tvar

$$\hat{A}|\psi_i\rangle = A_i|\psi_i\rangle$$

Neurčitost stavu objektu *pred* (prvým) meraním teraz môžeme vyjadriť ako **superpozíciu** vlastných stavov operátora meranej veličiny.

$$|\psi\rangle = \sum_i^n a_i|\psi_i\rangle$$

Váhové faktory a_i súvisia s pravdepodobnosťou, že stav $|\psi\rangle$ meraním skolabuje do vlastného stavu $|\psi_i\rangle$ a nameraná hodnota bude A_i

$$\mathcal{P}(A_i) = |a_i|^2 = a_i a_i^* \qquad \sum_i^n |a_i|^2 = 1$$

Ako vidíme, a_i môže byť aj komplexné, a pravdepodobnosť musí byť normovaná (nejakú hodnotu *vždy* nameriame).

Je to obvyklá schéma **lineárnej algebry**. Podobne ľubovoľný vektor v kartézskej súradnicovej sústave vieme vyjadriť ako lineárnu kombináciu jednotkových bázových vektorov

$$\vec{a} = \sum_i a_i \vec{e}_i \qquad \vec{e}_i = \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$$

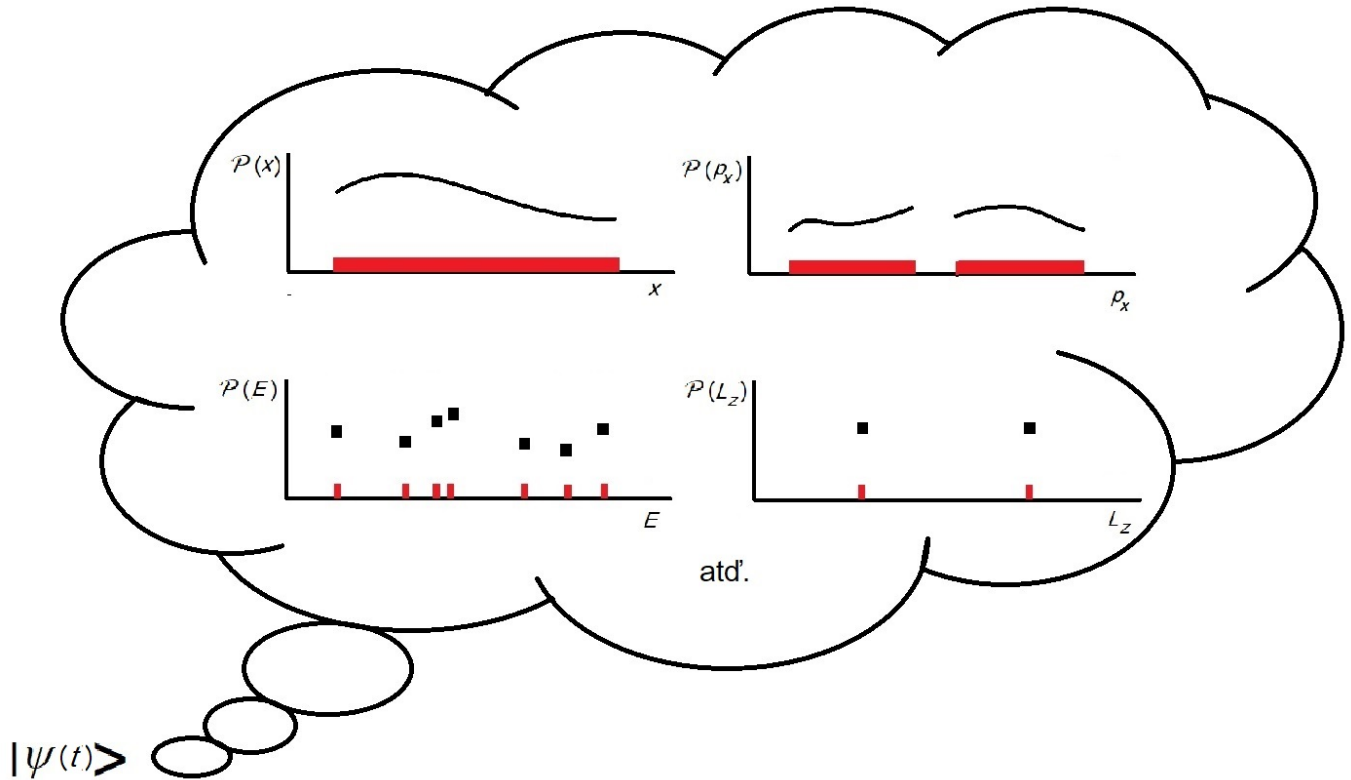
(ľubovoľné kmity zviazaných oscilátorov ako lineárnu superpozíciu vlastných kmitov, ľubovoľnú vlnu ako lineárnu kombináciu harmonických vln, atď. - spoločným „menovateľom“ je *linearita* základných rovníc). Stav $|\psi\rangle$ je teda akýmsi vektorom v n -rozmernom priestore stavov (tzv. **Hilbertovom priestore**) s bázovými vektormi $|\psi_i\rangle$, a váhové koeficienty a_i odpovedajú veľkostiam PRIEMETOV tohto stavu-vektoru do **bázových stavov**.

Vo vektorovom priestore využívame VOLNOSŤ pri výbere bázy tak, aby sme si úlohu uľahčili. Tiež vyberáme bázu *lineárne nezávislých* - **ortogonálnych** vektorov. V prípade kvantových stavov nám vhodnú bázu „podsúva“ samotné meranie:

Bázové stavy odpovedajú merateľným hodnotám meranej veličiny.

Požiadavka *ortogonalita* je totožná s požiadavkou ROZLIŠITEĽNOSTI nameraných hodnôt - ak nameriame hodnotu A_j s pravdepodobnosťou $|a_j|^2 = 1$, potom $|a_i|^2 = 0$ pre všetky $i \neq j$.

Čo však ak kombinujeme merania viacerých veličín? Stav $|\psi\rangle$ obsahuje informáciu o VŠETKÝCH premenných a pravdepodobnostiach ich namerania.



Operátory rôznych dynamických premenných majú rôzne spektrá vlastných (merateľných) hodnôt a im prislúchajúcich vlastných stavov. Operátory \hat{A} a \hat{B} prislúchajúce premenným A a B môžu teda mať RÔZNE bázy vlastných stavov, $\{|\psi_i\rangle\}$ a $\{|\phi_j\rangle\}$, do ktorých rozkladáme meraný stav $|\psi\rangle$

$$|\psi\rangle = \sum_i^n a_i |\psi_i\rangle = \sum_j^m b_j |\phi_j\rangle$$

Ak zrealizujeme meranie veličiny A (s výsledkom A_k), stav po meraní je $|\psi_k\rangle$. Ak tento stav nie je SÚČASNE vlastným stavom operátora prislúchajúceho premennej B , $|\psi_k\rangle \neq |\phi_j\rangle$, hodnota veličiny B v tomto stave je NEURČITÁ. Bázový stav $|\psi_k\rangle$ operátora \hat{A} je SUPERPOZÍCIOU bázových stavov operátora \hat{B}

$$|\psi_k\rangle = \sum_j^m b_j |\phi_j\rangle$$

(To isté sa stane s vektormi pri pootočení kartézskej súradnicovej sústavy okolo počiatku.) Meraním veličiny B nastane kolaps do *bázového* stavu $|\phi_l\rangle$ s hodnotou B_l . Následným meraním veličiny A sme opäť v situácii

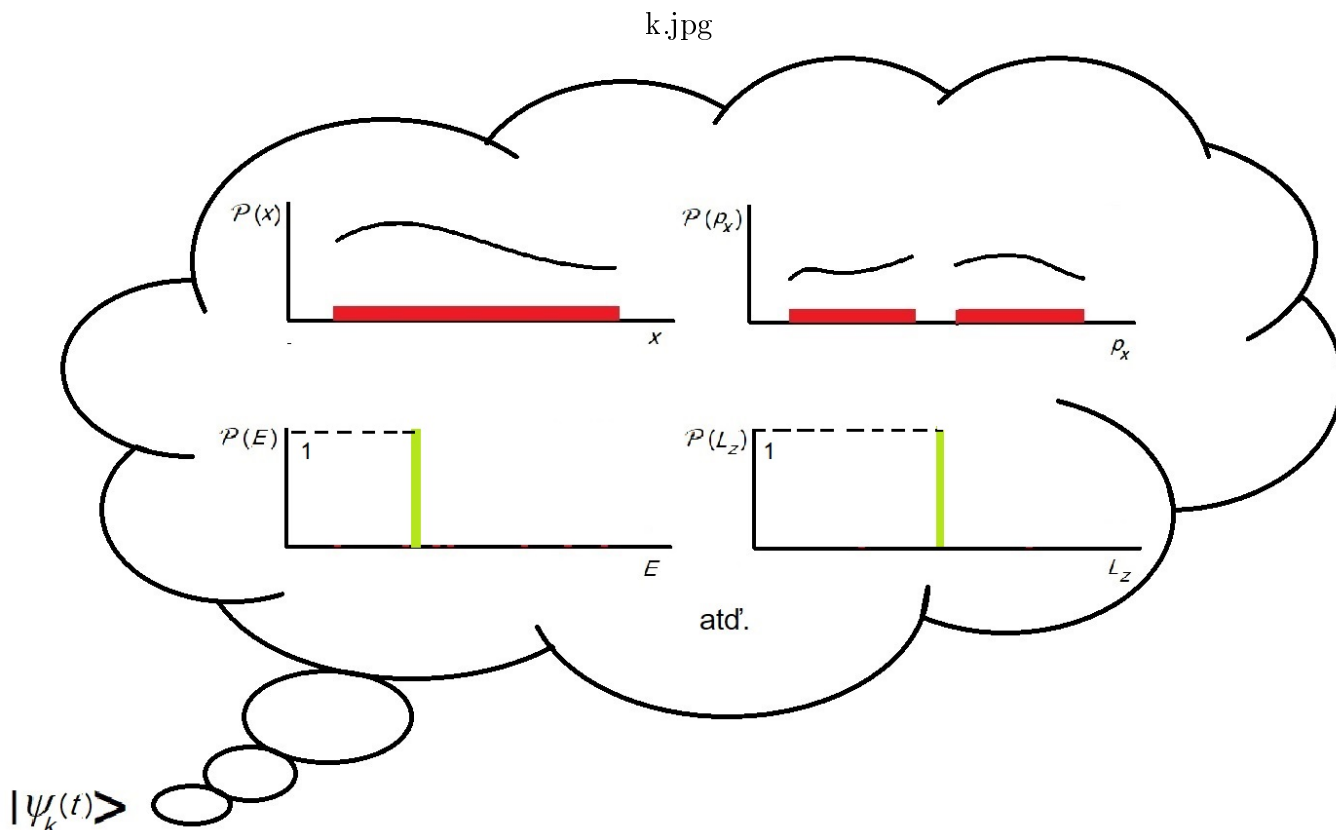
$$|\phi_l\rangle = \sum_i^n a_i |\psi_i\rangle$$

a kolaps povedie NÁHODNE do stavu $|\psi_q\rangle \neq |\psi_k\rangle$, s hodnotou $A_q \neq A_k$ (vo všeobecnosti). Sekvencia meraní $A - B - A$ teda NEmusí potvrdiť pôvodnú hodnotu A_k .

Takejto dvojici operátorov nadávame, že NEKOMUTUJÚ. Sú to tie dvojice veličín, ktoré sú zviazané *princípom neurčitosti*. Týka sa to dvojíc, ktoré nie sú ani ÚPLNE nezávislé ani dokonale závislé. Naopak,

operátory komutujúcich veličín majú spoločné spektrum vlastných stavov.

Pochopiteľne, s *inou* vlastnou hodnotou pre každú z veličín.



Na obrázku je stav $|\psi_k\rangle$ po meraní premennej E (s pravdepodobnosťou 1). Operátory \hat{E} a \hat{L}_z na obrázku komutujú, $|\psi_k\rangle$ je teda aj vlastným stavom \hat{L}_z . \hat{E} však na obrázku nekomutuje s \hat{x} ani s \hat{p}_x .

Časový vývoj stavu je opísaný SCHR (v jednom rozmere x)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle \quad \hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \hat{V}(\hat{x})$$

kde \hat{p}_x je operátor hybnosti a $\hat{V}(\hat{x})$ operátor potenciálnej energie, závislý od operátora polohy \hat{x} . Tradičná učebnicová poučka znie, že stav - vlnová funkcia častice (resp. jej kvadrát) určuje *pravdepodobnosť nájdenia častice na danom mieste v danom čase*. Ako však vidíme v bubline nad $|\psi(t)\rangle$, vlnová funkcia toho vie oveľa viac - určuje pravdepodobnosť nájdenia častice v danom čase s danou *hybnosťou, energiou*, atď. (Súradnice polohy nie sú nijak privilegovanou dynamickou premennou častice.) V závislosti od toho, o akú premennú sa zaujímame, hovoríme o rôznych **reprezentáciách** vlnovej funkcie, $\psi(x)$, $\psi(p)$, $\psi(E)$, atď. Dve základné reprezentácie sú, pochopiteľne, navzájom fourierovsky zviazané

$$\psi(p_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-i\frac{p_x}{\hbar}x} dx \quad \psi(x) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(p_x) e^{i\frac{p_x}{\hbar}x} dp_x$$

V **súradnicovej reprezentácii** majú základné operátory tvar

$$\hat{x} = x \quad \hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

kým v **hybnostnej reprezentácii** tvar

$$\hat{p}_x = p_x \quad \hat{x} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_x}$$

V každom prípade však tieto operátory *nekomutujú* - ich **komutátor** (kvantový analóg Poissonových zátvoriek) je *nenulový*

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = \hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x} = i\hbar$$

čo je alternatívny zápis *princípu neurčitosti*.

Variácie štatistických súborov nameraných hodnôt súradnice a hybnosti (v smere x) sú strednými kvadratickými odchýlkami od stredných hodnôt. Bez ujmy na všeobecnosti - transformáciou počiatku osi x či p_x - môžeme stredné hodnoty vynulovať, a pre variácie súborov výsledkov dostaneme

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \mathcal{P}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx \quad \sigma_{p_x}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} p_x^2 \mathcal{P}(p_x) dp_x = \int_{-\infty}^{\infty} p_x^2 |\psi(p_x)|^2 dp_x$$

kde pravdepodobnosti $\mathcal{P}(x)$, $\mathcal{P}(p_x)$ sú kvadrátmi vlnových funkcií v príslušnej reprezentácii. Označme

$$\phi_x = \hat{x}\psi(x) = x\psi(x) \quad \phi_p = \hat{p}_x\psi(p_x) = p_x\psi(p_x)$$

Potom výrazy

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_x|^2 dx = \|\phi_x\|^2 = \langle \phi_x | \phi_x \rangle \quad \sigma_{p_x}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_p|^2 dp_x = \|\phi_p\|^2 = \langle \phi_p | \phi_p \rangle$$

predstavujú **normy** funkcií $\phi_x(x)$, $\phi_p(p_x)$, v rôznych symbolikách. Sú to *skalárne súčiny* funkcií samých so sebou v *Hilbertových priestoroch* - analógy skalárnych súčinov vektorov samých so sebou, čiže veľkostí vektorov. (Viac o vektorovej reprezentácii v ďalšej kapitole o stavoch.) Podobne môžeme definovať skalárny súčin *dvoch* (rôznych) funkcií

$$\langle \phi_x | \phi_p \rangle$$

(ponecháme len takýto zápis a vyhneme sa matematickým detailom spojeným s prechodom od hybnostnej k súradnicovej reprezentácii - Fourierovej transformácii), ktorý vyjadruje ich *koreláciu* - mieru premietania jednej funkcie do druhej - v našom prípade mieru korelácie x a p_x . Využijeme matematickú **Cauchyho-Schwarzovu nerovnosť**

$$\langle \phi_x | \phi_x \rangle \cdot \langle \phi_p | \phi_p \rangle \geq |\langle \phi_x | \phi_p \rangle|^2$$

(premietnite si kvôli názornosti túto nerovnosť na prípad skalárneho súčinu vektorov), a dostávame princíp neurčitosti

$$\Delta x \Delta p_x = \sigma_x \sigma_{p_x} \geq \langle \phi_x | \phi_p \rangle$$

Nenulovosť pravej strany je teda daná *koreláciou* dvojice skúmaných veličín (ako sme tvrdili v predchádzajúcej kapitole o princípe neurčitosti). Výpočet $\langle \phi_x | \phi_p \rangle$ povedie na $\frac{\hbar}{2}$. Pre pár x a p_y by korelácia, a teda pravá strana nerovnosti, bola *nulová*.

V analógii s operátormi *kánonicky konjugovanej dvojice* $x - p_x$ (v oboch reprezentáciách) by sme mohli vnímať aj rovnosť operátorov (pôsobiacich na stav) v SCHR

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle \quad \hat{H} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

Vzhľadom na výnimočné postavenie *času* (je *parametrom* a nie je dynamickou premennou - nepriraďujeme mu operátor) však SCHR interpretujeme tak, že *časový vývoj stavu je určený operátorom*

energie - hamiltoniánom. Znamená to, že stav, ktorý je *vlastným* stavom hamiltoniánu, musí mať triviálnu časovú závislosť

$$\hat{H}|\psi(t)\rangle = E|\psi(t)\rangle \quad |\psi(t)\rangle = |\psi(0)\rangle e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

Ostrá hodnota energie znamená ($\Delta E \rightarrow 0$, $\Delta t \approx \frac{\hbar}{\Delta E} \rightarrow \infty$), že ide o **stacionárny stav**. Táto nesmierne užitočná IDEALIZÁCIA znamená, že:

- Objekt v tomto stave má v *čase nemennú ostru* hodnotu ENERGIE. (Striktne vzaté, nevymieňa si energiu s okolím - neinteraguje. Dovoľme mu teda mať v skutočnosti nejakú malú neurčitosť ΔE , aby s nami mohol komunikovať.)
- Všetky veličiny, ktorých operátory KOMUTUJÚ s hamiltoniánom, majú tiež v *čase nemennú ostru* hodnotu.
- Veličiny, ktorých operátory NEkomutujú s hamiltoniánom, sú naďalej *neurčité*, ich PRAVDEPODOBNOTI v bubline stavu sú však v čase NEMENNÉ.

$$\mathcal{P}(\xi, t) = \psi(\xi, t)\psi^*(\xi, t) = \psi(\xi, 0)e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\psi^*(\xi, 0)e^{i\frac{E}{\hbar}t} = \psi(\xi, 0)\psi^*(\xi, 0) = \mathcal{P}(\xi, 0)$$

kde $\xi = x, p_x, \dots$ (Operátor *polohy* nekomutuje s hamiltoniánom, lebo kinetická energia je daná *hybnosťou*. Operátor *hybnosti* nekomutuje s hamiltoniánom v nenulovom potenciáli, lebo potenciálna energia je daná *polohou*.)

Zákon zachovania energie *izolovaného* systému garantuje, že ak *meraním* systém skolabuje do jedného z bazových stavov hamiltoniánu, tento stav pretrvá až do ďalšej interakcie (napr. ďalšieho merania). Stacionárne stavy sú bazovými stavmi \hat{H} , čiže možnými výsledkami *merania energie*. (Doba medzi po sebe nasledujúcimi interakciami s okolím určuje rozmazanie energetickej hladiny, $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$.)

Ak nasledujúcou interakciou je meranie napr. *polohy* častice (\hat{x} a \hat{H} nekomutujú), výsledkom merania bude stav s ostrou hodnotou polohy, ktorý však NIE je vlastným stavom \hat{H} , čiže NEstacionárny stav. Takýto stav je rozložiteľný do bázy stacionárnych stavov - superpozícia znamená *neurčitosť* energie (v rámci spektra dostupných hodnôt). Nestacionárnosť však tiež znamená *časový vývoj celej bubliny* $|\psi\rangle$ - VŠETKÝCH pravdepodobností, VRÁTANE čerstvo nameranej hodnoty súradnice! Veličiny nekomutujúce s hamiltoniánom sa teda v čase NEzachovávajú (nie sú tzv. **konštantami** či **integrálmi pohybu**.)

*No microscopic property is a property
until it is an observed property.
J.A. Wheeler*

Hýbe sa častica v STACIONÁRNOM STAVE? (Je pohyb to čo si myslíme?)

Ak vnímame časticu ako LOKALIZOVANÝ objekt, je produktom MERANIA POLOHY. Každé meranie POLOHY (poloha nekomutuje s hamiltoniánom) v *danom stacionárnom* stave dá *náhodný* výsledok v rámci *v čase nemennej pravdepodobnosti* - akoby sa aktuálna poloha častice neustále menila. V skutočnosti pred meraním žiadna poloha NEEXISTUJE. Pre objekt *delokalizovaný* v rámci *svojej neurčitosti* (teda *vlnu*) sa v stacionárnom stave pri absencii merania v čase NEMENÍ NIČ.

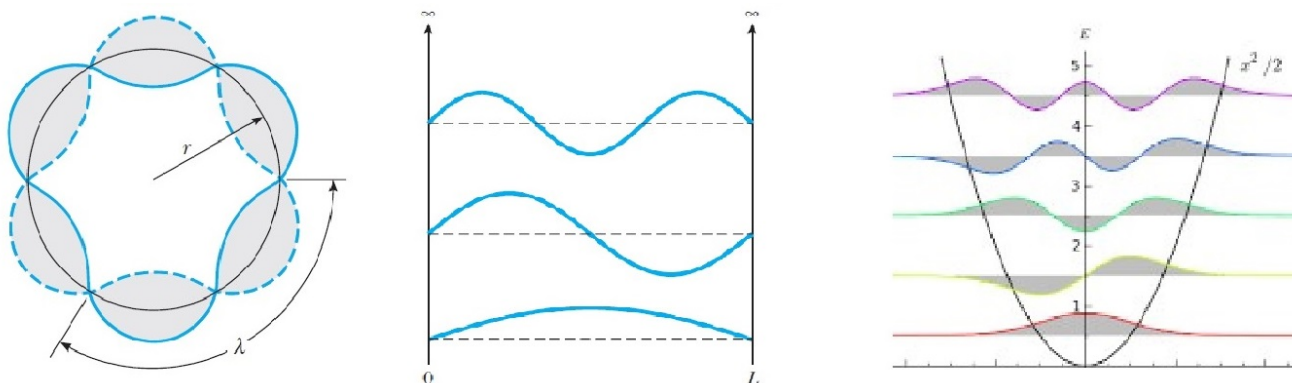
Osobitným (a rovnako absurdne idealizovaným) *stacionárnym* stavom je rovinná *monochromatická* vlna $\psi_0 e^{i(p_x x - Et)/\hbar}$, teda VOĽNÁ častica úplne delokalizovaná na *celej* osi x . Aplikovaním operátorov energie a hybnosti dostávame ostré hodnoty energie AJ hybnosti. Operátory \hat{p} a \hat{H} (v neprítomnosti potenciálnej energie) teda *komutujú*. Znamená však ostrá hodnota hybnosti, že častica sa pohybuje? Ak zo SCHR spočítame **tok pravdepodobnosti**, dostaneme

$$J = \frac{p}{m} \psi \psi^* = v |\psi|^2$$

Výtok pravdepodobnosti z oblasti (x_1, x_2) je však

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} |\psi|^2 dx = J(x_2) - J(x_1) = 0$$

Častica teda „tečie ale nevytečie“. Tečie „odnikiaľ nikam“, lebo je všade.



Stacionárnymi stavmi sú STOJATÉ VLNY v rôznych potenciálových jamách. V klasickej mechanike stojaté vlny predstavujú cyklickú premenu kinetickej energie na potenciálnu, pričom celková energia každého kmitajúceho bodu vlny sa zachováva (nepresúva z miesta na miesto). V *kvantových* stacionárnych stavoch vlnová funkcia (v súradnicovej reprezentácii) v každom z týchto stavov KMITÁ ako $\psi(x, t) = \psi(x, 0) e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t}$, ale pravdepodobnosť $\mathcal{P}(x, t) = \psi(x, t) \psi^*(x, t) = \mathcal{P}(x, 0)$ sa v čase nemení. Cyklicky sa mení $\Re\{\psi(x, t)\}$ na $\Im\{\psi(x, t)\}$ ($\psi = \Re\{\psi\} + i\Im\{\psi\}$, nech už to znamená čokoľvek), avšak súčet

$$(\Re\{\psi(x, t)\})^2 + (\Im\{\psi(x, t)\})^2 = \psi(x, t) \psi^*(x, t) = \mathcal{P}(x)$$

sa v čase nemení - pravdepodobnosť sa *nepresúva*.

Azda najpopulárnejšou potenciálovou jamou je **harmonický oscilátor** (HO). *Klasický* HO je niečo ako guľôčka v parabolickej jamy. Guľôčka môže rovnako dobre kmitať v jame ľubovoľného tvaru - výnimočnosť parabolickej jamy je v tom, že kmity sú HARMONICKÉ, a to sa dobre počíta (preto aproximujeme pomocou HO všetko čo sa dá - napokon pre *malé* kmity je dno *každéj konvexnej* jamy parabolickej). *Kvantový* HO je kvantový objekt (hovorme mu pre jednoduchosť *častica*) čiastočne

lokalizovaný v *parabolickom potenciáli* (vytvorenom silovým - napr. elektrickým poľom). V jeho vnútri je *delokalizovaný* - nemá polohu ani rýchlosť - NEKMITÁ !!! (Nemáme pohybovú rovnicu pre presnú polohu a fantazírovať vo fyzike nesmieme. Ani elektrón v atóme *nekrúži* po orbite.)

Energia častice v jame (*ľubovoľného* tvaru vrátane parabolického) je vo všeobecnosti rovnako neurčitá ako poloha či hybnosť (ako inak!). Sú však také energetické hladiny, na ktorých častica môže zotrvať neurčito dlhý čas - *stacionárne hladiny*. Meraním *energie* vždy POSADÍME časticu na *jednu* z práve takýchto hladín, a častica má tendenciu *zotrvať* na nej aj po meraní. Všetky veličiny *komutujúce* s *energiou* zostanú rovnako nemenné.

Spektrum energií (ostrých hodnôt - stacionárnych hladín) v jame je diskkrétne, ako *dôsledok priestorového obmedzenia* (ako u stojatých vln) - čím je jama užšia, tým sú rozostupy hladín väčšie. Interakcia s okolím vyvoláva preskoky medzi stacionárnymi hladinami, sprevádzané pohltením/uvoľnením kvanta energie $E_i - E_j$. Ak ide o mnohonásobné preskoky medzi tými istými hladinami, vnímame to ako vyžarovanie/pohlcovanie VLNY s FREKVENCIOU $\omega = (E_i - E_j)/\hbar$. HO je *jediná* jama, ktorá má PRAVIDELNÉ rozostupy stacionárnych hladín (súvisí to s tým, že je *harmonický* - definuje *jedinú* energiu $\hbar\omega_0$). Tým PRIPOMÍNA (ale naozaj len pripomína !) harmonické *kmity* (s jedinou frekvenciou v spektre). Inak nie je ničím výnimočný. Bohrov atóm je teda rovnako dobrým (ne)oscilátorom ako HO, ibaže nemá definované *jediné* číslo (rozstup hladín) ω_0 - preto ho nenazývame harmonickým.

V klasickej fyzike je pojem *pohyb* zviazaný s veličinami *poloha*, *hybnosť*, *moment hybnosti* a *kinetická energia*. Posledné tri sú *mierami* pohybu, poloha je súčasťou jeho *definície* (pohyb = zmena polohy). Poloha objektu v *mikrosвете* je však *neurčitá* (neexistuje), a pojem *pohyb* stráca jasný zmysel. Spomínané veličiny sa teda stávajú skôr abstraktnými matematickými konštrukciami, ktorých *tesná spätosť s pohybom* je obmedzená na *makrosvet*. Ich mikroskopická interpretácia si vyžaduje obozretnosť.

Pravdepodobnostný charakter vlnovej funkcie nám ponúka len stredné hodnoty, variancie, a pod. Vo všeobecnosti je stredná hodnota ľubovoľnej veličiny $G(x)$ (v tomto prípade v *súradnicovej* reprezentácii) daná vzťahom

$$\langle G(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} G(x)\mathcal{P}(x)dx$$

kde $\mathcal{P}(x)$ je *normovaná* pravdepodobnosť. Pre nás $\mathcal{P}(x) = \psi(x)\psi^*(x)$. Veličiny *nekomutujúce* s polohou (x) však nemajú definované $G(x)$, stredná hodnota je teda definovaná (s dôrazom na PORADIE) pomocou operátora $\hat{G}(x)$ ako

$$\langle G(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\hat{G}(x)\psi(x)dx$$

V *pravouhlej* nekonečnej 1D potenciálovej jame sú *stacionárne* stavy a stredné hodnoty polohy častice

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad x \in \langle 0, L \rangle$$

$$\langle x \rangle = \int_0^L \psi_n^*(x)x\psi_n(x)dx = \dots = \frac{L}{2}$$

pre všetky n , vrátane párnych, pre ktoré $\psi_n(\frac{L}{2}) = 0$! (Štatistické výpovede sú často absurdné.) Stredná hybnosť pre všetky stacionárne stavy je

$$\langle p_x \rangle = \int_0^L \psi_n^*(x) \left(\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \right) \psi_n(x)dx = \dots = 0$$

Chabá výpoveď o pohybe, pre pohyb hore-dole však žiadne prekvapenie. Skúsime stredné *kvadratické* hodnoty

$$\langle x^2 \rangle_n = \int_0^L \psi_n^*(x)x^2\psi_n(x)dx = \dots = L^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n^2\pi^2} \right)$$

$$\langle p_x^2 \rangle_n = \int_0^L \psi_n^*(x) \left(\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \right)^2 \psi_n(x) dx = \dots = \frac{n\hbar^2 \pi^2}{L^2}$$

Znamená to, že ak budeme merať hybnosť, s vysokou pravdepodobnosťou zmeriame *nenulovú* hodnotu. Tú však meraním VYTVORÍME.

Pre variancie platí

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\langle x^2 \rangle} \quad \Delta p_x \text{ detto} \quad \Delta x \Delta p_x = \dots \cong 0.57\hbar > \frac{1}{2}\hbar$$

Stredné hodnoty i ostatné základné štatistické charakteristiky *stacionárnych* stavov *nezávisia od času*. Samotná hybnosť či poloha (hodnoty získané meraním) však budú náhodné. Stacionárny stav *nie* je vlastným stavom operátorov hybnosti ani polohy. Z rovnice pre vlastné stavy a vlastné hodnoty operátora \hat{p}_x dostaneme dvojicu vlastných stavov a prislúchajúcich vlastných hodnôt

$$\phi_n(x) = \frac{1}{i\sqrt{2L}} e^{\pm in\pi x/L} \quad p_n = \pm \frac{n\pi\hbar}{L} = \pm \sqrt{2mE_n}$$

Vnútri jamy ($V = 0$) je energia síce daná hybnosťou, „častica“ v jame však „cíti“ steny ($V \rightarrow \infty$), a preto \hat{H} a \hat{p}_x *nekomutujú*. Bázové stavy \hat{p}_x odpovedajú pohybu v opačných smeroch, a očividne ich *superpozíciou* sú bázové stavy \hat{H} - stacionárne stavy.

Vlastné stavy operátora \hat{p}_x^2 však stacionárnymi stavmi *sú* (presvedčte sa) - \hat{p}_x^2 a \hat{H} komutujú.

Stacionárnymi stavmi v *sférickej* potenciálovej jame - atóme vodíka sú elektrónové **orbitály**. Vzhľadom na *symetriu* všetkých orbitálov budú výsledky ustredňovania polohy a hybnosti analogické.

Operátormi komutujúcimi s \hat{H} sú \hat{L}^2 a \hat{L}_z . Znamená to, že tieto veličiny nadobúdajú *ostré* a *kvantované* hodnoty

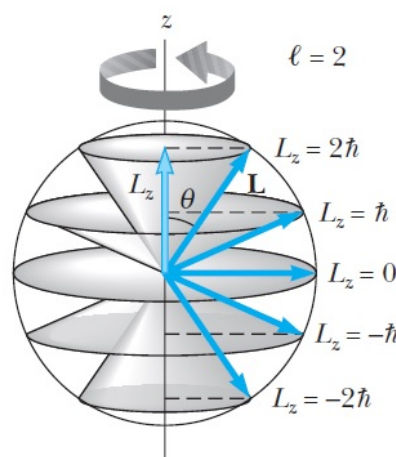
$$L^2 = l(l+1)\hbar^2 \quad l = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$L_z = m_l \hbar \quad m_l = 0, \pm 1, \dots, \pm l$$

Ostatné dve zložky, L_x a L_y , sú neurčité, pričom spĺňajú vzťahy

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z \quad \Delta L_x \Delta L_y \geq \frac{\hbar}{2} |\langle L_z \rangle|$$

resp. ich cyklické permutácie. (Opäť súvis s Poissonovými zátvorkami v klasickej mechanike.)



Princíp neurčitosti, ako pilier QF, vnáša principiálnu neurčitosť $\geq \frac{\hbar}{2}$ do *každých* veličiny vo význame *účinku* (ako napr. $p_x x$ či $E t$). Takou veličinou je aj moment hybnosti, preto *nie* je možné určiť ostré hodnoty všetkých jeho zložiek. Inými slovami, *neexistuje* priemet $L_z = L$, platí $L_z < L$! Tomu odpovedá *klasická* predstava **precesie** vektoru \vec{L} okolo osi z s *kvantovaným uhlom odklonu* - tzv. **priestorové kvantovanie**.

Osobitnú pozornosť si zaslúžia prípady $l = 0$ - tzv. *s-orbitály*. Pre ne sú všetky zložky momentu hybnosti *nulové*. Z pohľadu klasickej fyziky ide o paradox - sféricky symetrický orbitál s *nenulovou* kinetickou energiou a nulovým momentom hybnosti! (V tomto prípade nejde o *stredné* hodnoty L či L_z ale o *opakovane merateľné ostré* hodnoty. Jediným klasickým analógom by bol absurdný *radiálny* pohyb hore-dole všetkými smermi cez jadro!) Je očividné, že kinetickú energiu ani moment hybnosti nemôžeme vnímať ako kvantifikátory *pohybu* v klasickej zmysle.

Z relativistickej *Diracovej rovnice* pre elektrón (relativistické zovšeobecnenie SCHR) vyplýva, že zachováva sa veličinou pre voľný elektrón alebo elektrón v centrálnom poli *nie je* L_z ale $L_z \pm \frac{\hbar}{2}$. Preto L - tzv. **orbitálny moment hybnosti** *nemôže* odpovedať CELKOVÉMU momentu hybnosti. *Postulujeme*, že

každá elementárna častica látky má vlastný moment hybnosti - **spin** S

$$S^2 = s(s+1)\hbar^2 \quad s = \frac{1}{2} \quad S_z = m_s \hbar \quad m_s = \pm s$$

alebo inak

$$S = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar \quad S_z = \pm \frac{\hbar}{2}$$

Pre zaujímavosť: Z relativistickej teórie vyplýva, že poloha voľného elektrónu fluktuuje rýchlosťou c s amplitúdou $\lambda = \frac{h}{2mc} = \frac{\lambda_C}{2}$ (Comptonova vlnová dĺžka elektrónu ako dolná hranica lokalizovateľnosti) a frekvenciou $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = \frac{2mc^2}{\hbar}$. Klasický moment hybnosti odpovedajúci takýmto fluktuáciám je $L = \frac{E}{\omega} = \frac{mc^2}{\omega} = \frac{\hbar}{2}$ a stotožňuje sa so *spinom*. Tento jav - tzv. *Zitterbewegung* sa považuje za vysvetlenie energetickej korekcie práve s -orbitálov v atóme vodíka (tzv. *Darwinov člen*).

Uvedené platí ROVNAKO nielen pre elektrón, ale aj pre **mión** a **tauón**, všetky **neutrína** a **kvarky** - teda pre *všetky elementárne látkové častice* (nie však protón alebo neutrón - to sú kompozity!), a to bez ohľadu na ich elektrický náboj. Spin $\frac{1}{2}$ radí všetky základné „tehličky“ *látky* medzi **fermióny**, a **Pauliho vylučovací princíp** tak zabezpečí NEPRESTUPNOSŤ LÁTKY.

Kompozitné častice MÔŽU mať *nulový* výsledný moment hybnosti! Čiastkové momenty sa totiž sčítavajú tak, že sa sčítavajú len ich *priemety* do výsledného *priemetu* (sčítava sa len to, čo sa sčítavať dá - len zložky vektorov s ostrými hodnotami), a v tom je už princíp neurčitosti obsiahnutý.

Ak *klasická* častica s hmotnosťou m a nábojom q vykonáva *orbitálny* pohyb, napr. pohyb po kružnici o polomere r s uhlovou rýchlosťou $\vec{\omega}$ (smer vektora závisí od smeru pohybu podľa pravidla pravej ruky), predstavuje **magnetický dipól** (prúdovú slučku) s **orbitálnym magnetickým dipólovým momentom**

$$\vec{\mu}_l = \frac{q\vec{\omega}}{2\pi} \pi r^2 = \frac{qr^2\vec{\omega}}{2}$$

Vzťah medzi magnetickým momentom $\vec{\mu}_l$ a momentom hybnosti $\vec{L} = mr^2\vec{\omega}$ je

$$\vec{\mu}_l = \frac{q}{2m} \vec{L}$$

(Vzťah platí všeobecne, *nielen* pre kruhovú dráhu.) Pre elektrón ($q = -e < 0$) je ich pomer - tzv. **orbitálny gyromagnetický pomer**

$$\frac{\mu_l}{L} = -\frac{e}{2m}$$

vektory $\vec{\mu}_l$ a \vec{L} sú teda *antiparalelné*.

Analogický vzťah platí aj pre *vlastný* - **spinový magnetický moment** KAŽDEJ NABITEJ ELEMENTÁRNEJ častice, pričom **spinový gyromagnetický pomer** je (takmer presne) DVOJNÁSOBNÝ (vyplýva to z relativistickej teórie)

$$\frac{\mu_s}{S} = \frac{q}{m} = -\frac{e}{m}$$

(druhá časť rovnice platí pre elektrón). *Nenabité elementárne častice* (neutrína) spinový magnetický moment NEMAJÚ (spin však majú!). *Kompozitné častice* (protón, neutrón, a pod.) majú *výsledný*

náboj, hmotnosť, spin i magnetický moment *zložený* z elementárnych (napr. elektricky vykompenzovaný neutrón MÁ *nevykompenzovaný* spin i magnetický moment), hodnoty gyromagnetického pomeru preto vychádzajú čudné.

Magnetický moment, orbitálny i spinový, sú teda rovnako kvantované ako mechanické momenty (momenty hybnosti)

$$\mu_l^2 = l(l+1) \left(\frac{\hbar q}{2m} \right)^2 \quad \mu_{lz} = m_l \frac{\hbar q}{2m} \quad \mu_s^2 = s(s+1) \left(\frac{\hbar q}{m} \right)^2 \quad \mu_{sz} = m_s \frac{\hbar q}{m}$$

Pre elektrón ($q = -e$, $s = \frac{1}{2}$, $m_s = \pm \frac{1}{2}$)

$$\mu_l^2 = l(l+1)\mu_B^2 \quad \mu_{lz} = -m_l\mu_B \quad \mu_s^2 = 3\mu_B^2 \quad \mu_{sz} = \mp\mu_B$$

kde $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 9,27 \cdot 10^{-24} JT^{-1}$ je tzv. **Bohrov magnetón** - prirodzená jednotka *elektrónového magnetického* momentu (podobne ako \hbar je prirodzenou jednotkou elektrónového momentu hybnosti).

Obvykle sa tvrdí, že spin nemožno stotožniť s vlastnou rotáciou častice (okolo vlastnej osi), pretože pri hornom odhade polomeru elektrónu a ľubovoľnom rozložení jeho náboja a hmotnosti v objeme by obvod elektrónu musel rotovať rýchlosťou $> c$, ak má generovať magnetický moment $\approx \mu_B$. Tento argument je však neadekvátny, lebo je skrz-naskrz KLASICKÝ. Nakladá s nábojom i hmotnosťou ako s VECAMI, ktoré majú nejaké priestorové rozloženie (čo je dobrým priblížením od úrovne atómov vyššie), a o rýchlosti na rozmeroch $< \lambda_C$ môžeme hovoriť tiež len obrazne. Na týchto rozmeroch *klasická predstava pohybu stráca zmysel*.

Spin je teda nezávislý stupeň voľnosti, vlastný všetkým elementárnym časticiam. Fakt, že komutuje s hamiltoniánom a je teda zachovávacou sa veličinou, svedčí o tom, že vyjadruje akúsi fundamentálnu symetriu Prírody. Na druhej strane *pohyb* so všetkými jeho klasickými atribútmi (ako ich poznáme z klasickej fyziky) je beznádejne vypudený z mikrosвета a odsúdený do nášho sveta ako *makroskopické priblíženie* (či ilúzia).

O jednej častici a DVOCH STAVOCH.

Uvažujme časticu v 1D potenciálovej jame (konečnej hĺbky) so základným stavom s energiou E_0 . Predpokladajme, že excitované stavy majú energiu nedostupne vyššiu, takže nás nezaujímajú. Vytvoríme teraz v susedstve *identickú* jamu tak, aby sa vlnové funkcie častice pre jednotlivé jamy navzájom prekrývali (ale nie príliš). Potom stav častice je daný vlnovou funkciou

$$\psi(x, t) = c_1(t)\phi_1(x) + c_2(t)\phi_2(x) \quad |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$$

Takýto model je archetypom mnohých situácií v QF. V *súradnicovej* reprezentácii stavy $\phi_{1,2}(x, t)$ určujú *spojito rozloženú* pravdepodobnosť nájdenia (namerania/vytvorenia) častice v danom x v *izolovaných* jamách, a $\psi(x, t)$ v *dvoj*jamovom potenciáli. Môžeme však úlohu zjednodušiť a rozlišovať len medzi polohou v prvej alebo druhej jame - spojitú súradnicovú bázu nahradíme „poloslepu“ bázou s dvoma stavmi $|1\rangle$ a $|2\rangle$,

$$|\psi(t)\rangle = c_1(t)|1\rangle + c_2(t)|2\rangle = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$$

Stavy $|1\rangle, |2\rangle$ pripúšťajú neurčitost' polohy v oblasti jám, a sú súčasne bázovými stavmi *hamiltoniánov* (teda energie) dokonale *izolovaných* jám (s energiou E_0).

SCHR vo vektorovo-maticovom tvare s hamiltoniánom v tvare matice 2×2 je

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$$

kde jednotlivé prvky matice H sú (v dvoch rôznych zápisoch)

$$H_{ij} = \int \phi_i^*(x) \hat{H} \phi_j(x) dx = \langle i | \hat{H} | j \rangle \quad i, j = 1, 2$$

$\langle i | = |i\rangle^*$ je komplexne združený stav ku $|i\rangle$

$\langle i | j \rangle = \langle i | j \rangle$ znamená *skalárny súčin* stavov $|i\rangle$ a $|j\rangle$

$\langle i | \hat{H} | j \rangle$ znamená skalárny súčin stavov $|i\rangle$ a $\hat{H} | j \rangle$.

Vlastnými hodnotami hamiltoniánu sú¹

$$E_{1,2} = \frac{H_{11} + H_{22}}{2} \mp \sqrt{\frac{(H_{11} - H_{22})^2}{4} + H_{12}H_{21}}$$

prislúchajúce k vlastným vektorom matice H - novým *stacionárnym* stavom $|E_1\rangle, |E_2\rangle$ dvojjamového problému.

$$c^{(1)} = \begin{pmatrix} c_1^{(1)} \\ c_2^{(1)} \end{pmatrix} = |E_1\rangle \quad c^{(2)} = \begin{pmatrix} c_1^{(2)} \\ c_2^{(2)} \end{pmatrix} = |E_2\rangle \quad H \begin{pmatrix} c_1^{(i)} \\ c_2^{(i)} \end{pmatrix} = E_i \begin{pmatrix} c_1^{(i)} \\ c_2^{(i)} \end{pmatrix}$$

(Pôvodné jednojamové stacionárne stavy $|1\rangle, |2\rangle$ prislúchajúce hladine E_0 v izolovaných jamách už *nie sú* stacionárnymi stavmi dvojjamového problému.)

V prípade *symetrickej* dvojjamy sú vzťahy medzi bázovými stavmi („poloslepej“) súradnicovej a novej energetickej bázy

$$|E_{1,2}\rangle = \frac{|1\rangle \pm |2\rangle}{\sqrt{2}} \quad |1, 2\rangle = \frac{|E_1\rangle \pm |E_2\rangle}{\sqrt{2}}$$

¹pozri napr. P. Markoš: Moderná fyzika (skriptá) Nakladateľstvo STU Bratislava 2012, kap. 6.1.

Pôvodný stav v tejto novej báze - v *energetickej* reprezentácii s diagonálnym hamiltoniánom - má tvar

$$\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \alpha c^{(1)} e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t} + \beta c^{(2)} e^{-\frac{i}{\hbar} E_2 t} = \alpha |E_1\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t} + \beta |E_2\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E_2 t}$$

Znamená to, že energia takéhoto stavu má neurčitost

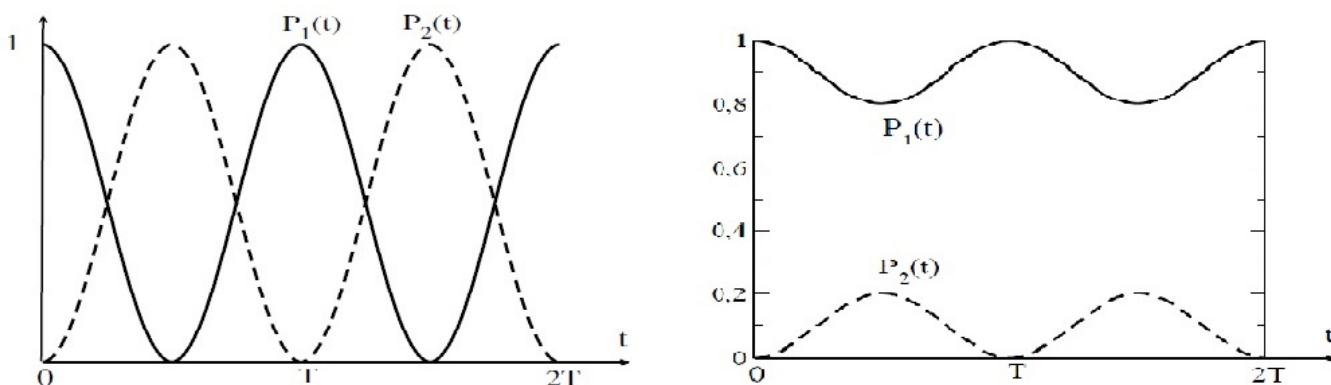
$$\Delta E = \frac{E_2 - E_1}{2}$$

Meraním ENERGIE môžeme namerať len jednu z hodnôt $E_{1,2}$ (nikdy nie E_0), a vytvoriť tak *stacionárny* stav. INOU manipuláciou so systémom (napr. lokalizovaním POLOHY častice) však môžeme pripraviť *nestacionárny* stav s *neurčitou* energiou a uvedeným *časovým vývojom*.

Časový vývoj pravdepodobnosti lokalizovania častice v tomto stave v jame 1 resp. 2, teda v stavoch $|1\rangle$ alebo $|2\rangle$, sú

$$\mathcal{P}_1(t) = |c_1(t)|^2 \sim \cos^2 \frac{E_1 - E_2}{2\hbar} t = \cos^2 \frac{\Delta E}{\hbar} t \quad \mathcal{P}_2(t) = |c_2(t)|^2 \sim \sin^2 \frac{\Delta E}{\hbar} t$$

Častica teda akoby „oscilovala“ medzi jamami. Prípady symetrických a nesymetrických jám sú na obrázkoch². V prípade nesymetrických jám je pravdepodobnosť nájdania rozdelená medzi jamami nerovnomerne.



Klasickým analógom je dvojica *viazaných* HO, keď od vlastných kmitov *izolovaných* HO prejdeme do novej bázy, pozostávajúcej z *vlastných módo*v viazaných HO

$$X_a(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_a \cos(\omega_a t + \varphi_a) \quad X_b(t) = x_1(t) - x_2(t) = A_b \cos(\omega_b t + \varphi_b)$$

kde $x_1(t)$, $x_2(t)$ sú okamžité výchylky *jednotlivých* HO. V každom z týchto módo

sa cyklicky mení kinetická energia na potenciálnu a naopak, avšak celková energia lokalizovaná v KAŽDOM z HO sa nemení - nedochádza k *presunu* energie medzi HO. Nestacionárnym stavom je superpozícia *vlastných módo*v kmitania, $X_a(t) \pm X_b(t)$, pri ktorej dochádza k presunu energie medzi oscilátormi - **záznejom** (**rázom**).

O čom táto úloha vypovedá?

- V symetrickom prípade vidíme, že prekryvom vlnových funkcií sa *jedna* energetická hladina E_0 *štiepi* na dvojicu E_1, E_2

$$H_{11} = H_{22} = E_0 \quad H_{12} = H_{21} = -A \quad E_{1,2} = E_0 \mp A$$

²tamtiež, obr. 6.1 a 6.12

- Možnosť **tunelovania** častice do „susednej“ jamy (vyjadrená nenulovými mimodiagonálnymi členmi $-A$ v matici H) zvyšuje neurčitost jej polohy Δx , čo nutne vedie k zníženiu jej kinetickej energie (neurčitosti Δp_x), a teda celkovej energie. Vidíme to aj v nesymetrickom prípade

$$H_{11} = E_{01} < E_{02} = H_{22} \quad E_{1,2} = \frac{E_{01} + E_{02}}{2} \mp \sqrt{\frac{(E_{01} - E_{02})^2}{4} + A^2}$$

- Cyklická výmena častice (elektrónu) medzi jamami (kladne nabitými jadrami) je mechanizmom chemickej väzby v molekulách. Mimodiagonálne - tzv. **výmenné členy** (integrály)

$$H_{ij} = \int \phi_i^*(x) \hat{H} \phi_j(x) dx \quad i \neq j$$

teda reprezentujú akúsi „silu“ priťahovania atómov v molekule. V QF sú VŠETKY SILY opísané práve takouto výmenou: **Elektromagnetická** sila je výmenou **fotónov** medzi nabitými časticami. **Silná jadrová sila** je výmenou **gluónov** medzi **kvarkami**. **Slabá jadrová sila** je výmenou **W-** a **Z-bozónov** medzi **kvarkami** a **leptónmi** (elektróny, neutrína, a spol.) **Zvyšková silná sila** (držiaca atomové jadrá pokope - to nie je fundamentálna sila) je výmenou **π -mezónov** medzi **nukleónmi** (protónmi a neutrónmi). **Gravitačná** sila je výmenou (dosiaľ experimentálne nepotvrdených) **gravitónov** medzi všetkými časticami. Vo fyzike kondenzovaných látok máme množstvo iných **-ónov** sprostredkujúcich silovú interakciu na diaľku. Žiaden „nevýmenný“ mechanizmus sily nepoznáme.

- Uvedené výsledky môžeme použiť aj na dvojhladinový systém v *jednej* jame. Predpokladajme dvojicu dostupných stacionárnych hladín E_1 a E_2 , a časticu pripravenú v *nestacionárnom* stave

$$|\psi(t)\rangle = \alpha|E_1\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} + \beta|E_2\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}$$

Ako príklad použijeme nekonečnú 1D jamu o rozmere L (s reálnymi $|E_n\rangle$) a obsadenosťou dvoch najnižších hladín 50%:50%, čiže $\alpha = \beta = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Pravdepodobnosť lokalizovania častice v rámci jamy bude

$$|\psi(x, t)|^2 = \psi(x, t)\psi^*(x, t) = \dots = \frac{1}{2}|\psi_1(x)|^2 + \frac{1}{2}|\psi_2(x)|^2 + \psi_1(x)\psi_2(x) \cos \frac{(E_2 - E_1)t}{\hbar}$$

V čase sa mení pravdepodobnosť znamená *nestacionárny* jav (frekvencia oscilácií je úmerná rozdielu energií, pre $E_2 = E_1$ oscilácie zaniknú). „Oblak“ pravdepodobnosti prúdi jamou hore-dole.

- Zovšeobecnenie: $|1\rangle$ a $|2\rangle$ v uvedenom formalizme sú ĽUBOVOĽNÉ stavy, medzi ktorými môže častica prechádzať (ak sú rozlíšené *priestorovo*, hovoríme o *tunelovaní*). Preto *nemôžu* byť stacionárnymi, stacionárnymi stavmi sú ich lineárne superpozície $|E_1\rangle$ a $|E_2\rangle$. Stavy $|1\rangle$ a $|2\rangle$ majú neurčitost energie $\Delta E = \frac{E_2 - E_1}{2}$ a ich pravdepodobnosť sa cyklicky mení

$$\mathcal{P}_1(t) = |c_1(t)|^2 \sim \cos^2 \frac{\Delta E}{\hbar} t \quad \mathcal{P}_2(t) = |c_2(t)|^2 \sim \sin^2 \frac{\Delta E}{\hbar} t$$

Čo v skutočnosti znamená *nestacionárny stav* systému? Energia systému sa v čase MENÍ - to znamená, že systém si *vymieňa* energiu s OKOLÍM. Debata o nestacionárnom stave teda MUSÍ zahŕňať interakciu s okolím. V prípade častice (napr. elektrónu) v jame (napr. v atóme vodíka) obklopenej „vákuom“ to znamená emisiu/absorpciu energie (fotónu). Emisia/absorpcia fotónu sa obvykle spája s preskokom častice (napr. elektrónu) medzi stacionárnymi hladinami. Ak by však tieto stavy boli *naozaj* stacionárne, k preskoku by nikdy nedošlo! Obe hladiny majú teda nenulovú neurčitost energie ΔE - odpovedajú stavom $|1\rangle$ a $|2\rangle$ v našej schéme, s cyklickou zmenou pravdepodobnosti ich obsadenia.

Predpokladajme dvojhladinový systém 50%:50% „pripravený“ v čase $t = t_0$ v „*excitovanom*“ stave $|2\rangle$ (s vyššou energiou), $c_2(t_0) = 1$. Vzhľadom na periodickú (harmonickú) časovú závislosť pravdepodobností $\mathcal{P}_{1,2}(t)$ bude po uplynutí $\Delta t = \frac{\pi}{2} \frac{\hbar}{\Delta E}$ práve $\mathcal{P}_2(t) = 0$ - akoby došlo k preskoku častice do stavu $|1\rangle$ a *vyžiareniu* fotónu. Po uplynutí ďalšieho rovnakého Δt však bude práve $\mathcal{P}_1(t) = 0$ - akoby došlo k spätnému preskoku a *pohlteniu* fotónu. Oscilujú však len PRAVDEPODOBNOTI. Samotná častica je v superpozícii stavov $|1\rangle$ a $|2\rangle$, a fotón je v superpozícii stavov vyžiarený/nevyžiarený. Stav $|1\rangle$ ALEBO $|2\rangle$ sa stane „realitou“ až zásahom MAKROskopického objektu - napr. detektoru fotónov, a to celkom náhodne:

„cvak“ = vyžiarený fotón a stav $|1\rangle$ „necvak“ = pôvodný stav $|2\rangle$

Presnejší *kvantitatívny* opis ponúka **nestacionárna poruchová metóda**.

O SYMETRIÁCH a ZÁKONOCH ZACHOVANIA.

O symetrii „*niečoho*“ hovoríme, ak to „*niečo*“ nezmení svoje vlastnosti (napr. vzhľad, správanie) pri určitej zmene (napr. pootočení). Tým „*niečím*“ vo fyzike je *fyzika* samotná. Symetria voči posunutiu v priestore alebo čase znamená, že fyzikálne procesy prebiehajú rovnako *tu* aj *tamto*, či *teraz* aj *potom*. Symetria vzhľadom na pootočenie znamená rovnaké fyzikálne vlastnosti vo všetkých smeroch (izotropné prostredie), atď. V *našej* QF je základným zákonom SCHR s dvoma hlavnými hrdinami - hamiltoniánom \hat{H} a vlnovou funkciou ψ . Príslušná symetria teda znamená rovnaké vlastnosti \hat{H} (t.j. rovnaký *vývoj stavu* - vlnovej funkcie) aj rovnakú výpovednú hodnotu ψ (rovnaké súbory *vlastných hodnôt* merateľných veličín a ich *pravdepodobnosti*), pred aj po danej zmene. Zmenu reprezentuje operátor - **generátor** zmeny. Učené zaklínadlo znie:

Symetriám odpovedajú unitárne operátory komutujúce s hamiltoniánom.

Jedna dôležitá poučka tvrdí, že každej symetrii vzhľadom na generátor zmeny \hat{Z}_A odpovedá nejaká počas zmeny sa zachováajúca veličina A , reprezentovaná operátorom \hat{A} (ktorý „*vylúpne*“ z vlnovej funkcie zachováajúce sa vlastné hodnoty tejto veličiny). Ukážeme si, ako sa pomocou generátora zmeny \hat{Z}_A dá táto veličina nájsť (a skonštruovať jej operátor \hat{A}).

Skúmajme najprv *spojité* časopriestorové symetrie pri zmene premennej $a_i \rightarrow a_i + \Delta a_i$ (posunutie $x \rightarrow x + \Delta x$ v jednom smere alebo $t \rightarrow t + \Delta t$ v čase, či pootočenie $\phi \rightarrow \phi + \Delta\phi$), kde každá konečná zmena sa skladá z infinitezimálnych zmien $\Delta a_i \rightarrow 0$. Všeobecným riešením SCHR je superpozícia funkcií typu $\psi \sim e^{i\theta}$. Ich odpovedajúca zmena je (Taylorov rozvoj exponentu)

$$\psi \sim e^{i\theta(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots)} \rightarrow e^{i\theta(a_1, a_2, \dots, a_i + \Delta a_i, \dots)} = e^{i\theta(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots)} e^{i \frac{\partial \theta}{\partial a_i} \Delta a_i}$$

(napr. $e^{i(kx - \omega t)} \rightarrow e^{i(k(x + \Delta x) - \omega t)} = e^{i(kx - \omega t)} e^{ik\Delta x}$). Vidíme, že výsledkom pôsobenia generátora zmeny \hat{Z}_A na ψ je multiplikačný (t.j. násobiaci) faktor $e^{i \frac{\partial \theta}{\partial a_i} \Delta a_i}$. Formálne to môžeme zapísať v tvare

$$\hat{Z}_A \psi = \left(e^{i \frac{\partial \theta}{\partial a_i} \Delta a_i} \right) \psi$$

kde tento faktor odpovedá *vlastnej hodnote* operátora - generátora zmeny. Nech nás netrápi, že takáto vlastná hodnota je *komplexné číslo*, toto *nie je merateľná veličina*. Dôležité je, že jej *norma* (absolútna hodnota) je 1, a teda nemení veľkosť ψ - *nemení normu pravdepodobnosti* (to je obsah zaklínadla „*unitárny*“).

Aby sme sa vyhli „*nulám*“ pri infinitezimálnej zmene $\Delta a_i \rightarrow \epsilon (\rightarrow 0)$, skonštruujeme „*príbuzný*“ operátor v tvare

$$\frac{\hbar}{i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\hat{Z}_{A, \epsilon} - \hat{1}}{\epsilon}$$

kde $\hat{1}$ reprezentuje „*generátor ničnerobenia*“ (od infinitezimálnej zmeny odčítavame žiadnu zmenu, a delíme „*takmer ničím*“ - inými slovami, derivujeme), a $\frac{\hbar}{i}$ je „*len šikovne zvolená*“ rozmerová konštanta. Aplikujme takýto operátor na ψ (čiže dosadíme do čitateľa rozdiel zmenenej a nezmenenej vlnovej funkcie, použijeme Taylorov rozvoj $e^\epsilon \cong 1 + \epsilon$) a dostaneme výraz $\hbar \frac{\partial \theta}{\partial a_i} \psi$, ktorý spĺňa rovnosť

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial a_i} \psi = \left(\hbar \frac{\partial \theta}{\partial a_i} \right) \psi$$

A sme v celi! Výraz $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial a_i}$ je operátorom hľadanej veličiny A , so *zachovávajúcimi sa* vlastnými hodnotami $\left(\hbar \frac{\partial \theta}{\partial a_i} \right)$ pri zmene $a_i \rightarrow a_i + \Delta a_i$.

Ale moment! Ako vieme, že takéto vlastné hodnoty sa zachovávajú? (Inými slovami, ako vieme, že $\frac{\partial\theta}{\partial a_i}$ sa zachováva?) Na začiatku sme povedali, že symetrii odpovedajúca zmena (*transformácia*), reprezentovaná generátorom \hat{Z}_A , nesmie *zmeniť* časový vývoj stavu (to je definícia symetrie) - nesmie teda zmeniť hamiltonián, ktorý tento vývoj určuje v SCHR (toto je obsah zaklínadla „ \hat{Z}_A a \hat{H} komutujú“). Znamená to tiež, že \hat{Z}_A a \hat{H} majú *spoločný súbor vlastných stavov* (pochopteľne, každý so SVOJIMI vlastnými hodnotami). V izolovanom systéme sú však vlastnými stavmi \hat{H} , a tým aj \hat{Z}_A , stavy *stacionárne*, im prislúchajúce vlastné hodnoty sa preto *v čase nemenia*. Vieme teda, že výraz $\left(e^{i\frac{\partial\theta}{\partial a_i}\Delta a_i}\right)$ sa „v čase nemení“. Znamená to však, že tým zachováva $\left(\frac{\partial\theta}{\partial a_i}\right)$?

Funkcia $\left(e^{i\frac{\partial\theta}{\partial a_i}\Delta a_i}\right)$ predstavuje v komplexnej rovine kružnicu s polomerom 1, a reprezentuje *periódickú* funkciu premennej a_i s periódou $2\pi\left(\frac{\partial\theta}{\partial a_i}\right)^{-1}$. Stacionárnosť *komplexnej* veličiny v QF znamená, popri nemenej *norme* tohto čísla (čo je splnené, je rovná 1), *nemennosť periódy* v komplexnej rovine. (Např. stacionárny stav $\psi = e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$ neznamená $\psi \neq \psi(t)$, ale stav s konštantnou normou a *konštantnou periódou* zmeny fázy $2\pi\left(\frac{E}{\hbar}\right)^{-1}$.) Vlastné hodnoty operátora \hat{A} prislúchajúceho ku generátoru zmeny \hat{Z}_A sa teda naozaj ZACHOVÁVAJÚ.

Pozrime sa teraz, o aké páry veličín (A, a_i) vlastne ide:

Translačnú symetriu, t.j. nezávislosť na *priestorovom posunutí* ($a_i = x$) spĺňajú vlnové funkcie $\psi \sim e^{i\theta(x)} = e^{i\frac{p_x x}{\hbar}}$, pričom $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\theta}{\partial x} = p_x$. Zachováva sa veličinou je teda HYBNOSŤ, a jej operátorom je $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$.

Rotačnú symetriu pri pootočení ($a_i = \varphi$) spĺňajú sférické vlnové funkcie (pozri atóm vodíka) $\psi \sim e^{i\theta(\varphi)} = e^{im_l\varphi}$, pričom $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi} = \hbar m_l$. Zachováva sa veličinou je teda PRIEMET MOMENTU HYBNOSTI $m_l\hbar$, a jeho operátorom je $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}$. (Zákon zachovania momentu hybnosti má v QF, kvôli princípu neurčitosti, podobu zachovania jeho *priemetu do jednej z osí*, určeného magnetickým kvantovým číslom m_l .)

Symetriu pri posunutí času ($a_i = t$) spĺňajú stacionárne stavy $\psi \sim e^{i\theta(t)} = e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$, pričom $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\theta}{\partial t} = -E$. Zachováva sa veličinou je teda ENERGIA, a jej operátorom je $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$. (Z konceptuálnych i formálnych dôvodov nie je celkom korektné tento výraz nazývať operátorom energie, v SCHR však túto úlohu fakticky plní.)

Na celý tento príbeh sa môžeme dívať aj z pohľadu princípov neurčitosti medzi dvojicami veličín $p_x - x$, $L_z - \varphi$, $E - t$. Dokonalá presnosť prvej (zákon zachovania) odpovedá úplnej neurčitosti druhej (symetria). (K tejto téme sa ešte vrátíme v jednej z ďalších kapitol.) A že sme nám známe „predpisy“ pre operátory hybnosti, momentu hybnosti a energie odvodili zo súvisu symetrií a zákonov zachovania (teda inak ako je zvykom v učebniciach), len podčiarkuje fakt, že fyzika *nie je hierarchickým systémom pravidiel*, ale zložito pospíetanou „pavučinou“ vzájomných súvislostí.

Uvedené tri spojené symetrie nie sú jedinými symetriami v prírode, rovnako ako nie sú jedinými tieto tri známe zákony zachovania. Ďalšia zo symetrií kľúčových pre QF súvisí s **priestorovou inverziou** (bodové zrkadlenie, v 3D) - súčasným prevrátením všetkých kartézskych súradníc ($x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$, $z \rightarrow -z$). Ide o *nespojité* transformáciu (len „áno“ alebo „nie“). Symetrii vzhľadom na priestorovú inverziu odpovedá zákon zachovania **parity**. Ak je vlnová funkcia *párna* (nezmení znamienko pri obrátení súradníc), priradíme jej paritu +1. *Nepárna* funkcia má paritu -1. V prípade vektoru momentu hybnosti priestorová inverzia zmení jeho **chiralitu** (vymení pravo- a ľavotočivosť). Preto, ako uvidíme, má zachovanie parity zásadný význam pri kvantových prechodoch v atómoch (a molekulách).

Veľmi dôležitými symetriami v QF sú **kalibračné symetrie**. Iste vám neuniklo, že v QF sa (na rozdiel

od newtonovskej fyziky) vyhýbame pojmu *sila*, a v základnej „pohybovej“ rovnici našej QF namiesto toho vystupuje *potenciálna energia* - tá je však určená len „*s presnosťou na aditívnu* (t.j. sčítaciu) *konštantu*“ (čiže „kde položíme nulu“). Tomu hovoríme *kalibrácia*. Pre QF časticu s elektrickým nábojom q je $E_{pot} = q\phi$, kde ϕ je *skalárny potenciál*, určený s presnosťou na skalárnu funkciu. (Gravitačnú E_{pot} pre QF časticu spokojne zanedbávame.) *Relatívny pohyb* elektrického náboja však generuje *magnetické pole* a s ním súvisiaci *vektorový potenciál* \vec{A} . Ten síce do E_{pot} nevstupuje, lebo magnetické pole vraj „*nekoná prácu*“ (nie je *konzervatívne*), vstupuje však do HYBNOSTI aditívnym faktorom $-q\vec{A}$ (dá sa to interpretovať tak, že počas zmeny magnetického poľa existuje *indukované elektrické pole*, ktoré náboju udeľuje dodatočnú hybnosť). Z klasickej teórie EM poľa vieme, že *merateľné* „silové“ veličiny poľa $\vec{\mathcal{E}}$ a $\vec{\mathcal{B}}$, súvisiace s potenciálmi prostredníctvom vzťahov

$$\vec{\mathcal{E}} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{\mathcal{B}} = \nabla \times \vec{A}$$

sa *nezmenia* pri zmene kalibrácie

$$\phi \rightarrow \phi \pm \frac{\partial\chi}{\partial t} \qquad \vec{A} \rightarrow \vec{A} \mp \nabla\chi$$

kde χ je *ľubovoľná skalárna funkcia* (a znamienka \pm, \mp sú vecou konvencie, χ môže byť kladné aj záporné). Klasický elektromagnetizmus je teda *kalibračne symetrický*. A rovnako symetrickou je aj SCHR (dosadte a presvedčte sa): Hamiltonián má tvar

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\vec{A} \right)^2 + q\phi$$

kde sme „tradičný“ operátor hybnosti nahradili tzv. **kánonickým**, $\left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\vec{A} \right)$. A čo s vlnovou funkciou? Tá sa *unitárne* zmení o multiplikačný faktor $e^{\mp i \frac{q\chi}{\hbar}}$ (s normou 1), čiže o *stacionárnu vlastnú hodnotu* generátora kalibračnej transformácie. A aká veličina sa pritom zachováva? (Čo je $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial\theta}{\partial a_i}$ v našej všeobecnej schéme, ak $a_i = \chi$?) Je to NÁBOJ. (Mohli by sme formálne definovať operátor náboja $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \chi}$.) Kalibračná symetria elektromagnetizmu teda súvisí so *zákonom zachovania elektrického náboja*.

V modernej QF sa to kalibračnými symetriami (a súvisiacimi zákonmi zachovania) len tak hemží.

O (symetriách, zákonoch zachovania a) VÝBEROVÝCH PRAVIDLÁCH.

Nepochybne najučebnicovejším prípadom interakcie fotónu s látkou je emisia/absorpcia fotónu elektrónom v atómovom obale a odpovedajúci preskok elektrónu do iného kvantového stavu. Tak ako pri všetkých procesoch, aj tu prídu ku slovu všetky možné zákony zachovania. Splnenie niektorých je triviálne, u iných je to zložitejšie. Prejdime si najdôležitejšie z nich.

Fotón nemá elektrický (ani žiaden *iný*) náboj, tento druh zákonov zachovania je triviálne splnený. Fotón je *bozón* (častica s celočíselným spinom), takže keď absorpciou zanikne, nikomu nebude chýbať (počet bozónov sa nezachováva), a to isté platí pri jeho emisii. Jediné netriviálne vlastnosti fotónu sú jeho energia a hybnosť, moment hybnosti - spin, a parita.

S prvými dvomi menovanými tiež nebudeme mať veľa starostí. Hybnosť fotónu sa transformuje z/do hybnosti *celého* atómu. Fotón síce priamo interaguje s elektrónom, ten je však „uväznený“ v potenciálovej jame jadra, a teda jeho *stredná* hybnosť je stále *nulová*. Absorbujúci atóm teda „schyťá“ náraz, a emitujúci atóm spätný ráz. Energia fotónu sa transformuje z/do zmenenej energetickej hladiny elektrónu (zmenená E_{kin} aj E_{pot}), a pokiaľ nezanedbáme dodatočný pohyb celého atómu, tak aj do E_{kin} atómu. (Ak je atóm zabudovaný v látke, na jeho translačný pohyb môžeme zabudnúť, môže však dôjsť k jeho rozkmitaniu v kryštálovej mriežke - hovoríme tomu *teplo*. V prípade molekúl uvažujeme aj rotáciu).

V oboch prípadoch nás princíp neurčitosti nabáda k ostražitosti. Neurčitosť hybnosti častíc súvisí s ich lokalizáciou, neurčitosť energie zas s dobou života elektrónových hladín. Keďže sa kvantový preskok medzi hladinami *uskutoční*, principiálne nemôže ísť o prísne stacionárne hladiny - spektrálna čiara takéhoto prechodu má teda svoju **prirodzenú šírku**. Platia však dve veci: 1. Rozmazanie existuje *len z pohľadu štatistiky*. 2. Zákony zachovania myslia na všetko - ZACHOVÁVAJÚ SA AJ NEURČITOSTI.

Zostali nám moment hybnosti a parita - toto sú však trochu „horúce zemiaky“. Predovšetkým si musíme vyjasniť, čo sú moment hybnosti a parita *fotónu*. Z kapitoly o vlnovej funkcii vieme, že vlnovou funkciou fotónu je *vektor* \vec{A} (vektorový EM potenciál - fotóny vytvárajú vektorové EM pole). Pôvodné zložky vektora, A_x, A_y, A_z , sa pri pootočení okolo osi z o uhol φ (v kladnom zmysle, t.j. proti smeru hodinových ručičiek) transformujú na

$$A'_x = A_x \cos \varphi + A_y \sin \varphi \quad A'_y = A_y \cos \varphi - A_x \sin \varphi \quad A'_z = A_z$$

Podľa predchádzajúcej state o symetriách takémuto generátoru rotácie odpovedá zachováajúca sa veličina, ktorou nie je nič iné ako z -ová zložka *momentu hybnosti*, a ktorej operátor je

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{i} \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\hat{Z}_{S,\varphi} - \hat{1}}{\varphi}$$

Jeho aplikovaním na \vec{A} dostávame

$$\hat{S}_z \vec{A} = \frac{\hbar}{i} \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\vec{A}' - \vec{A}}{\varphi} = \frac{\hbar}{i} \begin{pmatrix} A_y \\ -A_x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left(\text{v limite } \frac{\sin \varphi}{\varphi} \rightarrow 1, \quad \cos \varphi \rightarrow 1 \right)$$

Dvojnásobným aplikovaním tohto operátora dostávame $\hat{S}_z^2 \vec{A} = \hbar^2 \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ 0 \end{pmatrix}$. Os z však nie je ni-

jak výnimočná - to isté platí, v odpovedajúcej permutácii, pre pootočenie okolo osi x aj y . Keďže $\hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2$, ľahko zistíme, že $\hat{S}^2 \vec{A} = 2\hbar^2 \vec{A}$. Faktor $2\hbar^2$ reprezentujúci *veľkosť* \hat{S}^2 musí byť rovný $s(s+1)\hbar^2$, v súlade s pravidlami kvantovania *veľkosti* momentu hybnosti, čiže pre kvantové

číslo s musí platiť $s = 1$. Moment hybnosti príslušný k operátoru \hat{S} je *spin fotónu*, a celočíselná hodnota *spinového kvantového čísla* s svedčí o tom, že fotón je *bozón*. Podľa kvantových pravidiel majú zachovávajúce sa dovolené priemety na os „z“ hodnoty $m_s \hbar$, pričom *spinové magnetické kvantové číslo* m_s nadobúda hodnoty 1,0,-1.

Ale pozor! Podľa uvedeného sú vlastnými stavmi operátora \hat{S}_z^2 vektory $\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ 0 \end{pmatrix}$. Akokoľvek je smer z ľubovoľný, zo žiadneho „uhlu pohľadu“ nie je takáto vlnová funkcia sféricky symetrická, čo by odpovedalo hodnote $m_s = 0$. Toto kvantové číslo preto fotón NEMÁ. (Pre znalejších: odpovedá to tzv. *coulombovskej kalibrácii* $\nabla \cdot \vec{A} = 0$) Aby sme si dotvorili priestorovú predstavu EM vlny („prúdu“ fotónov), zvolíme smer zachovávajúceho sa priemety spinu S_z ako smer šírenia vlny (fotónov). Vektor \vec{A} má v tomto smere nulovú zložku - „točí“ sa v rovine kolmej k smeru šírenia vlny. Rekonštruovaním merateľných polí \vec{E} a \vec{B} dostaneme pravo- či ľavotočivo kruhovo polarizovanú vlnu, čomu odpovedajú $m_s = \pm 1$.

Teraz k *parite fotónu*. Tá súvisí so správaním vlnovej funkcie pri preklopení všetkých troch kartézskych súradníc. Priestorová inverzia zmení znamienko všetkých troch zložiek „bežných“ vektorov - tzv. *polárnych* - ako \vec{r} alebo \vec{v} . Pri *axiálnych* vektoroch či *pseudovektoroch*, ako je moment hybnosti $\vec{r} \times m\vec{v}$, sa však znamienko zmení $2 \times 3 = 6$ -krát. Vlnovou funkciou fotónu je *polárny* vektor \vec{A} , a teda vnútorná parita fotónu je $(-1)^3 = -1$.

Teraz už snáď môžeme prikročiť k analýze zákonov zachovania momentu hybnosti a parity, napr. pri emisii fotónu atómom. Musí platiť, že celkový moment hybnosti aj parita atómového stavu pred emisiou sa rovnajú SÚČTU momentov hybností a SÚČINU parít atómu po emisii a emitovaného fotónu. Ale črtá sa nový problém: Ako sa sčítavajú momenty hybnosti v QF? Súčet „klasických“ vektorov totiž závisí od ich smeru, resp. od uhla, ktorý vektory zvierajú. Ak $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, potom pre ich veľkosti platí $|a - b| \leq c \leq a + b$. Všemocný princíp neurčitosti v QF však neumožňuje vektorom momentu hybnosti mať definovaný smer! (Pozri kapitolu o princípe neurčitosti.) Vieme tiež, že vektor momentu hybnosti sa nikdy „nedokáže vzpriamiť“ v plnej svojej veľkosti $\sqrt{l(l+1)}\hbar$, ale len do maximálneho priemety $l\hbar$ (max. hodnota magnetického kvantového čísla m_l je l). Z toho sa dá tipovať, že sčítavanie vektorov momentu hybnosti v QF sa riadi nasledujúcimi pravidlami:

1. Veľkosť súčtu sa pohybuje v hraniciach od $|l_1 - l_2|\hbar$ do $(l_1 + l_2)\hbar$, čo je rozdiel a súčet max. priemety do vybraného smeru.
2. Aj veľkosť súčtu z bodu 1. je opäť len priemety.
3. Takže sčítavanie vektorov (momentu hybnosti) je vlastne *sčítavaním priemety*, $m_{l1} + m_{l2}$. Priemety výsledku (súčtu) sú dané *magnetickým kvantovým číslom* m_l , ktoré nadobúda všetky možné kombinácie $m_{l1} + m_{l2}$, pričom ich počet je $(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)$.

Je to rozumný tip, a nie je to až také neobvyklé. Veď aj sčítavanie „klasických“ vektorov je sčítavaním *po zložkách* (sčítajú sa priemety na osiach x, y, z , a z výsledných priemety sa skonštruuje výsledný vektor). V QF sú *ostre* priemety „dopriate“ len jednej osi (kým na zvyšných dvoch osiach sú priemety rozmazané neurčitostou), takže sčítavame len to, čo má zmysel sčítať. Navyše, vieme to celé aj dokázať: Podľa predchádzajúceho článku o symetriách pre operátor zachovávajúcej sa veličiny - priemety VÝSLEDNÉHO momentu hybnosti (v našej úvahe elektrónu *pred*, resp. páru elektrón-fotón *po emisii*) platí

$$\begin{aligned} \hat{L}_z \psi(\varphi_1, \varphi_2) &= \frac{\hbar}{i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(\varphi_1 + \epsilon, \varphi_2 + \epsilon) - \psi(\varphi_1, \varphi_2)}{\epsilon} = \dots \text{ (Taylorov rozvoj)} \\ &\dots = \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \right) \psi(\varphi_1, \varphi_2) = (\hat{L}_{z1} + \hat{L}_{z2}) \psi(\varphi_1, \varphi_2) = \hbar(m_{l1} + m_{l2}) \psi(\varphi_1, \varphi_2) \end{aligned}$$

kde $\psi(\varphi_1, \varphi_2)$ je vlnová funkcia páru „sčítancov“. Keďže $\hat{L}_z \psi = \hbar m_l \psi$, niet už čo dodať.

Identifikujme teda „aktérov“ emisie:

1. Fotón: Moment hybnosti daný spinom, $s_f = 1$, $m_f = \pm 1, 0$ (0 sa pre *individuálny* fotón nerealizuje, zaslúži si ale osobitný komentár neskôr). Vnútoraná parita $P_f = -1$.
2. Elektrón: Moment hybnosti daný orbitálnym pohybom (na spin nachvíľu zabudnime), pre danú podvrstvu l je $m_l = l, l-1, \dots, -l+1, -l$. Parita daná *súčinom* vnútornej parity elektrónu $P_{e,i} = 1$ (triviálne danej *konvenciou*) a paritou vlnovej funkcie, $P_{e,l} = (-1)^l$ - sférické vlnové funkcie sú párne pre párne l a nepárne pre nepárne l .

Zákon zachovania *momentu hybnosti* určuje **výberové pravidlo** prechodu

$$\Delta m_l = m_f = \pm 1, 0(?)$$

(moment hybnosti atómu sa môže zmeniť len o moment hybnosti emitovaného fotónu).

Zákon zachovania *parity* určuje výberové pravidlo

$$\Delta l = 1 \quad (P_{e,\text{pred emisiou}} = P_f P_{e,\text{po emisii}})$$

Tento zákon v zásade pripúšťa *ľubovoľné nepárne* Δl , fotón však môže „odnieť“ maximálne $l = 1$. (Aj z toho vidíme, ako sú oba zákony navzájom prepojené.)

Teraz k opomenutému spinu elektrónu. Celkový elektrónový moment hybnosti je súčtom jeho orbitálneho momentu a spinu

$$\vec{L} + \vec{S} = \vec{J}$$

Znamená to, že sčítavame ich magnetické čísla, $m_l + m_s = m_j$, čo je $(2l+1)(2s+1)$ kombinácií

$$m_j = j, j-1, \dots, -j+1, -j \quad |l-s| \leq j \leq l+s$$

pričom $s = \frac{1}{2}$, a l je dané atómovou podvrstvou. Na emisiu (či absorpciu) fotónu elektrónom sa môžeme dívať aj „klasickými očami“: Preskok elektrónu do iného stavu znamená priestorovú zmenu nábojového rozloženia - náhlu zmenu EM poľa, ktorá sa ako EM impulz šíri preč. Spin „preskakujúceho“ elektrónu tento impulz síce „cíti“, ale s jeho dominantnou *elektrickou* zložkou neinteraguje (nemá dôvod), a s *magnetickou* zložkou interaguje (prostredníctvom spinového *magnetického* momentu) *zanedbateľne*. Výsledkom je *doplnené* výberové pravidlo

$$\Delta m_j = \Delta m_l \quad , \quad \Delta m_s = 0$$

Z takéhoto pohľadu ľahko pochopíme, prečo nedochádza k preskoku elektrónu medzi *sféricky symetrickými* s -stavmi ($l = 0$), ako je napr. prechod $2s - 1s$. EM impulz vzniknúvši pri takomto prechode by mal *výlučne radiálnu* zložku elektrického poľa, teda v smere pohybu impulzu. A ako vieme z teórie, EM vlna vo voľnom priestranstve pozdĺžnu zložku NEMÁ.

Makroskopický kontext má aj kontroverzný prechod $\Delta m_l = 0$. Takýto prechod MÔŽE nastať (ak aspoň jeden z elektrónových stavov nemá sférickú symetriu - viď predchádzajúca poznámka) napriek tomu, že fotóny s $m_f = 0$ NEEXISTUJÚ. Štatistický charakter QF však zamúti vodu: stav takéhoto fotónu má *neurčitý* priemet momentu do smeru pohybu - je v SUPERPOZÍCIÍ stavov $m_f = \pm 1$ (štatisticky každý druhý fotón má opačný priemet spinu) !!! Z makroskopického pohľadu je to superpozícia pravo- a ľavotočivej kruhovej polarizácie - *lineárne* polarizovaná vlna - a tá existuje.

Uvedený súbor výberových pravidiel určuje tzv. **dovolené prechody** v atóme. Pri ich formulovaní sme však všeličo zanedbali. *Zanedbané* však neznamená *neexistujúce*, a štatistický charakter QF nám to spočíta - sem-tam nastanú tzv. **zakázané prechody**. Ich výskyt je však VÝRAZNE menej pravdepodobný. Je to ako so všetkými zákazmi - keby sa isté veci nediali, nebolo by ich treba ani zakazovať.

V zložitejších štruktúrach, napr. v molekulách, je „botanika“ kvantových stavov komplexnejšia, a tomu odpovedajú aj výberové pravidlá. Zákony zachovania, ktoré sú v pozadí, sú však rovnaké.

Trochu viac o PRINCÍPE NEURČITOSTI

Predstavme si takýto (myšlienkový) experiment: Chceme zmerať hybnosť fotónu $p = \frac{E}{c} = \frac{\hbar\omega}{c}$ pomocou atómu, ktorého známe energetické spektrum obsahuje také dve hladiny E_i, E_j , ktorých rozdiel odpovedá *predpokladanej* energii nášho fotónu. Takýto atóm dokáže náš fotón absorbovať a po krátkej chvíli opäť emitovať do náhodného smeru. Ak teda krátko po „vystrelení“ nášho fotónu na atóm (v smere osi x) zaregistrujeme identický fotón vo vychýlenom smere, vieme, že náš fotón bol absorbovaný. Tým sme zmerali jeho hybnosť $p_x = \frac{E_i - E_j}{c}$ s neurčitou Δp_x danou len neurčitou hladín E_i, E_j . Polohu atómu (a teda miesta, kde k absorpcii došlo) určíme s istou presnosťou Δx , ktorá však nijak nesúvisí s neurčitou energetických hladín. Neurčitosti Δp_x a Δx hybnosti fotónu a miesta jej merania (čiže polohy fotónu v okamihu merania) sú teda navzájom *nezávislé*. Keďže presnosť individuálneho merania (ľubovoľnej JEDNEJ veličiny) nie je *principiálne* obmedzená (a *technické* prekážky myšlienkový experiment nerieši), môžeme Δp_x aj Δx urobiť *súčasne* ľubovoľne malými, a platí to aj pre ich súčin. Znamená to porušenie princípu neurčitosti hybnosť-poloha? Odpoveď je NIE! Princíp neurčitosti totiž v tomto prípade aplikujeme *neadekvátne*. Ukážeme si prečo.

Najprv však malá zachádzka do klasickej mechaniky. V hamiltonovskom formalizme majú základné pohybové rovnice tvar

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k} = \{q_k, H\} \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = \{p_k, H\}$$

kde $q_k = q_k(t)$ sú *zovšeobecnené* súradnice v k -rozmernom priestore (môžu nimi byť kartézské alebo krivočiare súradnice, uhly,...), $p_k = p_k(t)$ sú k *nim kánonicky konjugované* (pridružené) *zovšeobecnené* hybnosti, $H(q_k, p_k, t)$ je *klasický hamiltonián* (mech. energia), a

$$\{a, b\} = \sum_k \left(\frac{\partial a}{\partial q_k} \frac{\partial b}{\partial p_k} - \frac{\partial a}{\partial p_k} \frac{\partial b}{\partial q_k} \right)$$

sú *Poissonove zátvorky*, pričom platí

$$\{q_k, q_l\} = \{p_k, p_l\} = 0 \quad \{q_k, p_l\} = 1 \text{ ak } k = l, \text{ inak } 0$$

Prvá z Hamiltonových rovníc nemá dynamický význam, definuje však zovšeobecnenú rýchlosť. V druhej z nich poľahky spoznáme Newtonovu pohybovú rovnicu.

Prvý pre nás dôležitý záver je, že Poissonove zátvorky pre *kánonicky konjugované* páry (q_k, p_k) sú NENULOVÉ. Druhý, pre QF dôležitý záver je, že pre ľubovoľnú funkciu $f(q, p, t)$ platí

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}$$

Ak táto funkcia *explicitne* nezávisí od času (izolovaný systém, $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$), tak jej časový vývoj riadia jej Poissonove zátvorky s hamiltoniánom. Pre samotný hamiltonián to znamená, že ak nezávisí od času *explicitne*, tak sa energia *zachováva* (lebo $\{H, H\} = 0$).

Prechodom od klasickej ku kvantovej mechanike sú kánonickým premenným q, p , dynamicky mapujúcim stav vo *fázovom priestore* $q - p$, priradené *operátory* \hat{q}, \hat{p} , pôsobiace v *Hilbertovom priestore* stavov (vlnových funkcií). Poissonove zátvorky sú súčasne nahradené **komutátormi**

$$\frac{1}{i\hbar} [\hat{a}, \hat{b}] = \frac{1}{i\hbar} (\hat{a}\hat{b} - \hat{b}\hat{a})$$

(hovori sa tomu *kánonické kvantovanie*), pričom pre kánonické premenné platí

$$[\hat{q}_k, \hat{q}_l] = [\hat{p}_k, \hat{p}_l] = 0 \quad [\hat{q}_k, \hat{p}_l] = i\hbar \text{ ak } k = l, \text{ inak } 0$$

Evolúčna rovnica pre operátor \hat{F} prislúchajúci veličine $f(q, p, t)$ má tvar

$$\frac{d\hat{F}}{dt} = \frac{\partial\hat{F}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[\hat{F}, \hat{H}]$$

Hamiltonián opäť určuje časový vývoj stavu, a operátor komutujúci s hamiltoniánom sa zachováva, ak nezávisí na čase *explicitne*. (Hamiltonián explicitne nezávislý na čase odpovedá *stacionárnym* stavom.) Čo to však znamená pre samotnú veličinu, príslušnú k takémuto operátoru? Zo SCHR, definície strednej hodnoty a pri troche úsilia sa dá ukázať, že pre strednú hodnotu $\langle f \rangle$ platí

$$\frac{d\langle f \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial\hat{F}}{\partial t} \right\rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{F}, \hat{H}]\rangle$$

Ak je operátor \hat{F} konštantou pohybu (zachovávaajúcou sa veličinou), potom sa zachováva *stredná hodnota aj celá štatistika príslušnej* veličiny (pravdepodobnosti, smerodajná odchýlka, a pod.). Pre pohyb častice o hmotnosti m v potenciáli $V(x)$ (v jednom rozmere, s použitím komutátorov príslušných operátorov) dostávame známe *Ehrenfestove vzťahy*

$$\frac{d\langle x \rangle}{dt} = \frac{\langle p_x \rangle}{m} \quad \frac{d\langle p_x \rangle}{dt} = - \left\langle \frac{dV}{dx} \right\rangle$$

čo je takmer klasická mechanika. Ak je štatistická rozmazanosť okolo stredných hodnôt zanedbateľná, dostávame presne klasické vzťahy.

Najdôležitejší záver z hľadiska nášho pôvodného problému je ten, že *operátory kánonicky konjugovaných párov dynamických premenných* (q_k, p_k) NEKOMUTUJÚ. Pre smerodajné odchýlky $\sigma_a = \sqrt{\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2}$ vlastných hodnôt páru operátorov platí všeobecná nerovnosť

$$\sigma_a \sigma_b \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|$$

Pre kánonicky konjugované páry odtiaľ dostávame *princíp neurčitosti*

$$\Delta q_i \Delta p_i \geq \frac{\hbar}{2}$$

Pre adekvátne aplikovanie tohto princípu je kľúčové pochopiť jeho súvis s klasickou mechanikou a VIAZANOSŤ na *kánonicky konjugované páry dynamických premenných*. V našom myšlienkovom experimente Δp_x je neurčitnosť hybnosti *fotónu*, kým Δx je neurčitnosť polohy *meracieho zariadenia* (atómu) - poloha fotónu počas merania je pritom neurčitá oveľa výraznejšie (čo vyplýva už z povahy častice existujúcej len pri rýchlosti c). Ide teda o dva *rôzne a nezávislé stupne voľnosti*. Vo všeobecnosti platí, že *operátory prislúchajúce nezávislým stupňom voľnosti komutujú!* Princíp neurčitosti sa preto na takúto dvojicu premenných nevzťahuje.

Jasnejší vzhľad do problému získame, ak si uvedomíme, že kánonicky konjugované páry premenných opisujú vývoj stavu vo *fázovom priestore*. „Preklopenie“ takýchto súradníc do „nášho“ 3D priestoru je jednoznačné len v prípade *jednočasticového* problému - súradnici q_x vo fázovom priestore odpovedá súradnica x v 3D priestore (obe charakterizujú polohu častice). V prípade systému n častíc sú ich (x -ové) súradnice x_1, x_2, \dots, x_n premietnuté do súradníc *jediného* bodu - polohy systému - v $6n$ -rozmernom fázovom priestore. Kánonickým kvantovaním (prechodom od fázového ku Hilbertovmu priestoru stavov) tento problém nezanikne. Je preto rozumné aj v prípade *jedinej* častice dôsledne rozlišovať medzi súradnicou *častice* ako JEJ DYNAMICKOU premennou (meniacou sa v čase) a súradnicou bodu na 3D „javisku“ (teda fixného bodu, ktorým častica práve prechádza). Neurčitnosť polohy v našom myšlienkovom experimente teda môžeme vnímať aj ako neurčitnosť určenia bodu na 3D „javisku“ - a to je úplne iný stupeň voľnosti ako pohyb fotónu.

Užitočnosť uvedeného prístupu sa naplno prejaví pri analýze „kontroverzného“ princípu neurčitosti energia-čas

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

Polemika ohľadom významu výrazu Δt (a použiteľnosti tohto princípu neurčitosti) sprevádza QF od jej zrodu, a nepochybne súvisí s problémom fyzikálneho „uchopenia“ samotného pojmu *čas*. Jednosmerný „chod“ času totiž nemá oporu v zákonoch QF - všetky procesy v mikrosvete rovnako dobre môžu prebiehať *vratne*, v smere i proti smeru „chodu“ času (na rozdiel od procesov v makrosvete, prebiehajúcich podľa zákonov termodynamiky). Čas t , ktorý vystupuje v pohybových rovniciach, klasických i kvantových (Newtonovej i SCHR) je *makroskopickým* (termodynamickým) časom, teda akýmsi *evolúčnym parametrom* („taktujúcim“ vývoj tak ako ho vnímame my ľudia). Nie je *dynamickou premennou prislúchajúcou* časticiam/objektom. Je to akýsi „univerzálny“ čas. Princíp neurčitosti $E - t$ preto nie je odvodený z komutačných vzťahov, čiže nemá pevný matematický základ. Dá sa mu teda veriť?

Z formalizmu nestacionárnej poruchovej metódy vyplýva, že ak v dôsledku (malej) poruchy (pôsobenia vonkajšieho faktora) QF systém zmení svoju energiu, tak neurčitosť ΔE spolu s DOBOU TRVANIA poruchy Δt PRIBLIŽNE splňajú náš vzťah neurčitosti. Ide však o približný výpočet, a navyše v reálnom experimentálnom kontexte je „doba trvania poruchy“ nedostatočne definovaný pojem. (Čo to znamená napr. pri zrážke dvoch telies?) A napokon, spomínaný výsledok má *štatistický* charakter, a jeho aplikácia na individuálne meranie je nejednoznačná.

Špeciálna teória relativity (TR) zviazala čas s priestorom do jednotného časopriestoru (či priestoročasu) pomocou *lorentzovsky kovariantného štvorvektorového formalizmu*, a identickým spôsobom zviazala energiu s hybnosťou. Ponúka sa teda elegantná myšlienka vyjadriť princípy neurčitosti hybnosť-poloha a energia-čas v jednotnom štvorvektorovom zápise. Hneď však zistíme, že to tak ľahko nejde. TR zbavila čas, rovnako ako priestor, univerzálnosti („teraz“ sa stalo *relatívnym* - závislým od pozorovateľa) do tej miery, že jednotlivé body (udalosti) v 4D časopriestore sa lorentzovsky transformujú od pozorovateľa k pozorovateľovi. Pre *daného* pozorovateľa však stále zostávajú bodmi *jeho* fixného 4D „javiska“ so súradnicami x a t . Keďže nie sú dynamickými premennými častice, v QF im operátory nepriraďujeme. Na druhej strane, energia (ako súčasť štvorvektora hybnosti-energie) je dynamickým parametrom častice (rovnako ako hybnosť), vyvíjajúcim sa na tomto „javisku“, a je jej priradený operátor (\hat{H}). Takže E a t nie sú konjugovanými premennými, rovnako ako nimi nie sú p_x častice a x „javiska“. Vzťah neurčitosti, v ktorom Δt je časový interval meraný „našimi hodinkami“, je teda nesprávny, rovnako ako ten, v ktorom Δx je merané „naším metrom“.

Príkladom by opäť mohlo byť meranie energie fotónu (čo je to isté ako meranie jeho hybnosti) s presnosťou ΔE , pričom doba tohto merania (doba interakcie s meracím zariadením) meraná „našimi hodinkami“ je Δt . Keďže ide o nezávislé stupne voľnosti (merané veličiny netvoria konjugovaný pár), vzťah neurčitosti tu neplatí. Neurčitosť stanovenia energie naozaj NIE JE obmedzená dobou jej merania! Tento záver na prvý pohľad odporuje našej intuícii. Veď rozmazanie energie/frekvencie impulzu - vlnového balíka - je nepriamo úmerné „dĺžke“ jeho trvania (pre fotón $E = \hbar\omega$). Vieme tiež, že frekvenciu tónu určíme tým presnejšie, čím väčší počet periód zaznamenáme. Je tu však zásadný rozdiel: $\Delta\omega$ a Δt vlnového balíka SÚ konjugované (fourierovsky združené) premenné, Δt JE dynamickou premennou balíka (v disperznom prostredí sa balík rozpadá a Δt rastie). A počítadlo periód tónu predstavuje JEHO „vlastné hodinky“. Ak teda zvolíme meranie TAKÉHOTO Δt , bude ním ΔE obmedzené -vzťah neurčitosti BUDE platiť.

Zjavne teda existuje spôsob ako zaobstarať častici/objektu „vlastné hodinky“. (Nie však *vlastný čas* v relativistickom zmysle - ten by bol opäť len časovou súradnicou „súkromného javiska“, teda súradnicovej sústavy spojennej s časticou.) Týmito „hodinkami“ môže byť *dynamická* premenná $f(t)$ skúmaného systému, „rozumným“ spôsobom závisiaca na čase (niečo ako *poloha* ručičky *vlastných* hodín) - uhol natočenia rovnomerne rotujúcej časti objektu, poloha rovnomerne sa pohybujúceho

objektu, a pod. Pre neurčitosti takejto veličiny a energie, a pre ich operátory, potom musia platiť vzťahy

$$\Delta f \Delta E \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{F}, \hat{H}] \rangle \right| = \frac{\hbar}{2} \frac{d\langle f \rangle}{dt} = \frac{\hbar}{2} \frac{\Delta f}{\Delta \tau}$$

kde v pravej časti rovnice sme definovali charakteristickú dobu $\Delta \tau = \frac{\Delta f}{\frac{d\langle f \rangle}{dt}}$, počas ktorej sa $\frac{d\langle f \rangle}{dt}$ výraznejšie nemení. No a odtiaľ už priamo vzíde náš princíp neurčitosti $E - \tau$. Veličina $\Delta \tau$ je akosi *strednou dobou života stavu*, viazanou na dynamickú premennú f systému, a je konjugovaná s jeho energiou. Touto schémou môžeme opísať aj vlnový balík, pričom dynamickou premennou bude poloha (stred) balíka q_x a $\Delta \tau$ bude doba jeho posunutia o svoju šírku Δq_x . (Označením q_x a τ zámerne odlišujeme polohu a čas ako *dynamické* premenné od *časopriestorových* súradníc x, t meraných „naším metrom a hodinkami“.) Týmto spôsobom charakterizujeme aj neurčitosť energie nestacionárnych (oscilujúcich alebo metastabilných) stavov.

Časomierou môže byť aj poloha q_x objektu *voľne* sa pohybujúceho rýchlosťou v_x , pričom neurčitosť tejto časomierey je

$$\Delta \tau = \frac{\Delta q_x}{v_x} \geq \frac{\hbar}{v_x \Delta p_x} = \frac{\hbar}{\Delta E} \quad \left(\Delta E = \frac{dE}{dp_x} \Delta p_x \right)$$

Vzťah $E - \tau$ sme tu odvodili z „poctivého“ princípu neurčitosti $p_x - q_x$. Čas je tu dynamickou premennou (rovnako ako q_x) s priradeným hermitovským operátorom $\frac{\hat{q}_x}{v_x}$. Princíp neurčitosti energia-čas sa teda (za istých okolností) DÁ vybudovať na pevnom základe matematického formalizmu QF a štatistickej interpretácie, rovnocenne s princípom neurčitosti hybnosť-poloha. Dvojice (p_x, q_x) a (E, τ) tvoria konjugované páry (podliehajúce princípu neurčitosti). Súčasne dvojice (p_x, E) a (q_x, τ) v *jednočasticovom* prípade sú relativisticky (lorentzovsky) kovariantné, rovnako ako dvojica (x, t) .

V jednej z predchádzajúcich kapitol sme naznačili súvis princípu neurčitosti so symetriami a zákonmi zachovania. Ukázali sme, že medzi generátorom unitárnej transformácie \hat{Z}_A , odpovedajúcej zmene premennej a o Δa , a operátorom veličiny zachovávaajúcej sa pri takejto transformácii, \hat{A} , platí vzťah $\hat{A} = \frac{\hbar}{i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\hat{Z}_{A, \epsilon} - \hat{1}}{\epsilon}$, čo je linearizovaná verzia všeobecnejšieho vzťahu $\hat{Z}_A(\Delta a) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{A} \Delta a}$. Posunutiu v priestore (v smere x , pri zachovaní hybnosti) a v čase (pri zachovaní energie) odpovedajú generátory zmeny

$$\hat{Z}_{p_x}(\Delta x) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{p}_x \Delta x}, \quad \hat{p}_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \quad \hat{Z}_E(\Delta t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \Delta t}, \quad \hat{H} = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}$$

Kým druhý výraz je *definíciou* operátora hybnosti, posledná rovnosť je ekvivalentná SCHR. Tu však NEJDE o definíciu hamiltoniánu, rovnosť interpretujeme ako: „*časový vývoj stavu je určený hamiltoniánom*“. Rovnosť je len *kvantitatívna* (matematická, nie konceptuálna). Rozdielnosť prístupov spočíva v tom, že kým x tu vystupuje v úlohe dynamickej premennej častice (v SCHR pre l častíc každej bude priradené x_l), čas t v SCHR vystupuje ako (vonkajší) parameter, a nie ako kánonicky konjugovaná premenná k hamiltoniánu častice (prípadne sústavy l častíc). Keďže SCHR je pohybovou rovnicou systému, v prípade viacprvkového systému je tento konceptuálny rozdiel zjavný. Generátor posunutia l -časticového systému o Δx je daný operátorom $\hat{P}_x = \sum_l \hat{p}_x^{(l)}$. Generátormi pridruženými k časopriestorovej zmene (meranej „našími metrami a hodinkami“) sú preto vo všeobecnosti operátory obsahujúce \hat{H} a \hat{P}_x *celej sústavy*. No a relativisticky kovariantnými „partnermi“, analogickými dvojici časopriestorových súradníc (x, t) , sú generátory translácie v priestore a v čase.

Trochu viac o SUPERPOZÍCII (Dvojštrbinový a Sternov-Gerlachov experiment.)

Problém *merania* v QF, o ktorom budeme hovoriť neskôr, nemožno pochopiť bez porozumenia *superpozícii* v QF, ktorá sa v experimentoch prejavuje pozorovaním *interferencie*. Na ňu a na okolnosti jej zániku sa pozrime podrobnejšie.

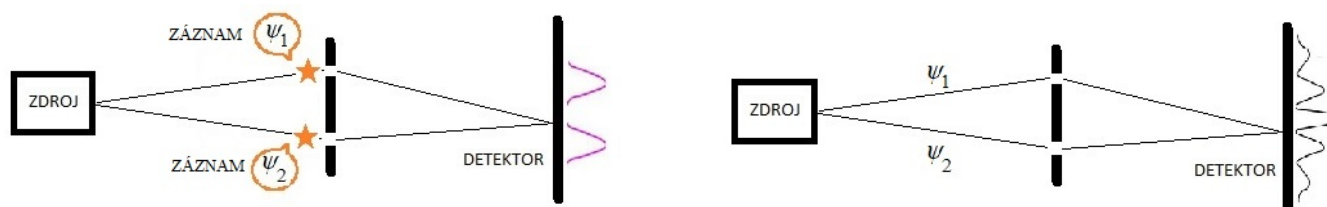
Začnime dvojštrbinovým experimentom - preletom *jednotlivých* častíc (fotónov, elektrónov, atď.) dvojicou otvorov v nepriechodnej prekážke. Môžeme zistiť, ktorým z otvorov jednotlivé častice prelietajú, napr. ak „osvietime“ otvory pomocnými časticami - „policajtmi“, a skúmame ich rozptyl na prelietajúcich časticách. Ak „policajti“ pomocou SVOJICH detektorov každej častici takto priradia stav, ψ_1 pre otvor 1 a ψ_2 pre otvor 2, pre pozorovateľa za prekážkou (tienidlo, detektor) je pravdepodobnosť dopadu častice \mathcal{P} *súčtom pravdepodobností* preletu jednotlivými otvormi

$$\mathcal{P} = \sum_{i=1}^2 \mathcal{P}_i \quad \mathcal{P}_i = \psi_i \psi_i^* = |\psi_i|^2$$

či už nahliadne do „policajných“ záznamov na ich detektoroch alebo nie. To odpovedá *klasickej - nekoherentnej superpozícii pravdepodobností*. Ak však zrušíme „policajtov“, každá prelietajúca častica zotrvá v *koherentnej superpozícii stavov* $\psi_1 + \psi_2$, a pravdepodobnosť detekcie pozorovateľom je

$$\mathcal{P} = (\psi_1 + \psi_2)(\psi_1 + \psi_2)^* \neq \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$$

- dochádza k *interferencii*. Znamená to (v ortodoxnej interpretácii), že každá častica prelieta súčasne oboma otvormi (nie je teda *časticou* v klasickom význame).

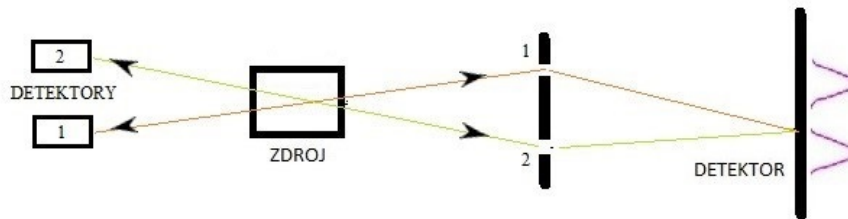


Môže sa tiež stať, že naši „policajti“ sú natoľko slepí, že nedokážu rozlíšiť, pri ktorom z otvorov došlo k rozptylu. Napríklad ak ich (de Broglieho) vlnová dĺžka (a teda rozlišovacia schopnosť) je väčšia než vzdialenosť štrbín. V takom prípade interferenciu tiež pozorujeme.

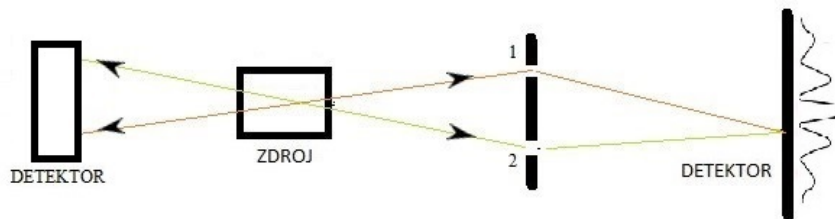
Tradičnou „učebnicovou“ interpretáciou interferencie zrušenej „policajným“ zásahom je zmena *hybnosti* prelietajúcich častíc rozptylom na „policajtoch“, dostatočná k tomu, aby sa interferenčný obrazec ROZMAZAL. Ak naopak interferenciu pozorujeme, je to preto, že hybnosť udelená časticám „policajtmi“ (nepriamo úmerná ich vlnovej dĺžke) nie je dostatočná na rozmazanie interferenčného obrazca (prípadne je nulová). Podobne absencia interferencie pri prelete *makroskopických* objektov (napr. projektilov zo strelnej zbrane) sa vysvetľuje extrémne malou de Broglieho vlnovou dĺžkou makroskopických objektov, ktorá určuje vzdialenosť interferenčných maxím a miním. Aj keď uvedené dôvody pre pozorovateľnosť či *nepozorovateľnosť* interferencie sú nepochybne presvedčivé, v skutočnosti v oboch prípadoch ide o POLOPRAVDU, tak trochu zahmlievajúcu úplný pravdivý obraz. Že je to tak, ukáže nasledujúci myšlienkový experiment.

Predpokladajme modifikovaný dvojštrbinový experiment, v ktorom zdroj produkuje DVOJICE častíc (napr. páry elektrón-pozitrón alebo navzájom opačne polarizované fotóny) letiacich do PRESNE opačných smerov - vždy jednu k otvorom a druhú k detektorom v opačnom smere. Spoločný „zrod“ takéhoto páru zabezpečuje *koreláciu* ich vlastností zákonmi zachovania (hybnosť, vlastný moment

hybnosti - spin, náboj, atď.) - sú **kvantovo previazané** (angl. *entangled*, spomínali sme ich v kapitole o nelokálnosti). Zákon zachovania hybnosti zabezpečí ich rozbiehavý pohyb „po priamke“, a na základe záznamu z príslušného detektora vľavo vieme o častici letiacej vpravo, ktorým z otvorov preletela (obrázok nižšie). Na tienidle (detektore vpravo) žiaden interferenčný obrazec nespozorujeme napriek tomu, že častice pri prelete otvorami neboli rozptyľované žiadnymi „policajtmi“. Interferenciu v tomto prípade nenarušili „policajti“ ale INFORMÁCIE zaznamenané v detektoroch vľavo. A to bez ohľadu na to, či sa o tieto informácie nejaký mysliaci tvor zaujíma.

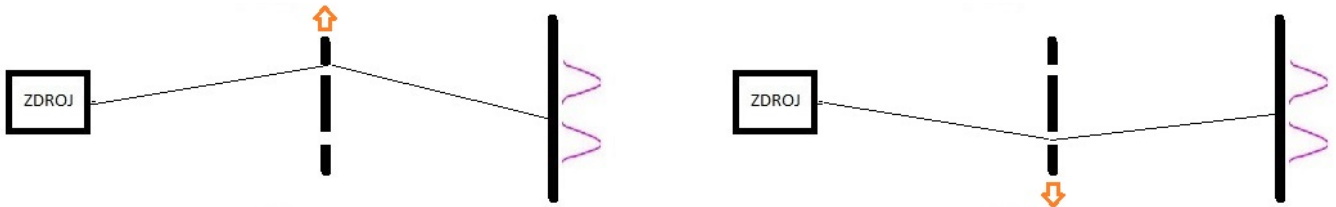


Aby nebolo prekvapení málo, modifikujme tento experiment tým, že nahradíme dvojicu detektorov vľavo *jediným*, ktorý zaznamená impulz nezávisle na tom, ktorým otvorom častica preletí. Strácame teda túto informáciu - a objaví sa interferenčný obrazec. Takémuto zariadeniu hovoríme **kvantový zmizík** či **guma** (angl. *quantum eraser*). O pozorovateľnosti interferencie opäť rozhoduje (ne)dostupnosť informácie (prinajmenšom sa to tak javí).



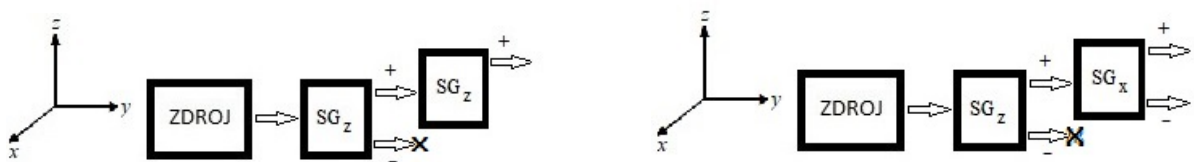
Vráťme sa k prvému experimentu s jednotlivými časticami a „policajtmi“. Sme oprávnení konštatovať, že aj tu nemuseli byť pravou príčinou absencie interferencie „policajné obušky“ (zmenené hybnosti častíc), ale „policajné záznamy“ (informácie). Alebo skôr, že oba efekty sú v istom zmysle *ekvivalentné*. Informácia o polohe kvantového objektu rozptylom na „policajtovi“ v blízkosti jedného z otvorov je prejavom jeho „časticovosti“ - častica vždy prelieta len *jedným* otvorom, a *neinterferuje*. Inak povedané, „policajt“ v našom QF objekte *prebudil* časticu (ako elixír dr. Jekylla v ňom prebudil pána Hydeja). Rovnako ak hovoríme o zmenenej hybnosti objektu, opisujeme jeho časticovú povahu. Ak však nedokážeme či nechceme prebudiť časticu, prelietajúci objekt si zachová *vlnovú* povahu, prelieta *súčasne oboma* otvorami a interferuje. Experimenty s pármí objektov však ukazujú, že prebudiť časticu možno aj nepriamo - *informáciou* „z druhej ruky“ - vďaka tomu, že ide o kvantovo previazaný pár. Príroda nám nikdy nevyjaví časticovú aj vlnovú stránku QF objektov *súčasne* („stráží“ to princíp neurčitosti), a o tom ktorú tvár nám ukáže, rozhoduje - zdá sa - púha *dostupnosť* informácie o častici (dostupnosť v zmysle *existencia*, bez ohľadu na jej využitie).

Ale moment! Nie sú naše objekty *časticami* od samého začiatku - ich „prípravy“ v zdroji? Iste, zdroj emituje častice, voľným priestranstvom sa však nerušené šíria ako vlny (všetkými možnými dráhami), a otvorami v prekážke prechádzajú tiež ako interferujúce vlny - pokiaľ v nich nie sú lokalizované „policajtmi“. „Policajtom“ môže byť aj samotná prekážka - ak nie je fixná a prelietajúca častica jej udelí hybnosť líšiacu sa pre jednotlivé otvory. Takáto *informácia* nesená prekážkou opäť znemožní interferenciu.

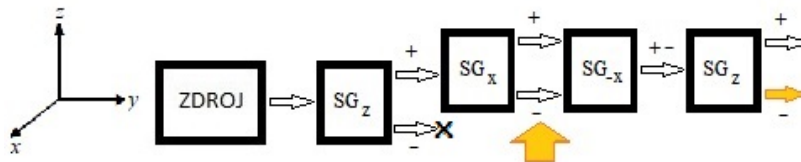


Uvedený opis sa nesie v duchu obvyklých interpretácií. Tieto úvahy však ignorujú dôležitú úlohu (makroskopických) detektorov pri MERANÍ, preto sa k nim ešte vrátíme neskôr, a niektoré závery podrobíme revízií.

Pozrime sa teraz na experimenty s Sternovými-Gerlachovými (SG) prístrojmi. Zdroj produkuje častice so spinom $\frac{1}{2}$, a SG_x, SG_z (s nehomogénnym magnetickým poľom orientovaným v smere x , resp. z) podľa veľmi častej - a CHYBNEJ - interpretácie SEPARUJÚ tieto častice do zväzkov s priemetmi spinu $S_x, S_z = \pm \frac{\hbar}{2}$. (V skutočnosti je SG prístroj obdobou dvojštrbiny, a každá vylietajúca „častica“ je v *superpozícii oboch zväzkov*, dokiaľ makroskopický detektor nespôsobí kolaps.) V prípade *rovnako* orientovaných SG prístrojov druhý z prístrojov (zdanlivo) nijak neovplyvní zväzok vystupujúci z prvého prístroja ($S_z = +\frac{\hbar}{2}$, obr. vľavo) - tento priemet spinu je jednoznačne určený. (Stav častice v každom z „kanálov“ SG1 je v tomto prípade *vlastným stavom operátora* SG2.) Pri *rôznej* orientácii SG1 a SG2 však druhý prístroj rozdelí vstupujúci zväzok ($S_z = +\frac{\hbar}{2}$) na dva „kanály“ s opačnými priemetmi spinu ($S_x = \pm \frac{\hbar}{2}$, obr. vpravo). Aj toto je dôsledok princípu neurčitosti - *súčasne* môžeme jednoznačne určiť len jeden priemet spinu (S_z), druhý (S_x) je *náhodný*. (K tomu, čo sa odohráva pri prelete častice SG prístrojom, sa ešte vrátíme.)



Modifikujme teraz prvú zo zostáv tak, že medzi dvojicu SG_z prístrojov vložíme dvojicu SG_x, SG_{-x} (teda s navzájom opačnou polaritou magnetického poľa). Kým prvý z tejto dvojice vstupujúci zväzok rozdelí, druhý toto rozdelenie eliminuje. Do posledného SG prístroja teda vstupuje zväzok častíc so zmiešanými priemetmi spinu ($S_x = \pm \frac{\hbar}{2}$) - presnejšie s ich *superpozíciou*. Ak ponecháme túto zostavu nerušenú, na jej výstupe bude *jediný* zväzok ($S_z = \frac{\hbar}{2}$), rovnako ako keby sme dodatočnú dvojicu SG prístrojov vôbec nevložili.



Ak však medzi vloženými SG prístrojmi uskutočníme „pozorovanie“ (t.j. meranie - ako inak než in-vazívne), detektor na výstupe zostavy bude zaznamenávať atómy v *dvoch* zväzkoch ($S_z = \pm \frac{\hbar}{2}$), a to *náhodne*, s pravdepodobnosťou 50:50. Ľahko spoznáme, že toto je obdoba dvojštrbinového experimentu - vďaka vlozenej dvojici SG prístrojov existujú *dva* „kanály“ medzi začiatočným a koncovým stavom *každej* častice. Ak sa zriekneme získania informácie o aktuálnom „kanáli“ (hodnote S_x), dochádza k interferencii „kanálov“: $\mathcal{P}(S_z = +\frac{\hbar}{2}) = 1$ (*konštruktívna* interferencia) a $\mathcal{P}(S_z = -\frac{\hbar}{2}) = 0$ (*deštruktívna* interferencia) - jednoznačná hodnota S_z . Ak získame informáciu o S_x , je po interferencii a strácame jednoznačnosť S_z . (Opäť ten princíp neurčitosti!)

Skutok páchaný „policajtmi“ v našich experimentoch sa nazýva **dekoherencia**. Interakcia QF objektu s „policajtom“ a registrácia tejto udalosti (makroskopickým okolím, detektorom) spôsobuje, že „čiastkové“ stavy objektu ψ_1, ψ_2 , pôvodne v koherentnej superpozícii, sú pripravené o túto *spoločnú* koherentnú „identitu“, a každý z nich vytvára samostatnú *väzbu* na okolité prostredie. „Milovníci“ *častíc* môžu túto väzbu interpretovať ako odovzdanie informácie o *časticovej* povahe tohto objektu do okolitého prostredia. Nie je pritom dôležité, či o túto informáciu je záujem - podstatné je len to, že je *k dispozícii*. K dekoherencii dochádza aj v prípade dvojčasticového experimentu (bez „policajtov“). Kvantovo previazaný pár totiž predstavuje *jediný* PÁROVÝ QF stav. V neprítomnosti detektorov vľavo je tento stav koherentnou superpozíciou „čiastkových“ (párových) stavov $|1\rangle, |2\rangle$. Interakcia *jednej* častice páru s detektorom vľavo spôsobuje väzbu *celého* kvantovo previazaného páru na okolie a dekoherenciu - „rozpad“ koherentného stavu na makroskopicky rozlíšiteľné stavy $|1\rangle$ a $|2\rangle$, ktoré už nie sú reprezentované *jednou* vlnovou funkciou, a ktorých pravdepodobnosti sa sčítavajú podľa klasických pravidiel.

K dekoherencii dochádza, ak sa jednotlivé „čiastkové“ stavy (pôvodnej) superpozície *samostatne* viažu na okolie *navzájom odlišným* spôsobom. Je to tým pravdepodobnejšie, čím väčším počtom stupňov voľnosti okolie disponuje. (V prípade makroskopického okolia je počet stupňov voľnosti obrovský.) Pôvodná koherencia jednotlivých zložiek superpozície sa teda transformuje do *samostatnej* koherentnej previazanosti týchto zložiek so zložkami okolia - vzniká kvantová previazanosť medzi určitým stupňom voľnosti meraného objektu („aký priemet spinu?“, „ktorý otvor?“, a pod.) a určitým stupňom voľnosti okolia (meracieho zariadenia, „policajta“). Koherencia teda celkom nezaniká, len sa *delokalizuje* (do okolia). Môžeme hovoriť o superpozícii stavov *spoločného systému* objekt-okolie, ale z pohľadu samotného skúmaného QF objektu sa už jednotlivé zložky pôvodnej superpozície javia ako samostatné nekoherentné kvantové stavy. (O tom prečo takúto superpozíciu nepozorujeme, si povieme v ďalších kapitolách.) Prípady kvantového „zmizíka“ sú špeciálne navrhnuté tak, aby sa jednotlivé zložky superpozície previazali na *rovnaký* stupeň voľnosti okolia, a teda aby naďalej zotrvali aj vo *vzájomnej* koherencii.

Proces dekoherencie predstavuje *unitárny* časový vývoj, avšak nesmierne rýchly, preto sa javí ako *náhly*. Dekoherenciou vieme vysvetliť, prečo mikroskopické objekty zanechávajú v hmlovej komore stopu odpovedajúcu klasickej trajektórii. Neustála interakcia častice s prostredím znamená permanentnú dekoherenciu - zápis informácie o *častici* do prostredia. Z rovnakého dôvodu nie je možné pozorovať interferenciu pri šírení *makroskopických* objektov - vzhľadom na ich rozmery a komplexnosť nemožno ignorovať interakciu s prostredím ľubovoľne riedkym, vrátane prázdneho priestoru (ako vieme, ani ten nie je prázdny).

Na záver ešte urobme dôležité zovšeobecnenie. Ak v poslednom uvedenom experimente neuskutočňujeme intervenčné pozorovanie, výsledok merania nezávisí od prítomnosti dodatočnej dvojice či dokonca viacerých dvojíc SG prístrojov. Ľahko tiež nahliadneme, že nezáleží ani na výbere *orientácie* tejto dvojice. Príroda nám teda poskytuje veľkú VOĽNOSŤ pri výbere „kanálov“ (pochopiteľne rozumných, teda s nenulovou amplitúdou pravdepodobnosti). Za touto voľnosťou stojí jeden z najdôležitejších princípov QF - že

nerušený vývoj stavu QF objektu je daný koherentnou superpozíciou všetkých mysliteľných (realizovateľných) „kanálov“ či „histórií“

obsahujúcich ľubovoľné realizovateľné „obchádzky“ a „medzipristátia“ - pochopiteľne, s líšiacimi sa amplitúdami pravdepodobnosti.

Čo (nie) je MERANIE (Kolaps stavu.)

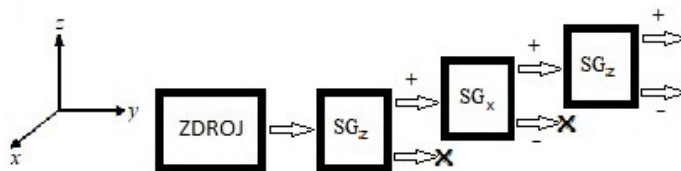
Otázka "čo je meranie?" je v QF zložitejšia, než by sa na prvý pohľad mohlo zdať. Zčať asi treba tým, čo je meranie v *makrosvete*. Definujeme ho ako kvantitatívne pozorovanie/záznam určitej vlastnosti objektu. Treba odlišiť *deštruktívne* meranie od *nedeštruktívneho* - „*ideálneho*“ merania. Keď ochutnávame kúsok steaku a konštatujeme, že „je málo prepečený“, v tomto okamihu tento objekt už „BOL málo prepečený“ - neexistuje už v pôvodnom stave (nik iný ho už nechutná) - ide o *deštruktívne* meranie. Ak však naše meranie spočíva v jeho vizuálnej obhliadke („ešte je málo hnedý“), jeho stav tým neovplyvníme. Prinajmenšom si to môžeme dovoliť tvrdiť, lebo náš kontakt s meraným objektom - rozptyl svetla (fotónov) na jeho povrchu - jeho skúmané *makroskopické* parametre nijak neovplyvní. Toto považujeme za *ideálne* meranie. Najdôležitejšie však je, že hodnota veličiny získaná meraním odpovedá hodnote tejto veličiny PRED meraním, a v prípade idealizovaného merania aj hodnote PO meraní. Neurčitosť veličiny pred meraním pripisujeme NAŠEJ NEZNALOSTI - chýbajúcej informácii o stave meraného objektu, ktorý je sám osebe *jednoznačne* určený, a naše meranie tento stav ODHALÍ. Inou je otázka *presnosti* merania - miery schopnosti *kvantitatívne* rozlíšiť meranú veličinu (napr. prepečenosť steaku). Každé meranie má ohraničenú presnosť (danú vlastnosťami meracieho zariadenia a jeho okolia). Ani pri opakovanom meraní nie sme, vzhľadom na komplexnosť makroskopických systémov, schopní zabezpečiť dokonale identické podmienky a tým vylúčiť istú mieru *takejto* neurčitosti.

V QF je to zložitejšie. Na jednej strane tvrdíme, že vzhľadom na subtilnosť mikroskopických objektov v nich *každé meranie vyvolá účinok* $\geq \hbar$, teda že ideálne meranie neexistuje (a nie je adekvátne ani ako priblíženie). Súčasne ale poznáme aj opakované merania potvrdzujúce danú hodnotu meranej veličiny (napr. priemet spinu častice prechádzajúcej sériou rovnako orientovaných Sternových-Gerlachových (SG) prístrojov). Najzákladnejší rozdiel však spočíva v povahe neurčitosti hodnoty veličiny pred (prvým) meraním. V QF je táto neurčitosť *principiálna* - žiadna chýbajúca informácia *neexistuje* (v ortodoxnej „kodaňskej“ interpretácii). Tento druh neurčitosti súvisí s princípom superpozície: Každý možnej nameranej hodnote skúmanej veličiny odpovedá určitý stav (vlnová funkcia) meraného objektu *po meraní*. Pred (prvým) meraním sa však systém nachádza v stave, ktorý je *koherentnou superpozíciou* všetkých *možných* stavov po meraní. Prívlastok *koherentný* znamená, že jednotlivé „čiastkové“ stavy v superpozícii navzájom *interferujú*. To je zásadný rozdiel oproti klasickej neurčitosti, danej len *našou neznalosťou* konkrétneho jednoznačného stavu pred meraním.

Ak meriame polohu voľnej častice, ktorej nerušený pohyb opisujeme šírením vlnového balíka, tak jej stav *pred* meraním je *spojitou* superpozíciou všetkých polôh (presnejšie stavov odpovedajúcich jednotlivým polohám) v rámci balíka. Meranie *určí* jedinú polohu (určí = *vytvorí*, NIE odhalí!) - tam kde „cvakne detektor“. Celý spojitý objem balíka razom „skolabuje“ do jediného miesta. Ak meriame miesto preletu (teda tiež polohu) častice v rovine dvojštrbiny, pred meraním je častica - zjednodušene povedané - v superpozícii preletov otvormi 1 a 2. (V skutočnosti je v *po častiach spožitej* superpozícii dráhových stavov cez obe *plôšky* otvorov. Majme na pamäti, že podobne ako v optike, interferencia na dvojštrbine je sprevádzaná *difrakciou na každej* zo štrbín.) Meranie však opäť určí konkrétne miesto na detektore. Ak meriame priemet spinu častice SG prístrojom (s detektorom na výstupe!), pred meraním je stav častice *diskrétnou* superpozíciou stavov $|\uparrow\rangle$ a $|\downarrow\rangle$, meranie skolabuje do jedného z nich. Vo všetkých týchto a mnohých iných prípadoch meranie hovoríme o **kolapse** stavu (vlnovej funkcie). Kolaps stavu však nastáva len (dostatočne silnou) interakciou s *makroskopickým* objektom (t.j. objektom s obrovským počtom stupňov voľnosti), ktorá vedie k „*lokalizácii*“ meranej veličiny. Ak totiž uvažujeme napr. sériu SG prístrojov v ľubovoľnej konfigurácii BEZ detektorov (čiže len sériu oblastí s nehomogénnym magnetickým poľom), výstupy každého SG prístroja predstavujú len POTENCIALITU namerania častice. Až kolaps na koncovom detektore vyberie z možných histórií tú aktuálnu.

Treba zdôrazniť, že kolaps nemožno celkom stotožniť s meraním (tak ako sme meranie definovali na začiatku tejto kapitoly). Vidíme to na prípade série *identických* SG prístrojov: Stav častice na vstupe do SG1 je superpozíciou stavov $|\uparrow\rangle$ a $|\downarrow\rangle$. Ak je na výstupe SG1 *nedeštruktívny* detektor, ktorý spôsobí kolaps do stavu $|\uparrow\rangle$ (lokalizuje časticu ale *neprerušuje* jej let), identicky orientovaný SG2 (zdieľajúci tento vlastný stav a hodnotu $+\frac{\hbar}{2}$) už skolabovaný stav *neovplyvní*. Ak by sme meranie stotožnili s kolapsom, potom SG2 už meranie *nepredstavuje*, čo NIE JE pravda - detekcia častice na výstupe SG2 v príslušnom kanáli, $|\uparrow\rangle$ alebo $|\downarrow\rangle$, predstavuje *nameranie* hodnoty $S_z = \pm\frac{\hbar}{2}$. (Je pritom jedno, či túto hodnotu niekto „registruje“ - merák meria aj keď sa nik neďáva.)

Ak SG2 naozaj *uskutočňuje* meranie, sme oprávnení očakávať *invazívny* účinok tohto merania $\geq \frac{\hbar}{2}$ - veď ideálne meranie v QF neexistuje. Ako však vidíme (z myšlienkového experimentu i matematického formalizmu), stav $|\uparrow\rangle$ ani jemu príslušná hodnota $S_z = +\frac{\hbar}{2}$ sa prechodom cez SG2 *nezmenili*. Keďže stav, ktorý je z definície vyjadrením *úplnej* dostupnej informácie, sa pri tomto meraní nezmenil, musíme očakávaný účinok merania hľadať v sfére „nedostupnosti“ - v tomto prípade v zmene priemetov S_x, S_y , zaťažených úplnou neurčitou. Že je to tak, ukáže nasledujúci myšlienkový experiment.



Predpokladajme, že SG1 na obr. „pripravuje“ stav $|\uparrow_z\rangle$ (len tento kanál vstupuje do SG2). SG2 (v smere x) túto z -ovú zložku zjavne zmenil, keďže na výstupe SG3 vidíme stavy $|\uparrow_z\rangle$ aj $|\downarrow_z\rangle$. Vyplýva to z povahy SG prístroja: Vychýlenie zväzku v smere x je spôsobené silou pôsobiaceou na x -ovú zložku magnetického momentu častice $\mu_x = \gamma S_x$ (γ je gyromagnetický pomer) vďaka nehomogenite magnetického poľa v tomto smere, $F_x = -\mu_x \frac{\partial B}{\partial x}$, a teda závisí od polarity μ_x . Po dobu preletu častice prístrojom, t , dôjde k rozídeniu zväzkov s opačnými μ_x o $2 \cdot \frac{F_x t^2}{2m}$ (m - hmotnosť častice). Tu však vstúpi do hry princíp neurčitosti: Vstupujúci zväzok nemôže byť nekonečne úzky, $\Delta x \neq 0$ (znamenalo by to $\Delta p_x \rightarrow \infty$, čo je nefyzikálne). Rôzne častice teda prelietajú oblasťami s rôznym $F_x \sim \frac{\partial B}{\partial x}$, čo spôsobuje *rozmazanosť* rozbiehajúcich sa zväzkov na úrovni $\approx \frac{\Delta p_x t}{m} \approx \frac{\hbar}{m \Delta x} t$. Aby boli vylietajúce zväzky *rozlíšiteľné* (čo je podstata merania), musí rozstup medzi nimi byť väčší než ich rozmazanie. Musí teda platiť $(\frac{\mu_x \Delta x}{\hbar} \frac{\partial B}{\partial x}) t = \Delta \omega t > 1$. Pri interpretácii výrazu $\Delta \omega$ nám pomôže klasická predstava *precesie*: Magnetické pole \vec{B} pôsobí na magnetický moment $\vec{\mu}$ momentom sily $\vec{\mu} \times \vec{B}$ a vyvoláva jeho precesiu okolo smeru \vec{B} (x v našom prípade) - pri nej sa zložka μ_x nemení, menia sa však zložky μ_y, μ_z s uhlovou rýchlosťou $\omega = \frac{\mu_x B}{\hbar}$. No a $\Delta \omega$ je jej rozmazanie, spôsobujúce neurčitosť ostatných zložiek spinu. Z SG_x teda vylietajú častice s *náhodnými* hodnotami S_z . Ak by sme túto neurčitosť chceli „podliezť“ (a získať informáciu o S_z), vylietajúce zväzky by sa zliali (a stratili by sme informáciu o S_x). Hoci sme v tejto argumentácii použili zmes kvantových a klasických argumentov, záver je v dokonalom súlade s kľúčovou tézou QF, že neistota *individuálneho* merania a *štatistická* neurčitosť zakotvená v matematickom formalizme sú ekvivalentné. Invazívny účinok „dokonalého“ merania teda *vždy* treba hľadať v principiálnej (štatistickej) neurčitosti systému.

Ako je to s účinkom merania pri opakovanom meraní iných „zachovávajúcich sa“ veličín - napr. *energie stacionárneho viazaného stavu* (rôzne potenciálové jamy)? Tradičný „učebnicový“ prístup predpokladá (kvôli jednoduchosti) *diskrétne* spektrum energií, je to teda prípad analogický SG meraniu: Prvé meranie znamená kolaps, kým bezprostredne nasledujúce druhé meranie už nie. Z definície stacionárneho (teda dokonale izolovaného) stavu však vyplýva jeho *principiálna nemerateľnosť*, ak teda naozaj meriame energiu „stacionárneho“ stavu (napr. elektrónovej hladiny v atóme), v skutočnosti meriame energiu *rozmazanú* dobou života tohto stavu (meraní *vlastnými* hodinami systému - princíp neurčitosti $E - t$). Bezprostredne po sebe nasledujúce merania energie teda dajú hodnoty *náhodne*

rozptýlené v rámci tohto rozmazania - čo je nerozlišiteľné od účinku merania $\geq \hbar$. (Vidíme to napr. na *principiálne nenulovej* šírke spektrálnych čiar atómu.) Ekvivalentnosť fundamentálnej štatistickej neurčitosti a neredukovateľného účinku individuálneho merania stále platí. Spektrum stavov a dostupných merateľných hodnôt meranej veličiny (energie) je v tomto prípade *po častiach spojité* (spojité intervaly ΔE v okolí ostrých stacionárnych hladín E_n) - na rozdiel od *diskrétnych* stavov S_z . Každé meranie tu *znamená* kolaps do konkrétneho stavu v rámci daného spojitého intervalu. Úloha skôr pripomína dvojštrbinu, v ktorej *nezanedbáme* plochy otvorov a difrakciu na nich.

Podobne problematický súvis medzi kolapsom a meraním ponúka Feynmanov myšlienkový experiment s rozptylom neutrónov na kryštálovej mriežke. Každý neutrón prispieva do interferenčného obrazu len ak nezanechá stopu na konkrétnom atóme mriežky - v podobe preklopeného atómového spinu - ale šíri sa mriežkou ako *vlna*. Preklopenie spinu konkrétneho atómu znamená lokalizáciu neutrónu ako *častice* (podobne ako lokalizácia v jednom z otvorov dvojštrbiny), a tento neutrón k interferencii *neprispeje*. Aj keď takúto udalosť stotožníme s kolapsom superpozície všetkých možných „dráh“ do jednej konkrétnej, preklopenie spinu konkrétneho atómu v kryštáli sotva odpovedá predstave *reálneho* merania. Jeho stotožnenie s meraním je možné len ako výsostne abstraktný teoretický konštrukt, poukazujúci na fakt, že takáto informácia je *principiálne dostupná* (pomocou nejakého následného veľmi sofistikovaného naozajstného merania - tomuto príkladu sa vrátíme v jednej z ďalších kapitol). Iným príkladom je dvojštrbinový experiment s *pohyblivou* prekážkou z predchádzajúcej kapitoly.

Kolaps sa na prvý pohľad môže javiť ako púhy „upgrade“ našich vedomostí o QF objekte, akoby stav objektu bol jednoznačný už pred meraním, a meranie by tento stav iba *odhalilo*. Superpozícia možných stavov pred meraním by podľa toho bola iba vyjadrením *našej nevedomosti*, teda *klasickou* štatistikou. QF stav by tým pádom nebol nositeľom *úplnej* informácie o objekte, a SCHR by nebola jeho *pohybovou rovnicou*. Experimentálne potvrdená interferencia jednotlivých zložiek superpozície by si vyžadovala dodatočnú „fyziku“ (ktorá sa v rôznych interpretáciách QF vyskytuje, často vo veľmi „exotickej“ podobe a s novými otáznikmi). Ortodoxná („kodaňská“) interpretácia QF takýto pohľad odmieta a trvá na *úplnosti* opisu. Za svoju vnútornú konzistentnosť však platí dvojakú daň: Po prvé, kolaps je POSTULOVANÝ ako akt *principiálnej neurčitosti* Prírody, vymykajúci sa opisu pomocou SCHR. Ani novší koncept *dekoherencie* (o ktorom ešte bude reč) tento problém celkom nerieši. Po druhé, QF je NELOKÁLNOU teóriou - kolaps pôsobí prakticky okamžite na vzdialenostiach nepripúšťajúcich priamu fyzikálnu interakciu (šíriacu sa maximálne rýchlosťou c). Zreteľné je to najmä pri kolapse *previazaného* stavu dvoch či viacerých častíc/objektov, keď meranie jedného objektu určuje vlastnosti druhého, a to aj vo veľkých vzájomných vzdialenostiach. Experimenty pritom nateraz jednoznačne vylúčili existenciu tzv. „skrytých parametrov“. Výsledkom je, že predstava *častice ako lokalizovaného objektu* je ILÚZIOU, motivovanou napr. lokálnym „šfuknutím detektora“. (Po prečítaní kapitol o častici a o Planckovej škále by sa tento záver už nemusel zdať nerozumným.)

Z tohto pohľadu môžeme interferenčné experimenty interpretovať aj tak, že „nelokálna častica“ prelieta súčasne všetkými „históriami“ (napr. otvorami) aj vtedy keď interferencia *NE*nastáva! Ako uvidíme v kapitole o dekoherencii, príčinou interferencie nie je púha „rozvetvenosť“ stavu do jednotlivých „histórií“ (napr. otvorov, stavov spinu, a pod.) ale ich *koherentná superpozícia*. Ak tvrdíme, že „policajtí“ z predchádzajúcej kapitoly „lokalizujú časticu v jednom z otvorov“ (ako je uvádzané aj v tomto texte), ide opäť len o *ilúziu* - AKOBY častica preletela *jediným* otvorom a neinterferovala. Že v skutočnosti *nemuselo dôjsť* ku kolapsu do jedinej „histórie“, nasvedčujú experimenty s kvantovým zmizikom: Ak by „policajtí“ alternatívne „histórie“ *eliminoval* (čo je podstata kolapsu), zmizík by ich nedokázal obnoviť! Vysvetlenie teda je, že „histórie“ len prestali interferovať - nastala *dekoherencia*.

S pojmom *meranie* sa v QF zaobchádza dosť nešetrne. Najmä v teoretických úvahách ide často o *prílišnú abstrakciu* (popri nepodstatných aspektoch sa „amputujú“ aj „vitálne“ zložky merania). Podľa úvodnej definície je meranie *pozorovaním* či *záznamom* - vyžaduje teda *makroskopický objekt zaznamenávajúci* meranú vlastnosť registrovaním makroskopickej zmeny (napr. ručičky meráku). V

makrosvete však platia zákony termodynamiky, a každý *stabilný* záznam (robustný voči fluktuáciám) je nevyhnutne *nevratným* procesom, spojeným s *dissipáciou* energie. (V *mikrosvete* sú všetky procesy vratné, a pojem *dissipácia* nemá zmysel.) Aj nevratný kolaps je teda „vykázaný“ do makrosveta. Vidíme, že

$$\textit{meranie} \neq \textit{kolaps} \neq \textit{dekoherencia} \neq \textit{meranie}$$

a abstrahovanie od reálnej situácie môže spôsobiť v týchto pojmoch značný zmätok.

Trochu viac (a formálnejšie) o STAVE

Stav je kľúčový pojem v QF. Definovanujeme ho ako *úplný súbor dostupných a vzájomne neprotirečivých informácií* o QF objekte. Pojem stav má teda širšie pole pôsobnosti než vlnová funkcia, ktorú obvykle viažeme s konkrétnou dynamickou premennou (- reprezentáciou). Aby sme stav odlišili od vlnovej funkcie ψ , označujeme ho symbolom $|\psi\rangle$. Amplitúdu pravdepodobnosti prechodu QF objektu z počiatočného stavu $|\psi_p\rangle$ do koncového stavu $|\psi_k\rangle$ označujeme $\langle\psi_k|\psi_p\rangle$. Podobne ako ψ , aj $|\psi\rangle$ sú *komplexné* čísla, a teda aj $\langle\psi_k|\psi_p\rangle$. Pravdepodobnosť takéhoto prechodu (to už musí byť *reálne* číslo) je potom $\mathcal{P} = |\langle\psi_k|\psi_p\rangle|^2 = \langle\psi_k|\psi_p\rangle(\langle\psi_k|\psi_p\rangle)^*$. Ak uvážime, že prechod $|\psi_p\rangle \rightarrow |\psi_k\rangle$ sa môže udiť s ľubovoľným realizovateľným „medzipristátim“ $|\phi_m\rangle$, a vieme, že pravdepodobnosť série nezávislých dejov je *súčinom* ich pravdepodobností, musí platiť $\langle\psi_k|\psi_p\rangle = \langle\psi_k|\phi_m\rangle\langle\phi_m|\psi_p\rangle$. Superpozícií „kanálov“ v dvojštrbinovom experimente, s alternatívnymi „medzipristátiami“ v otvoroch 1 a 2, odpovedá amplitúda pravdepodobnosti

$$\langle\psi_k|\psi_p\rangle = \langle\psi_k|\phi_1\rangle\langle\phi_1|\psi_p\rangle + \langle\psi_k|\phi_2\rangle\langle\phi_2|\psi_p\rangle$$

a pre pravdepodobnosť tohto procesu po úprave dostávame $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_{int}$, kde $\mathcal{P}_{1,2}$ sú pravdepodobnosti prechodu jednotlivými otvormi, a \mathcal{P}_{int} je interferenčný člen, ktorý vymizne ak do procesu invázívne zasiahneme. Vo všeobecnosti je teda súčet cez všetky možné „kanály“

$$\langle\psi_k|\psi_p\rangle = \sum_m^N \langle\psi_k|\phi_m\rangle\langle\phi_m|\psi_p\rangle$$

Tento výsledok nijak nezávisí od konkrétneho koncového stavu $|\psi_k\rangle$, a to nám dovoľuje tento stav z danej rovnice eliminovať („vykrátiť“), a pre stav $|\psi_p\rangle$ dostávame (index p môžeme kvôli všeobecnosti vynechať)

$$|\psi\rangle = \sum_m^N |\phi_m\rangle\langle\phi_m|\psi\rangle = \sum_m^N c_m |\phi_m\rangle$$

Podľa tohto výrazu môžeme *akýkoľvek* stav $|\psi\rangle$ vyjadriť ako *superpozíciu iných vhodne vybraných* stavov $|\phi_m\rangle$, tvoriacich *úplnú bázu*, pričom výrazy $c_m = \langle\phi_m|\psi\rangle$ majú význam *váhových koeficientov*. Každý stav $|\psi\rangle$ je akýmsi *vektorom* v abstraktnom N -rozmernom priestore s báзовými vektormi $|\phi_m\rangle$, a výrazy $c_m = \langle\phi_m|\psi\rangle$ sú komplexnými „veľkosťami“ jeho zložiek - *priemetov* na osi báзовých vektorov. Takže $\langle\psi|\phi\rangle$ má význam *skalárneho súčinu* vektorov $|\psi\rangle$ a $|\phi\rangle$. Z definície skalárneho súčinu komplexných čísel tiež vyplýva, že $\langle\psi|\phi\rangle = (\langle\phi|\psi\rangle)^*$ a $\langle\psi|\psi\rangle = |\psi|^2$. Je rozumné využiť voľnosť a zvoliť takú sústavu *lineárne nezávislých* báзовých vektorov, ktoré sa navzájom vylučujú - sú *ortogonálne*, resp. *ortonormálne*, čiže $\langle\phi_m|\phi_n\rangle = \delta_{mn}$, čo znamená, že ak sa systém nachádza v takomto stave $|\phi_m\rangle$ s pravdepodobnosťou $\mathcal{P}(|\phi_m\rangle) = |\langle\phi_m|\phi_m\rangle|^2 = 1$, nenachádza sa v žiadnom z ostatných báзовých stavov $|\phi_n\rangle$.

Samostatný význam vieme priradiť aj výrazu $|\phi_n\rangle\langle\phi_n|$. Je to tzv. **projektor** - *operátor*, ktorý zo stavu $|\psi\rangle$ „vyprojektuje“

$$(|\phi_n\rangle\langle\phi_n|) |\psi\rangle = |\phi_n\rangle\langle\phi_n| \sum_m^N |\phi_m\rangle\langle\phi_m|\psi\rangle = \sum_m^N \langle\phi_n|\phi_m\rangle\langle\phi_m|\psi\rangle |\phi_n\rangle = c_n |\phi_n\rangle$$

čiže priemet do $|\phi_n\rangle$. Vo vektorovo-maticovom zápise vo všeobecnosti platí

$$|A\rangle = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \quad \langle B| = (B_1 \quad B_2 \quad B_3) \quad |A\rangle\langle B| = \begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & A_1B_3 \\ A_2B_1 & A_2B_2 & A_2B_3 \\ A_3B_1 & A_3B_2 & A_3B_3 \end{pmatrix}$$

$$\langle B|A\rangle = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

Keďže básový vektor $|\phi_n\rangle$ v N -rozmernej báze $\{|\phi_n\rangle\}$ má v maticovom zápise *jedinú nenulovú* n -tú zložku, $|\phi_n\rangle\langle\phi_n|$ má *jedinú nenulovú* nn -tú zložku - je to teda operátor, ktorý vylúpe zo stavu $|\psi\rangle$ n -tý priemet.

Bázové stavy objektu nazývame **čistými** (angl. *pure*), obsahujúcimi *úplnú dostupnú* informáciu o objekte. (Např. v báze S_z , kde $|\phi_m\rangle = |\pm_z\rangle$, je to informácia o z -ovej zložke spinu.) O „nedostupnej informácii“ (např. x, y -ovej zložke spinu) *nemá zmysel* hovoriť (v ortodoxnej interpretácii), môžeme ju však *vytvoriť* meraním (invazívnym zásahom do objektu). Každý stav, ktorý je superpozíciou básových stavov, je *rovnako* čistým stavom, keďže aj každý básový vektor môžeme vyjadriť ako superpozíciu básových vektorov *inej* bázy.

Iným druhom stavu systému je tzv. **zmiešaný** stav (angl. *mixed*), ktorý je *klasickým* štatistickým súborm N čistých stavov objektu $|\psi_n\rangle$ zastúpených s *klasickými* pravdepodobnosťami p_n (teda NIE superpozíciou týchto stavov). Neurčitost zmiešaného stavu je kombináciou *principiálnej* (neodstrániteľnej) QF neurčitosti každého z čiastkových čistých stavov a *klasickej* (odstrániteľnej) neurčitosti - p_n odzrkadľuje *našu neznalosť*. Takémuto stavu *nevieme* priradiť vektor, a charakterizujeme ho **operátorom hustoty**

$$\hat{\rho} = \sum_n^N p_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n| = \sum_n^N p_n \hat{\rho}_n \quad \hat{\rho}_n = |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$$

čo je lineárna superpozícia projektorov do jednotlivých čistých stavov štatistického súboru. Takýto *nekoherentný* súbor (sčítavajú sa pravdepodobnosti a nie ich amplitúdy) podlieha tiež istej voľnosti výberu bázy, a je opäť rozumné voliť bázu navzájom sa vylučujúcich (ortogonálnych) stavov. Odpovedajúca matica v danej ortonormálnej báze $\{|\phi_m\rangle\}$ - tzv. **matica hustoty** - má prvky

$$\rho_{ij} = \sum_n^N p_n \langle\phi_i|\psi_n\rangle\langle\psi_n|\phi_j\rangle$$

Čistý stav je limitným prípadom zmiešaného stavu, v ktorom *jediné* $p_{n=i} = 1$ a všetky ostatné $p_{n\neq i} = 0$. V takomto prípade $\hat{\rho} = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$.

Ilustrujme tento rozdiel na príklade *čistého* stavu - vektoru v dvojrozmernej báze (ako např. báza S_z alebo báza „ktorý otvor?“)

$$|\psi\rangle = c_1|\phi_1\rangle + c_2|\phi_2\rangle$$

teda *koherentnej* superpozície básových stavov $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle$. Jeho operátor hustoty je

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| = c_1c_1^*|\phi_1\rangle\langle\phi_1| + c_2c_2^*|\phi_2\rangle\langle\phi_2| + c_1c_2^*|\phi_1\rangle\langle\phi_2| + c_1^*c_2|\phi_2\rangle\langle\phi_1|$$

Matica hustoty má tvar $\begin{pmatrix} |c_1|^2 & c_1c_2^* \\ c_1^*c_2 & |c_2|^2 \end{pmatrix}$. Mimodiagonálne členy sú zodpovedné za interferenciu.

Špeciálnym prípadom je čistý stav odpovedajúci *jedinému* básovému stavu ($c_1 = 1, c_2 = 0$), potom $\hat{\rho}$ je projektorom do tohto stavu.

Naopak, ak by šlo o *zmiešaný* stav v takejto báze, operátor hustoty by mal tvar

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| = c_1c_1^*|\phi_1\rangle\langle\phi_1| + c_2c_2^*|\phi_2\rangle\langle\phi_2|$$

($c_1c_1^* = p_1, c_2c_2^* = p_2$), a príslušná matica by bola $\begin{pmatrix} |c_1|^2 & 0 \\ 0 & |c_2|^2 \end{pmatrix}$. Diagonálnost matice znamená absenciu interferencie.

Miera chýbajúcej (principiálne *dostupnej*) informácie o systéme určuje jeho entropiu, $S = -\sum_n^N p_n \log p_n$. Entropia čistého stavu je teda nulová ($N = 1, p_1 = 1$), kým v zmiešanom

stave rastie s N , pričom maximálna je pre rovnaké p_n . Ak je systém izolovaný, jeho entropia sa nemení, a nemení sa ani miera jeho čistoty. Interakcia s okolím vo všeobecnosti vedie k dekoherencii - zníženiu miery čistoty (tj. redukcii mimodiagonálnych členov) a k nárastu entropie. Cielenu manipuláciou so systémom (napr. meraním) možno naopak čistotu systému zvýšiť.

V kontexte merania je dôležitý opis systému *zloženého* z viacerých *podsystemov* (meraný objekt + merací prístroj, okolie). Stav každého z podsystemov je vektorom *vo svojom priestore* stavov so *svojou bázou*. Stav *celého* systému „žije“ v priestore, ktorý je tenzorovým súčinom podpriestorov, čo znamená že báza tohto priestoru je tenzorovým súčinom báz podpriestorov (interakciou dvoch podsystemov narastá dimenzionalita spoločného priestoru). Pre dvojkomponentný systém s dvojprvkovými bázami podsystemov $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\}$ a $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle\}$ je takouto rozšírenou bázou $\{|\psi_1\phi_1\rangle, |\psi_1\phi_2\rangle, |\psi_2\phi_1\rangle, |\psi_2\phi_2\rangle\}$.

V maticovom zápise to znamená, že kým $|\psi_i\rangle, |\phi_i\rangle$ sú stĺpcové vektory 2×1 , $|\psi_i\phi_j\rangle$ (tiež niekedy $|\psi_i\rangle|\phi_j\rangle$) sú stĺpcové vektory 4×1 , pričom ako bázové vektory majú (vo vlastnej báze) *jediný nenulový* prvok.

Ak podsystemy vo svojich bázach sú v čistých stavoch $|\psi\rangle$ a $|\phi\rangle$, stav celého systému $|\xi\rangle$ v novej rozšírenej báze je tenzorovým súčinom

$$|\xi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$$

(odlišujeme ho od tenzorového súčinu vektorov rovnakej bázy $|\psi\rangle\langle\phi|$). Takýto zápis je však možný len ak sú podsystemy *nekorelované*. Znamená to, že ak uskutočníme meranie jedného z podsystemov (a tým ho nevyhnutne ovplyvníme), druhý podsystem ostane nezmenený. Ak sú však podsystemy *korelované* tak, že meranie na jednom ovplyvní aj druhý z podsystemov, *neexistujú samostatné* čisté stavy $|\psi\rangle$ a $|\phi\rangle$, ale len výsledný - **previazaný** čistý stav

$$|\xi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} |\psi_i\rangle \otimes |\phi_j\rangle$$

pričom pre komplexné koeficienty musí platiť $c_{ij} \neq c_i c_j$ (inak by bola dvojité suma separovateľná na tvar $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$). Inak povedané (vzhľadom na vôľu pri výbere bázy), dva podsystemy sú *previazané* vtedy a len vtedy ak *neexistujú* bázy, v ktorých by boli separovateľné. Príkladom takéhoto previazaného stavu je

$$|\xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_1\rangle \otimes |\phi_1\rangle + |\psi_2\rangle \otimes |\phi_2\rangle)$$

Čistý stav je stavom s nulovou entropiou. V previazanom systéme čisté stavy podsystemov *neexistujú*, a teda entropie podsystemov sú nenulové. Previazanosť spôsobuje, že $S^{(I+II)} < S^{(I)} + S^{(II)}$ (!) Ak totiž skúmame podsystemy samostatne, informácia o korelácii nám *chýba*.

Zmiešaný stav dvojkomponentného systému s klasickými pravdepodobnosťami p_n jednotlivých stavov $|\xi\rangle_n$ je v prípade korelácie podsystemov opäť opísaný operátorom hustoty

$$\hat{\rho} = \sum_n p_n |\xi_n\rangle\langle\xi_n| = \sum_n p_n \left(\sum_k c_{nk} |\psi_{nk}\rangle \otimes |\phi_{nk}\rangle \right) \left(\sum_l c_{nl}^* \langle\psi_{nl}| \otimes \langle\phi_{nl}| \right)$$

(dvojitý index označuje bázové zložky n -tého vektora v štatistickom súbore). V neprítomnosti korelácie podsystemov tento výraz prejde na

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^I \otimes \hat{\rho}^{II}$$

teda (tenzorový) súčin operátorov hustoty podsystemov. V symbolickom maticovom zápise je to

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11}^I & \rho_{12}^I \\ \rho_{21}^I & \rho_{22}^I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{11}^{II} & \rho_{12}^{II} \\ \rho_{21}^{II} & \rho_{22}^{II} \end{pmatrix} \quad \text{kde} \quad (\rho^{II}) = \begin{pmatrix} \rho_{11}^{II} & \rho_{12}^{II} \\ \rho_{21}^{II} & \rho_{22}^{II} \end{pmatrix}$$

Operátor (matica) hustoty je vhodný nástroj ako opísať vlastnosti jedného z podsystemov, a to aj vtedy, keď kvôli korelácii (previazaniu) podsystemov nemožno podsystemom priradiť samostatné stavové vektory. Je to obvyklý prípad systému objekt-okolie (napr. merací prístroj), pričom sa zaujímate len o skúmaný objekt. Keďže pre *stopu* matice hustoty musí platiť $\text{Sp}[\rho] = 1$ (podmienka normovanosti), maticu hustoty *podsystemu* dostaneme pomocou *čiasťkovej stopy* matice *celého systému*

$$\text{Sp}^I[\rho] = \rho_{11}^I \rho^{II} + \rho_{22}^I \rho^{II} = (\rho_{11}^I + \rho_{22}^I) \rho^{II} = \text{Sp}[\rho^I] \rho^{II} = \rho^{II}$$

alebo všeobecnejšie a formálnejšie

$$\rho^{II} = \text{Sp}^I[\rho] = \sum_n \langle \psi_n | \rho | \psi_n \rangle$$

kde $\langle \psi_n |, | \psi_n \rangle$ sú bázové vektory podsystemu I . Obdobne môžeme určiť ρ^I . Dá sa ukázať, že tento postup rovnako dobre funguje aj pre *previazané* podsystemy. V prípade vyššie uvedeného čistého stavu $|\xi\rangle$ je redukovaná matica hustoty

$$\begin{aligned} \rho^{II} &= \sum_{n=1}^2 \langle \psi_n | \left(\frac{1}{\sqrt{2}} [|\psi_1\rangle \otimes |\phi_1\rangle + |\psi_2\rangle \otimes |\phi_2\rangle] \frac{1}{\sqrt{2}} [\langle \psi_1 | \otimes \langle \phi_1 | + \langle \psi_2 | \otimes \langle \phi_2 |] \right) | \psi_n \rangle = \\ &= \frac{1}{2} (|\phi_1\rangle \langle \phi_1 | + |\phi_2\rangle \langle \phi_2 |) \end{aligned}$$

a to je *zmiešaný stav*. *Redukovaná matica čistého stavu je vždy zmiešaný stav* (neúplná informácia o podsysteme). Tento záver je kľúčový pre pochopenie dekoherencie.

Ešte sa treba zmieniť o časovom vývoji stavu. Unitárny (nerušený) časový vývoj stavového vektora je daný SCHR $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$. Odtiaľ dostaneme aj unitárny časový vývoj operátora hustoty

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} &= i\hbar \sum_n p_n \left\{ \left(\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle \right) \langle \psi(t) | + |\psi(t)\rangle \left(\frac{d}{dt} \langle \psi(t) | \right) \right\} = \\ &= \sum_n p_n \left\{ \hat{H} |\psi(t)\rangle \langle \psi(t) | - |\psi(t)\rangle \langle \psi(t) | \hat{H} \right\} = \hat{H} \hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t) \hat{H} = [\hat{H}, \hat{\rho}(t)] \end{aligned}$$

čo je *evolúčna - tzv. von Neumannova rovnica*.

Trochu viac o DEKOHHERENCII

Výsledkom každého merania (aj klasického) je *jedna z realizovateľných hodnôt* skúmanej veličiny - spektrum týchto hodnôt tvorí *bázu*, odpovedajúcu *danému* meraniu. Spektrum *meraných* hodnôt (na rozdiel od *teoretického* spektra) je prakticky vždy *diskrétne*, a to aj v prípade spojitosti sa meniacej veličiny - v dôsledku limitovanej presnosti meracieho zariadenia či ako dôsledok rozumného zaokrúhľovania. Aj keď uvažujeme *nedeštruktívne* meranie QF objektu (teda také, pri ktorom meraný objekt „prežije“), v žiadnom prípade nejde o ideálne neinvazívne meranie (ktoré by tento objekt neovplyvnilo). Nameraná hodnota \mathcal{A}_i veličiny \mathcal{A} odpovedá stavu BEZPROSTREDNE PO meraní - jednému zo stavov $|\psi_i\rangle$, s ktorým ju viaže rovnica pre vlastné hodnoty a vlastné stavy operátora \hat{A} priradeného k meranej veličine \mathcal{A}

$$\hat{A}|\psi_i\rangle = \mathcal{A}_i|\psi_i\rangle$$

Táto rovnica si zasluhuje komentár. Operátor *vo všeobecnosti* je matematický objekt „mapujúci“ v určitej báze $\{|\phi_n\rangle\}$ *ľubovoľný* stavový vektor $|\psi\rangle$, na ktorý pôsobí, do iného vektoru $|\xi\rangle$,

$$|\xi\rangle = \hat{A}|\psi\rangle = \hat{A} \sum_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n | \psi \rangle = \sum_n \hat{A} |\phi_n\rangle \langle \phi_n | \psi \rangle \quad \left(\sum_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n| = 1 \right)$$

Rozšírením tejto rovnosti o *bázový* vektor $\langle \phi_m |$ dostávame

$$\langle \phi_m | \xi \rangle = \xi_m = \sum_n \langle \phi_m | \hat{A} | \phi_n \rangle \langle \phi_n | \psi \rangle = \sum_n A_{mn} \psi_n$$

kde komplexné čísla ξ_i, ψ_i sú priemety vektorov $|\xi\rangle, |\psi\rangle$ do *bázového* stavu $|\phi_i\rangle$, a $A_{mn} = \langle \phi_m | \hat{A} | \phi_n \rangle$ je prvok matice *jednoznačne* reprezentujúcej operátor \hat{A} *v danej báze*. Teda

$$|\xi\rangle = \hat{A}|\psi\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots \\ A_{21} & A_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \dots \end{pmatrix}$$

Ak porovnáme túto rovnicu s rovnicou pre vlastné stavy operátora ($|\psi\rangle \rightarrow |\psi_i\rangle, |\xi\rangle \rightarrow \mathcal{A}_i|\psi_i\rangle$), vlastné hodnoty \mathcal{A}_i operátora \hat{A} dostaneme riešením *charakteristickej rovnice*

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \mathcal{A}_i & A_{12} & \dots \\ A_{21} & A_{22} - \mathcal{A}_i & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$$

Podstatnou črtou *každého nedeštruktívneho* merania určitej veličiny je, že merania nasledujúce BEZPROSTREDNE po sebe (tak, že nemusíme uvažovať časový vývoj meraného objektu) majú dať *tú istú* hodnotu (v rámci presnosti merania) - inak by takéto meranie nemalo zmysel. Matematicky to vyjadruje práve rovnica pre vlastné stavy a hodnoty - pôsobením operátora sa stav objektu nemení. *Vlastné stavy* operátora sú teda *výnimočnými* stavmi, meraný objekt v takýchto stavoch vykazuje „stabilitu“ voči meraniu veličiny odpovedajúcej tomuto operátoru. A pochopiteľne, *vlastné hodnoty* operátora sú hodnotami, ktoré meranie danej veličiny môže vyprodukovať. Operátor priradený meranej veličine teda prirodzene „diktuje“ podľa uvedenej rovnice výber *bázových* stavov $|\psi_n\rangle$ *pre dané meranie* na základe spektra hodnôt \mathcal{A}_n , ktoré môžeme získať *meraním*. Inými slovami, existuje nespočetne veľa možných a rovnako správnych báz, volíme však takú - **preferovanú bázu**, ktorá priamo korešponduje s výsledkami merania.

Stav PRED meraním je však vo všeobecnosti *superpozíciou* takýchto *bázových* stavov $|\psi\rangle = \sum_n^N |\psi_n\rangle \langle \psi_n | \psi \rangle$, (N môže byť teoreticky aj nekonečné, v reálnom experimente je však vždy ohraničené). Táto dekompozícia stavového vektoru nám umožňuje vyjadriť aj operátor pomocou spektra vlastných stavov a vlastných hodnôt.

$$\hat{A} = \sum_m^N \mathcal{A}_m |\psi_m\rangle \langle \psi_m|$$

Ako sa to udeje, že každé meranie veličiny \mathcal{A} vyberie zo spektra JEDNU hodnotu \mathcal{A}_i a zo superpozície stavov JEDEN odpovedajúci stav $|\psi_i\rangle$, je odvekým problémom QF. Prechod $|\psi\rangle \rightarrow |\psi_i\rangle$ sa tradične označuje ako *kolaps* stavu (vlnovej funkcie). Kolaps je *postulovaný* tvorcami QF bez bližšej fyzikálnej špecifikácie a detailného matematického opisu (na rozdiel od nerušeného unitárneho vývoja opísaného pohybovými rovnicami), a dodnes je kontroverzným predmetom rôznych teórií či interpretácií. Čiastočné (NIE však úplné) riešenie ponúka pomerne novodobý koncept *dekoherencie*.

Dekoherencia je mechanizmus väzby QF objektu S na makroskopické okolie - v prípade merania je týmto okolím predovšetkým merací prístroj M . Predtým než dôjde k interakcii, *izolovaný* objekt je v stave $|\psi_S\rangle = \sum_n c_n |\psi_n\rangle$ (v zvolenej báze $\{|\psi_n\rangle\}$) a merák M v stave $|M_0\rangle$. Stav *zloženého* systému $S + M$ je

$$|\psi_{SM}\rangle = \left(\sum_n c_n |\psi_n\rangle \right) \otimes |M_0\rangle$$

Nech interakciu $S - M$ reprezentuje hamiltonián \hat{H}_{SM} . Potom operátor hustoty systému $\hat{\rho}_{SM}$ podlieha časovému vývoju podľa rovnice $i\hbar \frac{d\hat{\rho}_{SM}}{dt} = [\hat{H}_{SM}, \hat{\rho}_{SM}]$, ktorý spôsobí *koreláciu - previazanie* podsystemov

$$\left(\sum_m c_m |\psi_m\rangle \right) \otimes |M_0\rangle \xrightarrow{t} \sum_{m,n} c_{mn} |\psi_m\rangle \otimes |M_n(t)\rangle = \sum_n c_n |\psi_n\rangle \otimes |M_n(t)\rangle$$

kde posledná časť rovnosti predpokladá *meraním preferovanú* bázu, v ktorej *každému* stavu meraného objektu odpovedá istý *odlišiteľný* stav meráku. Príkladom je meranie z -ovej zložky spinu SG prístrojom: Bázovými stavmi S_z sú $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ odpovedajúce hodnotám $S_z = \pm \frac{\hbar}{2}$, kým bázovými stavmi SG sú $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$. Spoločná báza je teda 4-prvková, lenže SG prístroje sú konštruované tak, že prípady $|+\rangle|\downarrow\rangle$ a $|-\rangle|\uparrow\rangle$ nemôžu nastať. *Preferovanou* spoločnou bázou je teda $\{|+\rangle|\uparrow\rangle, |-\rangle|\downarrow\rangle\}$. V nej je systém S-M v *čistom previazanom* stave

$$|\psi_{SM}\rangle = c_1 |+\rangle|\uparrow\rangle + c_2 |-\rangle|\downarrow\rangle \quad |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$$

Operátor hustoty je $\hat{\rho}_{SM} = |\psi_{SM}\rangle\langle\psi_{SM}|$ a matica hustoty má tvar $\rho_{SM} = \begin{pmatrix} |c_1|^2 & c_1 c_2^* \\ c_1^* c_2 & |c_2|^2 \end{pmatrix}$.

Merací prístroj tu opisujeme tiež ako QF objekt - priradíme mu stavový vektor. Reálny merák je však makroskopický objekt s veľkým množstvom stupňov voľnosti, a *ukazovateľ meranej veličiny* (angl. *pointer*) je len jedným z nich. Nevyhnutnú interakciu tohto ukazovateľa - podsystemu M - so „zvyškom“ meracej aparatury či laboratória - „okolím“ O - reprezentuje hamiltonián \hat{H}_{MO} , ktorý opäť určuje *unitárny* vývoj systému $M - O$ smerujúci k jeho previazaniu

$$|\psi_{SM}\rangle \otimes |O_0\rangle = (c_1 |+\rangle|\uparrow\rangle + c_2 |-\rangle|\downarrow\rangle) \otimes |O_0\rangle \xrightarrow{t} c_1 |+\rangle|\uparrow\rangle|O_\uparrow\rangle + c_2 |-\rangle|\downarrow\rangle|O_\downarrow\rangle$$

alebo vo všeobecnosti

$$\left(\sum_n c_n |\psi_n\rangle \otimes |M_n(t)\rangle \right) \otimes |O_0\rangle \xrightarrow{t} \sum_n c_n |\psi_n\rangle \otimes |M_n(t)\rangle \otimes |O_n(t)\rangle = |\psi_{SMO}\rangle$$

Výsledný *čistý* stav je teda koherentnou superpozíciou kvantovo previazaných stavov *celého systému* $S - M - O$. V procese merania však nemáme ambíciu ani schopnosť určiť tento stav (vzhľadom na obrovský počet jeho stupňov voľnosti) - zaujímate sa *výlučne* o stav podsystemu $S - M$ (inak povedané, o stav *ukazovateľa* meranej veličiny charakterizujúcej meraný objekt). Takúto informáciu poskytuje *redukovaná* matica hustoty - *čiastková* stopa matice celého systému

$$\rho^{SM} = \text{Sp}^O[\rho^{SMO}] = \sum_n \langle O_n | \rho^{SMO} | O_n \rangle = \sum_n \langle O_n | \psi_{SMO} \rangle \langle \psi_{SMO} | O_n \rangle$$

V našom SG príklade je to

$$\rho^{SM} = \sum_{n=\uparrow,\downarrow} \langle O_n | (c_1|+\rangle | \uparrow \rangle | O_\uparrow \rangle + c_2|-\rangle | \downarrow \rangle | O_\downarrow \rangle) (c_1^* \langle + | \langle \uparrow | \langle O_\uparrow | + c_2^* \langle - | \langle \downarrow | \langle O_\downarrow |) | O_n \rangle$$

Ak čiastkové stavy $|O_n\rangle$ podsystemu O sú navzájom odlišiteľné, $\langle O_m | O_n \rangle = \delta_{mn}$, dostávame

$$\rho^{SM} = c_1 c_1^* |+\rangle | \uparrow \rangle \langle + | \langle \uparrow | + c_2 c_2^* |-\rangle | \downarrow \rangle \langle - | \langle \downarrow | = \sum_n |c_n|^2 \rho_n$$

čo je *zmiešaný* stav s *diagonálnou* maticou hustoty $\rho_{SM} = \begin{pmatrix} |c_1|^2 & 0 \\ 0 & |c_2|^2 \end{pmatrix}$. Systém $S - M$ už *nie* je v koherentnej superpozícii stavov $|+\rangle | \uparrow \rangle$ a $|-\rangle | \downarrow \rangle$, tieto stavy sú možnými výsledkami merania s KLASICKÝMI pravdepodobnosťami $|c_1|^2$, $|c_2|^2$. Nastala *dekoherencia*. Neznamená to však, že koherencia *úplne* zanikla - len sa rozptýlila do „okolia“ (celý systém $S - M - O$ je naďalej v koherentnej superpozícii), a je *mimo nášho vnímania*. Preto v reálnom svete superpozíciu stavov - *Schrödingerovu mačku* - nikdy nepozorujeme.

Uvedená argumentácia je založená na dvoch predpokladoch: Po prvé, pri interakcii systému $S - M$ s „okolím“ O sa nezmenia stavy ukazovateľa meranej veličiny $|M_n\rangle$. Formálne to znamená, že meraná veličina *komutuje* s interakčným hamiltoniánom \hat{H}_{MO} . Táto podmienka stojí za výberom *preferovanej* bázy. Po druhé, čiastkové stavy „okolia“ O vstupujúce do korelácie s $S - M$ sú *ortogonálne*. Táto podmienka nie je kritická - mimodiagonálne členy matice hustoty ρ_{SM} nemusia byť *prísne* nulové. Pokiaľ sú *zanedbateľné* voči diagonálnym členom, interferencia je *prakticky* nepozorovateľná. Existuje viacero modelov vykazujúcich exponenciálny pokles mimodiagonálnych členov v čase, pričom charakteristický - tzv. **dekoherenčný čas** klesá s rastúcou hmotnosťou objektu a teplotou okolia. Pre makroskopické objekty je tento čas nesmierne malý. O koherentnej superpozícii stavov na *pozorovateľnej časovej škále* má teda zmysel hovoriť len u mikroskopických objektov *izolovaných* od okolia.

Dekoherencia znamená zmenu čistého stavu na *zmiešaný*, a teda *nevratný* nárast entropie („únik“ informácie rozptýlením do okolia). Nevratnosť procesov je však doménou *makroskopických* objektov (na *mikroskopickej* úrovni sú všetky procesy *vratné*). Merací prístroj M v našej schéme je *abstrakciou* - *mikroskopickým* objektom *koherentne* interagujúcim s meraným objektom S a zaznamenávajúcim jeho stav. Aby však tento ZÁZNAM bol dostupný okoliu (napr. nahým opiciam snažiacim sa pochopiť Prírodu), musí dôjsť k interakcii $S - M$ s makroskopickým *rezervoárom* O , dostatočne robustným na to, aby záznam bol odolným voči náhodným fluktuáciám. Takýto záznam je spojený s *dissipáciou* energie a *relaxáciou*, čo sú *nevratné* procesy. (Evolúčna rovnica je rozšírená o dodatočné členy.) Rozlíšiteľnosť rôznych záznamov makroskopickým okolím je súčasne požiadavkou na ortogonálnosť stavov O .

Dekoherencia je teda proces, v ktorom sa *zrodí* obraz sveta taký ako ho poznáme - bez Schrödingerových mačiek, len s mačkami živými alebo mŕtvymi. V jazyku matíc hustoty je to prvý stupeň v reťazci

$$\begin{pmatrix} |c_1|^2 & c_1 c_2^* \\ c_1^* c_2 & |c_2|^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{dekoherencia}} \begin{pmatrix} |c_1|^2 & 0 \\ 0 & |c_2|^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{kolaps}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Druhý stupeň - *kolaps* či výber *jednej* hodnoty z *klasického* súboru - zostáva nevyriešeným PROBLÉMOM MERANIA.

Superpozícia a REALITA

(Zachráňme Schrödingerovu mačku.)

Základnou (a najkrajšou) vlastnosťou *lineárnych* systémov je, že sa riadia *princípom superpozície*. SCHR je lineárnou rovnicou, jej riešenia (vlnové funkcie - stavy) sú rozložiteľné do lineárnej superpozície iných (vhodných) riešení. Aký je však vzťah takýchto stavov k realite?

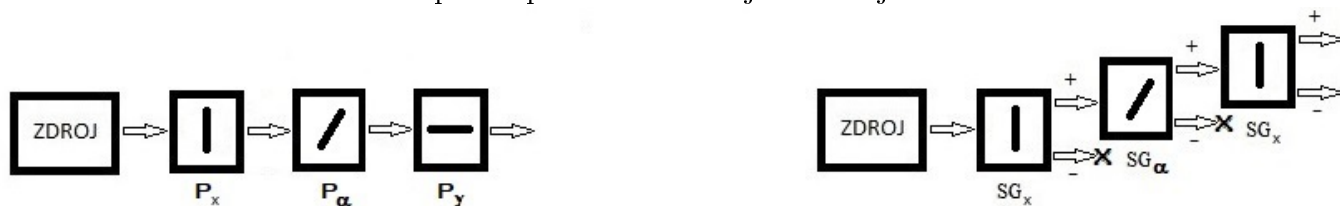
Čriedu 50 oviec môžeme (v prvom priblížení) považovať za lineárny systém, a teda vnímať ju ako superpozíciu napr. dvoch (pod)čried s 30 a 20 ovcami. Obe SÚ realitou. Bača s istou dávkou abstraktného myslenia môže dokonca počítat s podčriedami o počtoch 75 a -25 oviec, veď $75+(-25)=50$. Tu už je problém: Po prvé, 75 oviec *nemá*, a -25 oviec nedáva zmysel. Ak to však vezme „účtovne“ - na začiatku sezóny *mal* 75 oviec, a 25 oviec *boli* straty (nemoci, dravce, ...), istý „nádych“ reality tu je. Podobne *nulové saldo* na účte nemusí znamenať, že je všetko v poriadku - neuspokojené dlhy a pohľadávky sú predsa *realitou*. (Aj keď sú k danému dňu navzájom vykompenzované, majiteľovi účtu môžu spôsobovať bezsenné noci.)

Aj vo fyzike sa sa stretávame so situáciami, kedy o reálnosti jednotlivých zložiek superpozície môžeme špekulovať. Svetelný alebo zvukový impulz trvajúci v čase medzi t_1 a t_2 môžeme rozložiť do spektra *harmonických vln bez začiatku a konca* (to je Fourierova transformácia). Sú tieto spektrálne zložky *reálne*? V istom zmysle *áno*, veď ľubovoľnú z nich vieme účinne odfiltrovať (vieme „stiahnuť“ aj vypeckovať basy na rebrákoch“ alebo nasadiť si okuliare s farebným filtrom). Sú však reálne aj pre časy pred t_1 a po t_2 (keď ešte/už nič nevidíme ani nepočujeme)? Takto ale otázka nestojí - ak *sú* reálne, tak *bez časového obmedzenia*. Našťastie Príroda má prostriedky (vyjadrené **Kramersovými-Kronigovými vzťahmi**) zaručujúce *kauzálnosť* nášho sveta: Určite nič nevidíme/nezačujeme pred t_1 , a nijak neodhalíme ani jednotlivé fourierovské harmoniky. (Napokon, impulz v *budúcom* čase t_1 ešte vôbec nemusí vzniknúť.) Nazývame ich VIRTUÁLNYMI. S virtuálnymi objektami však fyzika úspešne pracuje.

Realitou je aj svetlo *lineárne polarizované* v určitom smere, „vyslobodené“ (pomocou pootočeného polarizátora) zo svetla *lineárne polarizovaného v celkom inom smere* (spomínali sme to už v prvej z kapitol o superpozícii). *Lineárne polarizované svetlo pripravené* jedným polarizátorom je POTENCIÁLNE ROZLOŽITEĽNÉ do superpozície *ľubovoľne orientovaných* navzájom ortogonálnych zložiek. O tom, ktorá z nich bude nespochybniteľnou *realitou*, rozhodne natočenie druhého polarizátora. Položme si však nasledovnú otázku: OBSAHUJE (v *ontologickom* význame *reality*) svetlo pripravené prechodom cez polarizátor P_x (v smere x) zložku polarizovanú v smere α (nie kolmom na x)? Odpoveďou môže byť: „Áno, veď ju vieme zmerať pootočeným polarizátorom P_α .“ Odpoveďou môže byť aj: „Nie, dokiaľ nevložíme P_α , zostáva polarizované *len* v pôvodnom smere.“ Nejednoznačnosť odpovede by sme mohli pripísať na účet faktu, že smery x a α nie sú *ortogonálne*, a teda majú nenulové vzájomné priemety. Druhý, pootočený polarizátor takýto *priemet* ODHALÍ. Sformulujme teda inú otázku: OBSAHUJE (v rovnakom zmysle) svetlo pripravené polarizátorom P_x zložku polarizovanú v *kolmom* smere y ? Odpoveď je tentokrát jednoznačná: „Nie! Skrížený polarizátor P_y nič nenameria.“ Ak však vložíme medzi P_x a P_y pootočený polarizátor P_α , svetlo ZMERIAME. P_y ako merací prístroj - „odhaľovač“ lineárne polarizovaného svetla - „odhalil“ y -ovú zložku, ktorá v pôvodnom svetle *nebola*. Inými slovami, VYROBIL ju.

Tu sme sa s „klasickou“ superpozíciou najviac priblížili ku *kvantovej*: Analogickými argumentami môžeme totiž skúmať superpozíciu po prelete QF častice cez SG_x (kapitola o Sternových-Gerlachových experimentoch, spomeňme si tiež na súvis medzi polarizáciou svetla a spinom fotónov.) QF častica *pripravená* SG_x prístrojom do stavu $|\uparrow_x\rangle$ je *potenciálne rozložiteľná* do superpozície $|\uparrow_x\rangle = a|\uparrow_\alpha\rangle + b|\downarrow_\alpha\rangle$ v *ľubovoľnom* smere α . Sú zložky tejto superpozície *realitou*? Je to analóg *prvej* z predchádzajúcich otázok: Stav $|\uparrow_x\rangle$ má *nenulové* priemety do ortogonálnej bázy $\{|\uparrow_\alpha\rangle, |\downarrow_\alpha\rangle\}$. Mohli by sme teda tvrdiť, že preletom cez SG_α jeden z jeho bazových stavov (napr. $|\uparrow_\alpha\rangle$) *zanikne* a druhý ($|\downarrow_\alpha\rangle$) sa *odhalí* (podobne ako polarizátor P_α pohltí zložku \perp_α a odhalí zložku \parallel_α v ortogonálnej báze $\{\perp_\alpha, \parallel_\alpha\}$).

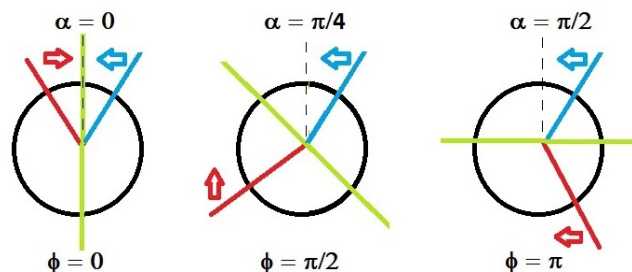
Prípadu s kaskádou polarizátorov P_x - P_α - P_y zasa odpovedá kaskáda SG_x - SG_α - SG_x . Ak prvý SG_x pripraví časticu v stave $|\uparrow_x\rangle$, tento stav neobsahuje ortogonálnu zložku $|\downarrow_x\rangle$. Na výstupe druhého SG_x sa však táto zložka s nenulovou pravdepodobnosťou objaví - SG ju VYROBÍ.



Z uvedených úvah je zrejmé, že meraním sa výsledný stav VYRÁBA, a nemá zmysel uvažovať o REÁLNOTI zložiek superpozície PRED MERANÍM. Navyše, preferovanú bázu merateľných stavov (a teda príslušnú superpozíciu) „vnucujeme“ meranému objektu až v okamihu výberu merania (napr. voľbou orientácie P či SG). Pred samotným meraním sú jednotlivé zložky aj celá superpozícia VIRTUÁLNE, podobne ako sú virtuálnymi fourierovské harmoniky krátkeho svetelného/zvukového impulzu v časoch predchádzajúcich jeho vygenerovaniu. (Fourierovské harmoniky sú tiež len preferovanou bázou pri spektrálnej analýze signálov.) Konkrétna superpozícia stavov pred meraním je len POTENCIALITOU určenou (antedatovanou) BUDÚCIM meraním.

Vráťme sa ešte k paralele medzi polarizátorom a SG . V zostave P_x - P_α či SG_x - SG_α rozkladáme meranú veličinu do superpozície ortogonálnych stavov meráku: P_α rozloží svetlo polarizované \parallel_x do svojej bázy $\{\perp_\alpha, \parallel_\alpha\}$ a vyrobí zložku \parallel_α s relatívnou intenzitou (vzhľadom na pôvodné \parallel_x) meniacou sa od 1 k 0 ako $\cos^2 \alpha$ v závislosti od uhlu natočenia P_α voči \parallel_x . SG_α rozloží čistý stav $|\uparrow_x\rangle$ do svojej bázy $\{|\uparrow_\alpha\rangle, |\downarrow_\alpha\rangle\}$ a vyrobí (monitorovaný) stav $|\uparrow_\alpha\rangle$ s pravdepodobnosťou meniacou sa od 1 k 0 pri postupnom otáčaní SG_α medzi smermi \uparrow_x a \downarrow_x ako $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$. Paralela je zdanlivo narušená rozdielom v uhlovej závislosti, ktorý však zanikne, ak si uvedomíme, že lineárne polarizované svetlo vzniká ako superpozícia kruhovo polarizovaných zložiek, tvorených fotónmi so spinom $+\hbar$ a $-\hbar$ (kapitola o fotóne). Ak pre referenčný smer \parallel_x lineárnej polarizácie (zelená) je $\alpha = 0$, potom relatívny fázový posuv medzi pravotočivou (modrá) a ľavotočivou (červená) kruhovou polarizáciou je

$$\begin{aligned} \phi = 0 & \quad \text{pre} \quad \alpha = 0 \\ \phi = \pi/2 & \quad \text{pre} \quad \alpha = \pi/4 \\ \phi = \pi & \quad \text{pre} \quad \alpha = \pi/2 \end{aligned}$$



Zámenou $\alpha \rightarrow \phi/2$ dostávame aj pre intenzitu lineárne polarizovaného svetla závislosť $\cos^2 \frac{\phi}{2}$ (v zhode s prípadom SG). Každému smeru α

lineárnej polarizácie teda odpovedá iná superpozícia pravo- a ľavotočivých zložiek, charakterizovaná svojím fázovým rozdielom $\phi \sim \alpha$, a o jej výbere rozhoduje meranie (natočenie polarizátora P_α).

Môžeme tento prístup rozšíriť aj na interferenčné „paradoxy“? Dva lúče, z ktorých každý zvlášť vytvorí na tienidle osvetlenú škvrnu, dohromady dajú TMU (ak sa stretnú v protifáze). Ilúzia svetla šíriaceho sa podľa zákonov geometrickej optiky sa stratí, ak mu do cesty vložíme difrakčnú mriežku - svetlo sa zjaví tam, kde „nemá čo hľadať“. Odstránením jednej (deštruktívne) interferujúcej zložky „zviditeľníme“ druhú. Ak sme schopní z tmy „vyslobodiť“ svetlo tým, že odstránime inú zložku svetla (tú v protifáze), znamená to, že obe zložky sú reálne (aj keď v superpozícii dajú tmu)? NIE. O nameranej intenzite svetla rozhodne fázový posuv medzi interferujúcimi VIRTUÁLNYMI zložkami (rovnako ako v prípade polarizácie). Zmena polohy detektora či pridanie/odstránenie difrakčnej „prekážky“ je INÉ meranie (inak „formulovaná otázka“) - iný fázový posuv aj výsledok interferencie (v analógii s otáčaním P_α). Každé meranie je manipuláciou (s vlastnou preferovanou bázou a virtuálnou superpozíciou), ktorá meranú zložku proste VYROBÍ (ako polarizátory či SG).

Istý rozdiel spočíva v tom, že zložky virtuálnej superpozície môžu ale nemusia byť navzájom ortogonálne. Práve interferenčné experimenty sa od ostatných líšia tým, že stavy tvoriace superpozíciu NIE

SÚ navzájom ortogonálne (ortogonalita a interferencia sa *definitóricky* vylučujú). Je pritom jedno, či ide o klasickú (napr. EM) alebo kvantovú vlnu. Každý QF objekt totiž interferuje *sám so sebou*, a jeho vlnová funkcia určuje *pravdepodobnosť* detekcie. Pravdepodobnosť je *makroskopickou* veličinou, a *v tomto zmysle* je aj vlnová funkcia makroskopickou. Z hľadiska *merania* je však dôležitá *tá* superpozícia (báza), ktorú si „vyberie“ merák (nezabúdajme na kľúčový vplyv merania na výslednú hodnotu veličiny v QF). Preferovanú bázu detektora častíc môžu tvoriť (ortogonálne) stavy {„klik“, „neklik“} alebo {..., $n \times$ „klik“, $(n + 1) \times$ „klik“, ...}, podľa typu merania/prístroja. Na všetky uvedené prípady sa vzťahuje schéma *previazania* meraného QF objektu s merákom M z predchádzajúcej kapitoly o dekoherencii

$$\left(\sum_m c_m |\psi_m\rangle \right) \otimes |M_0\rangle \xrightarrow{t} \sum_n c_n |\psi_n\rangle \otimes |M_n(t)\rangle$$

Treba ju teda chápať ako „vnútenie“ merákom preferovanej bázy meranému objektu *v okamihu merania*.

Do popkultúry 20. storočia vošla Schrödingerova mačka, ako archetyp QF podivnosti, v superpozícii stavov „živá“/„neživá“. V našom „klasickom“ svete takáto superpozícia zjavne nemá zmysel, a v predchádzajúcej kapitole sme ukázali, že ju pri meraní nikdy nemôžeme pozorovať. Na základe vyššie uvedených argumentov však nemá veľký zmysel o jej *realnosti* uvažovať ani v *mikrosvete*. Ide totiž o superpozíciu VIRTUÁLNU, *anticipujúcu* otázku (meranie) „*žije alebo nie?*“. Ak by však *budúcou* otázkou malo byť „*pradie alebo nie?*“, razom by sa pôvodná superpozícia zmenila na optimistickejšiu. Stačí len vybrať správnu otázku...³

Záver z tejto kapitoly vrhajú nie príliš priaznivé svetlo na alternatívnu (a pomerne populárnu), tzv. **mnohosvetovú interpretáciu** QF. Podľa jej autora (H. Everett III) a zástancov sa *nedeterministickému* kolapsu v *ortodoxnej* interpretácii dá vyhnúť, ak pripustíme, že *každé* meranie rozštiepi náš svet na *paralelné* svety (rozumej *histórie*), v ktorých sa realizuje každý z možných výsledkov, teda každá zo zložiek *preferovanej* superpozície. Keďže je však táto superpozícia *pred* meraním len virtuálnou, čiže POTENCIALITOU, a výsledok merania VÝROBKOM (nie odhalením časti reality!), znamenala by takáto „multivýroba“ výraznú nadprácu. A to je zámienka pre už beztak nabrúsenú Occamovu britvu.

*The atoms or elementary particles themselves are not real;
they form a world of potentialities or possibilities
rather than one of things or facts.
Werner Heisenberg*

³Naopak, ak mačku považujeme za „klasickú“ (teda makroskopickú, rovnako ako ampulku s kyanidom a Geigerov detektor), a o jej bytí by mal rozhodnúť rádioaktívny atóm, *dekoherencia* a následný *kolaps* (nech už je to čokoľvek) by o všetkom rozhodli okamžite.

Rekviem pre časticu

(Revízia dvojštrbinového experimentu a spol.)

Obvyklým (takmer učebnicovým) zaklínadlom „objasňujúcim“ dvojštrbinový experiment (a podobné experimenty, napr. Machov-Zehnderov interferometer s fotónmi) je odvolávka na *vlno-časticový dualizmus*, podľa ktorej experiment môžeme nastaviť tak, aby ukázal buď *časticovú* alebo *vlnovú* povahu kvantového objektu. Akoby šlo o akúsi náplasť na naše rany, keďže sa nedokážeme oslobodiť od našej prirodzenej predstavy či stereotypu, že každý objekt (aj kvantový) musí byť niekde **LOKALIZOVANÝ**. Ak v dvojštrbinovom experimente „policajt“ (napr. rozptyľujúci sa fotón) „lokalizuje“ prelietajúci objekt pri *jednom* z otvorov, vyvoláva to v nás dobrý pocit, že objekt-častica mal aspoň na chvíľu svoju *polohu* a *trajektóriu* (v jednom z otvorov). Dá sa ale bez takejto dvojjednosti zaobísť?

V spomínanom experimente (a podobných) v skutočnosti „lokalizátorom častice“ pri otvore nie je rozptýlený „fotón policajt“ ale **MAKROSKOPICKÝ** detektor rozptýlených fotónov (ktorý môže byť aj „slepý“ ako *kvantový zmizík* - máme na mysli *jeden* detektor zachytávajúci fotóny od *oboch* otvorov). Analýza príbehu sa teda nezaobíde bez zahrnutia aktu **MERANIA**. Informácia získaná meraním na tomto detektore fotónov nie je informáciou o stave prelietajúcej častice, ale o *stave fotónu rozptýleného na prelietajúcej častici* - teda o stave **KVANTOVO PREVIAZANÉHO PÁRU** častice - „policajt“ (previazanosť vznikla vzájomnou interakciou - rozptylom). Tak ako *samotnú* skúmanú prelietajúcu časticu vnímame v koherentnej superpozícii stavov ψ_1 a ψ_2 (preletela otvorom 1 či 2), aj *samotný* „policajt“ - rovnako delokalizovaný - je v superpozícii stavov ϕ_1 a ϕ_2 (priletel do detektora od otvoru 1 či 2). Po interakcii a previazaní sú však tieto superpozície nahradené *jedinou* koherentnou superpozíciou

$$|\xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle \otimes |\phi_1\rangle + |\psi_2\rangle \otimes |\phi_2\rangle)$$

v báze „nadiktovanej“ detektorom „policajtov“ (v tomto prípade *rozlišujúcim* otvory, teda nie „slepým“). Nasleduje akt merania - *kolaps* (nech už je to čokoľvek), ktorý **VYBERIE** jeden z báзовých stavov. Hoci výsledok ukazuje na prelet *jedným* z otvorov (ak rozptyl *nastal*), bezprostredne *pred záznamom* na detektore boli prelety oboma otvormi v koherentnej superpozícii. Ak teda prelietajúcej častici *nanútíme* konkrétny otvor, konáme **NAD**prácu, ktorá nemá oporu vo formalizme QF.

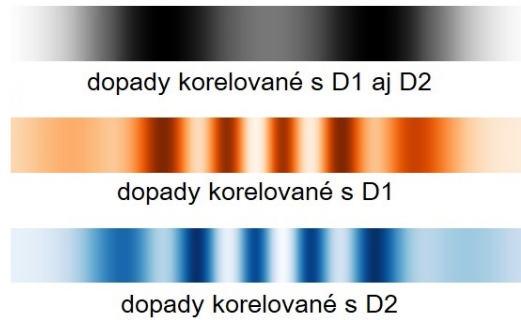
Okrem detektora „policajtov“ je v našom experimente aj detektor skúmaných prelietajúcich častíc - „tienidlo“, operujúci v spojitkej báze polohy. Pochopiteľne, kolaps stavu *previazaného páru* na detektore „policajtov“ sa prejaví v polohe dopadov na „tienidlo“ tak, že interferenčný obrazec **NEVZNIKNE**. Nezáleží pritom na tom, záznam ktorého detektora nastal skôr, čiže ktorý detektor kolaps spôsobil. (Navyše podľa teórie relativity ak sú nesúmiestne, táto otázka je pochybná.)⁴

Predbežný záver teda je, že skúmaná častica prelieta **OBOMI** otvormi (ako **VLNA**, nie častica), bez ohľadu na to, či je následne rozptýlená „policajtom“. Rozptyl však zničí interferenciu na „tienidle“ - báзовé stavy detektora „policajtov“ súvisia s *polohou* (*domnelou* polohou častice v jednom z otvorov), tento detektor preto „nekomutuje“ s detektorom *polohy* na „tienidle“.

Obstojí tento záver aj po vložení kvantového zmizíka? Podľa tradičnej interpretácie kvantový zmizík funguje vtedy, ak informáciu o „dráhe“ častice **ZNIČÍ** - nestačí ju „zamiest pod koberec“ (odtiaľ by sa dala *principiálne* vyhrabať). To sa dá uskutočniť napr. privedením rozptýlených „policajtov“ (od oboch otvorov) na polopriepustnú platničku, ktorá *náhodne* rozdelí zväzok na prechádzajúci a odrazený, s detektormi D1 a D2. (Potrebujeme *dva* detektory, keďže musíme detegovať *každý* rozptýlený fotón, aby sme ho mohli spárovať s rodiacim sa obrazcom na „tienidle“. Musíme totiž

⁴V tejto súvislosti treba chápať aj Feynmanov myšlienkový experiment s difrakciou neutrónov na kryštále (kapitola o meraní): Preklopenie spinu konkrétneho atómu nespôsobilo kolaps neutrónovej *vlny* do *polohy* tohto atómu (takáto mikroskopická interakcia je na kolaps nedostatočná). Detekcia na *tomto* atóme rozptýleného *neutrónu*, neprišpievajúceho k interferencii, však takýmto kolapsom **JE** - kolapsom *previazaného páru* atóm-neutrón. V tomto zmysle **PREBEHLO** meranie preklopeného spinu.

z našich počtov vylúčiť tie prelietajúce častice, ktoré sa rozptylu na fotónoch *vyhli* - pre tie je interferencia samozrejmosťou.) Dopady na „tienidlo“ korelované OSOBITNE s kliknutím D1 alebo D2 naozaj vykazujú interferenčný obrazec (obr.), a to aj napriek tomu, že každá prelietajúca častica dostala úder „policajným obuškom“! Obrazce sa však *v súčte* dopĺňajú tak, že interferencia ZMIZNE.



Záver z toho je teda pozoruhodný: *Prelietajúce častice rozptýlené „policajtmí“ (všetky DOHROMADY) interferenciu nevykazujú, každá z nich však sama so sebou interferuje.* Častice teda naozaj VŽDY prelietajú *obomi* otvormi, a kvantový zmizík funguje. Na rozdiel od prípadu bez zmizíka, detektory D1, resp. D2 nemajú informáciu o mieste rozptylu - ich bázy tvoria stavy *„policajt“ sa rozptýlil* a *„policajt“ sa nerozptýlil*). Tieto stavy nijak nesúvisia s *polohou*, a teda sú nezávislé od báзовých stavov „tienidla“ - merané veličiny navzájom *komutujú*. Kolaps previazaného stavu na týchto detektoroch preto nijak neovplyvní interferenciu na „tienidle“.

Formálne sa to dá vyjadriť nasledovne: Kvantovo previazaný pár častica - „policajt“ v koherentnej superpozícii prechodov/rozptylov v otvoroch 1 a 2 sa prechodom cez kvantový zmizík (polopriepustnú platničku) ďalej „štiepi“ na vetvy odpovedajúce detektorom D1 a D2,

$$|\phi_1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_{D1}\rangle + i|\phi_{D2}\rangle) \quad |\phi_2\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_{D2}\rangle + i|\phi_{D1}\rangle)$$

kde $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ vyjadruje fázový posuv medzi odrazenou a prechádzajúcou vlnou cez doštičku. (Tento fázový posuv, rovnako ako symetria, budú zachované pre akýkoľvek typ funkčného zmizíka, nielen pre polopriepustnú platničku.) Nový koherentný stav je potom

$$|\xi\rangle = \frac{1}{2} \{ |\psi_1\rangle \otimes (|\phi_{D1}\rangle + i|\phi_{D2}\rangle) + |\psi_2\rangle \otimes (|\phi_{D2}\rangle + i|\phi_{D1}\rangle) \} = \dots$$

$$\dots = \frac{1}{2} \{ |\phi_{D1}\rangle \otimes (|\psi_1\rangle + i|\psi_2\rangle) + |\phi_{D2}\rangle \otimes (|\psi_2\rangle + i|\psi_1\rangle) \}$$

Kliknutia detektora D1 znamenajú kolaps $|\xi\rangle$ do $(|\psi_1\rangle + i|\psi_2\rangle)$, čo pre výsledok na „tienidle“ znamená

$$\mathcal{P}_{D1} = (|\psi_1\rangle + i|\psi_2\rangle)(|\psi_1\rangle + i|\psi_2\rangle)^* = \dots = \mathcal{P}_{\psi_1} + \mathcal{P}_{\psi_2} + \mathcal{P}_{inter}$$

kde \mathcal{P}_{ψ_i} odpovedajú pomyselným prechodom otvormi a \mathcal{P}_{inter} odpovedá interferencii. Obdobne pre kliknutia detektora D2 dostávame

$$\mathcal{P}_{D2} = \mathcal{P}_{\psi_1} + \mathcal{P}_{\psi_2} - \mathcal{P}_{inter}$$

Je zjavné, že úhrnný obrazec na „tienidle“ pre *všetky* rozptýlené fotóny $\mathcal{P}_{D1} + \mathcal{P}_{D2}$ žiadnu interferenciu nevykazuje.

Ukazuje sa teda, že „starý dobrý“ príbeh o „policajných obuškoch“, ktoré rozmažú interferenčný obrazec, je *falošný*. Akokoľvek rozumné sú použité argumenty, falošnou je východisková predstava, že častice prechádzajúce dvojštrbinou (a rovnako aj fotóny - „policajti“) majú definované polohy, trajektórie, a *priestorovú* náhodnosť. A predovšetkým, vnucuje sa falošná predstava, že o výsledku rozhodujú procesy v mikrosvete *nezávisle od aktu merania*.

Akou vlnou je ψ ?

(Čo ostane z vlnovo-časticového dualizmu.)

V predchádzajúcej kapitole sme ukázali, že predstava *častice* ako *permanentného stavu* je neudržateľná. Častica, v tom zmysle ako ju vnímame v makrosvete, je objekt *vznikajúci pri interakcii s makroskopickým zariadením* a existujúci len *počas* tejto interakcie. Mimo nej ostáva delokalizovaný v hmle svojej vlnovej funkcie (napr. v orbitáli atómu). Ak sa v QF naďalej pracuje s pojmom *častica*, je to len preto, že sa obsah tohto pojmu PREDEFINOVAL (alebo inak, že sa pre QF objekty nevymyslel nový pojem).

Do akej miery však môžeme QF objekt, ako elektrón či fotón, stotožniť (v ontologickom zmysle) so svojou *vlnovou funkciou*? Táto otázka nás prenasleduje od samého začiatku. Zrekapitulujme si základné skutočnosti týkajúce sa vzťahu QF objektu a jeho vlnovej funkcie ψ :

- V súradnicovej reprezentácii predstavuje $|\psi|^2$ pravdepodobnosť *detekcie individuálnej častice* (v *klasickom* význame) v danom mieste. Táto skutočnosť sama osebe neimplikuje *materiálnu* povahu ψ (v ontologickom zmysle).
- Interferenčné experimenty *vylučujú priestorovú lokalizovanosť* QF objektov (častica - v QF zmysle - nerušene prechádzajúca napr. sústavou otvorov nevyhnutne „cíti“ *všetky* otvory). Táto skutočnosť implikuje *materiálnu* povahu ψ .
- Okamžitý kolaps priestorovo rozloženej ψ do „bodu“ pri detekcii častice či okamžité pôsobenie na diaľku medzi kvantovo previazanými objektami dáva *materiálnu* povahu ψ do ostrého rozporu s teóriou relativity.
- Experimenty s kvantovo previazanými párami častíc (teda takými, kde ani jedno z „dvojčiat“ *nemá ostrú hodnotu* danej premennej, ale jej sumárna hodnota *ostrá je*) opakovane vylúčili existenciu „skrytých“ parametrov - potvrdili *úplnosť* opisu QF objektov prostredníctvom ψ .

Jediným racionálnym záverom rešpektujúcim uvedené fakty je ten, že na úrovni mikrosveta je náš opis **nelokálny** - ψ je úplným opisom materiálnych QF objektov (je „všetkým čo existuje“), sama osebe je však nepozorovateľná, a s relativistickým obmedzením rýchlosti a okamžitým pôsobením na diaľku si príliš neláme hlavu.

Nový vhľad získame, ak prejdeme od opisu *jedného* QF objektu k mnohočasticovému. V súradnicovej reprezentácii je stav N častíc vyjadrený vlnovou funkciou $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t)$. Táto funkcia však „nežije“ v 3D *súradnicovom* priestore, ale v abstraktnom **konfiguračnom priestore**, počet rozmerov ktorého narastá s počtom častíc. „Preklopenie“ ψ z tohoto abstraktného priestoru do súradnicového je triviálnym *len* v prípade jednej častice. Tým sa porušenie relativistického obmedzenia stáva menej jasným.

Čím sa ψ líši od klasickej vlny? Klasická vlna predstavuje *šírenie* (aj stojatá vlna reprezentuje šírenie v navzájom opačných smeroch) *energie*. Všetky druhy mechanických vln (zvuk, vlniaca sa gumová hadica, a pod.) sú šírením *zhlukov* častíc látky, pričom energia sa cyklicky „prelieva“ medzi *dvojicami* stupňov voľnosti - *kinetickou* energiou častíc a energiou *pružnej deformácie* látky (v dokonale nepružnom prostredí sa mechanické vlny nešíria). EM vlna je šírením energie aj vo vákuu, pri cyklickom „prelievaní“ medzi elektrickým a magnetickým stupňom voľnosti - poľom. V látkovom prostredí poznáme rôzne druhy vln - napr. v *spontánne usporiadaných* magnetikách existujú tzv. *spinové vlny* - šíriace sa poruchy magnetického usporiadania. (Usporiadanie spinov v týchto materiáloch je energeticky výhodné, jeho porucha teda predstavuje akúsi pružnú deformačnú energiu.) V jazyku QF všetky tieto vlny *kvantujeme* - elementárnymi kvantami sú *fonóny* (energetické kvantá pružnej poruchy kryštallického usporiadania), *fotóny* (kvantá EM energie), *magnóny* (energetické kvantá „pružnej“ poruchy magnetického usporiadania), a pod. Ako sme naznačili v predošlej kapitole o vlnovej funkcii, aj ψ má svoju dvojicu stupňov voľnosti - reálnu a imaginárnu časť (preto ψ *musí* byť komplexnou).

Pre (nášho starého známeho) *fotón* z toho vyplýva, že ho spoľahlivo môžeme vnímať ako „zdanlivú“

časticu (rovnako ako fonón alebo magnón) - balíček energie, prenášajúci sa *svojou* rýchlosťou c . Vskutku nič nepokážime, ak náš pohľad na fotón redukuje týmto spôsobom. Pokiaľ ide o jeho ďalšie vlastnosti - hybnosť a moment hybnosti, tieto sa, rovnako ako energia, zachovávajú PRI INTERAKCIÁCH: Pri svojom vzniku fotón odnesie zo zdroja energiu, hybnosť a moment hybnosti, a pri svojom zániku ich odovzdá absorberu. Otázka, či si ich „nesie so sebou počas letu“, jednoducho nemá zmysel. (Ako sme ukázali v predchádzajúcich kapitolách, ide o KLASICKÉ veličiny, ktoré v mikrosвете strácajú jasný význam - predstavujú len *potenciality*, ktoré sa „realizujú“ pri interakcii s makrosvetom.)

Spomeňme si na Bohrov model atómu a princíp korešpondencie: Tento princíp má za úlohu deklarovať, ako sa z mikrosвета, riadiaceho sa pravidlami QF, vynára náš klasický svet, napr. EM vlna - šíriace sa oscilujúce elektrické a magnetické pole, ktoré je (merateľnou) REALITOU v našom svete. Ako sme už spomenuli, *klasická* vlna s jej (merateľnou) *frekvenciou* a *vlnovou dĺžkou* sú EMERGENTNÝM prejavom MAKROSKOPICKÉHO množstva fotónov, v jazyku ktorých tieto dve veličiny *nemajú význam!* Inak povedané, to čo my vnímame ako *vlnu* (s frekvenciou a vlnovou dĺžkou) je objekt z *nášho* sveta (v *našom* jazyku), ktorý však vo svete QF *nemá zmysel*. Pre makroskopický počet fotónov s rovnakou energiou - tzv. **koherentnú vlnu** - je amplitúda vlnovej funkcie (presnejšie jej kvadrát - intenzita vlny) mierou *stredného počtu* fotónov. Toto je *klasická* vlna (ako emergentný jav). Samotný fotón však žiadnou vlnou v tomto zmysle *nie je*. Vlnová funkcia fotónu, ktorá vzíde z Maxwellových rovníc, je len akýmsi *makroskopickým* „sprostredkovateľom“ medzi naším svetom *mikrosvetom* - určuje MAKROSKOPICKÚ veličinu: PRAVDEPODOBNOŠŤ detekcie jednotlivého fotónu.

Klasickú vlnu (s klasickými atribútmi) vieme „skomponovať“ aj z iných QF častíc. Dôležité však je, že všetky častice tvoriace takúto vlnu musia mať ROVNAKÚ vlnovú funkciu ψ - musia byť v *rovnakom stave*. Táto podmienka je nespĺniteľná pre *fermióny* (častice s *poločíselným* spinom, ako napr. elektrón), kvôli *Pauliho vylučovaciemu princípu*. Splniteľná je však pre *bozóny* (častice s *celočíselným* spinom, podobne ako fotón), akými sú atómy s *párnym* počtom protónov a neutrónov, napr. ${}^4\text{He}$. Pri dostatočne (a veľmi) nízkej teplote dokáže makroskopický počet takýchto *hmotných* častíc obsadiť *jediný* (najnižší) stav, opísaný jednou ψ - tzv. **Boseho-Einsteinov kondenzát**. Amplitúda ψ potom už nevyjadruje len hustotu *pravdepodobnosti* detekcie (jednej častice) ale strednú HUSTOTU ČASTÍC. Za istých okolností môže dôjsť aj k *spárovaniu dvojíc fermiónov*, napr. elektrónov alebo atómov ${}^3\text{He}$. Výsledný spin fermiónového *páru* je celočíselný - tieto tzv. **Cooperove páry** sa chovajú ako *bozóny*, a tiež môžu skondenzovať do jediného stavu opísaného makroskopickou ψ .

Takúto **makroskopickú vlnovú funkciu** môžeme vnímať ako *klasickú* vlnu. Opisuje *makroskopický* objekt - makroskopický súbor (*mikroskopických*) častíc, a je hmatateľným (merateľným) prepojením kvantového sveta a makrosвета: Vykazuje klasickú vlnovú interferenciu *makroskopických* veličín (ako intenzita svetla či elektrický prúd) aj kvantovanie (makroskopického momentu hybnosti či magnetického toku) na pozorovateľných škálach!!! Existencia týchto javov poukazuje na to, že hranice ríše QF *nie sú* vymedzené hranicou medzi mikro- a makrosvetom, ale hranicou medzi *systémami s malým a veľkým počtom stupňov voľnosti*. V nekorelovanom mnohočasticovom systéme každá častica zvyšuje počet stupňov voľnosti systému - takýto systém je *klasickým*. Ak však tieto častice (a to v ľubovoľnom množstve) obsadia *jediný* stav, charakterizovaný *malým* počtom stupňov voľnosti (a nespočetné množstvo nezávislých jednočasticových stupňov voľnosti „yymrzne“), takýto systém - ľubovoľne veľký - je *kvantovým*.

Takýto *makroskopický kvantový* stav nie je súdený *nespáreným* fermiónom. Vlnová funkcia (nášho druhého starého známeho) elektrónu (rovnako ako každej *individuálnej* QF častice) preto ostáva neklasickou vlnou bez klasickej ontologickej asociácie, s jedinou výpoveďou v klasickom jazyku - *pravdepodobnostnou*. Jej asociovanie s priestorovým rozložením náboja či hmotnosti je ontologicky neadekvátne (aj keď v mnohých približných výpočtoch, najmä v kvantovej chémii, celkom dobre funguje). S istotou môžeme tvrdiť len to, čo aj v prípade fotónu: Pri interakciách platia všetky zákony

zachovania. Preto sa moderné verzie QF sústreďujú len na bilanciu interakcií. Medzi interakciami je elektrón (podobne ako fotón) iba „porciou“ energie rozpustenej vo *svojom* - **elektrónovom poli**.

Predstava vlny (so všetkými klasickými asociáciami) je teda vo svete QF rovnako NENÁLEŽITÁ ako predstava klasickej častice. Ak tento pojem v QF naďalej používame, je to opäť len preto, že sme pre QF objekty vlastný názov nevymysleli. V QF teda platí, že

častica \neq klasická častica vlna \neq klasická vlna

Vlnovo-časticový dualizmus (s klasickými asociáciami pre vlnu aj časticu) predstavuje len akési pomocné „barly“ v našej imaginatívnej nemohúcnosti. Našťastie, s týmito barlami dokážeme celkom slušne kráčať.

Pomyslenie, že ÚPLNÝ fyzikálny opis QF objektov, obsiahnutý vo vlnovej funkcii, nám neposkytuje odpovede na niektoré naše otázky, môže vyvolávať nedôveru. Podľa ortodoxnej interpretácie QF však *nie je* úlohou fyziky formulovať tvrdenia o tom aká Príroda JE, ale o tom čo o nej principiálne VIEME Povedať. *Úplnosť* teda znamená, že Príroda nám už neodhalí nič viac, a akékoľvek konštrukcie nad rámec úplného opisu sú metafyzické. Ak sú teda niektoré premenné DEFINITÍVNE zahalené *neprekonateľným* oparom neurčitosti, akékoľvek pokusy o ich presnejšie uchopenie *nemajú čo hľadať na pôde fyziky*. Akékoľvek zmysluplné tvrdenie musí byť, priamo či nepriamo, overiteľné experimentom. Inými slovami, *principiálna* neurčitost istých premenných (napr. polohy či hybnosti) vyjadruje ABSENCIU FYZIKÁLNEJ REALITY - čiže *neexistujú!* Konkrétne hodnoty takýchto premenných VZNIKAJÚ len *aktom merania*.

Uvedené tvrdenia môžu znieť trochu dogmaticky. Takýto pocit však vyviera z nášho *antropocentrizmu*. Celý register našich predstáv a slovník našich pojmov je determinovaný naším zmyslovým vnímaním. Ľudský intelekt dokázal vybudovať neuveriteľne komplexnú pojmovú štruktúru na mnohých úrovniach organizácie hmoty (od pojmov typu *životné prostredie, demokracia, hypotekárny úver*, cez pojmy ako *láska* či *cirhóza*, až po *mitochondriu* či *aminokyselinu*), sú to však všetko úrovne dostupné nášmu zmyslovému vnímaniu. Mikrosvet je však takýmto vnemom beznádejne nedostupný, a bolo by hriechne *naivné* (ak nie priam *arogantné*) sa domnievať, že takto dokážeme uchopiť aj svet na (sub)atomárnej úrovni. Musíme si uvedomiť, že aj fyzikálne pojmy ako *hybnosť* či *energia, vlna*, či *častica*, sme si VYMYSLELI my (ľudstvo), v domnení, že poskytujú vhodný opis sveta okolo nás. Fakt, že vyhovujú opisu makrosвета, ešte nezaručuje, že nezlyhajú v prípade mikrosвета. Experimentom (meraním) vnucujeme Prírode otázky (veličiny), ktoré majú význam len v našom jazyku. Príroda nám VŽDY vyrobí odpoveď. Ak sa „spýtame“ kapra na jeho teplotu (čiže odmeriame ju teplomerom), dostaneme odpoveď - teplotu kapra (lebo tento pojem má zmysel). Ak sa „spýtame“ elektrónu na jeho polohu, dostaneme TIEŽ odpoveď - meranie ju vyrobí, aj keď samotná otázka zmysel mať nemusí. (Je to ako zbaviť sa dotieravého diskutéra - je dobré mu dať vo všetkom za pravdu.)

Únikom z tejto bezmocnosti je uchýliť sa k rýdzo *abstraktnému* - matematickému jazyku, bez ambícií na jeho spárovanie s jednoznačnou ontológiou. Pojmy *stav* či *vlnová funkcia* sú toho dobrým príkladom, a úspechy modernej fyziky sú dobrou vizitkou tejto stratégie.

*Ich mag sie nicht und es tut mir leid,
dass ich mich jemals mit ihr beschäftigt habe.
Erwin Schrödinger o QF*

V POLI je pravda. (Niečo ako katarzia.)

Všetky doterajšie úvahy sa niesli v duchu *vlnovo-časticového dualizmu*, ktorý tvorí chrbtovú kosť štandardnej interpretácie QF. Pri takomto prístupe je výber medzi časticovým a vlnovým pohľadom vecou pragmatickej voľby. Táto kapitola je istým zhrnutím a revíziou predchádzajúceho textu z pohľadu (momentálne) najfundamentálnejšej ucelenej teórie - **kvantovej teórie polí** (QTP).

Na úvod zopár čísel: Hmota (látka), tak ako ju poznáme⁵, je tvorená *atómami*, pričom 99,95% hmotnosti atómov tvoria protóny a neutróny. *Ich* stavebné kamene - *kvarky* - však tvoria len 5% ich zotrvačnej hmotnosti, pričom zvyšných 95% tvorí energia tzv. **silnej jadrovej interakcie**, čiže *polí gluónov* (s nulovou zotrvačnou hmotnosťou). Zotrvačnú hmotnosť kvarkom (aj elektrónom) pritom dodáva interakcia s tzv. **Higgsovým poľom** – bez nej by boli *nehmotné*.

Naša hmota je teda tvorená POĽOM !!!

Elementárne častice štandardného modelu sú len energetickými KVANTAMI svojich (rôznych kvarkových, leptónových a kalibračných „silových“) polí - každému druhu častice (a jej antičastice) odpovedá *jej* príslušné pole. Tieto polia sú (fourierovsky) rozložiteľné do sústav kvantových harmonických oscilátorov⁶ s kvantovanou energiou - *časticami*. Môžu však existovať aj *bez častíc* - v základnom stave s NENULOVOU energiou *vákua* (postará sa o to princíp neurčitosti). Vákuum *nie je* prázdny priestorom, aj keď *neobsahuje* častice! (Hovoríme o nenulových fluktuáciách okolo nulovej strednej hodnoty poľa.) Bez vákua neexistuje ani priestor - polia sú vlastnosťou samotného priestoru!

Bez *fundamentálnej* existencie polí by sme nedokázali identifikovať nositeľa energie vákua (stavu bez prítomnosti častíc) ani vysvetliť viaceré javy (Lambovo posuv, Casimirov jav, Unruhovo žiarenie,...). Konzistentný opis sveta *len* pomocou častíc neexistuje. Naopak, s koncepciou fundamentálnych polí (a časticami „len“ ako excitáciami polí) si očividne vystačíme. No a „zrovnoprávneniu“ častíc a polí bráni Occamova britva. Naša realita je teda tvorená vlnami neviditeľných *kvantovaných* polí. Ich kvantá sa *občas* (napr. pri interakciách s detektormi) javia ako *častice*. Preto je prirodzené, že všetky častice rovnakého druhu (poľa) sú IDENTICKÉ. Tieto polia sa v časopriestore navzájom prelínajú, pričom *niektoré* stupne voľnosti týchto polí medzi sebou *navzájom* interagujú - to obvykle opisujeme ako *zrážky častíc* (rozptyl jednej na druhej).

Kvantá energie polí sú vo všeobecnosti NELOKÁLNE - priestorovo rozložené (aj keď nerovnomerne). O lokalizácii (čiže *častici v klasickom chápaní*) má zmysel hovoriť iba pri koncentrovanej pravdepodobnosti detekcie, na úrovni napr. 99%, v dôsledku kolapsu pri detekcii alebo inej dostatočne silnej interakcie (ako elektróny v atóme, no aj tu sú viac-menej delokalizované v rámci orbitálov). Elementárne kvantá sú *nedeliteľné*, na úrovni jednotlivých kvánt teda, pochopiteľne, nemá zmysel hovoriť o rozložení energie, ani iných vlastností, inak ako o *potencialite*, ktorá sa pri interakcii realizuje VCEĽKU v nedeliteľných kvantách a OKAMŽITE - inak by neboli nedeliteľné (na potenciality sa relativistické obmedzenie rýchlosti nevzťahuje). QF je *principiálne nelokálna*. Spojitá *hustota* energie, hybnosti, náboja, a pod., je *emergentnou* vlastnosťou *makroskopického* počtu kvánt. Každé *voľné* kvantum je *nekonečne* rozložené. (Z relativistickej teórie sa dá ukázať, že aj ak je v danom okamihu častica dobre lokalizovaná, v nasledujúcom ľubovoľne blízkom okamihu má ako *voľná* nenulovú pravdepodobnosť VŠADE, aj keď mizivú vo veľkej vzdialenosti. Relativita a kauzalnosť teda vylučujú *klasickú* (lokálnu) časticu, a spochybňujú prípadné interpretácie QF založené na takejto predstave).

⁵Pre poriadok treba pripomenúť, že je reč o tzv. *viditeľnej hmote*. Podľa astronomických pozorovaní ide len o cca 5% celkovej hmoty Vesmíru. Ďalších 27% tvorí tzv. *tmavá hmota*, zvyšných 68% tzv. *tmavá energia*, o ktorých toho zatiaľ veľa nevieme.

⁶Treba zdôrazniť, že „výchyľky“ kmitov týchto pomyselých oscilátorov „žijú“ v *abstraktných* priestoroch „vztyčených nad“ každým bodom nášho (časopriestoru). Akákoľvek predstava oscilácií v našom 3D priestore je SCESTNÁ.

V rámci priestorového rozloženia kvanta poľa ako *potenciality* môžeme hovoriť aj o *toku*. V *stacionárnych stavoch* sa rozloženie pravdepodobnosti nemení s časom, elektrónom v atómoch pritom pripisujeme momenty hybnosti aj relativistické rýchlosti. Rozpor tu však nie je - pri stacionárnom toku sa pole zachováva (čo lokálne odtečie, to pritečie). Treba si len spomenúť (kapitola o stacionárnych stavoch), že veličiny ako rýchlosť či moment hybnosti v mikrosвете strácajú klasickú asociáciu s pohybom.

Základnou vlastnosťou kvánt polí je ich CELISTVOSŤ - vznikajú a zanikajú *okamžite a nelokálne*. Rôzne konfigurácie kvánt polí sú rôznymi *stavmi* priestoru. Kvantové preskoky sú OKAMŽITÉ zmeny konfigurácie poľa (všade). NELOKÁLNOŠŤ mikrosвета - okamžité pôsobenie na ľubovoľné vzdialenosti - je nateraz jednoznačne experimentálne potvrdeným faktom (dokonca nezávisle na platnosti QF!). Interakciou rôznych kvánt vzniká aj po ich rozptýlení JEDINÝ *celistvý kvantovo previazaný objekt* (bez ohľadu na jeho veľkosť - vzájomnú vzdialenosť jednotlivých jeho zložiek). Experimenty preukázali, že meraním jednej zložky previazaného objektu v mieste A jednoznačne a *okamžite* určíme (t.j. vytvoríme) odpovedajúcu vlastnosť inej *jeho* zložky v mieste B aj na vzdialenosti stoviek km! Žiaden z výsledkov v A a B pritom nie je dopredu známy: Manipuláciou s merákom A totiž môžeme výsledok merania danej zložky zmeniť *bezprostredne* pred meraním (t.j. počas „letu“ kvanta, a to napr. nastavením fázového posuvu na interferometri, otočením SG prístroja, a pod. - kapitola o meraní). Dopad na meranie v B však bude *okamžitý* - jednotlivé zložky tvoria *celok - čistý stav* v SUPERPOZÍCIÍ MOŽNÝCH KORELOVANÝCH VÝSLEDKOV meraní (kapitola o stave), ktorý skolabuje *naraz a celý*. Dôležité však je, že v okamihu merania je výsledok v A aj B NÁHODNÝ (jeho pravdepodobnosť sa manipuláciou s merákom *nemení*), ich korelácia bude „spoznaná“ až porovnaním výsledkov. *Principiálna náhodnosť* výsledku merania túto koreláciu „maskuje“. Preto v kapitole o revízii dvojštrbinového experimentu nepozorujeme priamo interferenčný obrazec, následnou koreláciou výstupov z detektorov sa však interferencia objaví. V súlade s teóriou relativity, ku žiadnemu prenosu informácie z A do B *nadsvetelnou* rýchlosťou (zámernou zmenou meráku v A) teda nemôže dôjsť.

Jediným celkom, rovnako ako previazaný stav *dvoch* kvánt, je aj previazaný stav *jedného* kvanta a *vákua*. Príkladom môže byť kvantum v superpozícii *odrazené a prechádzajúce* pri náraze na bariéru. Jeho detekcia v mieste odrazu A automaticky znamená absenciu detekcie (vákuum) v mieste B za bariérou, a naopak. Meranie v ľubovoľnom s detektorov znamená kolaps celého objektu kvantum-vákuum. Je to variácia na tému „jedna častica - dva stavy“. Po *dekoherencii* čistého stavu objektu jeho previazaním s merákom je každý z pozorovateľov A,B konfrontovaný so *zmiešaným stavom* a *náhodným* výsledkom (kapitola o dekoherencii). Korelácia je zistiteľná až následným porovnaním. Výsledkom každého *lokálneho* merania je *len* náhodný výber zo zmiešaného stavu, nikdy nie Schrödingerova mačka.

Aj pri dopade kvanta na tienidlo (napr. po prechode sústavou štrbín) ide o interakciu *priestorovo rozloženého* kvanta (vlny s daným rozložením pravdepodobnosti) s CELÝM tienidlom. Tienidlo (ako sústava N nezávislých detektorov so stavmi 1=častica, 0=vákuum) rozkladá stav prilietajúceho kvanta do superpozície rôznych miest dopadu (A,B,C,...) o atomárnych rozmeroch - celistvosť kvánt totiž vyžaduje LOKÁLNY transfér *celej* energie (a iných vlastností). Celistvosť kvanta rovnako „zabezpečí“ *superpozíciu korelovaných* výsledkov typu

$$\alpha|1,0,0,\dots\rangle + \beta|0,1,0,\dots\rangle + \gamma|0,0,1,\dots\rangle + \dots$$

ako N -prvkový *previazaný stav* výsledkov 1 a $(N-1)$ -krát 0. Následný kolaps už len náhodne vyberie z tejto ponuky (s prihliadnutím na rozdelenie pravdepodobnosti, dané koeficientami $\alpha, \beta, \gamma, \dots$). Vybrané miesto na tienidle však NIE JE miestom interakcie kvanta s tienidlom, ale miestom, na ktorom sa interakcia MAKROSKOPICKY PREJAVÍ (v zmysle definície merania teda *miesto namerania*).

Pri revízii dvojštrbinového experimentu sme videli, že *jeden* z detektorov fotónov-„policajtov“ len *akoby* určil otvor, ktorým *zdanlivo* neinterferujúca častica preletela. V skutočnosti rozptýl fotónu na tejto častici nastal NELOKÁLNE (v okolí *oboch* otvorov), fotón-„policajt“ interagoval rovnako

nelokálne s *oboma* detektormi (D1,D2), no len na jednom z nich sa táto interakcia *makroskopicky* prejavila (v tradičnom jazyku QF nastal *kolaps* čistého stavu previazaného páru). Ak by sme do každého z otvorov priamo vložili *makroskopický* detektor (čo je to isté ako umiestnenie tienidla *bezprostredne* za prekážku s otvormi), detekcia častice v *jednom* z otvorov by bola opäť len *makroskopickým prejavom* (kolapsom) *nelokálnej* interakcie (v oboch otvoroch). „Častica“ (ako *nelokálne* kvantum) VŽDY vchádza DO OBOCH otvorov.

Kvantová previazanosť *skupín* mnohých kvánt bola experimentálne potvrdená: Atómy (= zhľuky navzájom interagujúcich elementárnych kvánt leptónových, kvarkových a kalibračných polí), molekuly C₆₀, C₇₀, aj organické molekuly s oveľa väčším počtom atómov v dôsledku interakcií medzi svojimi elementárnymi konštituentmi tvoria vnútorne previazané *celky*, a vykazujú interferenciu v experimentoch dvojštrbinového typu. (Dodaním energie ich vnútorným stupňom voľnosti - vibráciám - sa však ich vnútorná previazanosť čiastočne narušuje a interferencia sa potláča.)

QF superpozíciu, ako vlastnosť kvantových polí a šírenia ich vzruchov - kvantovaných *vln*, vieme pozorovať nielen na základe *interferencie*, ale aj nepriamo - experimentálnym overením predpovedanej štatistickej váhy jednotlivých jej zložiek. Takéto experimenty boli úspešne zrealizované na tzv. **Rydbergových atómoch** (s elektrónmi excitovanými do *vysokých* hladín), ale aj na *mezo/makroskopických* objektoch (vibračných stavoch diamantov μm rozmerov, obsahujúcich 10^{16} atómov). *Priamemu* pozorovaniu Schrödingerovej mačky však, ako sme vysvetlili vyššie, bráni teória relativity.

Predstava elementárnych kvánt ako častíc - „gulôčok“, sústredených do neskutočne malých rozmerov (či dokonca do bodu) je len „stredoškolský“ MÝTUS, rovnako ako predstava, že QF sa týka len *mikroskopických* rozmerov, či delenie hmoty na látku a pole. Kvantá samotné sú nepozorovateľné, reálne ich však registrujeme prostredníctvom kvantových *skokov*. Mimo merania reprezentujú kvantá poľa len potencialitu či pravdepodobnosť (teda akúsi mieru našich informácií). Rovnakým spôsobom však vnímame polia ako také - nevidíme ich, ale pozorujeme ich účinky. (Do akej miery sú teda reálne alebo len matematickou abstrakciou, je otázka akademická.) Vlnový, a príležitostne aj časticový charakter vykazujú nielen fotóny, elektróny či neutróny, ale aj C₆₀, C₇₀ a zložitejšie organické molekuly. Tak ako „v našom svete“ vnímame reálnosť EM poľa (s fotónmi ako jeho kvantami), rovnako sa patrí pristupovať aj k ostatným poliam, a to nielen *elementárnym* (leptónovým či kvarkovým) ale aj *kompozitným* (neutrónovým, atómovým či molekulovým).

Vychádzajúc z fundamentálnosti polí, QTP prirodzeným spôsobom zahrňuje *vlnovo-časticový dualizmus* tradičnej QF, a ponúka logický súvis medzi *princípom superpozície*, *kvantovou previazanosťou* a časopriestorovou *nelokálnosťou* kvánt na jednej strane, a ich *celistvosťou* (nedeliteľnosťou), *kolapsom* a *fundamentálnou náhodnosťou* Prírody na strane druhej. Takto vytvorená koherentná podobizeň mikrosвета, s Occamovou britvou na opasku, je viac než robustným súperom alternatívnym predstavám (tým naivným aj tým extravagantným).

Michal Mahel'

KVANTOVÁ fyzika - ako jej rozumieť?

Vydavateľ:

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK
Knížničné a edičné centrum

Bratislava 2022

1. vydanie

Dielo je vydané pod medzinárodnou licenciou Creative Commons CC BY-NC-ND 4.0 (vyžaduje sa: povinnosť uvádzať pôvodného autora diela; len nekomerčné použitie; žiadne odvožené diela). Viac informácií o licencií a použití diela: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>



ISBN:

978-80-8147-121-6