

10. cvičenie z mechaniky

Peter Maták, peter.matak@fmph.uniba.sk

30. apríla 2025

Písomka

10 minút

Nájdite riešenie vlnovej rovnice pre šírenie vĺn v pružnej tyči popísaných pozdĺžou výchylkou $u(x, t)$. Konec tyče sú upevnené a platia počiatočné podmienky

$$u(x, 0) = A \sin \frac{4\pi x}{L} \quad \text{a} \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0. \quad (1)$$

Príklady z cvičenia

- Uvažujte pozdĺžne vlnenie tyče, ktorej jeden koniec v $x = 0$ je pevný, druhý v $x = L$ ostáva voľný. Toto vlnenie je popísané rovnicou

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Podobne ako pri visiacom lane, relatívne predĺženie kúska tyče pôvodne siahajúceho od x po $x + dx$ možno napísť ako

$$\epsilon(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}. \quad (3)$$

- Pomocou Hookovho zákona nahliadnite, že pre voľný koniec platí okrajová podmienka

$$\frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

- Napište všeobecný tvar riešenia vlnovej rovnice vo forme Fourierovho radu.

- Vyriešte vlnovú rovnicu pre počiatočné podmienky

$$u(x, 0) = Ax(x - 2L), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0. \quad (5)$$

- Nádoba s plochou podstavy 10^{-2} m^2 je do výšky 25 cm naplnená vodou. Na jej dne urobíme malý kruhový otvor s polomerom 2 mm. Odhadnite, ako dlho bude trvať kým všetka voda vytečie.

- Nájdite Fourierov rozvoj na intervale $\langle 0, L \rangle$ pre funkciu

$$f(x) = \begin{cases} L/2, & \text{ak } x \in \langle 0, \frac{L}{2} \rangle \\ -L/2, & \text{ak } x \in \langle \frac{L}{2}, L \rangle. \end{cases}$$

Domáce úlohy

- Voda tečie valcovým potrubím s priemerom 1 m. Prietok v tomto mieste pri tlaku 80 kPa činí $2 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. Aký bude tlak v mieste, v ktorom je priemer potrubia zúžený na 0.5 m?