

5. cvičenie z mechaniky

Peter Maták, peter.matak@fmph.uniba.sk

30. októbra 2024

Písomka

10 minút

Na teleso s hmotnosťou 2 kg, ktoré bolo spočiatku v pokoji v počiatku vzťažnej sústavy, pôsobila sila

$$F(t) = (10 \text{ s} - t) \times \text{N/s} \quad (1)$$

po dobu 10 s. Akou rýchlosťou sa po tomto čase bude pohybovať a akú vzdialenosť prejde?

Príklady z cvičenia

1. Predstavte si teliesko s hmotnosťou m , ktoré koná pohyb po priamke popísaný pomocou súradnice

$$x(t) = Ce^{-t/t_0} \sin t/t_0. \quad (2)$$

- (a) Akú rýchlosť a zrýchlenie bude mať teliesko v čase t ?
- (b) Aká sila pôsobola na teliesko v čase t ?

2. Na teliesko s hmotnosťou m , ktoré koná pohyb po priamke, pôsobí sila

- (a) $F(t) = F_0 \sin t/t_0$,
- (b) $F(t) = F_0 \cos t/t_0$,
- (c) $F(t) = F_0 \exp t/t_0$.

Nájdite rýchlosť telieska v čase t ak viete, že na začiatku bolo v pokoji. Akú dráhu prejde teliesko za čas t v každom z uvedených prípadov.

3. Uvažujte lineárnu diferenciálnu rovnicu

$$a_0(t)x(t) + a_1(t)\dot{x}(t) + a_2(t)\ddot{x}(t) = 0. \quad (3)$$

- (a) Ukážte, že ak $x_1(t)$ a $x_2(t)$ sú jej riešenia, potom aj $c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ je pre konštantné $c_{1,2}$ jej riešením.
- (b) Teraz si na pravej strane rovnice (3) predstavte namiesto nuly funkciu $f_1(t)$. Nech má daná rovnica riešenie $x_1(t)$. Podobne, s pravou stranou $f_2(t)$ riešenie $x_2(t)$. Ukážte, že $c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ je potom riešením rovnice

$$a_0(t)x(t) + a_1(t)\dot{x}(t) + a_2(t)\ddot{x}(t) = c_1f_1(t) + c_2f_2(t). \quad (4)$$

Nasledujúce úlohy sa odohrávajú v trojrozmernom priestore. Vzťah medzi polohou, rýchlosťou a zrýchlením je tu podobný ako pri jednorozmernom pohybe, ak hľadáme na jednotlivé zložky.

4. Uvažujte pohyb daný polohovým vektorom

- (a) $\mathbf{r}(t) = (v_0t \cos \alpha, 0, h_0 + v_0t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2)$,
- (b) $\mathbf{r}(t) = (r_0 \cos \omega t, r_0 \sin \omega t, 0)$.

Ako vidíte, v prvom prípade ide o šikmý vrh z výšky h_0 , rýchlosťou v_0 pod uhlom α . Druhý prípad zodpovedá pohybu po kružnici. Derivovaním zložiek polohového vektora nájdite vektory rýchlosti a zrýchlenia v čase t a pokúste sa pochopiť, čo ste dostali.

5. Predstavte si tenké pevné koleso s polomerom r , ktorému v istom okamihu udelíme vodorovnú rýchlosť v tak, že sa bude bez prešmykovania valiť po podložke v smere osi x . V čase t napíšte polohový vektor bodu na kolese, v ktorom sa na počiatku pohybu dotýkalo podložky. Derivovaním zložiek nájdite vektor zrýchlenia v navyššom bode jeho trajektórie.

Domáce úlohy

1. Nájdite rýchlosť a zrýchlenie telieska, ktorého jednorozmerný pohyb je daný súradnicou

$$x(t) = x_0 \cos \omega t \sin \omega t. \quad (5)$$

Do ake najväčšej vzdialenosti od bodu $x = 0$ sa teliesko môže dostať? Akou najväčšou rýchlosťou sa bude pohybovať? Aká najväčšia sila naň bude počas pohybu pôsobiť?