

7. cvičenie z mechaniky

Peter Maták, peter.matak@fmph.uniba.sk

20. novembra 2024

Písomka

10 minút

Vyriešte rovnicu $\ddot{x} + 3f(\dot{x} - v_0) + 2f^2x = 0$ ak $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$.

Príklady z cvičenia

1. Uvažujte tlmený budený harmonický oscilátor popísaný rovnicou

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = F \cos \Omega t \quad (1)$$

pričom sú zadané počiatočné podmienky $x(0) = 0$ a $\dot{x}(0) = v_0$. Predpokladajte $\gamma < 2\sqrt{mk}$.

- (a) Aký je význam členov v tejto rovnici? Aké fyzikálne jednotky majú konštanty γ , ω a k ?
- (b) Riešenie rovnice (1) hľadajte ako súčet dvoch častí, $x_H(t)$ a $x_P(t)$. Prvá z nich rieši homogénnu rovnicu

$$m\ddot{x}_H + \gamma\dot{x}_H + kx_H = 0. \quad (2)$$

Nasledujte postup z prednášky a nájdite riešenie tejto rovnice ako

$$x_H(t) = e^{-\beta t} [C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t]. \quad (3)$$

Ako súvisí β a ω s parametrami m, k, γ ?

- (c) Druhá časť, partikulárne riešenie zodpovedá

$$m\ddot{x}_P + \gamma\dot{x}_P + kx_P = F \cos \Omega t. \quad (4)$$

Nahliadnite, že môžeme zaviesť k $x_P(t) = \text{Re}[\hat{x}(t)]$ zatiaľ čo riešenie

$$m\ddot{\hat{x}} + \gamma\dot{\hat{x}} + k\hat{x} = Fe^{i\Omega t} \quad (5)$$

možno hľadať v tvare $\hat{x} = Xe^{i\Omega t}$. Nájdite komplexnú konštantu X a následne aj $x_P(t)$.

- (d) S ohľadom na počiatočné podmienky vyjadrite riešenie $x(t) = x_H(t) + x_P(t)$.

2. Predstavte závažie s hmotnosťou m upevnené na pružine s tuhosťou k . Teraz pre jednoduchosť zanedbajme všetko trenie. Ak potom v rovnovážnej polohe udelíme závažiu počiatočnú rýchlosť v , bude kmitať ako netlmený harmonický oscilátor. Aká bude jeho maximálna výchylka?
3. Preskúmajte teraz nebudený harmonický oscilátor s veľmi silným tlmením. Taký je popísaný rovnicou

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0 \quad (6)$$

pričom $\gamma > 2\sqrt{mk}$. Na začiatku oscilátor vychýlime o x_0 , potom ho s nulovou počiatočnou rýchlosťou pustíme. Aká bude jeho výchylka v čase t ?

Domáca úlohy

1. Vráťte sa k oscilátoru z cvičení a nájdite riešenie pre $x(0) = x_0$ a $\dot{x}(0) = 0$.
2. Pružinka s tuhosťou k je zavesená za jeden koniec, zatiaľ čo na druhom je upevnené závažie s hmotnosťou m . Toto závažie na začiatku držíme v ruke tak, aby bola pružinka nenatiahnutá, no v istom okamihu ho pustíme a necháme kmitať. Po akom čase prejde rovnovážnou polohou a o koľko nižšie bude táto rovnovážna poloha oproti tej, v ktorej bolo závažie na začiatku? Aká bude maximálna rýchlosť závažia?