

9. cvičenie z mechaniky

Peter Maták*, Martin Kováč†

3. decembra 2025

Príklady z cvičenia

1. Uvažujte tlmený buđený harmonický oscilátor popísaný rovnicou

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = F \cos \Omega t \quad (1)$$

pričom sú zadané počiatočné podmienky $x(0) = 0$ a $\dot{x}(0) = 0$. Predpokladajte $\gamma < 2\sqrt{mk}$.

- (a) Aký je význam členov v tejto rovnici? Aké fyzikálne jednotky majú konštanty γ , ω a k ?
(b) Riešenie rovnice (1) hľadajte ako súčet dvoch častí, $x_H(t)$ a $x_P(t)$. Prvá z nich rieši homogénnu rovnicu

$$m\ddot{x}_H + \gamma\dot{x}_H + kx_H = 0. \quad (2)$$

Nasledujte postup z prednášky a nájdite riešenie tejto rovnice ako

$$x_H(t) = e^{-\beta t} [C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t]. \quad (3)$$

Ako súvisí β a ω s parametrami m, k, γ ?

- (c) Druhá časť, partikulárne riešenie zodpovedá

$$m\ddot{x}_P + \gamma\dot{x}_P + kx_P = F \cos \Omega t. \quad (4)$$

Nahliadnite, že môžeme zaviesť k $x_P(t) = \text{Re}[\hat{x}(t)]$ zatiaľ čo riešenie

$$m\ddot{\hat{x}} + \gamma\dot{\hat{x}} + k\hat{x} = F e^{i\Omega t} \quad (5)$$

možno hľadať v tvare $\hat{x} = X e^{i\Omega t}$. Nájdite komplexnú konštantu X a následne aj $x_P(t)$.

- (d) S ohľadom na počiatočné podmienky vyjadrite riešenie $x(t) = x_H(t) + x_P(t)$.
(e) Aká bude amplitúda kmitov oscilátora po veľmi dlhom čase?
2. Dve závažia s hmotnosťami M a m sú položené na dokonale hladkej podložke, po ktorej sa môžu bez trenia šmýkať. Obe sú navyše spojené pružinou s tuhosťou k . Závažia držíme tak, že pružina je stlačená a sú v pokoji. S akou periódou budú tieto závažia kmitať, keď ich pustíme?
3. Uvažujte dva vektory

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_x + 3\mathbf{e}_y - 2\mathbf{e}_z \quad \text{a} \quad \mathbf{b} = 3\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z. \quad (6)$$

- (i) Nájdite ich skalárny a vektorový súčin.
(ii) Vypočítajte veľkosť každého z nich ako aj uhol, ktorý zvierajú.
(iii) Nájdite všetky jednotkové vektory, ktoré ležia v rovine xy a zároveň sú kolmé na vektor $\mathbf{a}$.

*peter.matak@fmph.uniba.sk

†martin.kovac@fmph.uniba.sk

Domáce úlohy

1. Vráťte sa k oscilátoru z cvičení a nájdite riešenie pre $x(0) = x_0$ a $\dot{x}(0) = 0$.
2. Kvádrik s hmotnosťou m sa nachádza na podložke medzi dvoma rovnobežnými stenami, ktorých vzdialenosť je d . So stenami ho spájajú pružiny tuhostí k_1, k_2 , pričom v nenatiahnutom stave má každá z pružín dĺžku $d/4$ (sú teda natiahnuté). Aký je pomer dĺžok pružín? Ak bude frekvencia kmitov kvádrika v smere kolmom na steny?