

1. nepovinná domáca úloha z teórie relativity

Peter Maták, peter.matak@fmph.uniba.sk

21. októbra 2024

1. Uvažujte skalárny súčin vektorov $\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i$ a $\mathbf{v} = v_j \mathbf{e}_j$. Premyslite si, že ak zložky týchto vektorov pomiešame ortogonálnou maticou R , takže

$$u'_a = R_{ai} u_i \quad \text{a} \quad v'_b = R_{bj} v_j, \quad (1)$$

vyjadrenie skalárneho súčinu vyzerá v oboch bázach rovnako

$$u_i v_i = u'_a v'_a. \quad (2)$$

2. Nájdite tenzorový súčin vektorov $(0, 1, 2)$ a $(-1, 1, 2)$.
3. Premyslite si, že pre ľubovoľné vektory \mathbf{a} , \mathbf{b} a \mathbf{c} platí

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}. \quad (3)$$

4. Overte, že Galileioho transformácie

$$\begin{pmatrix} t \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{v} & \mathbf{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c^0 \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} \quad (4)$$

tvoria grupu.

5. Presvedčte sa, že Lorentzove transformácie v smere osi x tvoria grupu, teda že súčinom matíc

$$\Lambda(u) = \begin{pmatrix} \gamma(u) & \frac{u}{c} \gamma(u) \\ \frac{u}{c} \gamma(u) & \gamma(u) \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \Lambda(v) = \begin{pmatrix} \gamma(v) & \frac{v}{c} \gamma(v) \\ \frac{v}{c} \gamma(v) & \gamma(v) \end{pmatrix} \quad (5)$$

je matica rovnakého typu $\Lambda(w)$. Nájdite vzťah pre w pomocou u a v . Spoznávate skladanie rýchlostí? Ako v tejto grupe vyzerá neutrálny prvok a prvok inverzný k matici $\Lambda(u)$?

6. Janko a Marienka sa stretnú na ulici, kráčajúc oproti sebe relatívnou rýchlosťou 10 km/h. Marienka pritom smeruje priamo od galaxie M31 v Androméde, vzdialenej 2200000 ly, a práve keď sa míňajú, povie Jankovi: 'V tejto chvíli k nám vyrazila z galaxie v Androméde flotila vesmírnych lodí.' Ako dlho pred týmto stretnutím nastal štart rakiet podľa Janka? (Úloha podľa 4.1 v knižke N.M.J. Woodhouse, *Special Relativity*)