Domáce úlohy

Známkuje sa podľa vzorca zo sylabusu, čo pre maximálny počet bodov 17 dáva:

15 a viac	–	A
13 alebo 14	–	B
11 alebo 12	–	C
10	–	D
8 alebo 9	–	E
7 a menej	–	nič

$\boxed{\text{úloha } \mathbf{1} \text{ za } \mathbf{1bod}:}$ Odvodiť propagátor pre voľnú časticu, $\widehat{H} = \frac{\widehat{p}^{\,2}}{2m}$,

$$K(y,T;x,0) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar T}} \exp\left\{\frac{im}{2\hbar T}(x-y)^2\right\}.$$

$\boxed{\text{úloha } \mathbf{2} \text{ za } \mathbf{1bod}:}$ V kvantovej mechanike máme Schrödingerovu rovnicu pre vlnovú funkciu,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(t,x) + V_{(\mathrm{QM})}(x)\psi(t,x).$$

Kvantovo mechanický propagátor zabezpečuje časový vývoj vlnovej funkcie,

$$\psi(t,x) = \int dx' K(x,t;x',t')\psi(t',x'),$$

a dá sa zapísať cez dráhový integrál,

$$K(x',T;x,0) = \int_{x,0}^{x',T} \mathcal{D}x \exp\left\{\frac{i}{\hbar}S[x]\right\}, \quad S[x] = \int_0^T dt\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - V_{(\mathrm{QM})}(x)\right].$$

Pre pravdepodobnosť nájsť peľové zrnko v potenciáli $V_{(\mathrm{dif})}$ unášané Brownovým pohybom, $\rho(t,x)$, platí rovnica difúzie,

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,x) = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\rho(t,x) - V_{(\mathrm{dif})}(x)\rho(t,x).$$

a) Porovnaním Schrödingerovej rovnice a rovnice difúzie nájsť vyjadrenie 'heat kernel'-u[1] difúznej rovnice $W(x,t,x',t')$ cez dráhový integrál. 'Heat kernel' funguje rovnako ako QM propagátor,

$$\rho(t,x) = \int dx' W(x,t;x',t')\rho(t',x').$$

b) Využiť výsledok úlohy 1 a napísať 'heat kernel' pre prípad bez potenciálu, $V_{(\mathrm{dif})} = 0$.

[1] 'tepelné jadro'

$\boxed{\text{úloha } \mathbf{3} \text{ za } \mathbf{2body:}}$ Pre harmonický oscilátor,

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2,$$

vypočítať kvantovo mechanický propagátor,

$$K(x_2, t_2; x_1, t_1) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin\left[\omega(t_2 - t_1)\right]}} \exp\left\{\frac{im\omega\left[(x_1^2 + x_2^2)\cos\left[\omega(t_2 - t_1)\right] - 2x_1x_2\right]}{2\hbar\sin\left[\omega(t_2 - t_1)\right]}\right\}.$$

Návod: postup vysvetlený na prednáške + pri výpočte klasického účinku použiť per partes a pohybovú rovnicu, $S[\bar{x}] = \cdots = m\left[\bar{x}\dot{\bar{x}}\right]_{t_1}^{t_2}/2$.

$\boxed{\text{úloha } \mathbf{4} \text{ za } \mathbf{3body:}}$ Pre neharmonický oscilátor,

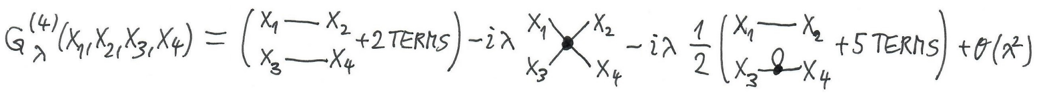
$$S_{\mathrm{E}}[q] = \int_0^\beta d\tau \left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + \frac{1}{4!}\lambda q^4\right),$$

($\hbar = 1$, $(\ )^{\cdot} \equiv d/d\tau$,) vypočítať korekciu k energii základného stavu (v limite nulovej teploty) úmernú parametru λ. Návod: poruchový výpočet vysvetlený na prednáške. Výsledok by mal byť $\frac{1}{2}\omega + \frac{\lambda}{32m^2\omega^2} + \mathcal{O}(\lambda^2)$.

$\boxed{\text{úloha } \mathbf{5} \text{ za } \mathbf{3body:}}$ Pre teóriu poľa s ϕ^4 interakciou,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{4!}\lambda\phi^4,$$

s využitím postupu s generujúcim funkcionálom odvodiť diagramitický zápis pre 4-bodovú Greenovu funkciu,

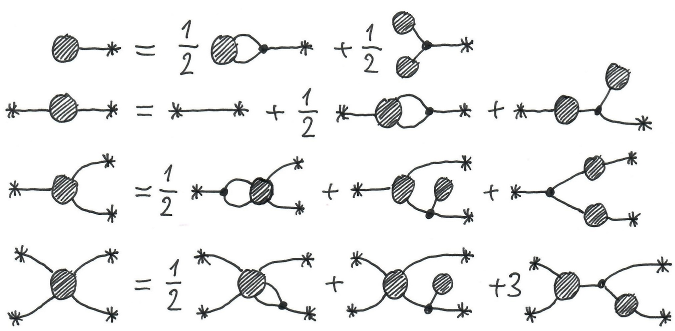


Faktor $(-i\lambda)$ sa zahŕňa do vertexu, a potom sa už nepíše.

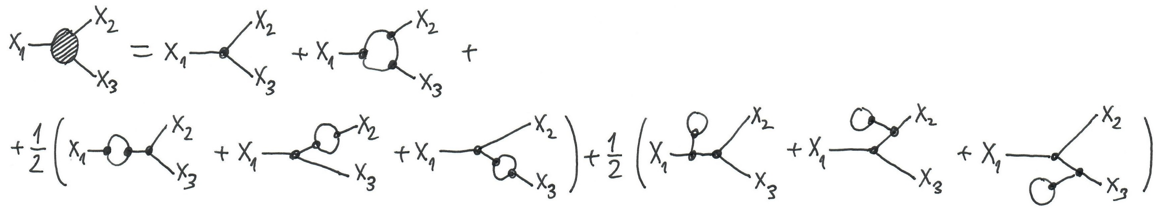
$\boxed{\text{úloha } \mathbf{6} \text{ za } \mathbf{4body:}}$ Pre teóriu poľa s ϕ^3 interakciou,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{3!}g\phi^3,$$

odvodiť Dysonove–Schwingerove rovnice pre 1 až 4-bodové **spojené** Greenove funkcie v diagramatickom zápise,



úloha **7** za **3body** : Dysonove–Schwingerove rovnice odvodené v predchádzajúcom príklade riešte poruchovo (v mocninách $g \leftrightarrow$ v počte vertexov) tak, aby ste dostali slučkové korekcie ku 3-bodovej funkcii $W^{(3)}(x_1, x_2, x_3)$. Výsledok je



pričom si treba dať pozor na nesymetrickosť niektorých diagramov, konkrétne jedného jediného, pre 4-bodovú funkciu $W^{(4)}(x_1, ..., x_4)$ do rádu g^2, kde nesymetrickosť treba zohľadniť rozlišovaním troch foriem tohto diagramu