· • Úlohy na body z Diferenciálnych rovníc • ·

40 bodov za semester: 20 príkladov, každý za 2 body, riešenia posielať do konca semestra.

Pr. 1 : Nájdite najvšeobecnejší možný tvar funkcie dvoch premenných $u(x, y)$, ktorá je riešením parciálnej diferenciálnej rovnice

$$y^2 \frac{\partial u}{\partial y} - u = xy^3 e^{-1/y}.$$

Pr. 2 : Uvažujme modifikovaný systém korisť $x(t)$ a dravec $y(t)$ daný sústavou

$$\frac{dx}{dt} = Ax - Bxy^3,$$
$$\frac{dy}{dt} = -Cy + D\sqrt{x}y,$$

kde A, B, C a D sú konštanty. Vylúčením časovej premennej nájdite závislosť medzi x a y.

Pr. 3 : Nájdite riešenie diferenciálnej rovnice $y(x)$ pri zadanej počiatočnej podmienke,

$$y'(x) = -\frac{3x^2 + 2xy^2}{2x^2 y}, \quad y(2) = -3.$$

Pr. 4 : Nájdite všeobecné riešenie (homogénne aj partikulárne) lineárnej diferenciálnej rovnice druhého rádu pre funkciu $y(x)$

$$y'' - \frac{x+2}{x} y' + \frac{x+2}{x^2} y = xe^x,$$

ak vieme, že funkcia $y_1(x) = x$ je jedným z riešení homogénnej rovnice.

Pr. 5 : Nájdite funkciu $u(x, y)$, ktorá je riešenín diferenciálnej rovnice pri zadanej okrajovej podmienke,

$$\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{4x}{u}, \quad u(\sigma, \sigma) = -\sqrt{13}\sigma.$$

Pr. 6 : Nájdite funkciu $u(x, y)$, ktorá je riešenín diferenciálnej rovnice pri zadanej okrajovej podmienke,

$$e^y \frac{\partial u}{\partial x} + x^2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u(1, \sigma) = \sigma^2.$$

Pr. 7 : Nájdite funkciu $u(x, y, z)$, ktorá je riešenín diferenciálnej rovnice pri zadanej okrajovej podmienke,

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + x\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{u}{y} + z, \quad u(\sigma, \omega, 0) = 0.$$

Pr. 8 : Nájdite funkciu $u(x, y)$, ktorá je riešenín diferenciálnej rovnice pri zadanej okrajovej podmienke,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial y} = 2x, \quad u(0, \sigma) = 3\sigma.$$

Pr. 9 : Nájdite funkciu $u(x, y, z)$, ktorá je riešenín diferenciálnej rovnice pri zadanej okrajovej podmienke,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial z} = 4x^2, \quad u(\sigma, \omega, \sigma^2) = \omega.$$

Pr. 10 : Nájdite funkciu $u(x, y)$, ktorá je riešenín diferenciálnej rovnice pri zadaných okrajových podmienkach,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1, \quad u(0, \sigma) = e^{-\sigma^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, \sigma) = \sigma.$$

Pr. 11 : Diferenciálnu rovnicu druhého rádu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0,$$

pre funkciu $u(x, y)$ definovanú v oblasti $x > 0$ preveďte do kanonického tvaru.

Pr. 12 : Nájdite funkciu $u(x, y)$, ktorá je riešenín diferenciálnej rovnice pri zadanej okrajovej podmienke,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2u\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u(0, \sigma) = \frac{1}{2}\sigma.$$

Využite substitúcie $u = \partial\psi/\partial y$, $\psi = -\ln\phi$.

Pr. 13 : Nájdite prvú deriváciu distribúcie, ak je pôvodná distribúcia reprezentovaná nespojitou funkciou

$$f(x) = \begin{cases} x & \dots \quad x < 0 \\ \sin x & \dots \quad 0 < x < \pi/2 \\ -x & \dots \quad x > \pi/2 \end{cases}$$

Mala by sa tam objaviť aj δ-distribúcia.

Pr. 14 : Nájdite Fourierove obrazy $F[...](\xi)$ distribúcií zadaných ako funkcie $f(x) = \sin(ax)$ a $g(x) = \cos(ax)$, kde a je nenulová konštanta. Stačí iba využiť vyjadrenie sínusu a kosínusu cez exponenciály a vlastnosti δ-distribúcie, $\int d\xi \delta(\xi + c)e^{-i\xi x} = e^{icx}$. Keďže $f'(x) = ag(x)$, tak pre Fourierove obrazy by malo platiť

$$-i\xi F[f](\xi) = aF[g](\xi).$$

Dokážte túto rovnosť.

Pr. 15 : Nájdite riešenie $u(t, x)$ rovnice vedenia tepla v jednom rozmere pri zadanej počiatočnej podmienke,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u(0, x) = e^{-x^2},$$

a ukážte, že pre normu riešenia platí

$$||u|| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |u(t, x)|^2 dx \right)^{1/2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/4} \left(\frac{1}{1 + 4t}\right)^{1/4}.$$

Pr. 16 : Nájdite riešenie $u(t, \vec{x})$ rovnice vedenia tepla pre n rozmerov s pravou stranou danou δ funkciami a nulovou počiatočnou podmienkou,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \triangle u = \delta(t - t_0)\delta(\vec{x} - \vec{x}_0), \quad u(0, \vec{x}) = 0.$$

Nájdite riešenie $u(t, \vec{x})$ vlnovej rovnice pre $n = 2$ a $n = 3$ rozmery s pravou stranou danou δ funkciami a nulovými počiatočnými podmienkami,

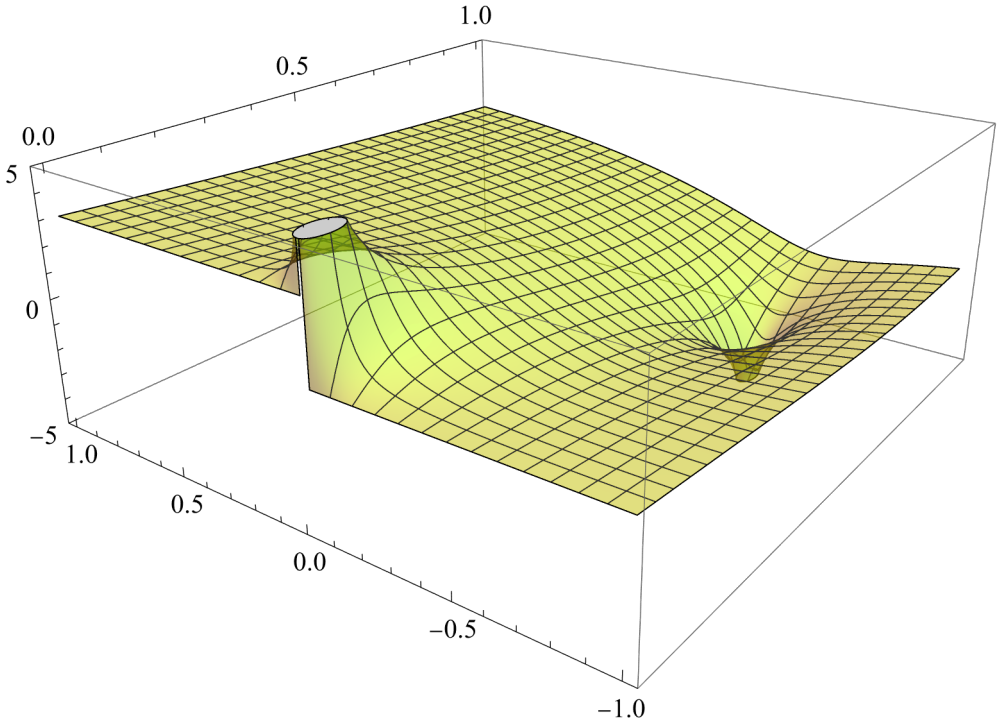
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \triangle u = \delta(t - t_0)\delta(\vec{x} - \vec{x}_0), \quad u(0, \vec{x}) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, \vec{x}) = 0.$$

Pr. 17 : Nájdite riešenie $u(x_1, x_2)$ Poissonovej rovnice v dvojrozmernej polrovine $x_1 > 0$ s pravou stranou a okrajovou podmienkou zadanými ako

$$\triangle u(x_1, x_2) = 10\delta(x_1 - 3/4)\delta(x_2 + 1/2),$$

$$u(0, x_2) = \delta(x_2) + \begin{cases} \pi & ... \quad x_2 > 0 \\ 0 & ... \quad x_2 < 0 \end{cases}.$$

Keď si vykreslíme riešenie (to nerobiť), bude vyzerať ako:



Pr. 18 : Nájdite Greenovu funkciu $G(x_1, x_2; y_1, y_2)$ pre Dirichletovu úlohu v dvoch rozmeroch pre oblasť polkruhového tvaru,

$$\Omega = \left\{ \ (x_1, x_2) : \ x_1^2 + x_2^2 < R^2 \ \& \ x_2 > 0 \ \right\}.$$

Pr. 19 : Nájdite Greenovu funkciu $G(z; w)$, $z, w \in \mathbb{C}$, pre Dirichletovu úlohu v dvoch rozmeroch pre oblasť, ktorá je tenkým 5° (v radiánoch $\pi/36$) výsekom z disku s polomerom R,

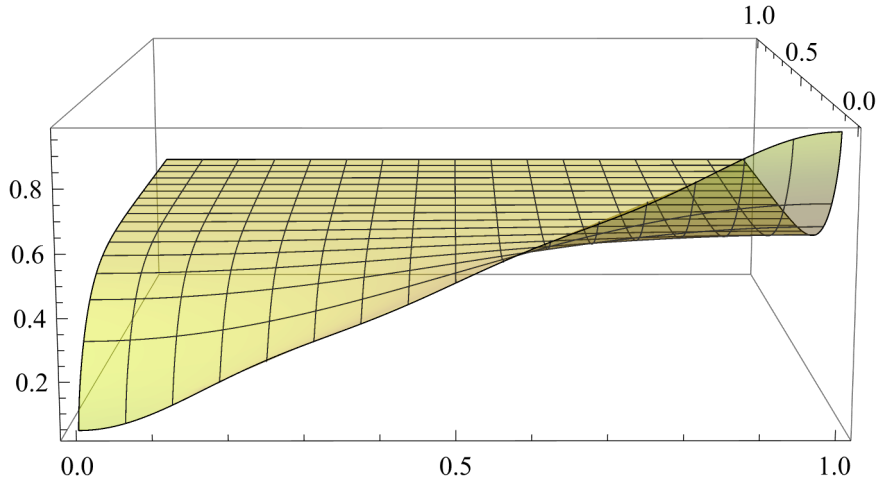
$$\Omega = \left\{ \ (x_1, x_2) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) : \ r < R \ \& \ 0 < \varphi < \pi/36 \ \right\}.$$

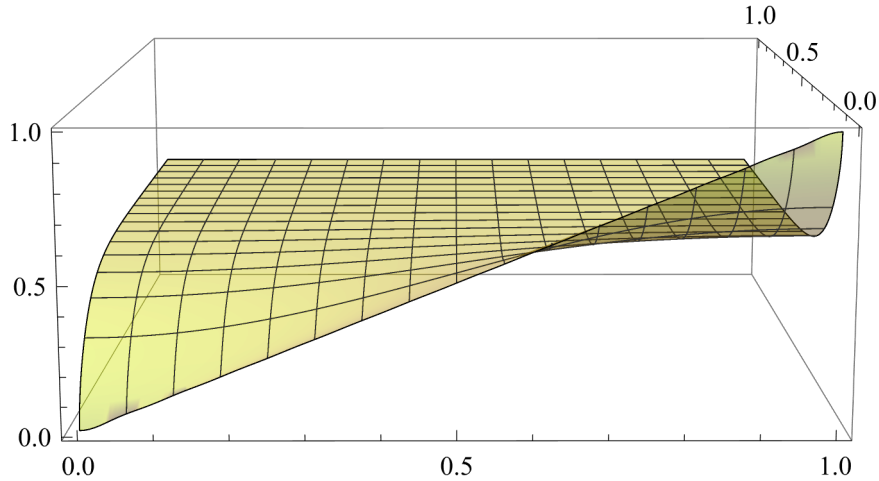
Stačí zápis cez komplexné premenné.

Pr. 20 : Fourierovou metódou nájdite riešenie $u(t, x)$ rovnice vedenia tepla s homogénnou Neumannovou okrajovou podmienkou spolu so zadanou počiatočnou podmienkou v oblasti $0 < x < 1$, $t > 0$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, 1) = 0, \quad u(0, x) = x.$$

Na obrázkoch je vykreslené riešenie pre počty zahrnutých módov 5 a 25.


1.0
0.5
0.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.5
1.0


1.0
0.5
0.0
1.0
0.5
0.0
0.0
0.5
1.0