Sada 1: *Úvodná sada*

Pr. 1 *Vek vesmíru a Hubbleov čas*: Hubbleov parameter sa definuje ako $H = \frac{\dot{a}}{a}$, kde funckia $a(t)$ je škálovací parameter popisujúci rozpínanie vesmíru, a Hubbleov čas je $t_H = \frac{1}{H_0}$, kde index $(\ )_0$ vyjadruje veličiny vyčíslené v dnešnom čase t_0. Úlohou je:

1. Vypočítať Hubbleov čas v rokoch pre pozorovanú hodnotu Hubbleovej konštanty $H_0 = 67,4$ km s^{-1} Mpc^{-1}. (Jeden parsec je približne $3,26$ svetelného roka.)
2. Vypočítať vek vesmíru t_0 v násobkoch Hubbleovho času t_H v plochom vesmíre s látkou, kde
$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}.$$
3. Vypočítať vek vesmíru t_0 v násobkoch Hubbleovho času t_H v uzavretom vesmíre s látkou, ak je súčasná hodnota škálovacieho parametra polovičná maximálnej hodnote ($a = a_0 = a_{\max}/2$), kde
$$a(t) : \begin{cases} a = a_0(1 - \cos\lambda) \\ t = a_0(\lambda - \sin\lambda) \end{cases}.$$
4. Vypočítať vek vesmíru t_0 v násobkoch Hubbleovho času t_H v plochom vesmíre s látkou a s tmavou energiou (kozmologická konštanta), kde
$$a(t) = a_0 \mathrm{sh}^{2/3}\left(\frac{3}{2\sqrt{2}} H_0 t\right).$$

Výsledky: 1. $t_H = 14,5 \cdot 10^9$ rokov, 2. $\frac{2}{3} t_H$, 3. $\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) t_H$, 4. $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} arc\mathrm{sh}1 \doteq 0,83\right) t_H$

Pr. 2 *Žiarivá vzdialenosť a červený posun v ŠTR:* Uvažujme svetelný lúč vyslaný z galaxie v čase t_1, ktorý pozorujeme dnes v čase t_0, pričom súčasná vzdialenosť galaxie je r_0. Žiarivá vzdialenosť tejto galaxie v špeciálnej teórii relativity je $r_L = \frac{a_0}{a_1} \frac{r_0}{\sqrt{1 - v_1^2}}$. Kozmologický červený posun z sa počíta ako $\frac{a_0}{a_1} = 1 + z$ a špeciálne relativistický červený posun je $\sqrt{\frac{1 + v_1}{1 - v_1}} = 1 + z$. Úlohou je:

1. Z Taylorovho rozvoja pre rýchlosť z pohľadu časového prírastku $\delta t = t_0 - t_1 = r_1$, (V Minkowského časopriestore $c\delta t = r_1$, pričom $c = 1$.) $v_1 \approx v_0 - \dot{v}|_0 \delta t$, ďalej z definície deceleračného parametra q: $\dot{v} = -qHv$, a napokon s využitím Hubbleovho zákona $v = Hr$ odvodiť približný vzťah
$$v_0 \approx v_1 \left(1 - q_0 v_1\right),$$
ktorý platí v limite malej vzdialenosti galaxie, teda malého rozdielu časov δt, alebo malého rozdielu medzi rýchloťami v_0 a v_1.
2. Pomocou výsledku (a niektorých postupov) z predchádzajúceho bodu ukázať, že približný vzťah pre žiarivú vzdialenosť ako funkciu červeného posunu je
$$r_L \approx \frac{1}{H_0} z \left[1 + \left(\frac{1}{2} - q_0\right) z\right],$$
kde členy rádu z^3 sú zanedbané.

Správny všeobecne relativistický vzťah pre žiarivú vzdialenosť je $r_L \approx \frac{1}{H_0} z \left(1 + \frac{1 - q_0}{2} z\right)$.

Pr. 3 *Fyzikálna vzdialenosť v Robertsonovej–Walkerovej metrike:* Metrika $1 + 1$ rozmerného vesmíru je $ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 d\chi^2$ (Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker), kde χ je comoving vzdialenosť. Úlohou je:

1. Zavedením fyzikálnej vzdialenosti $l = a\chi$ prepísať Robertsonovu–Walkerovu metriku do tvaru

$$ds^2 = \left(-1 + H^2 l^2\right) dt^2 - 2Hl dt dl + dl^2, \qquad \text{kde } \ H = \frac{\dot{a}}{a}.$$

2. Ukázať, že pre metriku z predchádzajúcho bodu nie je možné synchronizačný čas T definovaný cez prírastky ako $dT = dt + \frac{g_{0i}}{g_{00}} dx^i$ zaviesť globálne ($dt = dT + \cdots dl$ nie je úplný diferenciál, teda neexistuje funkcia $t(T, l)$).

3. Ukázať, že pre malé l možno aspoň lokálne zaviesť synchronizačný čas podľa vzťahu

$$t \approx T - \frac{1}{2} H l^2,$$

kde členy rádu l^3 sú zanedbané.

4. Metriku z bodu 1. prepísať pomocou vzťahu pre čas T z predchádzajúceho bodu do tvaru

$$\text{Robertson–Walker} \longrightarrow \quad ds^2 \approx \left[-1 + \left(\dot{H} + H^2\right) l^2\right] dT^2 + \left(1 + H^2 l^2\right) dl^2 = \underbrace{-dT^2 + dl^2}_{\text{Minkowski}} + \mathcal{O}(l^2),$$

kde v prvej časti sú opäť zanedbané členy rádu l^3.

Vidíme, že prepis Robertsonovej–Walkerovej metriky do fyzikálnych súradníc (Riemannove normálne súradnice v tomto prípade T a l fungujúce nielen v jednom bode ale pozdĺž celej čiary $l = 0$, t=ľub.) dáva Minkowského metriku iba lokálne. Tak to aj má byť, keďže pracujeme so zakriveným časopriestorom.
