

Z Friedmannovej rovnice

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi\kappa}{3}\rho a^2 - k, \quad \text{kde } k = \begin{cases} 0 & \text{pre plochý vesmír} \\ 1 & \text{pre uzavretý vesmír} \\ -1 & \text{pre otvorený vesmír} \end{cases},$$

možno vylúčiť hustotu energie ρ pomocou riešenia rovnice tekutín

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad \text{kde } H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad \text{a } p = w\rho \quad \longrightarrow \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+w)}.$$

Takto dostávame rovnicu

$$\boxed{\dot{a}^2 = C a^{-1-3w} - k}, \quad \text{kde } C = \frac{8\pi\kappa}{3}\rho_0 a_0^{3(1+w)}.$$

Pr. 1 *Vesmíry s látkou*: Úlohou je vyriešiť rovnicu v rámečku pre $w = 0$ a všetky tri krivosti $k = 0, \pm 1$. Ak je to možné, použiť počiatočnú podmienku $t = 0 \leftrightarrow a = 0$, ak nie, tak $t = t_* \leftrightarrow a = a_*$. Načrtnúť tiež priebeh nájdených funkcií $a(t)$.

Pr. 2 *Vesmíry so žiarením*: Úlohou je vyriešiť rovnicu v rámečku pre $w = 1/3$ a všetky tri krivosti $k = 0, \pm 1$. Ak je to možné, použiť počiatočnú podmienku $t = 0 \leftrightarrow a = 0$, ak nie, tak $t = t_* \leftrightarrow a = a_*$. Načrtnúť tiež priebeh nájdených funkcií $a(t)$.

Pr. 3 *Vesmíry s tmavou energiou (kozmozlogická konštanta)*: Úlohou je vyriešiť rovnicu v rámečku pre $w = -1$ a všetky tri krivosti $k = 0, \pm 1$. Ak je to možné, použiť počiatočnú podmienku $t = 0 \leftrightarrow a = 0$, ak nie, tak $t = t_* \leftrightarrow a = a_*$. Načrtnúť tiež priebeh nájdených funkcií $a(t)$.

Výsledky	$k = 0$	$k = 1$	$k = -1$
$w = 0$	$a = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} C^{1/3} t^{2/3}$	$a = \frac{C}{2} (1 - \cos \lambda)$ $t = \frac{C}{2} (\lambda - \sin \lambda)$	$a = \frac{C}{2} (\text{ch} \lambda - 1)$ $t = \frac{C}{2} (\text{sh} \lambda - \lambda)$
$w = \frac{1}{3}$	$a = \sqrt{2} C^{1/4} t^{1/2}$	$a = \sqrt{C} \sin \lambda$ $t = \sqrt{C} (1 - \cos \lambda)$	$a = \sqrt{C} \text{sh} \lambda$ $t = \sqrt{C} (\text{ch} \lambda - 1)$
$w = -1$	$a = a_* e^{\sqrt{C}(t-t_*)}$	$a = \frac{1}{\sqrt{C}} \text{ch} \left[\sqrt{C}(t-t_*) + \text{arcch}(\sqrt{C}a_*) \right]$	$a = \frac{1}{\sqrt{C}} \text{sh}(\sqrt{C}t)$

Nezabudnúť náčrty funkcií $a(t)$!