$\cdot\bullet$ **Sada 4**: *Dvojzložkové vesmíry I* $\bullet\cdot$

V plochom vesmíre ($\Omega = \Omega_l + \Omega_z + \Omega_\Lambda = 1$) s látkou s hustotou energie $\rho_l = \Omega_l \rho_{crit} \left(a/a_0\right)^{-3}$, so žiarením s hustotou energie $\rho_z = \Omega_z \rho_{crit} \left(a/a_0\right)^{-4}$ a s tmavou energiou s hustotou enegie $\rho_\Lambda = \Omega_\Lambda \rho_{crit}$, teda s celkovou hustotou energie $\rho = \rho_l + \rho_z + \rho_\Lambda$ je dynamika škálovacieho parametra $a(t)$ daná Friedmannovou rovnicou

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi\kappa}{3}\rho = A\frac{1}{a^3} + B\frac{1}{a^4} + C, \quad \text{kde} \quad A = H_0^2 \Omega_l a_0^3, \quad B = H_0^2 \Omega_z a_0^4, \quad \text{a} \quad C = H_0^2 \Omega_\Lambda.$$

Pr. 1 *Vesmír so žiarením a látkou I*: Uvažujme plochý vesmír bez tmavej energie, teda s $C = 0$, ale s $A, B \neq 0$. Úlohou je:

1. Ukázať, že riešením Friedmannovej rovnice spĺňajúcim počiatočnú podmienku $a(t=0) = 0$ je
$$t = \frac{4B^{3/2} + 2(Aa - 2B)\sqrt{Aa + B}}{3A^2}.$$
2. Ukázať, že v čase t_{eq}, keď boli príspevky látky a žiarenia k celkovej hustote energie vyrovnané, platí
$$a(t_{eq}) = \frac{B}{A}.$$
3. Zaviesť bezrozmernú veličinu pre škálovací parameter $\widetilde{a} = \dfrac{a}{a_{eq}}$ a ukázať, že čas rovnováhy t_{eq}, pre ktorý $\widetilde{a} = 1$, sa dá vyjadriť ako
$$t_{eq} = \frac{2}{3}\left(2 - \sqrt{2}\right)\frac{B^{3/2}}{A^2}.$$
4. Zaviesť aj bezrozmerný čas $\widetilde{t} = \dfrac{t}{t_{eq}}$ a ukázať, že riešenie z bodu 1. sa dá prepísať do tvaru
$$\widetilde{t} = \frac{2 + (\widetilde{a} - 2)\sqrt{\widetilde{a} + 1}}{2 - \sqrt{2}}.$$

Pr. 2 *Vesmír so žiarením a látkou II:* Uvažujme plochý vesmír bez tmavej energie, teda s $C = 0$, ale s $A, B \neq 0$. Konformný čas η sa definuje cez vzťah $dt = a d\eta$. Úlohou je:

1. Ukázať, že Friedmannova rovnica prepísaná cez konformný čas je
$$\left(\frac{da}{d\eta}\right)^2 = Aa + B.$$
2. Zaviesť bezrozmerný škálovací parameter $\widetilde{a}$ rovnako ako v **Pr. 1** bodoch 2. a 3., teda $\widetilde{a} = \dfrac{a}{a_{eq}} = \dfrac{A}{B}a$, kde index $(\ )_{eq}$ sa vzťahuje na okamih rovnováhy príspevku látky a žiarenia k celkovej hustote energie, zaviesť aj bezrozmerný konformný čas $\zeta = \dfrac{\eta}{\eta_*}$, kde $\eta_* = 2\sqrt{B}/A$, a rovnicu z predchádzajúceho bodu prepísať do tvaru
$$\left(\frac{d\widetilde{a}}{d\zeta}\right)^2 = 4\left(1 + \widetilde{a}\right).$$
3. Rovnicu z predchádzajúceho bodu vyriešiť a riešenie prepísať aj do pôvodných veličín. Malo by vyjsť
$$\widetilde{a} = \zeta\left(\zeta + 2\right) \quad \longrightarrow \quad a = \frac{1}{4}A\eta^2 + \sqrt{B}\eta \quad \text{(súčet riešení jednozložkových vesmírov - } \textbf{Sada 3}, \textbf{ Pr. 1}\text{)}.$$

4. Ukázať, že platí $\dfrac{a_{eq}}{a_0} = \dfrac{\Omega_z}{\Omega_l}$ a pomocou Friedmannovej rovnice zapísanej v čase rovnováhy t_{eq} odvodiť vzťah pre konformný čas η_*
$$\frac{1}{\eta_*} = \sqrt{\frac{\pi\kappa}{3}\rho_{eq}a_{eq}^2}.$$

Pr. 3 *Vesmír s látkou a tmavou energiou:* Uvažujme plochý vesmír bez žiarenia, teda s $B = 0$, ale s $A, C \neq 0$. Úlohou je:

1. Zaviesť bezrozmerný škálovací parameter $\widehat{a} = \dfrac{a}{a_0}$ a bezrozmerný čas $\widehat{t} = H_0 t$ a Friedmannovu rovnicu prepísať do tvaru
$$\left(\frac{d\widehat{a}}{d\widehat{t}}\right)^2 = \Omega_l \frac{1}{\widehat{a}} + \Omega_\Lambda \widehat{a}^2.$$
2. Ukázať, že riešením rovnice z predchádzajúceho bodu je
$$\widehat{a} = \left(\frac{\Omega_l}{\Omega_\Lambda}\right)^{1/3} \mathrm{sh}^{2/3}\left(\frac{3}{2}\sqrt{\Omega_\Lambda}\widehat{t}\right).$$
3. Vyčísliť vek vesmíru v násobkoch Hubbleovho času $t_H = 1/H_0$ pre $\Omega_l = 0,31$ a $\Omega_\Lambda = 0,69$. Malo by vyjsť $t_0 \approx 0,955 t_H$.

Tento model veľmi dobre aproximuje náš vesmír počas väčšiny času jeho existencie. S využitím výsledku zo **Sady 1**, **Pr. 1** bodu 1. $t_H = 14,5 \cdot 10^9$ rokov dostávame vek nášho vesmíru $0,955 \cdot 14,5 \cdot 10^9$ rokov $= 13,8 \cdot 10^9$ rokov.
