Sada 5: *Vesmír s látkou a tmavou energiou*

Vo vesmíre s látkou s hustotou energie $\rho_l = \Omega_l \rho_{crit} \widehat{a}^{-3}$ a s tmavou energiou s hustotou energie $\rho_\Lambda = \Omega_\Lambda \rho_{crit}$ je dynamika škálovacieho parametra $a(t)$ daná Friedmannovou rovnicou

$$\left(\frac{d\widehat{a}}{d\widehat{t}}\right)^2 = f\left(\widehat{a}\right), \quad \text{kde } \widehat{a} = \frac{a}{a_0}, \;\; \widehat{t} = H_0 t, \;\; f\left(\widehat{a}\right) = \Omega_l \frac{1}{\widehat{a}} + \Omega_\Lambda \widehat{a}^2 + 1 - \Omega, \;\; \text{a} \;\; \Omega = \frac{\rho}{\rho_{crit}} = \Omega_l + \Omega_\Lambda.$$

(Podľa znamienka $\Omega - 1$ je vesmír plochý, uzavretý alebo otvorený.) Z reálnosti výrazu vo vnútri zátvorky na ľavej strane Friedmannovej rovnice (kvôli druhej mocnine) vyplýva, že fyzikálne povolený rozsah škálovacieho parametra je daný podmienkou $f\left(\widehat{a}\right) \geq 0$.

Pr. 1 *Vesmír s obratom rozpínania*: Uvažujme také rozpínanie vesmíru, pri ktorom dôjde k obratu a vesmír sa začne zmršťovať. Úlohou je:

1. Rozmyslieť si, že funkcia $f\left(\widehat{a}\right)$ musí mať v tomto prípade záporné minimum.
2. Prepísať podmienku z predchádzajúceho bodu cez parametre Ω_l a Ω_Λ. Malo by vyjsť
$$(\Omega - 1)^3 > \frac{27}{4} \Omega_l^2 \Omega_\Lambda.$$
3. Načrtnúť oblasť v rovine $\Omega_l - \Omega_\Lambda$, v ktorej je podmienka z predchádzajúceho bodu splnená.

Pr. 2 *Vesmír s odrazom zmršťovania:* Uvažujme zmršťovanie vesmíru, kde $\Omega_l < 1$, pri ktorom dôjde k obratu a vesmír sa začne rozpínať. Úlohou je:

1. Rozmyslieť si, že funkcia $f\left(\widehat{a}\right)$ musí byť v bode obratu $\widehat{a} = \widehat{a}_{obr}$ nulová a tiež v ňom musí mať kladnú prvú deriváciu.
2. Z dvoch podmienok z predchádzajúceho bodu odvodiť
$$\frac{1}{1 - \widehat{a}_{obr}^2} \underbrace{\left[2\left(1 - \Omega_l\right)\widehat{a}_{obr}^3 + 3\Omega_l \widehat{a}_{obr}^2 - \Omega_l\right]}_{g\left(\widehat{a}_{obr}\right)} > 0.$$
3. Uvedomiť si, že funkcia $g\left(\widehat{a}_{obr}\right)$ z predchádzajúceho bodu monotónne rastie a odvodiť, že interval povolených hodnôt pre $\widehat{a}_{obr}$ má tvar $\widehat{a}_{obr} \in \langle \widehat{a}_*, 1)$.
4. Overiť (numericky), že pre $\Omega_l = 0,004$ (podiel svietiacich hviezd vo vesmíre) je pre $\widehat{a}_{obr}$ interval povolených hodnôt $\widehat{a}_{obr} \in \langle 0,124; 1)$.

Pr. 3 *Obeh svetla v uzavretom vesmíre:* Uvažujme uzavretý vesmír, ktorý sa rozpína do nekonečna, teda $\Omega > 1$ a podmienka z **Pr. 1** bodu 2. nie je splnená. Comoving vzdialenosť χ, ktorú prejde svetlo, sa počíta ako $\chi_{(2)} - \chi_{(1)} = \int\limits_{(1)}^{(2)} \frac{dt}{a(t)} = \int\limits_{(1)}^{(2)} \frac{da}{\dot{a}a} = \left[\begin{array}{l}\text{Friedmannova} \\ \text{rovnica: } \dot{a}^2 = \cdots\end{array}\right] = \cdots$. Úlohou je:

1. Vyčísliť comoving vzdialenosť, ktorú prejde svetlo od big bangu po nekonečný čas, v kvadratúrach.
2. Numericky overiť, že pre $q \equiv \dfrac{\Omega_l^2 \Omega_\Lambda}{(\Omega - 1)^3} \approx 0,179$ sa hypotetické svetlo z big bangu v limite nekonečného času vráti do miesta jeho vyslania. Pre $q \in (4/27; 0,179)$ teda svetlo obehne celý donekonečna sa rozpínajúci vesmír (pričom podľa **Pr. 1** bodu 2. pre $q < 4/27$ sa rozpínanie vesmíru obráti v zmršťovanie).

Výsledky: 1. $\chi_{(\infty)} - \chi_{(0)} = \int\limits_0^\infty \left(q - x^2 + x^3\right)^{-1/2} dx$, 2: $\int\limits_0^\infty \left(0,179 - x^2 + x^3\right)^{-1/2} dx \approx 2\pi$
