

Pr. 1 Kozmologické parametre: Uvažujme vesmír v súčasnom čase. Úlohou je:

1. Zo vzťahu pre kritickú hustotu energie $\rho_{crit} = \frac{3H_0^2}{8\pi\kappa}$ odvodíť vzťah pre kritickú hustotu v prepočte na atómy vodíka

$$n = \Omega_l h^2 n_{100}, \text{ kde } h = \frac{H_0}{100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}}, \quad n_{100} = \frac{3 \cdot (100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1})^2}{8\pi\kappa m_{\text{protón}}}, \quad (1 \text{ pc} = 3,26 \text{ sv. r.}).$$

2. Vyčíslíť hodnoty veličiny n_{100} a kritickej hustoty v prepočte na atómy vodíka n pre hodnoty kozmologických parametrov $h = 0,68$ a $\Omega_l = 0,31$. Malo by vyjsť $n_{100} = 11,3 \text{ m}^{-3}$ a $n = 1,65 \text{ m}^{-3}$.
3. Zo Stefanovho–Boltzmannovho zákona $\rho_\gamma = \frac{\pi^2 (k_B T_0)^4}{15 (\hbar c)^3}$ vypočítať hustotu energie fotónov v súčasnom vesmíre s teplotou (reliktového žiarenia) $T_0 = 2,73 \text{ K}$ a vyčíslíť aj hustotu energie všetkých druhov žiarenia ρ_z , ak platí $\rho_z \approx 1,68\rho_\gamma$. Malo by vyjsť $\rho_\gamma = 2,5 \cdot 10^5 \text{ eV m}^{-3}$ a $\rho_z = 4,2 \cdot 10^5 \text{ eV m}^{-3}$.
4. Z výsledkov dvoch predchádzajúcich bodov vyčíslíť pomer Ω_l/Ω_z . Malo by vyjsť 3430.

Pr. 2 Časy rovnosti a rekombinácie: Uvažujme vesmír s látkou a žiarením. Úlohou je:

1. Využitím vzťahu $\frac{a_{eq}}{a_0} = \frac{\Omega_z}{\Omega_l}$, ktorý vyplýva z výsledku **Sady 4, Pr. 1** bodu 2., kde index $()_{eq}$ sa vzťahuje k času rovnováhy príspevkov látky a žiarenia k celkovej hustote energie, výsledku bodu 4. z predchádzajúceho príkladu a vzťahu pre kozmologický červený posun $1+z = \frac{a_0}{a_*}$ vypočítať veličinu $\tilde{a}_{rec} \equiv \frac{a_{rec}}{a_{eq}}$, kde index $()_{rec}$ sa vzťahuje k času rekombinácie, z ktorého pochádza reliktové žiarenie s červeným posunom $z = 1050$. Malo by vyjsť $\tilde{a}_{rec} = 3,27$.
2. Pomocou vzťahu pre čas rovnováhy t_{eq} zo **Sady 4, Pr. 1** bodu 3., hodnoty $\Omega_l = 0,31$ a výsledku bodu 4. z predchádzajúceho príkladu vyčíslíť vek vesmíru v čase rovnováhy. Využiť aj hodnotu Hubbleovho času $1/H_0 = 14,5$ miliárd rokov (**Sada 1, Pr. 1** bod 1.). Malo by vyjsť $t_{eq} = 50$ tisíc rokov.
3. Pomocou výsledkov z predchádzajúcich dvoch bodov a riešenia úlohy zo **Sady 4, Pr. 1** bodu 4. vyčíslíť vek vesmíru v čase rekombinácie $t_{rec} = \tilde{a}_{rec} t_{eq}$. Malo by vyjsť $t_{rec} = 397$ tisíc rokov.

Pr. 3 Polomer vesmíru: Uvažujme vesmír s látkou a tmavou energiou. V tomto príklade je potrebné použiť všetky výsledky a konvencie z príkladu zo **Sady 4, Pr. 3**. Úlohou je:

1. Z Friedmannovej rovnice napísanej v čase dnes $H_0^2 + \frac{k}{a_0^2} = \frac{8\pi\kappa}{3}\rho_0 = H_0^2\Omega$, kde $k = 1$ pre uzavretý vesmír ($\Omega > 1$), vyčíslíť polomer 3-sféry - vesmíru - a_0 v násobkoch Hubbleovho polomeru $1/H_0$ pre $\Omega = 1,008$, čo je horný limit na hodnotu Ω daný pozorovaniami.
2. Numericky vyčíslíť fyzikálny polomer pozorovateľného vesmíru $r = a_0 \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$ tiež v násobkoch Hubbleovho polomeru $1/H_0$ pre $\Omega_\Lambda = 0,69$.
3. Z výsledkov predchádzajúcich dvoch bodov vypočítať, koľkokrát je polomer celého vesmíru väčší než polomer jeho pozorovateľnej časti. (Ide o dolný odhad.)

Výsledky: 1. $a_0 = 11,2H_0^{-1}$, 2. $r \approx \frac{1,3}{H_0} \int_0^{0,955} \text{sh}^{-2/3} \left(\frac{3}{2}\sqrt{0,69x} \right) dx \approx 3,25H_0^{-1}$, 3. 3,45