## $\cdot\bullet$ **Sada 7**: *Kvázistatický vesmír* $\bullet\cdot$

Vo vesmíre s látkou s hustotou energie $\rho_l = \Omega_l \rho_{crit} \widehat{a}^{-3}$, so žiarením s hustotou energie $\rho_z = \Omega_z \rho_{crit} \widehat{a}^{-4}$ a s tmavou energiou s hustotou energie $\rho_\Lambda = \Omega_\Lambda \rho_{crit}$ je dynamika škálovacieho parametra $a(t)$ daná Friedmannovou rovnicou

$$\left(\frac{d\widehat{a}}{d\widehat{t}}\right)^2 = f\left(\widehat{a}\right), \quad \text{kde } \widehat{a} = \frac{a}{a_0}, \ \widehat{t} = H_0 t, \ f\left(\widehat{a}\right) = \Omega_l \frac{1}{\widehat{a}} + \Omega_z \frac{1}{\widehat{a}^2} + \Omega_\Lambda \widehat{a}^2 + 1 - \Omega, \ \text{ a } \ \Omega = \frac{\rho}{\rho_{crit}} = \Omega_l + \Omega_z + \Omega_\Lambda.$$

(Podľa znamienka $\Omega - 1$ je vesmír plochý, uzavretý alebo otvorený.) Ak existuje hodnota škálovacieho parametra $\widehat{a} = \alpha$, pre ktorú platia tri podmienky

$$\boxed{1.\ f(\alpha) = 0, \qquad 2.\ f'(\alpha) = 0, \qquad 3.\ f''(\alpha) > 0,}$$

tak v blízkosti tejto hodnoty približne platí $f \propto \left(\widehat{a} - \alpha\right)^2$ (Taylorov rozvoj) a Friedmannova rovnica sa redukuje na $d\widehat{a}/\left(\widehat{a} - \alpha\right) \propto d\widehat{t}$. V prípade rastúceho škálovacieho parametra, ktorý je menší ako hodnota $\widehat{a} = \alpha$, potom limitne platí $\widehat{a} = \alpha + \beta e^{-|K|\widehat{t}}$. Škálovací parameter sa asymptoticky blíži k hodnote $\widehat{a} = \alpha$, a vesmír sa tak počas čoraz pomalšieho rozpínania postupne stáva statickým.

---

**Pr. 1** *Limitne statický vesmír*: Úlohou je:

1. Z prvých dvoch podmienok v rámčeku vyjadriť $\Omega_l$ a $\Omega_z$ cez $\Omega_\Lambda$ a $\alpha$. Malo by vyjsť

$$\Omega_l = 2\alpha \frac{\Omega_\Lambda \left(\alpha^2 - 1\right)^2 - 1}{\left(\alpha - 1\right)^2}, \quad \Omega_z = \alpha^2 \frac{1 - \Omega_\Lambda \left(\alpha - 1\right)^2 \left(2\alpha + 1\right)}{\left(\alpha - 1\right)^2}.$$

2. S použitím podmienky kladnosti oboch parametrov $\Omega_l$ a $\Omega_z$ a výsledku z predchádzajúceho bodu (predpokladajúc kladnosť aj $\Omega_\Lambda$) nájsť podmienky pre oblasť v parametrickom priestore s dvomi nezávislými parametrami $\Omega_\Lambda$ a $\alpha$, v ktorej platia všetky tri podmienky v rámčeku (tretia platí automaticky). Malo by vyjsť

$$\left(\alpha - 1\right)^2 \left(2\alpha + 1\right) \leq \frac{1}{\Omega_\Lambda} \leq \left(\alpha^2 - 1\right)^2.$$

3. Oblasť nájdenú v predchádzajúcom bode vykresliť v rovine s osami $\Omega_\Lambda^{-1}$ a $\alpha$.

---

**Pr. 2** *Prechodne kvázistatický vesmír:* Uvažujme vesmír s parametrami $\Omega_l$, $\Omega_z$ a $\Omega_\Lambda^\varepsilon = \Omega_\Lambda \left(1 + \varepsilon\right)$, ktorého škálovací parameter je $\widehat{a} = \alpha \left(1 + \delta\right)$ kde $\varepsilon$ je malé číslo, $\delta$ je malá funkcia a parametre $\Omega_1$, $\Omega_z$, $\Omega_\Lambda$ a $\alpha$ spĺňajú tri vzťahy odvodené v bodoch 1. a 2. predchádzajúceho príkladu. Úlohou je:

1. Pomocou výsledkov z predchádzajúceho príkladu dokázať, že $\Omega = \Omega_l + \Omega_z + \Omega_\Lambda > 1$, teda iba uzavretý vesmír môže byť limitne statickým. Vhodným postupom je vyjadriť $\Omega$ cez $\Omega_\Lambda$ a $\alpha$ a potom z nerovnosti $\Omega \leq 1$ (opak dokazovaného tvrdenia) odvodiť $\Omega_\Lambda^{-1} \geq \left(\alpha - 1\right)^2 \left(3\alpha^2 + 2\alpha + 1\right) > \left(\alpha^2 - 1\right)^2$, čo je v spore s výsledom bodu 2. z predchádzajúceho príkladu.

2. Funckiu $f\left(\widehat{a}\right)$ rozvinúť do prvého rádu v $\varepsilon$ a do druhého rádu v $\delta$. Malo by vyjsť

$$f\left(\widehat{a}\right) \approx \varepsilon q + p\left(2\varepsilon\xi\delta + \delta^2\right), \quad \text{kde } \ q = \Omega_\Lambda \left(\alpha^2 - 1\right), \ \xi = \frac{\Omega_\Lambda \alpha^2}{p}, \ \text{ a } \ p = \frac{\Omega_l}{\alpha} + \frac{3\Omega_z}{\alpha^2} + \Omega_\Lambda \alpha^2.$$

   (Členy úmerné $\varepsilon^0\delta^0$ a $\varepsilon^0\delta^1$ sú nulové vďaka prvým dvom podmienkam v rámčeku.)

---

**Pr. 3** *Trvanie kvázistatickej fázy:* Podľa výsledku bodu 2. z predchádzajúceho príkladu pre vesmír, ktorý sa malým parametrom $\varepsilon$ líši od kvázistatického vesmíru z **Pr. 1**, je pravá strana Friedmannovej rovnice v kvázistatickom období približne rovná $f\left(\widehat{a}\right) \approx \varepsilon q + p\left(2\varepsilon\xi\delta + \delta^2\right)$, kde malá funckia $\delta$ popisuje odchýlku škálovacieho parametra od jeho kvázistatickej hodnoty, $\widehat{a} = \alpha\left(1 + \delta\right)$. Ak zanedbáme členy rádu $\varepsilon^2$, tak sa dá zapísať ako $f\left(\widehat{a}\right) \approx p\left(\Delta^2 \pm \Delta_0^2\right)$, kde $\Delta = \varepsilon\xi + \delta$ a $\Delta_0 = \sqrt{|\varepsilon q|/p}$. Úlohou je:

1. Rozmyslieť si, že v prípade horného znamienka, teda $f(\widehat{a}) \approx p\left(\Delta^2 + \Delta_0^2\right)$ sa vesmír po skončení kvázistatickej fázy začne opäť rozpínať a v opačnom prípade, keď $f(\widehat{a}) \approx p\left(\Delta^2 - \Delta_0^2\right)$, sa vesmír začne zmršťovať.

2. Pomocou Friedmannovej rovnice ukázať, že čas, ktorý trvá rozpínanie vesmíru z hodnoty škálovacieho parametra $a_1$ do hodnoty $a_2$, sa dá počítať ako

$$\widehat{t}_2 - \widehat{t}_1 = \int\limits_{\widehat{a}_1}^{\widehat{a}_2} \frac{d\widehat{a}}{\sqrt{f(\widehat{a})}}.$$

3. Pre prípad, v ktorom sa po kvázistatickej fáze začne vesmír znova rozpínať, vypočítať, ako dlho trvá rozpínanie od hodnoty škálovacieho parametra $\widehat{a}\left(\widehat{t}_1\right) = \alpha\left(1 - \varepsilon\xi - \Delta_m\right)$ po hodnotu $\widehat{a}\left(\widehat{t}_2\right) = \alpha\left(1 - \varepsilon\xi + \Delta_m\right)$. Vypočítať aj vedúci rád získaného výsledku v malosti $\varepsilon$ aj $\Delta_m$. Malo by vyjsť

$$\widehat{t}_2 - \widehat{t}_1 \approx \frac{2\alpha}{\sqrt{p}} arc\mathrm{sh} \frac{\Delta_m}{\Delta_0} \approx \frac{2\alpha}{\sqrt{|q|}} \frac{\Delta_m}{\sqrt{|\varepsilon|}}.$$

4. Pre prípad, v ktorom sa po kvázistatickej fáze začne vesmír zmršťovať, vypočítať, ako dlho trvá rozpínanie od hodnoty $\widehat{a}\left(\widehat{t}_1\right) = \alpha\left(1 - \varepsilon\xi - \Delta_0 - \Delta_m\right)$ po maximálnu hodnotu $\widehat{a}\left(\widehat{t}_{max}\right) = \alpha\left(1 - \varepsilon\xi - \Delta_0\right)$ (danú podmienkou $\Delta = \Delta_0$) a znova späť do $\widehat{a}\left(\widehat{t}_2\right) = \alpha\left(1 - \varepsilon\xi - \Delta_0 - \Delta_m\right)$. Vypočítať aj vedúci rád získaného výsledku v malosti $\varepsilon$ aj $\Delta_m$. Malo by vyjsť

$$\widehat{t}_2 - \widehat{t}_1 \approx \frac{2\alpha}{\sqrt{p}} arc\mathrm{ch}\left(1 + \frac{\Delta_m}{\Delta_0}\right) \approx \frac{2\sqrt{2}\alpha}{p|q|^{1/4}} \frac{\sqrt{\Delta_m}}{|\varepsilon|^{1/4}}.$$

Ukázali sme, že limitne statický vesmír z **Pr. 1** si žiada jemné naladenie kozmologických parametrov $\Omega_l$, $\Omega_z$ a $\Omega_\Lambda$. Ak toto jemné naladenie porušíme malým parametrom $\varepsilon$ ako v **Pr. 2**, $\Omega_\Lambda \to \Omega_\Lambda^\varepsilon = \Omega_\Lambda(1+\varepsilon)$, tak trvanie kvázistatickej fázy je úmerné rádom $|\varepsilon|^{-1/2}$ resp. $|\varepsilon|^{-1/4}$.

---