·• Sada 8: *Horúci vesmír I* •·

Stredná hustota počtu častíc v i-tom stave n_i je pri teplote T daná Fermiho–Diracovým resp. Boseho–Einsteinovým rozdelením,

$$n_i = \frac{1}{e^{(\mathcal{E}_i - \mu)/T} \pm 1},$$

kde $\mathcal{E}_i = \sqrt{P_i^2 + m^2}$ je energia i-teho stavu daná hybnosťou P_i, teda $n_i \equiv n(P)$ a $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}(P)$, m je hmotnosť častíc a μ je chemický potenciál, pričom horné znamienko $+1$ platí pre fermióny a dolné -1 pre bozóny. Celková hustota počtu častíc n a hustota energie ρ sa počítajú ako

$$n = g \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3} n(P), \quad \rho = g \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3} \mathcal{E}(P) n(P),$$

kde g je počet vnútorných stupňov voľnosti (spin, polarizácia...).

Pr. 1 *Vplyv počtu druhov častíc na teplotu*: Pre fotónový plyn platí Stefanov–Boltzmannov zákon $\rho_\gamma = \sigma_{\mathrm{SB}} T^4$. Zároveň z rovnice tekutín pre žiarenie vyplýva, že $\rho_\gamma \propto a^{-4}$. Ak máme viac druhov žiarenia, tak hustota energie žiarenia je $\rho_z = \mathcal{N} \rho_\gamma$, kde $\mathcal{N}$ je efektívny počet druhov častíc žiarenia. Entropia žiarenia v objeme V sa počíta ako $S_z = \mathcal{N} S_\gamma = \mathcal{N}(4/3)\sigma_{\mathrm{SB}} T^3 V$. Úlohou je:

1. Zo zachovania entropie žiarenia (adiabatický vratný dej) a z porovnania Stefanovho–Boltzmannovho zákona s riešením rovnice tekutín nájsť závislosť teploty T od efektívneho počtu druhov častíc žiarenia $\mathcal{N}$ a od škálovacieho parametra a.

2. Pomocou výsledku z predchádzajúceho bodu a Friedmannovej rovnice so žiarením, $\rho = \rho_z$, odvodiť závislosť teploty T od efektívneho počtu druhov častíc žiarenia $\mathcal{N}$ a od času t.

3. Z výsledku predchádzajúceho bodu odvodiť, ako sa zmení teplota, $T \to T + \delta T$, ak sa počas veľmi krátkeho obdobia, $\delta t \approx 0$, relatívne málo zmenší efektívny počet druhov častíc, $\mathcal{N} \to \mathcal{N} - \delta\mathcal{N}$, $\delta\mathcal{N} \ll \mathcal{N}$.

Výsledky: 1. $T \propto \mathcal{N}^{-1/3} a^{-1}$, 2. $T \propto \mathcal{N}^{-1/4} t^{-1/2}$, 3. $\delta T \approx \dfrac{1}{4}\dfrac{\delta\mathcal{N}}{\mathcal{N}} T$

Pr. 2 *Časticový prebytok v plyne párov:* Úlohou je:

1. V limite malej teploty, teda $T \ll m, \mu$, vypočítať hustotu počtu častíc n^+ s chemickým potenciálom μ_+ a antičastíc n^- s chemickým potenciálom μ_-.

2. Vtej istej limite vypočítať aj hustotu energie častíc ρ^+ s chemickým potenciálom μ_+ a antičastíc ρ^- s chemickým potenciálom μ_-.

3. Z výsledkov bodu 1. vypočítať pomer počtu antičastíc k počtu častíc a zistiť, v akej limite je antičastíc oveľa menej ako častíc.

Výsledky: 1. $n^\pm \approx g \left(\dfrac{mT}{2\pi}\right)^{3/2} e^{\frac{\mu_\pm - m}{T}}$, 2. $\rho^\pm = \left(m + \dfrac{3}{2}T\right) n^\pm$, 3. $\dfrac{n^-}{n^+} = e^{\frac{\mu_- - \mu_+}{T}}$, $m \gg T \gg |m - \mu_+|$

Pr. 3 *Chemický potenciál plynu párov:* Pre chemické potenciály častíc a antičastíc v plyne párov platí $\mu_+ + \mu_- = 0$, teda $\mu_+ = -\mu_- \equiv \mu > 0$. Uvažujme limitu vysokej teploty, v ktorej $T \gg m$. Úlohou je:

1. V limite vysokej teploty vypočítať časticovo antičasticový prebytok $\delta n = n^+ - n^-$ vo vedúcom ráde v malosti pomeru μ/T.

2. Overiť, že ďalší opravný člen výsledku z predchádzajúceho bodu je až rádu $(\mu/T)^3$.

3. Pomocou výsledku z bodu 1. vyjadriť chemický potenciál elektrónovo pozitrónového plynu ako funkciu teploty a pomeru počtu elektrónov a fotónov po anihilácii $\eta_e = \frac{\delta n}{n_\gamma} = \frac{n_e}{n_\gamma} \sim 10^{-10}$, ak hustota počtu fotónov je $n_\gamma = \frac{2,404}{\pi^2} T^3$.

Výsledky: 1. $\delta n = \frac{1}{6} g \mu T^2$, 3. $\mu = \frac{7,212}{\pi^2} \eta_e T$
