Pr. 1 *Anihilácia elektrónovo pozitrónového plynu*: Stredný voľný čas medzi zrážkami častíc sa počíta ako $\tau = n^{-1}\sigma^{-1}v^{-1}$, kde n je hustota počtu častíc, σ je účinný prierez a v je stredná rýchlosť častíc, pričom vo veľmi horúcom plyne ($k_B T \gg mc^2$) platí $v \approx c$. Úlohou je:

1. Z Friedmannovej rovnice s hustotou energie fotónov, $\rho = \rho_\gamma = \sigma_{\mathrm{SB}} T^4$, kde $\sigma_{\mathrm{SB}} = (\pi^2/15) k_B^4 (\hbar c)^{-3}$, odhadnúť rádový vek vesmíru na energetickej škále anihilácie zodpovedajúcej hmotnosti elektrónov $\mathcal{E} = 0,511$ MeV.

2. Nájsť rádovú hodnotu stredného voľného času fotónov tesne pred anihiláciou, kde hustota počtu rozptylových centier je rádovo rovnaká ako hustota počtu fotónov v žiarení čierneho telesa, $n \sim \lambda^{-3}$, účinný prierez interakcie je daný QED ($e^\pm + \gamma \to e^\pm + \gamma$ a $e^- + e^+ \leftrightarrow 2\gamma$), $\sigma \sim \alpha^2 \lambda^2$ s konštantou jemnej štruktúry $\alpha \approx 1/137$, pričom vlnová dĺžka častíc vstupujúcich do interakcie je $\lambda = (2\pi\hbar c/\mathcal{E})$.

3. Nájsť rádovú hodnotu stredného voľného času fotónov tesne po anihilácii, kde hustota počtu rozptylových centier vďaka anihilácii klesla o deväť rádov, $n \to 10^{-9} n$, a reakcie prebiehajú prostredníctvom Thomsonovho rozptylu s účinným prierezom $\sigma \sim \alpha^2 \lambda_{\mathrm{C}}^2$, kde $\lambda_{\mathrm{C}} = \hbar/(mc)$ je Comptonova vlnová dĺžka.

Výsledky: 1. ~ 10 s, 2. $\sim 10^{-17}$ s, 3. $\sim 10^{-8}$ s, fotóny teda zostávajú v tepelnej rovnováhe s prostredím aj po anihilácii, pričom k ich oddeleniu došlo až pri rekombinácii vodíka

---

Pr. 2 *Oddelenie τ neutrín:* Entropia horúceho plynu v objeme V je $S = (4/3)\mathcal{N}\sigma_{\mathrm{SB}} T^3 V$, kde $\mathcal{N}$ je efektívny počet druhov častíc žiarenia, teda pre fotóny $\mathcal{N}_\gamma = 1$ a pre každý druh fermiónu $\mathcal{N}_{\mathrm{ferm.}} = 7/8$. Úlohou je:

1. Rozmyslieť si, či pri ťažších generáciách častíc dochádza k oddeleniu príslušných neutrín a anihilácii leptónových párov skôr ako pri ľahších generáciách.

2. Využijúc zachovávanie entropie odvodiť teplotu oddelených τ neutrín ν_τ oproti ostatnej látke vo forme žiarenia po anihilácii τ leptónových párov, ak by došlo ku včasnému oddeleniu τ neutrín a pri zvyšných dvoch generáciách by k oddeleniu neutrín a anihilácii ešte nedošlo.

Výsledky: 2. $\dfrac{T_{\nu_\tau}}{T_{\mathrm{zvyšok}}} = \left(\dfrac{25}{32}\right)^{1/3}$

Pr. 3 *Rekombinácia vodíka:* V presnejšom modeli (než na prednáške) pri rekombinácii vodíka najprv dochádza k záchytu elektrónov na prvom excitovanom stave $2s$ s energiou $b = B/4 = 13,6$ eV $/4$, kde sa zdržia dostatočne dlho na to, aby sa ich koncentrácia x_{2s} ustálila, zároveň však nie tak dlho, aby boli vyrazené fotónmi vyžiarenými pri záchyte elektrónov na iných atómoch. Prechod na základnú hladinu $2s \to 1s$ má rýchlosť $W = 8,23$ s^{-1} (rádovo oveľa menej ako rýchlosť prechodu $2p \to 1s$ kvôli výberovému pravidlu pre paritu). Ionizačný pomer x_e je pomer počtu voľných elektrónov k počtu voľných a zachytených elektrónov $x_e = n_e/(n_e + n_H)$. Koncentrácia excitovaných atómv vodíka $x_{2s} = n_{2s}/(n_e + n_H)$ je potom daná Sahovou rovnicou pre reakciu $p + e \leftrightarrow H_{2s}$,

$$x_{2s} = 0,244\eta \left(2\pi \frac{k_B T}{m_e c^2}\right)^{3/2} e^{b/(k_B T)} x_e^2, \qquad (\#)$$

kde $\eta = 6,4 \cdot 10^{-10}$ je pomer počtu baryónov a fotónov. Ionizačný pomer sa zároveň znižuje podľa rovnice

$$\frac{dx_e}{dt} = -W x_{2s}, \qquad (\star)$$

Úlohou je:

1. Zavedením bezrozmernej veličiny $y = k_B T/b$ prepísať rovnicu (#) do tvaru $x_{2s} = 4,15 \cdot 10^{-17} y^{3/2} e^{1/y} x_e^2$.

2. Z Friedmannovej rovnice s hustotou energie pre látku (ktorá v čase rekombinácie už dominovala), $\rho = \rho_l = \Omega_l h^2 \frac{3H_{100}^2}{8\pi\kappa}\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3}$, kde $H_{100} = 100$ km s^{-1} Mpc^{-1}, pričom tiež $T \propto a^{-1}$ a hodnoty kozmologických parametrov sú $h = 0,68$ a $\Omega_l = 0,31$, odvodiť rovnicu $\dot{y} = -6,6 \cdot 10^5 y^{5/2} H_{100}$.

3. Rovnice z prechádzajúcich bodov skombinovať s rovnicou ($\star$) a odvodiť $\frac{dx_e}{x_e^2} = 1,66 \cdot 10^{-4} y^{-1} e^{1/y} dy$.

4. Ukázať, že v limite $y \ll 1$ je riešením rovnice z predchádzajúceho bodu $x_e = 6,06 \cdot 10^3 y^{-1} e^{-1/y}$.

5. Pomocou rovnice z predchádzajúceho bodu numericky vyčísliť hodnotu $y_{1/2}$, pre ktorú je ionizačný pomer polovičný, $x_e = 1/2$. Vyčísliť aj príslušnú teplotu $T_{1/2}$ a červený posun $z_{1/2}$ ($1 + z = a_0/a_*$, $T \propto a^{-1}$), ak súčasná teplota vesmíru je 2,73 K.

Výsledky: 5. $y_{1/2} = 0,0842$, $T_{1/2} = 3320$ K, $z_{1/2} = 1220$
