·• **Sada 10**: *Posledný rozptyl & inflácia* •·

Pr. 1 *Posledný rozptyl fotónov reliktového žiarenia*: Stredný voľný čas fotónov v baryónovo žiarivej plazme je $\tau = \sigma_{\mathrm{T}}^{-1} n_e^{-1} c^{-1}$, kde $\sigma_{\mathrm{T}} = 6,65 \cdot 10^{-29}$ m^2 je Thomsonov účinný prierez a n_e je hustota počtu voľných elektrónov, pričom $n_e = n x_e$ s hustotou počtu všetkých elektrónov n a ionizačmým pomerom x_e. Pravdepodobnosť dP, že fotón sa naposledy rozptýlil v konformnom časovom intervale $(\eta, \eta + d\eta)$, je daná funkciou viditeľnosti $\phi(\eta)$, teda $dP = \phi(\eta) d\eta$, kde $\phi = -\mu' e^{-\mu}$, čiarka označuje deriváciu podľa konformného času a funkcia $\mu(t) = \int_t^{t_0} \frac{dt}{\tau}$ sa nazýva optická hĺbka. Úlohou je:

1. Ukázať, že pre minimum (extrém) funkcie viditeľnosti musí platiť $\mu'' = \mu'^2$.

2. Z rovnice z predchádzajúceho bodu odvodiť rovnicu pre ionizačný pomer $\frac{\dot{x}_e}{x_e^2} = -\sigma_{\mathrm{T}} n c$, ktorá platí v limite malého stredného voľného času $\tau \ll H^{-1}$.

3. Zavedením bezrozmernej veličiny $y = k_B T / b$, kde $b = 13,6/4$ eV, a s využitím vzťahov zo **Sady 9**, **Pr. 3**: $\dot{y} = -6,6 \cdot 10^5 y^{5/2} H_{100}$ a $\frac{1}{x_e^2} \frac{dx_e}{dy} = 1,66 \cdot 10^{-4} y^{-1} e^{1/y}$ s $H_{100} = 100$ km s^{-1} Mpc^{-1}, ako aj rovnice z predchádzajúceho bodu odvodiť rovnicu $y^{-3/2} e^{1/y} = 4,32 \cdot 10^7$.

4. Rovnicu z predchádzajúceho bodu vyriešiť numericky a okrem hodnoty y nájsť aj príslušný červený posun a teplotu $\left(1 + z = \frac{a_0}{a_*},\ T \propto \frac{1}{a} \ \rightarrow\ z \approx 14500 y\right)$ a tiež ionozačný pomer s využitím výsledku zo **Sady 9**, **Pr. 3**: $x_e = 6,06 \cdot 10^3 y^{-1} e^{1/y}$.

Výsledky: 4. $y = 0,073$, $z = 1060$, $T = 2890$ K, $x_e = 0,093$
Najväčšia časť fotónov reliktového žiarenia teda pochádza až z časov s ionizačným pomerom menším než $x_e = 0,1$, teda z neskorších časov ako rekombinácia polovice atómov vodíka $x_e = 1/2$.

Pr. 2 *Inflácia so skalárnym poľom:* Dynamika vesmíru so skalárnym poľom φ je daná účinkom s Einsteinovou–Hilbertovou a látkovou časťou, $S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} M_{\mathrm{Pl}}^2 R + \mathcal{L}_{\mathrm{M}} \right)$, kde $M_{\mathrm{Pl}}^2 = \frac{\hbar c}{8\pi\kappa}$ je štvorec redukovanej Planckovej hmotnosti a látkový účinok je $\mathcal{L}_{\mathrm{M}} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} - V(\varphi)$. Uvažujme plochý vesmír s Robertsonovou–Walkerovou metrikou $ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 d\vec{x}^2$, v ktorom je aj skalárne pole homogénne, teda $\varphi = \varphi_0(t)$. Úlohou je:

1. Nájsť tenzor energie hybnosti a z neho vypočítať hustotu energie, $T_{00} = \rho$, a tlak, $T_{ij} = g_{ij} p$.

2. Pomocou výsledkov z predchádzajúceho bodu napísať Friedmannovu rovnicu a rovnicu zrýchlenia.

3. Varírovaním látkového účinku podľa skalárneho poľa φ nájsť (Kleinovu–Gordonovu) rovnicu pre homogénne skalárne pole φ_0 ako aj linearizovanú rovnicu pre jeho perturbáciu $\delta\varphi$, ktorá závisí aj od priestorových súradníc, $\varphi = \varphi_0(t) + \delta\varphi(t, \vec{x})$.

Výsledky: 1. $\rho = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_0^2 + V$, $p = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_0^2 - V$, 2. $H^2 = \frac{1}{3M_{\mathrm{Pl}}^2}\left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}_0^2 + V\right)$, $\dot{H} = -\frac{\dot{\varphi}_0^2}{2M_{\mathrm{PL}}^2}$ 3. $\ddot{\varphi}_0 + 3H\dot{\varphi}_0 + V' = 0$, $\delta\ddot{\varphi} + 3H\delta\dot{\varphi} - a^{-2}\triangle\delta\varphi + V''\delta\varphi = 0$

Pr. 3 *Parametre pomalého rolovania:* Parametre Hubbleovho rozpínania sa definujú ako $\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2}$ (malé ϵ $\Rightarrow$ kváziexponenciálne rozpínanie) a $\eta = \frac{\dot{\epsilon}}{H\epsilon}$ (malé $\eta \Rightarrow$ dlhé trvanie kváziexponenciálnej fázy) a parametre pomalého rolovania ako $\epsilon_V = \frac{1}{2} M_{\mathrm{Pl}}^2 \left(\frac{V'}{V}\right)^2$ a $\eta_V = M_{\mathrm{Pl}}^2 \frac{V''}{V}$. Úlohou je:

1. Pomocou výsledkov z prechádzajúceho príkladu, bodu 2., $H^2 = \frac{1}{3M_{\rm Pl}^2}\left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}_0^2 + V\right)$, $\dot{H} = -\frac{\dot{\varphi}_0^2}{2M_{\rm PL}^2}$, nájsť vzťah medzi parametrami Hublleovho rozpínania a parametrami pomalého rolovania, ak sú parametre Hubbleovho rozpínania malé.

2. Zistiť, akým spôsobom vystupujú parametre pomalého rolovania v rovnici pre perturbáciu $\delta\varphi$ z predchádzajúceho príkladu, bodu 3., $\ddot{\delta\varphi} + 3H\dot{\delta\varphi} - a^{-2}\triangle\delta\varphi + V''\delta\varphi = 0$.

Výsledky: 1. $\epsilon \approx \epsilon_V$, $\eta \approx 4\epsilon_V - 2\eta_V$, 2. $\ddot{\delta\varphi} + 3H\dot{\delta\varphi} - a^{-2}\triangle\delta\varphi + 3H^2\eta_V\delta\varphi = 0$
Kváziexponenciálne rozpínanie vesmíru (malosť ϵ) a dostatočne dlhé trvanie takéhoto rozpínania (malosť η) si teda žiada malosť parametrov pomalého rolovania ϵ_V a η_V.
