$\cdot\bullet$ **Sada 11**: *Kozmologické perturbácie* $\bullet\cdot$

V **Pr. 2** a **Pr. 3** je potrebné použiť Besselove funkcie (prvého a druhého druhu) $J_n(x)$ a $Y_n(x)$ resp. Hankelove funkcie $H_n^{(1)}(x) = J_n(x)+iY_n(x)$ a $H_n^{(2)}(x) = J_n(x)-iY_n(x)$, ktoré tvoria úplný systém riešení diferenciálnej rovnice pre funkciu $f(x)$: $\dfrac{d^2f}{dx^2}+\dfrac{1}{x}\dfrac{df}{dx}+\left(1-\dfrac{n^2}{x^2}\right)f=0$. Pre poločíselný stupeň n ide o analytické funkcie a obzvlášť potrebné budú $J_{3/2}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\left(\dfrac{\sin x}{x}-\cos x\right)$ a $Y_{3/2}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\left(-\dfrac{\cos x}{x}-\sin x\right)$.

Pr. 1 *Kváziexponenciálne rozpínanie*: Podľa výsledku **Pr. 2** zo **Sady 3** exponenciálne rozpínanie plochého vesmíru, $a = a_* e^{H(t-t_*)}$, je v konformnom čase η dané predpisom $a=\left(\dfrac{1}{a_*}-\sqrt{C}\,(\eta-\eta_*)\right)^{-1}$. Úlohou je:

1. Ukázať, že pri vhodnej voľbe počiatočných podmienok platí
$$a=-\frac{1}{H\eta}\quad\text{resp.}\quad \eta=-\frac{1}{Ha},\quad \eta\in(-\infty,0).$$

2. Z definície parametrov (funkcií) Hubbleovho rozpínania zo **Sady 10**, **Pr. 3**: $\epsilon=-\dfrac{\dot H}{H^2}$, $\cancel{\eta}=\dfrac{\dot\epsilon}{H\epsilon}$ (Preškrtnutie je kvôli rozlíšeniu parametra $\cancel{\eta}$ od konformného času η.) odvodiť sústavu rovníc pre dve funkcie $\dfrac{1}{Ha}$ a ϵ. Malo by vyjsť
$$\left(\frac{1}{Ha}\right)'=\epsilon-1,\qquad \epsilon'=Ha\cancel{\eta}\epsilon,$$
kde čiarka označuje deriváciu podľa konformného času.

3. Ukázať, že v limite malých parametrov ϵ a $\cancel{\eta}$, presnejšie v časoch, pre ktoré $|\eta|\ll\left|\dfrac{\widehat\eta}{\epsilon\left(\widehat\eta\right)}\right|,\left|\dfrac{\widehat\eta}{\cancel{\eta}\left(\widehat\eta\right)}\right|$, riešeniu sústavy z predchádzajúceho bodu prislúchajú funkcie
$$a(\eta)=a(\widehat\eta)\left(\frac{\eta}{\widehat\eta}\right)^{-1-\epsilon(\widehat\eta)},\quad \epsilon(\eta)=\epsilon(\widehat\eta)\left(\frac{\eta}{\widehat\eta}\right)^{-\cancel{\eta}(\widehat\eta)}.$$

4. Všimnúť si, že výsledok predchádzajúceho bodu sa redukuje na výsledok bodu 1., ak $\epsilon=0$.

Pr. 2 *Kvantové fluktuácie počas inflácie:* Rovnica pre perturbáciu skalárneho poľa poháňajúceho infláciu je podľa výsledku zo **Sady 10**, **Pr. 3**, bodu 2. v linearizovanej poruchovej teórii $\ddot{\delta\varphi}+3H\dot{\delta\varphi}-a^{-2}\triangle\delta\varphi+3H^2\eta_V\delta\varphi=0$. Pozadie poruchovej teórie je podľa predchádzajúceho príkladu dané kváziexponenciálnym rozpínaním, $a\approx-\left(H\eta\right)^{-1}$. Perturbáciu $\delta\varphi$ je možné kvantovať ako v teórii poľa (na zakrivenom pozadí) cez kreačné a anihilačné operátory, $\delta\varphi_{\vec k}\to\widehat{\delta\varphi}_{\vec k}=\delta\varphi_{\vec k}^{(\mathrm{can})}\widehat a_{\vec k}+\delta\varphi_{-\vec k}^{(\mathrm{can})*}\widehat a_{-\vec k}^{\dagger}$, kde $\delta\varphi_{\vec k}^{(\mathrm{can})}$ je kanonicky normovaný klasický mód spĺňajúci rovnicu pre perturbáciu $\delta\varphi$ a normovaciu podmienku podobnú ako v štandardnej kvantovej teórii poľa, $\lim\limits_{\eta\to-\infty}\delta\varphi_{\vec k}^{(\mathrm{can})}=\dfrac{1}{\sqrt{2k}a}e^{-ik\eta}$, ktorá platí hlboko pod horizontom (comoving vlnová dĺžka $\lambda\sim k^{-1}\ll|\eta|=$ comoving horizont, teda $|k\eta|\gg1$) s časom t nahradeným konformným časom η a zohľadneným príslušným konformným faktorom a. Úlohou je:

1. Prechodom ku konformnému času ukázať, že pre $\eta_V=0$ má rovnica pre Fourierove módy perturbácie $\delta\varphi$ tvar
$$\delta\varphi_k''-\frac{2}{\eta}\delta\varphi_k'+k^2\delta\varphi_k=0.$$

2. Ukázať, že riešením rovnice z predchádzajúceho bodu je
$$\delta\varphi_k=c_1(-\eta)^{3/2}H_{3/2}^{(1)}(-k\eta)+c_2(-\eta)^{3/2}H_{3/2}^{(2)}(-k\eta).$$

3. Z riešenia predchádzajúceho bodu si rozmyslieť, že v čase, keď $k\eta \sim -1$, mód s comoving vlnovou dĺžkou $\lambda \sim k^{-1}$, ktorý bol v skorších časoch podhorizontový ($\lambda \ll |\eta|$ = comoving horizont), prechádza do nadhorizontového režimu a prestáva oscilovať.

4. Ukázať, že kanonicky normovaný mód perturbácie $\delta\varphi$ je

$$\delta\varphi_{\vec{k}}^{(\mathrm{can})} = \frac{H}{\sqrt{2k^3}}\,(i - k\eta)\,e^{-ik\eta}.$$

5. S použitím komutačného vzťahu pre kreačné a anihilačné operátory, $\left[\widehat{a}_{\vec{k}}, \widehat{a}_{\vec{q}}^{\dagger}\right] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{q})$, vypočítať vákuovú strednú hodnotu súčinu dvoch módov $\delta\varphi$, ktorá zodpovedá štatistickej dvojbodovej korelačnej funkcii v limite nulovej teploty,

$$\langle 0|\,\delta\varphi_{\vec{k}}\delta\varphi_{\vec{q}}\,|0\rangle = \frac{H^2}{2k^3}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{k} + \vec{q}).$$

V dvojbodovej korelačnej funckii vyšla závislosť k^{-3}. Mocnina -3 je v skutočnosti trochu posunutá, podľa pozorovaní reliktového žiarenia medzi $-3,03$ a $-3,04$. Tento posun je daný parametrami pomalého rolovania, pričom jeho správny výpočet si žiada do teórie zahrnúť aj perturbácie metriky a nielen skalárneho poľa.

Pr. 3 *Klasické kozmologické perturbácie:* Ak je porucha Robertsonovej–Walkerovej metriky daná malou funkciou ϕ ako $ds^2 = a(\eta)^2\left[-(1+2\phi)d\eta^2 + (1-2\phi)\delta_{ij}dx^i dx^j\right]$ a vesmír je vyplnený ideálnou kvapalinou s pomerom tlaku a hustoty energie w, tak v linearizovanej poruchovej teórii platí pre perturbáciu ϕ rovnica

$$\phi'' + 3(1+c_s^2)\mathcal{H}\phi' - c_s^2\triangle\phi + \left[2\mathcal{H}' + (1+3c_s^2)\mathcal{H}^2\right]\phi = 0, \qquad (\star)$$

kde c_s je rýchlosť zvuku a platí $c_s^2 = w$, ďalej $\mathcal{H} = a'/a$ a čiarka označuje deriváciu podľa konformného času. Úlohou je:

1. Vyriešením rovnice tekutín $\dot{\rho} + 3H(1+w)\rho = 0$ ($\rho' + 3\mathcal{H}(1+w)\rho = 0$) spolu s Friedmannovou rovnicou $H^2 = (8\pi\kappa/3)\rho$ ($\mathcal{H}^2 = (8\pi\kappa/3)\rho a^2$) nájsť závislosť škálovacieho parametra od konformného času, $a \propto \eta^{2/(1+3w)}$.

2. Pomocou výsledku z predchádzajúceho bodu rovnicu $(\star)$ prepísať do tvaru vo Fourierovom obraze

$$\phi_k'' + \frac{6(1+w)}{1+3w}\frac{1}{\eta}\phi_k' + wk^2\phi_k = 0.$$

3. Ukázať, že rovnica z predchádzajúceho bodu sa dá riešiť pomocou Besselových funckcií ako

$$\phi_k(\eta) = \frac{1}{\eta^\nu}\left[c_1 J_\nu\left(\sqrt{w}k\eta\right) + c_2 Y_\nu\left(\sqrt{w}k\eta\right)\right], \quad \text{kde} \quad \nu = \frac{1}{2}\frac{5+3w}{1+3w}.$$
