$\cdot\bullet$ **Sada 12**: *Perturbácie v baryónovo žiarivej plazme* $\bullet\cdot$

Tenzor energie-hybnosti ideálnej kvapaliny s hustotou energie a tlakom v okamžitej pokojovej sústave ρ a p je $T_{\mu\nu} = (\rho+p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}$, kde $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ je 4-rýchlosť jej objemových elementov. Uvažujme plochý vesmír s metrikou $ds^2 = -dt^2 + a(t)^2\delta_{ij}dx^i dx^j$ resp. $ds^2 = a(\eta)^2(-d\eta^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j)$. Pre rýchlosť zvuku v zmesi chladných baryónov s nulovým tlakom ($w = 0$) a fotónov s pomerom tlaku k hustote energie $w = 1/3$ platí $c_s^2 = \dfrac{\delta p}{\delta\rho} = \dfrac{(1/3)\delta\rho_\gamma}{\delta\rho_b + \delta\rho_\gamma} = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1+\delta\rho_b/\delta\rho_\gamma} = [\text{adiabatickosť}] = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1+(3/4)(\rho_b/\rho_\gamma)}$. (Tmavá látka a neutrína sú v horúcom vesmíre prítomné tiež, ale sú oddelené od baryónovo žiarivej plazmy.)

Pr. 1 *Rovnica pre perturbáciu hustoty energie*: Úlohou je:

1. S využitím vzťahu $u_\mu u^\mu = -1$ prepísať rovnicu $u^\nu T^\mu{}_{\nu;\mu} = 0$ do tvaru
$$\frac{d\rho}{d\tau} + (\rho+p)u^\mu{}_{;\mu} = 0.$$
2. Ukázať, že v neporušenom prípade, keď $\rho = \rho(t)$, $u^0 = 1$ a teda $\tau = t$, sa rovnica z prechádzajúceho bodu redukuje na rovnicu tekutín, $\dot\rho + 3H(\rho+p) = 0$.
3. Pridať poruchu k hustote energie $\rho = \rho_0(\eta) + \delta\rho(\eta,\vec{x})$, k tlaku $p = p_0(\eta) + \delta p(\eta,\vec{x})$ a k 4-rýchlosti $u^\mu = \delta_0^\mu + \delta_i^\mu u^i$, kde $v^i = au^i$ je fyzická rýchlosť ($u^0 = 1$ a $\tau = t$ zostáva v platnosti), prejsť ku konformnému času a napísať časť rovnice z bodu 1. v prvom ráde poruchovej teórie. Malo by vyjsť
$$\delta\rho' + 3\mathcal{H}(\delta\rho + \delta p) + (\rho+p)\vec\nabla\cdot\vec{v} = 0,$$
kde $\mathcal{H} = a'/a$ a čiarka označuje deriváciu podľa konformného času.

Pr. 2 *Rovnica pre rýchlosť:* Úlohou je:

1. S využitím vzťahu z predchádzajúceho príkladu, bodu 1., $\dot\rho + (\rho+p)u^\mu{}_{;\mu} = 0$, odvodiť zo zákona zachovania $T^{\alpha\mu}{}_{;\alpha} = 0$ rovnicu
$$(\rho+p)\dot u^\mu + (u^\mu u^\nu + g^{\mu\nu})\,p_{,\nu} = 0.$$
2. Ukázať, že v neporušenom prípade, keď $\rho = \rho(t)$, $u^0 = 1$ a teda $\tau = t$, sa rovnica z prechádzajúceho bodu redukuje na rovnicu typu $0 = 0$.
3. Pridať poruchu k hustote energie $\rho = \rho_0(\eta) + \delta\rho(\eta,\vec{x})$, k tlaku $p = p_0(\eta) + \delta p(\eta,\vec{x})$ a k 4-rýchlosti $u^\mu = \delta_0^\mu + \delta_i^\mu u^i$, kde $v^i = au^i$ je fyzická rýchlosť ($u^0 = 1$ a $\tau = t$ zostáva v platnosti), prejsť ku konformnému času a napísať časť rovnice z bodu 1. v prvom ráde poruchovej teórie. Malo by vyjsť
$$[(\rho+p)\vec{v}]' + 4\mathcal{H}(\rho+p)\vec{v} + \vec\nabla\delta p = 0,$$
kde $\mathcal{H} = a'/a$ a čiarka označuje deriváciu podľa konformného času.

Pr. 3 *Perturbácie vo WKB priblížení:* Rovnica pre perturbáciu hustoty energie z **Pr. 1** je pre fotóny $\delta\rho_\gamma' + 3\mathcal{H}(\delta\rho_\gamma + \delta p_\gamma) + (\rho_\gamma + p_\gamma)\vec\nabla\cdot\vec{v} = 0$, kde $p_\gamma = (1/3)\rho_\gamma$, a pre rýchlosť z **Pr. 2** je $[(\rho+p)\vec{v}]' + 4\mathcal{H}(\rho+p)\vec{v} + \vec\nabla\delta p = 0$. Keďže baryóny a fotóny tvoria jedno médium, majú spoločnú rýchlosť $\vec{v}$, ale pri prvej rovnici využívame, že zákony zachovania platia pre baryóny a fotóny zvlášť. Podľa WKB priblíženia je približným riešením rovnice pre funkciu $f(t)$: $\ddot f + g^2 f = 0$ funkcia $f \propto g^{-1/2}\cos\left(\int g dt\right)$, ak sa funkcia g mení oveľa pomalšie ako funkcia f. Úlohou je:

1. S pomocou vzťahov pre rýchlosť zvuku c_s z úvodu a rovníc pre perturbáciu hustoty energie fotónov a pre rýchlosť baryónovo žiarivej plazmy odvodiť rovnicu

$$\left(\frac{\delta_\gamma'}{c_s^2}\right)' - \triangle\delta_\gamma = 0,$$

   v ktorej vystupuje iba jedna premenná $\delta_\gamma = \delta\rho_\gamma/\rho_\gamma$.

2. Ukázať, že riešenie rovnice z predchádzajúceho bodu vo WKB priblížení, pre pomaly sa meniacu rýchlosť zvuku a také módy, že pre vlnové číslo platí $k \gg |c_s'|/c_s^2$, je

$$\delta_\gamma \propto \sqrt{c_s} \cos\left(k \int c_s d\eta\right).$$

V tejto sade príkladov sme uvažovali perturbácie iba v látke, pričom perturbácie metriky sme neuvažovali, čo je nesprávne. Dostali sme tak výsledky, ktoré poskytujú iba kvalitatívnu predstavu o presnejšej teórii.