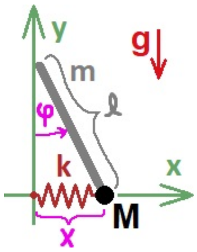
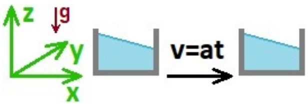
Domáca Úloha na body za semeter # 3

odovzdať (cez e-mail) najneskôr do piatka 17. decembra 2021, **9:50**



↖ obr. č. 1



↖ obr. č. 2

1. **[1 b]** Na prvom obrázku je znázornený systém pozostávajúci z hmotného bodu s hmotnosťou M, ktorý sa môže pohybovať iba pozdĺž osi x, z homogénnej veľmi tenkej paličky s dĺžkou l a hmotnosťou m, ktorej jeden koniec je spojený s hmotným bodom s hmotnosťou M a jej druhý koniec je viazaný na kladnú časť osi y, a aj pružiny s nulovou pokojovou dĺžkou a tuhosťou k, ktorej jeden koniec je pripojený k hmotnému bodu s hmotnosťou M a jej druhý koniec je pevne pripojený k počiatku. Homogénne tiažové zrýchlenie je $\vec{g} = -g\vec{e}_y$. Úlohou je:

   (a) Odvodiť Lagranžián systému so súradnicou x, malo by vyjsť[1]
   $$L = \frac{1}{2}\left(M + \frac{1}{3}m\frac{l^2}{l^2 - x^2}\right)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}mg\sqrt{l^2 - x^2}.$$

   (b) Odvodiť pohybovú rovnicu pre bezrozmernú premennú $\xi = x/l$ s bezrozmerným časom $\tau = \sqrt{k/M}t$, ktorá by mala vyjsť
   $$\left(1 + \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{1 - \xi^2}\right)\xi'' + \frac{\varepsilon}{3}\frac{\xi\xi'^2}{(1 - \xi^2)^2} + \xi - \varepsilon\alpha\frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = 0,$$
   kde $\varepsilon = m/M$. Nájsť (po ceste) aj vyjadrenie bezrozmerného parametra α cez zadané parametre úlohy.

   (c) Predpokladať malosť parametra ε, spraviť poruchový výpočet do prvého rádu, $\xi = \xi_0 + \varepsilon\xi_1 + ...$, a odvodiť pohybové rovnice pre ξ_0 a ξ_1, tie by mali vysť
   $$\xi_0'' + \xi_0 = 0, \qquad \xi_1'' + \xi_1 = ...,$$
   kde tri bodky obsahujú funkciu ξ_0 z predchádzajúceho rádu poruchového výpočtu, tie tri bodky doplniť výpočtom. Tieto rovnice už riešiť nemusíte.

---

[1] So súradnicou φ by to bolo
$$L = \frac{1}{2}\left(M\cos^2\varphi + \frac{1}{3}m\right)l^2\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}kl^2\sin^2\varphi - \frac{1}{2}mgl\cos\varphi.$$
Môžete si tiež overiť, že frekvencia malých kmitov okolo rovnovážnej polohy $x = 0$ resp. $\varphi = 0$ je
$$\omega = \sqrt{\frac{k - \dfrac{mg}{2l}}{M + \dfrac{m}{3}}},$$
čo sa dá odvodiť z jedného aj druhého tvaru Lagranžiánu.

2. **[1 b]** Na druhom obrázku je nádoba s nestlačiteľnou kvapalinou ($\rho =$ $=$ konšt.), ktorá je v smere osi x urýchľovaná konštantným zrýchlením a tak, že v čase $t = 0$ nádoba stála. Predpokladajme, že kvapalina sa hýbe spolu s nádobou ako tuhé teleso, teda vektorové pole rýchlosti tečenia kvapaliny je $\vec{v} = at\vec{e}_x$. Riešením Navierovej–Stokesovej rovnice,

$$\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{g} + \frac{\eta}{\rho}\left(\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right) + \triangle\vec{v}\right), \quad \vec{g} = -g\vec{e}_z,$$

   (a) nájdite tlak p ako funkciu priestorových súradníc a času.

   (b) Overte, že z podmienky nulového tlaku je hladina kvapaliny daná vzťahom

$$z = -\frac{a}{g}x + f(t),$$

   kde $f(t)$ je funkcia času, ktorú možno špecifikovať zadaním objemu kvapaliny v nádobe.[2] Kvapalina sa teda správa ako keby bola v nádobe, ktorá stojí, ale je naklonená,[3] pričom uhol náklonu α je daný vzťahom tg $\alpha = \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| = \frac{a}{g}$.

[2] Ak má podstava nádoby tvar štvorca s dĺžkou hrany l a je v rovine $z = 0$, v čase $t = 0$ nádoba stála a jej okraj bol v polohe $x = 0$, a hladina kvapaliny je naklonená iba tak, aby kvapalina z nádoby ani nevytekala a aby ani časť dna nádoby nevytŕčala nad hladinu, tak objem kvapaliny v nádobe sa dá počítať ako

$$V = \int\limits_{\frac{1}{2}at^2}^{\frac{1}{2}at^2+l} dx \int\limits_0^l dy \int\limits_0^{-\frac{a}{g}x+f(t)} dz,$$

čo funkciu $f(t)$ špecifikuje na tvar

$$f(t) = \frac{V}{l^2} + \frac{a}{2g}\left(l + at^2\right).$$

[3] V sústave spojenej s nádobou sa hydrodynamika redukuje na hydrostatiku, ale pôsobí v nej zotrvačná sila, ktorá „nakláňa” hladinu.