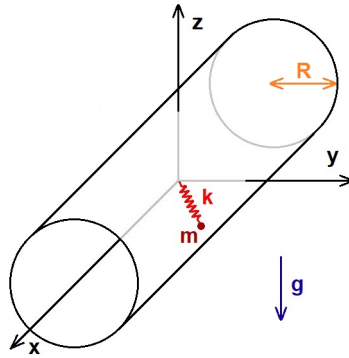


Domáca Úloha na body za semester # 4

odovzdať (riešenie poslať na e-mail) najneskôr vo štvrtok 5. novembra 2020



1. **[1.5 b]** Hmotný bod sa môže pohybovať iba po povrchu vodorovne položeného valca s polomerom R tak, ako na obrázku. Je pritom spojený s počiatkom (na osi valca) pružinou s tuhosťou k a nulovou pokojovou dĺžkou a pôsobí naň aj tiažové zrýchlenie veľkosti g smerom nadol. Takže v kartézskych súradniciach je väzba daná vzťahom

$$y^2 + z^2 = R^2, \quad (x - \text{ľubovoľné})$$

a potenciálna energia je

$$U = mgz + \frac{1}{2}k(x^2 + \underbrace{y^2 + z^2}_{R^2 \text{ z väzby}}).$$

Úlohou je

- (a) **[0.5 b]** zaviesť zovšeobecnené súradnice a nájsť Lagranžian vyjadrený cez ne, $L = L(q, \dot{q})$,
 - (b) **[0.5 b]** nájsť zovšeobecnené hybnosti, $p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}$, a zostaviť Hamiltonián, $H = H(q, p)$,
 - (c) **[0.5 b]** napísať Hamiltonove rovnice (mali by to byť 4 diferenciálne rovnice prvého rádu).
2. **[1 b]** Štvorec momentu hybnosti je funkciou na fázovom priestore, $L^2 = L_i L_i$, $L_i = \varepsilon_{ijk} x_j p_k$. Poissonove zátvorky dvoch funkcií na fázovom priestore f a g sa definujú ako $\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial x^i} - \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial p_i}$. Úlohou je ukázať, že nasledujúce Poissonove zátvorky

- (a) **[0.5 b]** $\{L^2, p^2\}$, (kde $p^2 = p_i p_i$)
- (b) **[0.5 b]** $\{L^2, \vec{x} \cdot \vec{p}\}$, (kde $\vec{x} \cdot \vec{p} = x^i p_i$)

vyjdú obe rovné nule. (Oplatí sa najprv ukázať, že $L^2 = x^2 p^2 - (\vec{x} \cdot \vec{p})^2$, a ďalej počítať buď priamo, alebo využívať antisymetriu, bilinearitu a Leibnitzovskosť Poissonových zátvoriek (príklad [5.7](#) z textu "rozšírený sylabus") a vzťahy $\{x^i, x^j\} = 0 = \{p_i, p_j\}$ a $\{p_i, x^j\} = \delta_{ij}$ (príklad [5.11](#) z textu "rozšírený sylabus"))