

## Domáca Úloha na body za semester # 5

odovzdať (riešenie poslať na e-mail) najneskôr vo štvrtok 12. novembra 2020

1. **[1 b]** Uvažujme Lagranžian  $L[x, y, \dot{x}, \dot{y}] = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}\alpha(xy + x\dot{y})$ , kde  $m$  a  $\alpha$  sú konštanty.

(a) **[0.25 b]** Ukážte, že Lagranžove pohybové rovnice dávajú rovnice pre rovnomerný priamočiary pohyb,  $\ddot{x} = 0$  a  $\ddot{y} = 0$ .<sup>1</sup>

(b) **[0.25 b]** Nájdite vyjadrenie zovšeobecnených hybností  $P_x$  a  $P_y$  cez súradnice  $x$ ,  $y$  a ich časové derivácie  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ .

(c) **[0.5 b]** Ukážte, že Hamiltonián vyjde

$$H[x, y, P_x, P_y] = \frac{1}{2m} \left[ \left( P_x + \frac{1}{2}\alpha y \right)^2 + \left( P_y + \frac{1}{2}\alpha x \right)^2 \right]$$

2. **[0.5 b]** Lagranžian pre voľný pád v homogénnom tiažovom poli (v smere osi  $z$ ) je  $L[x, z, \dot{z}] = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz$ . Napíšte príslušný Hamiltonián a nakreslite fázový portrét (čiary so šípkami v správnom smere v rovine  $z$ ,  $P_z$ ).

3. **[0.5 b]** Lagranžian pre viacrozmerný harmonický oscilátor je  $L[x, \vec{r}, \dot{\vec{r}}] = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ . Škálovaním polohového vektora  $\vec{r}$  a času  $t$  v Lagranžiane ukážte, že frekvencia kmitov takéhoto oscilátora nezávisí od amplitúdy.

4. **[0.5 b]** Lagranžian pre pohyb v gravitačnom poli vo svete s 2020 priestorovými rozmermi je  $L[x, \vec{r}, \dot{\vec{r}}] = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - \frac{\alpha}{r^{2018}}$ .<sup>2</sup> Škálovaním polohového vektora  $\vec{r}$  a času  $t$  v Lagranžiane nájdite tretí Keplerov zákon v 2020 rozmernom svete, teda nájdite stupne mocnín  $m$  a  $n$  tak, aby platilo  $\frac{(\text{veľkosť obežnej dráhy})^m}{(\text{čas obehu})^n} = \text{konštanta}$ .

---

<sup>1</sup>Musí to tak vyjsť, pretože náš Lagranžian je Lagranžianom voľnej častice  $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$  plus úplná časová derivácia funkcie  $f = -\frac{1}{2}\alpha xy$ , takže z variačného princípu ľahko vidno, že pridanie člena  $\dot{f} = -\frac{1}{2}\alpha(\dot{x}y + x\dot{y})$  nič nemení.

<sup>2</sup>V 2020 rozmernom priestore sila klesá s 2019-tou mocninou, takže v potenciáli musí byť 2018-ta mocnina.