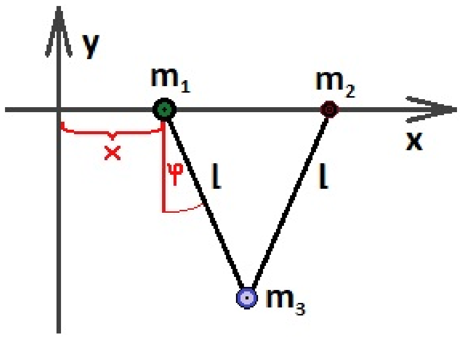
Domáca Úloha na body za semeter # 6

odovzdať (riešenie poslať na e-mail) najneskôr vo štvrtok 19. novembra 2020



1. **[1.5 b]** Na obrázku je sústava hmotných bodov s hmotnosťami m_1, m_2 a m_3 s nasledujúcimi väzbami: Prvé dva hmotné body sú viazané na os x, a tretí je spojený s každým z nich ľahkými paličkami dĺžky l tak, ako na obrázku. Zaveďme zovšeobecnené súradnice x a φ,

$$m_1 : \begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = 0 \end{cases} \qquad m_2 : \begin{cases} x_2 = x + 2l\sin\varphi \\ y_2 = 0 \end{cases} \qquad m_3 : \begin{cases} x_3 = x + l\sin\varphi \\ y_3 = -l\cos\varphi \end{cases}$$

V smere osi y pôsobí smerom nadol tiažové zrýchlenie g. Pohybové rovnice pre túto úlohu sú príliš zložité, ale dá sa tu využiť zákon zachovania, z ktorého dostaneme aspoň niečo. Úlohou je:

   (a) **[0.5 b]** Ukázať, že Lagranžián vyjde

$$\begin{aligned} L[\cancel{t}, \cancel{x}, \varphi, \dot{x}, \dot{\varphi}] &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)\,\dot{x}^2 + (2m_2 + m_3)\,l\cos\varphi\dot{x}\dot{\varphi} + \\ &+ \left(2m_2\cos^2\varphi + \frac{1}{2}m_3\right) l^2\dot{\varphi}^2 + m_3 g l\cos\varphi. \end{aligned}$$

   (b) **[0.25 b]** Využiť cykličnosť súradnice x a napísať diferenciálnu rovnicu prvého rádu za zachovávanie zovšeobecnenej hybnosti $P_x = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}$.

   (c) **[0.5 b]** Uvažovať počiatočné podmienky:

$$x(0) = 0, \quad \varphi(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0.$$

   Z týchto počiatočných podmienok špecifikovať hodnotu zachovávajúcej sa veličiny P_x[1] a následne preintegrovaním rovnice za zachovávanie P_x odvodiť závislosť medzi x a φ:[2]

$$x = \frac{2m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3} l\,(1 - \sin\varphi)$$

   (d) **[0.25 b]** Zmení sa výsledok (závislosť medzi x a φ) ak vypneme tiažové zrýchlenie?

[1] Akú hodnotu má na počiatku, takú hodnotu má stále, keďže sa zachováva.

[2] Kompletné riešenie si žiada poznať x a φ ako funkcie času, čo nevieme, ale zákon zachovania nám prezrádza aspoň závislosť medzi nimi.

2. **[1 b]** Lagranžián relativisticlej častice v jednom rozmere, na ktorú nepôsobia žiadne sily, je[3]

$$L[\xcancel{t}, \xcancel{x}, \dot{x}] = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}.$$

Úlohou je:

(a) **[0.25 b]** Ukázať, že zovšeobecnená hybnosť je

$$p = \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}}.$$

(b) **[0.75 b]** Ukázať, že Hamiltonián vyjde[4]

$$H[\xcancel{t}, \xcancel{x}, p] = p\dot{x} - L[\xcancel{t}, \xcancel{x}, \dot{x}] = \cdots = c\sqrt{m^2c^2 + p^2}.$$

(Výraz pre p umocniť a vyjadriť $\dot{x}$ cez p, potom dosadiť do vzťahu pre Hamiltonián.) Relativistický vzťah pre energiu je potom $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$.

---

[3]Pre rýchlosti oveľa menšie než rýchlosť svetla dostávame $L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}} \approx$
$\approx -mc^2\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\dot{x}^2}{c^2}\right) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mc^2 =$ kinetická energia $-$ pokojová energia.

[4]Pre malé hybnosti máme $H = c\sqrt{m^2c^2 + p^2} = mc^2\sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2} \approx$
$\approx mc^2\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{p}{mc}\right)^2\right] = \frac{p^2}{2m} + mc^2 =$ kinetická energia $+$ pokojová energia.