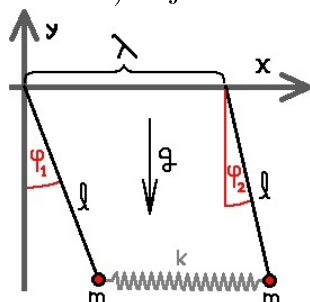


Domáca Úloha na body za semester # 7

odovzdať (riešenie poslať na e-mail) najneskôr vo štvrtok 26. novembra 2020



Na obrázku sú dve identické rovinné kyvadlá s hmotnosťami m a dĺžkami závesov l . Kyvadlá sú zavesené vo vzájomnej vzdialenosti λ a sú spojené pružinou tuhosti k s pokojovou dĺžkou tiež λ . Pôsobí na ne aj tiažové zrýchlenie g . Celková potenciálna energia je potom

$$U = \frac{1}{2}k \left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} - \lambda \right)^2 + mgy_1 + mgy_2,$$

kde x_1, y_1, x_2 a y_2 sú súradnice dvoch hmotných bodov s hmotnosťami m v rovine x, y .

- [0.25 b]** Zaveďte zovšeobecnené súradnice φ_1 a φ_2 tak ako na obrázku ($x_1 = l \sin \varphi_1, y_1 = -l \cos \varphi_1, x_2 = \lambda + l \sin \varphi_2, y_2 = -l \cos \varphi_2$) a nájdite kinetickú energiu v maticovom zápise,

$$T = \frac{1}{2} (\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix}.$$

- Položte $\lambda = 0$ a príklad riešte ďalej už len pre tento špeciálny prípad.
- [0.25 b]** Ukážte, že pre $\lambda = 0$ sa potenciálna energia dá v zovšeobecnovaných súradniciach φ_1 a φ_2 zapísať ako

$$U = 2kl^2 \sin^2 \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} - mgl (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2).$$

- [0.25 b]** Vypočítajte prvé partiálne derivácie potenciálnej energie $\frac{\partial U}{\partial \varphi_1}$ a $\frac{\partial U}{\partial \varphi_2}$ a overte, že pre polohu $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ je splnená nutná podmienka minima potenciálnej energie.
- [0.5 b]** Nájdite rozvoj potenciálnej energie do druhého rádu vo φ_1 a φ_2 v maticovom zápise,

$$U = \text{konštanta na ktorej nezáleží} + \frac{1}{2} (\varphi_1, \varphi_2) \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}.$$

- [0.5 b]** Nájdite frekvencie malých kmitov sústavy. Malo by vyjsť $\omega = \sqrt{g/l}$ a $\omega = \sqrt{g/l + 2k/m}$.
- [0.5 b]** Nájdite módy prislúchajúce týmto frekvenciám a napíšte všeobecné riešenie pre časový vývoj uhlov $\varphi_1(t)$ a $\varphi_2(t)$.
- [0.25 b]** Popíšte alebo načrtnite ako vyzerá kmitanie v špeciálnom prípade, ak vďaka vhodnému výberu počiatočných podmienok do riešenia vstupuje iba jeden z dvoch módov. Urobte to pre oba nezávislé módy, ktoré ste našli.