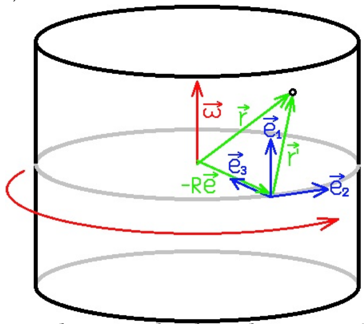
Domáca Úloha na body za semeter # 1

odovzdať (cez e-mail) najneskôr do piatka 3. decembra 2021, **9:50**



1. **[1 b]** Na obrázku je valcová plocha, ktorá v beztiaži rotuje okolo svojej osi uhlovou rýchlosťou $\vec{\omega}$. Zaveďme súradnice (x, y, z) vzhľadom na repér $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ spojený s valcovou plochou, ktoré by boli prirodzené pre ľudí žijúcich na vnútornej strane rotujúcej valcovej plochy, čiže vektor $\vec{e}_1$ smeruje pozdĺž osi valcovej plochy a vektor $\vec{e}_3$ smeruje „nahor" teda smerom do stredu valcovej plochy. Polohový vektor $\vec{r}$ rotujúci spolu s valcovou plochou a uhlovú rýchlosť $\vec{\omega}$ potom súradnicami (x, y, z) parametrizujeme ako
$$\vec{r} = -R\vec{e}_3 + \underbrace{x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3}_{\vec{r}'}, \qquad \vec{\omega} = \omega\vec{e}_1.$$
Ukážte, že pohybové rovnice pre telesá voľne padajúce v sústave s repérom $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sú
$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 0, \\ \ddot{y} &= 2\omega\dot{z} + \omega^2\, y, \\ \ddot{z} &= -2\omega\dot{y} + \omega^2(z - R). \end{aligned}$$

2. **[1 b]** Uvažujme Lagranžián
$$L[\cancel{t}, x, \dot{x}] = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{3}\varepsilon\frac{k}{R}x^3,$$
ktorý popisuje oscilátor, ktorý je (iba trochu) neharmonický, m je hmotnosť, k je konštanta rozmeru tuhosti pružiny [kg s^{-2}], R je konštanta rozmeru dĺžky a ε je malé bezrozmerné číslo. Úlohou je:

   (a) Ukázať, že po zberozmernení, $x \equiv Ry$, $t \equiv \sqrt{m/k}\tau$, pohybová rovnica odvodená z Lagranžiánu nadobudne tvar
   $$\frac{d^2y}{d\tau^2} + y + \varepsilon y^2 = 0.$$

   (b) Uvažovať funkciu $y(\tau)$ v tvare poruchového rozvoja $y(\tau) = y_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau) + \varepsilon^2 y_2(\tau) + \cdots$ a napísať pohybové rovnice pre y_0 až y_2,
   $$\frac{d^2y_0}{d\tau^2} + y_0 = 0, \quad \frac{d^2y_1}{d\tau^2} + y_1 = .?., \quad \frac{d^2y_2}{d\tau^2} + y_2 = .?.,$$
   (otázniky podoplňať výpočtom).

   (c) Riešenie rovnice pre y_0 je $y_0(\tau) = a_0\cos(\tau + \varphi_0)$, kde a_0 a φ_0 sú konštanty. Nájdite riešenie pre y_1. Skladá sa z homogénneho a partikulárneho riešenia, pričom homogénne riešenie je v rovnakom tvare ako riešenie pre y_0. Partikulárne riešenie hľadajte v tvare $\alpha + \beta\cos(2\tau + 2\varphi_0)$ a využite, že $\cos^2\vartheta = (1 + \cos 2\vartheta)/2$. Riešenie pre funkciu y_2 hľadať nemusíte.

KOMENTÁRE

A) Podľa pohybových rovníc z úlohy 1. je zrýchlenie telesa rovné

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\omega\dot{z} + \omega^2\ y \\ -2\omega\dot{y} + \omega^2(z-R) \end{pmatrix}.$$

Ak sa teleso nachádza veľmi blízko k stredu súradnicovej sústavy s repérom $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, teda $x, y, z \ll R$, a jeho rýchlosť je veľmi malá v porovnaní s rýchlosťou rotácie, čiže $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \ll \omega R$, tak zrýchlenie telesa je približne

$$\vec{a} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega^2 R \end{pmatrix} = -\omega^2 R\vec{e}_3,$$

Takže dominantná zložka sily pôsobiacej na teleso je v smere oproti osi z danej vektorom $\vec{e}_3$ rovnako ako na povrchu Zeme.

B) Výpočet úlohy 2. z predchádzajúcej strany ukazuje, že poruchové riešenie pohybovej rovnice pre neharmonicý oscilátor je

$$\begin{aligned} x(t) &= \overbrace{Ra_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_0\right)}^{x_0(t)} + \\ &\quad + \varepsilon\Bigg[\overbrace{\underbrace{Ra_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_1\right)}_{\text{homogénne riešenie pre } y_1(\tau)} + \underbrace{.?. + .?. \cos\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}t + 2\varphi_0\right)}_{\text{partikulárne riešenie pre } y_1(\tau)}}^{x_1(t)}\Bigg] + \\ &\quad + \varepsilon^2 x_2(t) + \cdots \end{aligned}$$

Máme tu až štyri konštanty, a_0, φ_0, a_1 a φ_1, pričom počiatočné podmienky sú iba dve, $x(0)$ a $\dot{x}(0)$. V poruchovom výpočte, $x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \cdots$, však rozdeľujeme do jednotlivých rádov poruchového výpočtu aj počiatočné podmienky. Riešenie v nultom ráde spĺňa zadané počiatočné podmienky,

$$\begin{aligned} x_0(0) &= x(0), \\ \dot{x}_0(0) &= \dot{x}(0), \end{aligned}$$

a v ostatných rádoch poruchového výpočtu sú počiatočné podmienky nulové,

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 0, \\ \dot{x}_1(0) &= 0, \\ x_2(0) &= 0, \\ \dot{x}_2(0) &= 0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Nakoniec teda máme rovnaký počet počiatočných podmienok ako konštánt, ktoré chceme špecifikovať, a celkové riešenie $x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \cdots$ spĺňa počiatočné podmienky, ktoré má spĺňať.