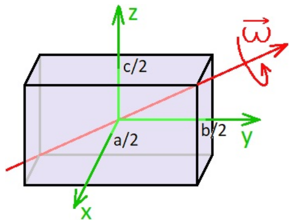
Domáca Úloha na body za semeter # 2

odovzdať (cez e-mail) najneskôr do piatka 10. decembra 2021, **9:50**



obr. č. 1

obr. č. 2

1. **[1 b]** Na prvom obrázku je homogénny kváder s hmotnosťou M a s dĺžkami hrán a, b a c, teda v telesových súradniciach x, y, z ide o oblasť danú podmienkami $-\dfrac{a}{2} \leq x \leq \dfrac{a}{2}$, $-\dfrac{b}{2} \leq y \leq \dfrac{b}{2}$, $-\dfrac{c}{2} \leq z \leq \dfrac{c}{2}$, v ktorej je hustota ρ konštantná. ($M = \rho abc$.) Kváder je pevne uchytený tak, aby sa otáčal okolo osi prechádzajúcej jeho najdlhšou uhlopriečkou. (**Ak by jeho os rotácie nebola pevne uchytená, dochádzalo by k precesii!**[1]) Otáča sa uhlovou rýchlosťou ω, takže vektor uhlovej rýchlosti v telesových súradniciach je

$$\vec{\omega} \equiv \omega_i \vec{e}_i \equiv \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \frac{\omega}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \text{normovanie: } \sqrt{\vec{\omega}^2} = \omega$$

   (a) Nájdite tenzor zotrvačnosti kvádra I_{ij} v telesových súradniciach x, y, z (všetky komponenty matice, I_{xx}, I_{xy},...).

   (b) Overte, že kinetická energia kvádra rotujúceho s vyššie uvedenou uhlovou rýchlosťou vyjde

$$T_{\text{rot.}} = \frac{1}{12} M \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2+b^2+c^2} \omega^2.$$

2. **[1 b]** Tenká tyč s hmotnosťou m a dĺžkou l je položená na vodorovnú valcovú plochu s polomerom R (os tyče je kolmá na os valcovej plochy) tak, že v rovnovážnej polohe je tyč vo vodorovnej polohe a jej ťažisko sa nachádza v mieste dotyku s valcovou plochou. Všeobecná poloha tyče je znázornená na druhom obrázku. Za zovšeobecnenú súradnicu si vyberme uhol φ, ktorý meria náklon tyče. (Druhá časť obrázku je vizuálnou pomôckou pri hľadaní závislosti polohy ťažiska tyče od súradnice φ.) Úlohou je:

[1] Pretože vektor uhlovej rýchlosti nie je vlastným vektorom tenzora zotrvačnosti, čiže $L_i = I_{ij}\omega_j \neq \lambda\omega_i$, a moment hybnosti trčí v telesových súradniciach iným smerom ako os rotácie daná vektorom $\vec{\omega}$, teda $\vec{L}$ sa točí spolu s telesom a nezachováva sa. Nezachovávanie momentu hybnosti $\vec{L}$ znamená, že na teleso pôsobia sily, ktoré ho nútia konať zadaný pohyb.

(a) Vypočítať moment zotrvačnosti tyče (rotujúcej okolo svojho ťažiska s osou rotácie kolmou na tyč) $I_{\text{tyč}}$.

(b) Využiť, že kinetická energia tyče je súčtom kinetickej energie za pohyb ťažiska, $T_{\text{ťaž.}} = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_{\text{ťaž.}}^2 + \dot{y}_{\text{ťaž.}}^2 \right)$, a rotačnej energie danej momentom zotrvačnosti tyče, $T_{\text{rot.}} = \frac{1}{2} I_{\text{tyč}} \dot{\varphi}^2$, a potenciálna energia je daná výškou ťažiska, $U = mg \cdot \text{výška ťažiska}$, a overiť, že Lagranžián je

$$L[\cancel{t}, \varphi, \dot{\varphi}] = \frac{1}{2} m \left(R^2 \varphi^2 + \frac{1}{12} l^2 \right) \dot{\varphi}^2 - \text{konšt.} - mgR \left(\cos\varphi + \varphi \sin\varphi \right),$$

kde konštanta je daná výberom nulovej hladiny potenciálnej energie a nezáleží na nej.

(c) Nájdite frekvenciu **malých kmitov** tyče okolo jej rovnovážnej polohy $\varphi = 0$. (Postup z teórie pre malé kmity, ale teraz sú tu iba 1×1 matice, keďže stupeň voľnosti je iba jeden.)