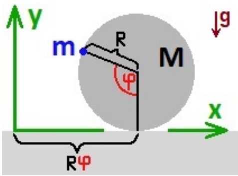
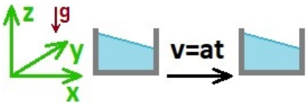
Domáca Úloha na body za semeter # 10

odovzdať (riešenie poslať na e-mail) najneskôr v stredu 23. decembra 2020



↖ obr. č. 1



↖ obr. č. 2

1. **[1,5 b]** Na prvom obrázku je homogénny valec s hmotnosťou M a polomerom R, ktorý sa môže kotúľať po vodorovnej rovine. Na kraji valca je pripevnený hmotný bod s hmotnosťou m. Ak si zavedieme zovšeobnecnenú súradnicu φ ako na obrázku, tak poloha ťažiska valca je $x_{\text{ťaž.}} = R\varphi$, $y_{\text{ťaž.}} = R$, a poloha hmotného bodu s hmotnosťou m je $x_{\text{h.b.}} = x_{\text{ťaž.}} - R\sin\varphi$, $y_{\text{h.b.}} = y_{\text{ťaž.}} - R\cos\varphi$. Kinetická enegia sústavy je daná translačným pohybom ťažiska valca, $\frac{1}{2}M\left(\dot{x}_{\text{ťaž.}}^2 + \dot{y}_{\text{ťaž.}}^2\right)$, rotačným pohybom valca, $\frac{1}{2}I_{\text{valec}}\dot{\varphi}^2$, a pohybom hmotného bodu s hmotnosťou m, $\frac{1}{2}m\left(\dot{x}_{\text{h.b.}}^2 + \dot{y}_{\text{h.b.}}^2\right)$, a potenciálna energia je daná homogénnym tiažovým zrýchlením g. Úlohou je:

   (a) **[0,25 b]** Vypočítať moment zotrvačnosti valca I_{valec}.

   (b) **[0,5 b]** Nájsť Lagranžián a odvodiť pohybovú rovnicu.

   (c) **[0,5 b]** Odvodenú pohybovú rovnicu zbezrozmerniť,
   $$\tau = \sqrt{\frac{g}{R}}t, \quad \varepsilon = \frac{m}{M},$$
   malo by vyjsť
   $$\left[\frac{3}{2} + 2\varepsilon\left(1 - \cos\varphi\right)\right]\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \varepsilon\left(\sin\varphi\right)\left[1 + \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2\right] = 0,$$
   a riešiť ju poruchovo do prvého rádu v parametri ε.

   (d) **[0,25 b]** Ukázať, že riešenie spĺňajúce počiatočné podmienky,
   $$\varphi(0) = A, \quad \dot{\varphi}(0) = \sqrt{\frac{g}{R}}B,$$
   je[1]
   $$\begin{aligned}\varphi(t) &= A + \sqrt{\frac{g}{R}}Bt + \\ &\quad + \frac{m}{M}\frac{2}{3}\frac{1+B^2}{B^2}\left[\sin\left(A + \sqrt{\frac{g}{R}}Bt\right) - \right. \\ &\qquad \left. - \left(\sin A\right) - \left(\cos A\right)\sqrt{\frac{g}{R}}Bt\right] +\end{aligned}$$

[1] Vzdialenosť, o ktorú sa valec prekotúľa, resp. poloha ťažiska valca je $R\varphi(t)$, a môže nadobúdať akékoľvek číselné hodnoty, takže ani uhol φ nie je žiadúce obmedzovať na interval $\langle 0, 2\pi)$. Poloha $\varphi = 0$ sa líši od polohy $\varphi = 2\pi$.

$$+ \text{konštanta rádu} \left(\frac{m}{M}\right)^2 \cdot \text{nejaká funkcia}\,(t)\,.$$

2. **[1 b]** Na druhom obrázku je nádoba s nestlačiteľnou kvapalinou ($\rho =$ $=$ konšt.), ktorá je v smere osi x urýchľovaná konštantným zrýchlením a tak, že v čase $t = 0$ nádoba stála. Predpokladajme, že kvapalina sa hýbe spolu s nádobou ako tuhé teleso, teda vektorové pole rýchlosti tečenia kvapaliny je $\vec{v} = at\vec{e}_x$. Riešením Navierovej–Stokesovej rovnice,
$$\big(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\big)\vec{v} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{g} + \frac{\eta}{\rho}\left(\vec{\nabla}\big(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\big) + \triangle\vec{v}\right), \quad \vec{g} = -g\vec{e}_z,$$
   (a) **[0,75 b]** nájdite tlak p ako funkciu priestorových súradníc a času.
   (b) **[0,25 b]** Overte, že z podmienky nulového tlaku je hladina kvapaliny daná vzťahom
   $$z = -\frac{a}{g}x + f(t),$$
   kde $f(t)$ je funkcia času, ktorú možno špecifikovať zadaním objemu kvapaliny v nádobe.[2] Kvapalina sa teda správa ako keby bola v nádobe, ktorá stojí, ale je naklonená,[3] pričom uhol náklonu α je daný vzťahom tg $\alpha = \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| = \frac{a}{g}$.

---

[2] Ak má podstava nádoby tvar štvorca s dĺžkou hrany l a je v rovine $z = 0$, v čase $t = 0$ nádoba stála a jej okraj bol v polohe $x = 0$, a hladina kvapaliny je naklonená iba tak, aby kvapalina z nádoby ani nevytekala a aby ani časť dna nádoby nevytŕčala nad hladinu, tak objem kvapaliny v nádobe sa dá počítať ako

$$V = \int\limits_{\frac{1}{2}at^2}^{\frac{1}{2}at^2+l} dx \int\limits_0^l dy \int\limits_0^{-\frac{a}{g}x+f(t)} dz,$$

čo funkciu $f(t)$ špecifikuje na tvar

$$f(t) = \frac{V}{l^2} + \frac{a}{2g}\left(l + at^2\right).$$

[3] V sústave spojenej s nádobou sa hydrodynamika redukuje na hydrostatiku, ale pôsobí v nej zotrvačná sila, ktorá „nakláňa" hladinu.